

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**ANALISI DI SISTEMI FERMIONICI
MEDIANTE VARIABILI DI GRASSMANN**

Relatore: Prof.
Prof.
Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Claudio Mastromarino

II Sessione
2018/2019

Abstract

Il presente elaborato è finalizzato ad esporre come alcuni sistemi fermionici possano essere descritti, anche a livello classico, mediante l'utilizzo di un nuovo sistema di variabili, dette *Variabili di Grassmann*. Queste variabili godono di proprietà peculiari che le rendono uno strumento efficace per ricavare informazioni e caratteristiche fisiche del sistema in esame.

Si introduce la distinzione tra bosoni e fermioni e si dà un breve accenno al Principio di esclusione di Pauli. Successivamente, mediante un breve excursus storico sulla vita di Hermann Günther Grassmann, si chiarisce come e quando è nata l'algebra esterna (algebra di Grassmann) ed i suoi successivi sviluppi in ambito matematico e fisico.

L'elaborato inizia presentando le definizioni generali e le principali proprietà delle *Variabili di Grassmann*. Attraverso il loro utilizzo si costruisce un formalismo hamiltoniano utile allo studio della dinamica di alcuni sistemi fermionici e si verifica in maniera diretta come le proprietà di tali variabili facciano emergere, sia a livello classico sia a livello quantistico, il *Principio di esclusione di Pauli*.

Indice

Introduzione	1
1 Variabili di Grassmann	9
1.1 Introduzione all'algebra di Grassmann	9
1.2 Variabili reali e complesse	14
1.3 Operatori sui numeri di Grassmann	15
1.4 Rappresentazione matriciale e Algebra di Clifford	18
2 Sistemi fermionici	21
2.1 Formalismo Hamiltoniano e quantizzazione canonica	21
2.2 Oscillatore armonico di fermioni	24
2.3 Stati coerenti	28
2.4 Gradi di libertà multipli	30
Conclusioni	34
Appendice	35
Bibliografia	37

Introduzione

Il Modello Standard

La fisica delle particelle elementari si occupa della ricerca e dello studio sulla struttura microscopica della materia cercando di individuarne i costituenti ultimi e indivisibili e le loro interazioni. Tale area di ricerca ha avuto i suoi maggiori sviluppi durante gli ultimi 100 anni e la gran parte di questi studi recenti è sintetizzata in un corpo di teorie noto come *Modello Standard del Microcosmo*, o semplicemente *Modello Standard*.

Questo modello si pone l'obiettivo di studiare la struttura fondamentale della materia, formata appunto dalle così dette particelle elementari ed analizzare le loro interazioni.

Per fare ciò, nel corso del XX secolo, è stato sviluppato un linguaggio teorico in grado di descrivere la complessa fenomenologia della fisica delle particelle, oggi noto come *Teoria di campo quantizzato*. Questa teoria nasce dalla necessità di un linguaggio fisico-matematico in grado di incorporare sia la *relatività ristretta*, in quanto le particelle si muovono a velocità prossime a quelle della luce, sia la *Meccanica Quantistica*, data la taglia subatomica delle particelle.

La *Teoria di campo quantizzato* deve essere anche in grado di descrivere le varie interazioni tra le particelle fondamentali, dunque deve essere basata, come richiama il nome stesso, sull'idea di campo; in particolare tali teorie eliminano la netta suddivisione tra campo e materia, che veniva a definirsi in ambito classico, infatti si sviluppa l'idea che esiste un solo ente fisico fondamentale, detto **campo quantizzato**, che può essere eventualmente dotato di massa, di carica, di momento angolare e delle altre proprietà tipiche della materia (in senso classico). È dunque proprio il campo che può essere perturbato così da variare il proprio stato, ovvero variare la propria energia e/o quantità di moto, ma a differenza della teoria classica, tali variazioni possono avvenire solo per scambi di quantità discrete dette *quanti del campo* che si manifestano nei rivelatori con determinati segnali tipici del campo che li ha emanati e sono proprio questi segnali ad essere chiamati **particelle**.

Il modello così costruito, ad oggi è in grado di descrivere tre delle quattro interazioni fondamentali : l'interazione forte, l'interazione elettromagnetica e l'interazione debole, non includendo l'interazione gravitazionale (dato che ad oggi non si dispone di una teoria della gravitazione in grado di incorporare la meccanica quantistica).

Particelle elementari del MS

In accordo con le teorie del modello standard, i costituenti fondamentali della materia possono essere descritti attraverso 12 campi suddivisi, come si evince dalla Figura 1, in due famiglie: i leptoni ed i quark. Tale distinzione è fatta su basi dinamiche, ovvero in base a quali delle tre interazioni fondamentali sono soggetti i vari campi.

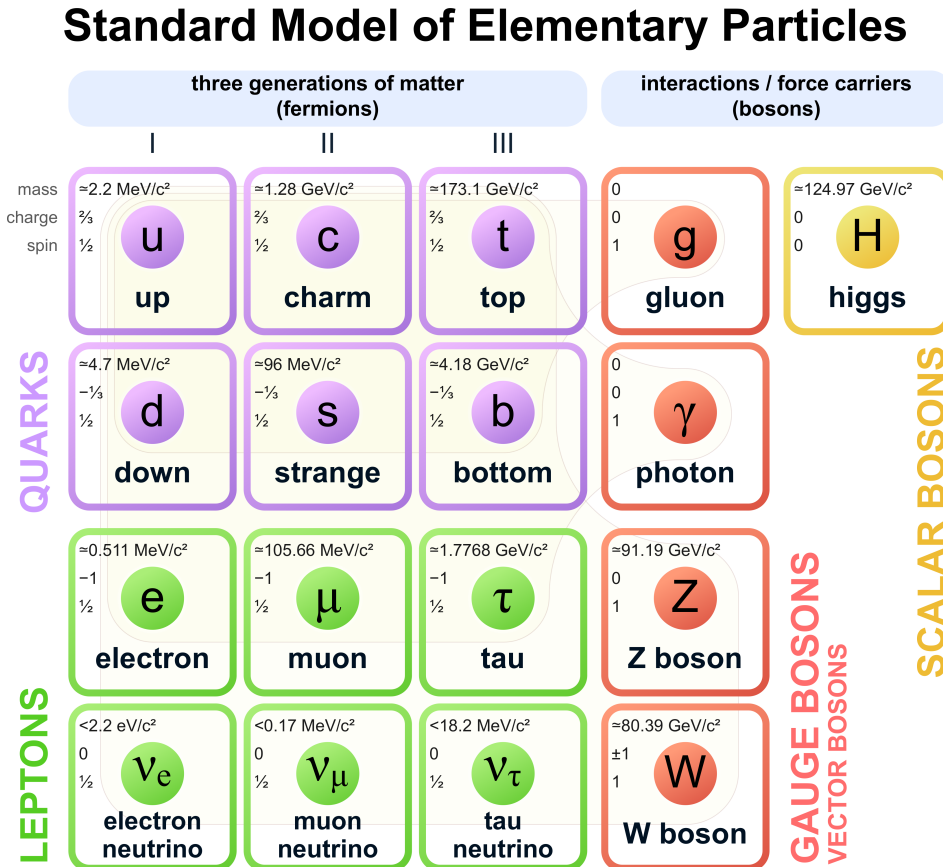


Figura 1: Campi fondamentali e mediatori delle forze nel MS

I *quark* sono soggetti alle interazioni forte, elettromagnetica e debole, mentre i *leptoni* sono soggetti all'interazione elettromagnetica e a quella debole, ma non all'interazione forte. Questi 12 campi sono caratterizzati dal fatto di avere tutti spin pari ad $\frac{1}{2}$, dunque hanno spin semi-intero. Da ciò consegue che le proprietà collettive dei loro quanti (particelle del Modello Standard) sono sempre descritte dalla statistica di Fermi-Dirac, sono cioè oggetti chiamati **fermioni** descritti da una funzione d'onda completamente antisimmetrica e dunque obbediscono al *Principio di esclusione di Pauli*, che asserisce che due

fermioni identici (con numeri quantici identici) non possono occupare simultaneamente lo stesso stato quantico.

Nota Nel MS, ad ognuno di questi 12 fermioni è associato un *antifermione* che ha la proprietà di avere stessa massa e stesso spin del fermione a cui è associato, ma ha cariche interne opposte.

Come si evince dalla Figura 1, oltre alle 12 particelle fondamentali, ci sono altre 4 particelle dette **bosoni vettore**. Queste particelle possono essere associate alle 3 forze fondamentali che il MS riesce a descrivere e in particolare rappresentano le particelle mediatrici che vengono scambiate durante le interazioni. Sono caratterizzate dal fatto di avere spin pari a 1, hanno cioè spin intero, ne consegue che in questo caso le loro proprietà saranno descritte mediante la statistica di Bose-Einstein, sono cioè oggetti chiamati **bosoni**, descritti da una funzione d'onda simmetrica.

In figura è presente anche un'ulteriore bosone, in questo caso scalare, detto **Bosone di Higgs**, necessario per giustificare alcune inconsistenze nell'apparato teorico del Modello Standard. Tale bosone venne inizialmente teorizzato negli anni '60 e definito come la particella associata al corrispettivo **Campo di Higgs**, che secondo la teoria permea tutto l'universo conferendo la massa alle particelle elementari. Venne successivamente rilevato per la prima volta nel 2012 negli esperimenti ATLAS e CMS, condotti con l'acceleratore LHC del CERN. [1].

Fermioni e Principio di esclusione di Pauli

Il *Principio di esclusione di Pauli* è un principio fondamentale della meccanica quantistica che afferma che due o più fermioni identici non possono occupare simultaneamente lo stesso stato quantico.

Tale principio fu formulato dal fisico austriaco **Wolfgang Pauli** nel 1925 e inizialmente lo introdusse per gli elettroni, successivamente, con il *Teorema spin-statistica*, fu esteso a tutti i fermioni. Pauli stava cercando di spiegare i risultati sperimentali dell'effetto Zeeman nella spettroscopia atomica e trovò una traccia essenziale in un articolo del 1924 di E.C.Stoner, che sottolineava che, per un dato valore del numero principale n , il numero di livelli energetici non degeneri di un singolo elettrone negli spettri di un metallo alcalino immerso in un campo magnetico esterno, era uguale al numero di elettroni presenti nella shell completa dei gas nobili con lo stesso valore di n . Grazie a questo indizio, Pauli realizzò che gli elettroni nel distribuirsi su di una shell atomica seguono la regola di disporsi uno per ogni stato, dove gli stati dovevano essere definiti con quattro numeri quantici; per questo Pauli introdusse un quarto numero quantico che, per l'elettrone, poteva assumere solo due valori : il numero quantico di spin.

Nel caso degli elettroni atomici, il principio sostiene che è impossibile per due elettroni di un atomo multi-elettronico avere lo stesso valore dei quattro numeri quantici (n, l, m_l, m_s) , dove n è il numero quantico principale, l rappresenta il numero quantico azimutale, m_l è il numero quantico magnetico e m_s è il numero quantico di spin. Allora se due elettroni occupano simultaneamente lo stesso orbitale atomico avranno gli stessi numeri quantici (n, l, m_l) , ma per il *Principio di Pauli* devono avere necessariamente il numero quantico di spin differente.

Diversamente dai fermioni, le particelle con spin intero (bosoni), non sono soggette a tale principio e quindi un qualsiasi numero di bosoni identici può occupare lo stesso stato quantico.

Il principio di esclusione di Pauli si traduce matematicamente nel fatto che i bosoni seguono la statistica di Bose-Einstein mentre i fermioni la statistica di Fermi-Dirac. Le conseguenze sono che bosoni e fermioni presentano proprietà diverse di simmetria sotto lo scambio di due particelle. Un sistema composto di particelle identiche bosoniche si trova sempre in uno stato completamente simmetrico sotto lo scambio di due particelle,



Figura 2: Wolfgang Pauli

mentre un sistema composto di fermioni identici, al contrario, si trova sempre in uno stato anti-simmetrico sotto lo scambio di due fermioni. La funzione d'onda totale di un sistema costituito da fermioni identici è perciò completamente antisimmetrica e cambia segno sotto lo scambio di due fermioni qualsiasi.

Per esempio, supponiamo di avere due elettroni, che identifichiamo con 1 e 2, che si trovano rispettivamente negli stati A e B . La funzione d'onda di questo sistema definisce la probabilità che l'elettrone 1 si trovi nello stato A e l'elettrone 2 nello stato B ; sarà allora il prodotto delle probabilità dei singoli elettroni di trovarsi nei rispettivi stati.

$$\Upsilon = \Upsilon_1(A)\Upsilon_2(B)$$

In realtà tale funzione d'onda non è accettabile dato che i due elettroni sono identici e indistinguibili dunque la probabilità che l'elettrone 1 sia in A e il 2 in B deve essere la stessa che l'1 sia in B e il 2 in A . Dunque non è possibile determinare quale dei due elettroni si trovi in uno dei due stati. Allora è necessario prendere una combinazione lineare delle due possibilità.

$$\Upsilon_{tot} = \Upsilon_1(A)\Upsilon_2(B) \pm \Upsilon_1(B)\Upsilon_2(A)$$

Ma i due elettroni, essendo fermioni, devono essere descritti da una funzione d'onda completamente antisimmetrica, dunque

$$\Upsilon_{tot} = \Upsilon_1(A)\Upsilon_2(B) - \Upsilon_1(B)\Upsilon_2(A)$$

Il Principio di Pauli emerge proprio dall'antisimmetria di questa funzione d'onda, infatti se gli stati A e B descrivono lo stesso stato, la funzione d'onda diventa identicamente nulla, di conseguenza la probabilità di trovare due elettroni nello stesso stato è identicamente nulla.

Algebra di Grassmann

L'*Algebra esterna*, anche detta *Algebra di Grassmann*, fu introdotta per la prima volta dal matematico e linguista tedesco Hermann Günther Grassmann nel suo trattato "*Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*" e comunemente chiamato "*Ausdehnungslehre*" che si traduce come "teoria dell'estensione" o "teoria delle grandezze estensive".

Biografia[2]: Hermann Günther Grassmann nacque nel 1809 a Stettino, dove trascorse la maggior parte della sua vita e morì nel 1877. Hermann decise di studiare teologia e nel 1827 andò a Berlino con suo fratello maggiore per studiare presso l'Università di Berlino. Frequentò i corsi di teologia, lingue classiche, filosofia e letteratura. Sebbene sembri che Hermann non abbia avuto alcuna istruzione universitaria formale in matematica, era questa la materia che lo interessava. Fu nel 1835 che iniziò ad insegnare matematica, fisica, tedesco, latino e religione in una scuola a Stettino. Nel 1844 Grassmann pubblicò il suo capolavoro comunemente chiamato "*Ausdehnungslehre*", in cui per la prima volta veniva definito il prodotto esterno, l'operazione chiave nella definizione dell'algebra esterna, oggi nota anche come algebra di Grassmann. Quando fu pubblicato, l'*Ausdehnungslehre* era un testo rivoluzionario, troppo avanti per i suoi tempi per poter essere apprezzato. Infatti Grassmann lo sottopose come tesi di laurea, ma Ernst Kummer rifiutò categoricamente tale lavoro. I metodi matematici di Grassmann impiegarono tempo ad essere adottati infatti fu nel 1898 con la monografia di A.N. Whitehead, intitolata "*Universal Algebra*", che si includeva la prima esposizione sistematica in inglese della teoria dell'estensione e dell'algebra esterna. Successivamente l'algebra di esterna ebbe un grande successo nello studio delle forme differenziali e nelle applicazioni di tali forme all'analisi e alla geometria, infatti anche la geometria differenziale fa uso dell'algebra esterna.



Figura 3: Hermann Günther Grassmann

Applicazioni dell'algebra esterna in fisica

Negli ultimi 50 anni, le teorie sull'algebra esterna, sviluppate da Grassmann, hanno iniziato ad avere successo anche in ambito della meccanica quantistica [4]. In particolare, tale successo è dovuto alle particolari proprietà dei generatori dell'algebra, detti appunto **Variabili di Grassmann**.

Come spiegato in maggior dettaglio nel presente elaborato, tali generatori hanno la proprietà di essere anticommutanti e dunque possono essere utilizzati per descrivere, già a livello classico, alcuni sistemi fisici che, sotto quantizzazione, riescono a riprodurre una teoria generale quantistica per l'algebra degli operatori fermionici. Tale teoria è anche chiamata *meccanica pseudoclassica* perché si può verificare che rappresenta un limite classico (i.e. $\hbar \rightarrow 0$) della teoria quantistica sull'algebra degli operatori di creazione e distruzione.

L'idea di base è di considerare gli elementi dell'algebra di Grassmann come variabili dinamiche classiche, ovvero funzioni dello spazio delle fasi. In questo modo si possono definire tutti gli elementi di base della meccanica classica, come il funzionale d'azione e l'hamiltoniana in funzione di tali variabili. Una volta costruito l'assetto hamiltoniano del sistema, si procede alla quantizzazione che si basa essenzialmente sull'utilizzo delle relazioni di anticommutazione relative agli operatori lineari associati alle variabili di Grassmann. Questo metodo è dunque chiamato *Quantizzazione con variabili anticommutanti* [5].

L'efficacia di tale metodo risiede nella sua applicabilità in diversi contesti che hanno portato a nuovi sviluppi sulla teoria quantistica. Può essere utilizzato per parametrizzare i gradi di libertà relativi allo spin e descrivere particelle, sia in ambito non-relativistico che in quello relativistico. Nel caso relativistico ci si serve di un'algebra di Grassmann 5-dimensionale, in cui 4 coordinate identificano la posizione della particella nello spazio tempo, mentre l'ultima coordinata tiene conto dei gradi di libertà relativi allo spin. L'utilizzo delle variabili di Grassmann viene anche applicato in alcune teorie sullo studio delle interazioni del campo gravitazionale con la materia, o ancora per sistemi meccanici supersimmetrici [3].

Scopo della tesi

In questo elaborato viene presentato in dettaglio l'utilizzo delle variabili di Grassmann per la descrizione dell'algebra degli operatori di creazione e distruzione fermionici, presentando anche una verifica diretta di come tali variabili, sia a livello classico che sotto quantizzazione, riproducono gradi di libertà che soddisfano il *Principio di esclusione di Pauli*.

Il Capitolo 1, dopo un breve accenno sull'algebra esterna, è improntato sulla presentazione dei generatori di tale algebra: le *Variabili di Grassmann*. Si introduce una definizione algebrica di tali generatori e si analizzano le principali proprietà utili per la descrizione di sistemi fermionici [3]. Seguono le definizioni degli operatori lineari di derivazione e di integrazione su questo nuovo sistema di variabili [4], analizzando le relazioni che scaturiscono dalle proprietà di anticommutazione delle variabili stesse. Il capitolo si conclude con un breve accenno alla rappresentazione matriciale degli elementi dell'algebra di Grassmann, confluendo nell'introduzione dell'algebra di Clifford [6].

Il Capitolo 2 si basa sull'utilizzo delle relazioni presentate nel primo capitolo, per descrivere la dinamica di alcuni sistemi fermionici. Inizialmente si costruisce la struttura hamiltoniana di un sistema descritto dalle variabili di Grassmann e si analizza come tale struttura si comporta sotto quantizzazione [3] [7].

Segue il corpo centrale dell'elaborato in cui si studia il comportamento di un oscillatore armonico di fermioni seguendo l'assetto della meccanica *pseudoclassica*. In questo caso si verifica come la quantizzazione di tale sistema produce un'algebra di operatori fermionici che agiscono su uno spazio di Hilbert 2-dimensionale, dimostrando, attraverso l'azione di questi operatori, che per tale sistema vale il *Principio di Pauli*. Il capitolo si conclude con la naturale estensione all'analisi di un sistema fermionico con gradi di libertà multipli [8].

Capitolo 1

Variabili di Grassmann

In questo capitolo, si dà una breve introduzione all'*Algebra di Grassmann* e ad alcune sue interessanti proprietà. Successivamente si introducono i generatori dell'algebra, detti *Variabili di Grassmann* che ricopriranno un ruolo fondamentale nel capitolo. Verranno infatti illustrate le principali proprietà di tali variabili e le definizioni di alcuni operatori lineari che operano su di esse. Il capitolo si conclude con un accenno all'*Algebra di Clifford* utile per avere una rappresentazione matriciale degli elementi dell'*Algebra di Grassmann* e per il loro comportamento sotto quantizzazione.

1.1 Introduzione all'algebra di Grassmann

La base su cui si struttura l'*Algebra di Grassmann* è la definizione di *Prodotto Esterno*.

Definizione 1.1.1

Dato uno spazio vettoriale \mathbf{V} , siano due vettori $u, v \in \mathbf{V}$, allora il loro prodotto esterno, denotato da $u \wedge v$, è detto **bivettore** e vive in uno spazio chiamato *seconda potenza esterna*, uno spazio vettoriale $\Lambda^2 V$ distinto da quello originale a cui appartenevano i due vettori.

In questo caso il prodotto esterno $u \wedge v$ può essere interpretato come l'area del parallelepipedo avente lati u e v .

Più in generale, il prodotto esterno di un qualsiasi numero k di vettori appartenenti ad uno spazio vettoriale \mathbf{V} , può essere definito ed è detto *k-blade*. Esso vive in uno spazio $\Lambda^k V$ detto *kth potenza esterna*. Anche in questo caso il modulo del prodotto esterno di k vettori sarà l'ipervolume del paralleletoipo k -dimensionale generato da quei vettori. Dunque in generale il prodotto esterno di vettori è una costruzione algebrica usata in geometria per studiare aree, volumi ed i loro analoghi di dimensione superiore.

Proprietà

Sia V spazio vettoriale su un campo K , allora il prodotto esterno gode delle seguenti proprietà :

- **Anticommutativo**

$$\forall u, v \in V \quad u \wedge v = -(v \wedge u)$$

e in particolare $u \wedge u = 0$

- **Associativo**

$$\forall u, v, w \in V \quad (u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$$

- se v_1, \dots, v_k è una base per V allora $v_i \wedge v_j$ con $i < j$ è una base per $\Lambda^2 V$
- sia $u \in V$ un vettore non nullo, allora $u \wedge v = 0$ se e solo se $v = \lambda u$ per qualche scalare λ .

Nota Si possono definire proprietà analoghe anche per k -blades con $k > 2$.

Algebra di Grassmann

L'algebra esterna o *algebra di Grassmann* è un sistema algebrico il cui prodotto è proprio il prodotto esterno. Tale algebra contiene non solo i k -blades, detti anche "elementi semplici dell'algebra", ma anche le loro somme detti k -vettori. Il prodotto esterno può essere esteso a tutta l'algebra, pertanto si possono moltiplicare tra loro due o più elementi dell'algebra stessa; allora fornita di questo prodotto, si dice che l'*algebra di Grassmann* è un'algebra associativa, intendendo che dati 3 elementi qualsiasi dell'algebra α, β, γ vale la relazione

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

Si dice che un k -vettore ha grado k se esso è formato da una somma di prodotti di k vettori. Inoltre in tale algebra è anche possibile moltiplicare tra loro elementi con grado diverso, in questo caso il grado dell'elemento finale sarà dato dalla somma dei gradi degli elementi iniziali, ecco perchè l'*algebra di Grassmann* è un'algebra graduata, ovvero

$$\Lambda^k \wedge \Lambda^p \subset \Lambda^{k+p}$$

La definizione dell'algebra esterna ha senso non solo per gli spazi vettoriali geometrici, ma anche per altri tipi di oggetti come campi o funzioni vettoriali. In generale, l'algebra esterna può essere definita su un anello commutativo e per altre strutture di interesse in algebra astratta. È una di queste costruzioni più generali in cui l'algebra esterna trova una delle sue applicazioni più importanti, dove appare come l'algebra delle forme differenziali che è fondamentale nelle aree che usano la geometria differenziale. L'algebra esterna ha anche molte proprietà algebriche che la rendono un utile strumento per

l'algebra stessa. Possiamo dare una definizione formale dell'*algebra di Grassmann* introducendo i suoi generatori detti **Variabili di Grassmann**.

Definizione 1.1.2

Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale complesso n -dimensionale. Siano θ_i con $i = 1, \dots, n$ i vettori di base di tale spazio. Allora l'*algebra di Grassmann* \mathfrak{G}_n o algebra esterna di \mathbf{V} è definita

$$\mathfrak{G}_n = \mathbb{C} \oplus V \oplus (V \wedge V) \oplus \dots \oplus \overbrace{(V \wedge V \wedge \dots \wedge V)}^{n \text{ volte}}$$

ovvero

$$\mathfrak{G}_n = \mathbb{C} \oplus \Lambda^1 V \oplus \Lambda^2 V \oplus \dots \oplus \Lambda^n V$$

I vettori di base $\theta_1, \dots, \theta_n$ sono proprio i generatori dell'algebra esterna, detti variabili di Grassmann. In realtà tali generatori non sono vere e proprie variabili, ma sono elementi di base di un'*algebra unitaria*, ovvero un'algebra Λ per cui esiste un elemento identità I tale che $I\alpha = \alpha = \alpha I \quad \forall \alpha \in \Lambda$. L'uso del termine *variabili* può essere ricondotto al loro primo utilizzo, infatti sono servite la prima volta per definire degli integrali in cui le variabili di integrazione erano proprio tali generatori e così, con un abuso di linguaggio, oggi vengono ancora chiamate *Variabili di Grassmann*.

In generale, tali "variabili" sono i vettori di base di uno spazio vettoriale (n -dimensionale, dove n può essere anche infinito) e formano un'algebra esterna su di un campo \mathbf{K} , dove tale campo è solitamente il campo dei numeri complessi.

I generatori dell'algebra esterna godono di un'importante proprietà : sono tra loro anti-commutanti, cioè soddisfano la seguente relazione

$$\theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \tag{1.1}$$

o, equivalentemente, in termini dell'anti-commutatore

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0$$

Dalla proprietà (1.1) si può verificare facilmente che il quadrato di tali generatori è sempre nullo

$$\theta_i^2 = 0 \quad \forall i \quad \text{dato che} \quad \theta_i \theta_i = -\theta_i \theta_i \tag{1.2}$$

Possiamo moltiplicare tali generatori ed il loro prodotto per numeri reali o complessi formando polinomi che sono utilizzati per definire funzioni delle variabili di Grassmann, dette **Numeri di Grassmann**.

Definizione 1.1.3

Un *Numero di Grassmann* è un elemento appartenente all'algebra esterna applicata al

campo dei numeri complessi. Un generico numero di Grassmann $f \in \mathfrak{G}_n$ può essere scritto come :

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{\nu=0}^n \sum_i f_\nu^{i_1, \dots, i_\nu} \theta_{i_1} \theta_{i_2} \dots \theta_{i_\nu} \quad (1.3)$$

dove è stato ommesso il simbolo \wedge di prodotto esterno. In questa definizione i $f_\nu^{\{i\}}$ sono numeri (reali o complessi) e si assume che siano antisimmetrici nell' indice $\{i\}$. La denominazione di "numero" deriva dal fatto che si comportano similmente ai numeri ordinari: possono essere sommati, moltiplicati e divisi; si comportano quasi come un *campo*.

Per esempio, per $n = 1$, avremo un'algebra 1-dimensionale, dunque avremo un unico generatore ed una funzione generica sarà data da

$$f(\theta) = f_0 + f_1 \theta$$

dove f_0 e f_1 possono essere reali o complessi.

Analogamente, per $n = 2$, avremo un algebra 2-dimensionale, avremo allora due generatori θ_1 e θ_2 ed una funzione generica sarà data da

$$f(\theta_1, \theta_2) = f_0 + f_1 \theta_1 + f_2 \theta_2 + f_3 \theta_1 \theta_2 \quad (1.4)$$

Nota In quest'ultimo caso il termine $\theta_2 \theta_1$ non è stato scritto, infatti esso non è indipendente dagli altri termini dato che i due generatori sono anti-commutanti e $\theta_2 \theta_1 = -\theta_1 \theta_2$.

Parità di Grassmann

Definizione 1.1.4

In un numero di Grassmann i termini con un numero pari di variabili di Grassmann sono detti *Grassmann pari* o *Termini bosonici*, mentre i termini con un numero dispari di variabili sono detti *Grassmann dispari* o *Termini fermionici*.

Da tale definizione l'algebra di Grassmann si suddivide in modo naturale in due sottoinsiemi, il cui unico elemento in comune è lo zero di \mathfrak{G} . L'insieme degli elementi dell'algebra per cui nella sommatoria (1.3) sono presenti solo termini *Grassmann pari* sono detti appunto *elementi pari* e formano una sotto-algebra \mathfrak{G}^+ , mentre l'insieme degli elementi dell'algebra per cui nella sommatoria (1.3) sono presenti solo termini *Grassmann dispari* \mathfrak{G}^- sono detti *elementi dispari*. Dalle definizioni sopra riportate possiamo ricavare dalla (1.3) la forma generale degli elementi appartenenti a \mathfrak{G}^+ e \mathfrak{G}^-

$$\begin{aligned}
f(\theta)_{pari} &= f_0 + \sum_{i_1 < i_2} f^{i_1 i_2} \theta_{i_1} \theta_{i_2} + \dots + \sum_{i_1 < \dots < i_{2\nu}} f^{i_1 \dots i_{2\nu}} \theta_{i_1} \dots \theta_{i_{2\nu}} \\
f(\theta)_{dispari} &= \sum_{i_1} f^{i_1} \theta_{i_1} + \dots + \sum_{i_1 < \dots < i_{2\nu-1}} f^{i_1 \dots i_{2\nu-1}} \theta_{i_1} \dots \theta_{i_{2\nu-1}}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Questi elementi si distinguono anche per le loro relazioni di commutazione e anticommutazione, infatti gli elementi pari commutano con ogni elemento di \mathfrak{G}_n , mentre gli elementi dispari commutano con gli elementi pari e anticommutano tra loro. Per distinguere gli elementi di \mathfrak{G}^+ e \mathfrak{G}^- si assegna la così detta *parità* \mathfrak{G} -*algebra*, ovvero dato un elemento $f \in \mathfrak{G}$, si denota la sua parità con $(-1)^{\epsilon_f}$ dove $\epsilon_f = 0$ se $f \in \mathfrak{G}^+$, mentre $\epsilon_f = 1$ se $f \in \mathfrak{G}^-$. Se per un elemento generico $f \in \mathfrak{G}$ non è specificata la sua parità, si dice che quell'elemento non ha parità definita.

1.2 Variabili reali e complesse

Le **Variabili di Grassmann** possono essere sia complesse che reali. Un generatore θ è detto reale se soddisfa la seguente relazione

$$\bar{\theta} = \theta$$

cioè se il complesso coniugato della variabile è uguale alla variabile stessa, altrimenti è una variabile complessa. Inoltre data una variabile di Grassmann complessa η ed il suo coniugato $\bar{\eta}$, si possono sempre decomporre in termini di due variabili di Grassmann reali θ_1 e θ_2 , secondo le relazioni

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2) \quad \bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2)$$

Involuzione

Per i numeri di Grassmann (i.e. elementi dell'algebra di Grassmann) è utile introdurre un operatore $*$: $\mathfrak{G}_n \rightarrow \mathfrak{G}_n$ tale che, dato un generatore θ dell'algebra, vale

$$\theta^* = \theta$$

E tale che $\forall f_1, f_2 \in \mathfrak{G}_n$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ valgono le seguenti relazioni

- $(f_1^*)^* = f_1$
- $(f_1 f_2)^* = f_2^* f_1^*$
- $(\alpha f_1)^* = \bar{\alpha} f_1^*$

allora un numero di Grassmann $f \in \mathfrak{G}_n$ è detto *reale* se $f^* = f$, mentre è detto *immaginario* se $f^* = -f$.

Per esempio, se consideriamo il prodotto di due generatori reali θ_1 e θ_2 avremo

$$(\theta_1 \theta_2)^* = \theta_2^* \theta_1^* \tag{1.6}$$

ma θ_1 e θ_2 sono due generatori allora avremo $\theta_1^* = \theta_1$ e $\theta_2^* = \theta_2$, inoltre i generatori anticommutano, dunque $\theta_2 \theta_1 = -\theta_1 \theta_2$ allora

$$(\theta_1 \theta_2)^* = \theta_2^* \theta_1^* = \theta_2 \theta_1 = -\theta_1 \theta_2$$

Dunque il prodotto di due variabili di Grassmann reali è *immaginario*. Invece è il termine $i\theta_1 \theta_2$ ad essere *reale*, infatti

$$(i\theta_1 \theta_2)^* = i^* \theta_2^* \theta_1^* = i^* \theta_2 \theta_1 = -i^* \theta_1 \theta_2 = i\theta_1 \theta_2$$

dove $i^* = -i$.

1.3 Operatori sui numeri di Grassmann

Avendo definito l'algebra di Grassman \mathfrak{G}_n n -dimensionale e i suoi elementi $f(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathfrak{G}_n$, si possono definire gli operatori lineari di derivazione e integrazione che agiscono su tali elementi e le loro principali proprietà.

Derivata

Definizione 1.3.1

Sia $f \in \mathfrak{G}_n$, sono definiti i seguenti operatori lineari:

$$\frac{\partial_L}{\partial \theta_l} \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_\nu} = \delta_{i_1, l} \theta_{i_2} \cdots \theta_{i_\nu} - \delta_{i_2, l} \theta_{i_1} \theta_{i_3} \cdots \theta_{i_\nu} + \cdots + (-)^\nu \delta_{i_\nu, l} \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_{\nu-1}} \quad (1.7)$$

$$\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_\nu} \frac{\partial_R}{\partial \theta_l} = \delta_{i_\nu, l} \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_{\nu-1}} - \cdots + (-)^\nu \delta_{i_1, l} \theta_{i_2} \cdots \theta_{i_\nu}$$

L'operatore $\frac{\partial_L}{\partial \theta_l}$ è detto derivata sinistra, l'azione dell'operatore consiste prima nel permutare la variabile θ_l al primo posto rispetto alle altre, e successivamente eliminarla, avendo cura di tenere traccia dei segni dovuti alle varie permutazioni. L'operatore $\frac{\partial_R}{\partial \theta_l}$ è detto derivata destra ed opera allo stesso modo della derivata sinistra, ma in questo caso la variabile θ_l va permutata all'ultimo posto. Se la variabile θ_l non è presente, entrambe le derivate sono nulle. In entrambi i casi è la variabile ν che tiene traccia del segno dovuto alle proprietà di anticommutazione dei generatori θ_i , infatti tale variabile avrà valore 1 per permutazioni dispari, mentre assumerà valore zero per permutazioni pari. Per esempio per $n = 2$ abbiamo visto che una generica funzione viene scritta :

$$f(\theta_1, \theta_2) = f_0 + f_1 \theta_1 + f_2 \theta_2 + f_3 \theta_1 \theta_2$$

allora

$$\frac{\partial_L}{\partial \theta_1} f(\theta_1, \theta_2) = f_1 + f_3 \theta_2$$

mentre

$$\frac{\partial_R}{\partial \theta_1} f(\theta_1, \theta_2) = f_1 - f_3 \theta_2$$

dove il segno meno emerge dopo aver permutato θ_1 con θ_2 prima di eliminare la variabile.

Integrale

In accordo con la teoria di Berezin, anche l'operatore di integrazione è definito sull'algebra di Grassmann, ed in particolare l'integrale in queste variabili è detto **Integrale di Berezin**. Tale integrale definisce l'integrazione sugli elementi dell'algebra esterna. Esso

non è un integrale nel senso di Lebesgue, ma è chiamato comunque integrazione perché ha proprietà analoghe e viene utilizzato in fisica per riprodurre l'integrale di percorso per un campo fermionico.

Definizione 1.3.2

Sia Λ^n un'algebra esterna di polinomi di elementi anti-commutanti $\theta_1, \dots, \theta_n$, su di un campo \mathbb{C} di numeri complessi, dove l'ordine dei generatori è definito. Allora l'**Integrale di Berezin** sull'algebra Λ^n è una funzione lineare

$$\int_{\Lambda^n} \circ d\theta$$

Con le seguenti proprietà : $\forall f \in \Lambda^n$ e definito $\theta = \theta_1, \dots, \theta_n$ e $d\theta = d\theta_1, \dots, d\theta_n$

$$\int_{\Lambda^n} \theta_n \cdots \theta_1 d\theta = 1$$

$$\int_{\Lambda^n} \frac{\partial f}{\partial \theta_i} d\theta = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

dove $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ può essere sia derivata destra che derivata sinistra. Queste proprietà definiscono l'integrale in modo univoco, allora

$$\int_{\Lambda^n} f(\theta) d\theta = \int_{\Lambda^1} (\cdots \int_{\Lambda^1} \int_{\Lambda^1} f(\theta) d\theta_1 d\theta_2 \cdots) d\theta_n$$

Per esempio, per $n = 1$, l'**Integrale di Berezin** è definito

$$\forall f, g \in \mathfrak{G}_1 \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

$$\int [af(\theta) + bg(\theta)] d\theta = a \int f(\theta) d\theta + b \int g(\theta) d\theta$$

con le seguenti proprietà

$$\int \theta d\theta = 1 \tag{1.8}$$

$$\int d\theta = 0 \tag{1.9}$$

e come nel caso di un algebra n-dimensionale, si avrà

$$\int \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} d\theta = 0$$

Inoltre dato che ogni funzione omogenea $f(\theta) \in \mathfrak{G}_1$ può essere al più lineare o costante, dato che per la (1.2) la sua espansione di Taylor è troncata dopo due termini, possiamo definire l'integrale in modo univoco

$$\int [a\theta + b] d\theta = a = \frac{\partial_L}{\partial \theta}(a\theta + b) \tag{1.10}$$

Integrale Gaussiano

Avendo definito l'**Integrale di Berezin** per l'integrazione con i numeri di Grassman, possiamo considerare l'integrale gaussiano, spesso utilizzato nella formulazione degli integrali di percorso in *teoria dei campi quantistici*. Se consideriamo l'algebra \mathfrak{G}_1 , la funzione gaussiana è banale, dato che avremo un singolo generatore θ e sempre per la proprietà (1.2) l'espansione diventa $e^{-a\theta^2} = 1$. Per avere una funzione gaussiana non banale, abbiamo bisogno di almeno due variabili di Grassmann reali θ_1 e θ_2 . In questo caso avremo la seguente espansione

$$e^{-a\theta_1\theta_2} = 1 - a\theta_1\theta_2$$

con a reale o complesso. Allora utilizzando le proprietà (1.8), (1.9) e (1.10) dell'**Integrale di Berezin**, l'integrale gaussiano risulta

$$\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-a\theta_1\theta_2} = a$$

E' interessante notare che possiamo definire una matrice antisimmetrica 2×2 A^{ij} con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

allora possiamo riscrivere l'integrale gaussiano in termini della matrice A :

$$\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\frac{1}{2}\theta_i A^{ij} \theta_j} = \det^{\frac{1}{2}} A \quad (1.11)$$

dove la radice quadrata del determinante di una matrice antisimmetrica è un polinomio chiamato **Pfaffiano** ed ha la caratteristica di essere nullo per matrici antisimmetriche di ordine dispari, mentre per le matrici di ordine pari, del tipo $2n \times 2n$, è un polinomio di grado n . Grazie alla relazione (1.11) possiamo estendere la risoluzione dell'integrale gaussiano al caso di elementi appartenenti ad un'algebra pari, in modo tale che la matrice A risulti una matrice antisimmetrica di ordine pari così che $Pfaff(A) \neq 0$. Consideriamo quindi $n = 2m$ variabili di Grassmann reali, allora l'integrale gaussiano di questo sistema risulta essere

$$\int d^n \theta e^{-\frac{1}{2}\theta_i A^{ij} \theta_j} = \det^{\frac{1}{2}} A$$

dove $d^n \theta \equiv d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_n$ e A^{ij} è una matrice antisimmetrica $n \times n$. In questo caso

$$Pfaff(A) = \det^{\frac{1}{2}} A = a_1 a_2 \cdots a_m$$

1.4 Rappresentazione matriciale e Algebra di Clifford

I numeri di Grassmann, oltre a tutte le proprietà sopra elencate, possono avere anche una rappresentazione matriciale che, in generale, può essere finita o infinita. Quando Grassmann introdusse questo nuovo sistema, non ne diede una rappresentazione, dato che egli considerava tali variabili come operatori differenziali. Fu Clifford che lavorò per trovare una rappresentazione matriciale per i numeri di Grassmann, dimostrando nel 1878 che esistono sistemi formati da un numero finito di numeri di Grassmann che possono essere rappresentati da delle matrici finite. Durante il suo lavoro, Clifford definì una nuova algebra, che prende il suo nome : **Algebra di Clifford**. In particolare Clifford mostrò che per ogni sistema di Grassmann θ_i esiste un sistema coniugato ϕ_i che soddisfa le stesse proprietà del sistema originale, ma non anticommute con esso, cioè

$\forall \theta_i \exists \phi_i$ entrambi sistemi di Grassmann, tali che

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad \{\phi_i, \phi_j\} = 0$$

ma

$$\{\theta_i, \phi_j\} = \delta_{ij}$$

Come vedremo in maggior dettaglio nel Capitolo 2, tale relazione può essere associata all'algebra degli operatori fermionici, dove ϕ rappresenta il momento coniugato dell'operatore fermionico θ . La forza di questa relazione è che contiene in se, già a livello classico, il *Principio di esclusione di Pauli*, infatti se identifichiamo gli operatori di creazione fermionici con le variabili di Grassmann θ , sappiamo che $\theta^2 = 0$, e ciò significa che un singolo stato non può contenere due fermioni identici.

Possiamo in questo caso definire i generatori di questa nuova algebra \mathfrak{C}_n come oggetti non anticommutanti e il cui prodotto è associativo. Allora l'algebra di Clifford è generata da insieme di vettori γ_ν , con $\nu = 1, \dots, n$ tali per cui

$$\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}$$

e per l'associatività

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \gamma_\lambda] = (\gamma_\alpha \gamma_\beta) \gamma_\lambda - \gamma_\alpha (\gamma_\beta \gamma_\lambda) = 0$$

Se consideriamo un'algebra di Clifford \mathfrak{C}_n , con $n = 2m$, possiamo costruire i due sistemi coniugati delle variabili di Grassmann in funzione degli elementi dell'algebra di Clifford, ottenendo

$$\theta_j = \frac{1}{2}(\gamma_j + i\gamma_{m+j})$$

$$\phi_j = \frac{1}{2}(\gamma_j - i\gamma_{m+j})$$

Grazie a tali relazioni si possono costruire le rappresentazioni matriciali dei numeri di Grassmann. Per esempio, sia $m = 1$ e definiamo

$$\gamma_1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \sigma_3 = -i\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dove σ_i sono le matrici di Pauli. Allora partendo da questi tre elementi ed essendo $m = 1$, possiamo costruire le due algebre di Grassmann coniugate, che avranno un generatore ciascuno, ottenendo

$$\theta = \theta_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$\phi = \phi_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1 - i\gamma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

con

$$\theta^2 = \phi^2 = 0$$

e

$$\{\theta, \phi\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Capitolo 2

Sistemi fermionici

I sistemi fermioni possono essere descritti anche a livello classico utilizzando le variabili di Grassmann, dette appunto anche variabili fermioniche. Grazie all'utilizzo di tali variabili si possono definire modelli classici, la cui quantizzazione produce sistemi che soddisfano il **Principio di esclusione di Pauli**. In questo capitolo, utilizzando le variabili di Grassmann come variabili dinamiche e sfruttando le loro singolari proprietà, si definisce un modello hamiltoniano utile a descrivere la dinamica di alcuni sistemi fermionici. Successivamente viene analizzato in maggior dettaglio l'oscillatore armonico fermionico, verificando che l'utilizzo di queste variabili fa emergere importanti proprietà fisiche del sistema che descrivono. Il capitolo termina con la naturale estensione all'analisi di un sistema fermionico con gradi di libertà multipli.

2.1 Formalismo Hamiltoniano e quantizzazione canonica

L'idea di base per sviluppare un formalismo Hamiltoniano per sistemi descritti dalle variabili di Grassmann, è di considerare gli elementi dell'algebra di Grassmann come variabili dinamiche classiche, ovvero funzioni dello spazio delle fasi. In questo modo si può definire a livello classico l'hamiltoniana, il funzionale d'azione e le parentesi di Poisson di tale sistema. Una volta costruito tale formalismo si passa alla quantizzazione canonica che consiste nel promuovere le variabili classiche in operatori lineari agenti su uno spazio di Hilbert e nel sostituire le parentesi di Poisson per le variabili canoniche con le relazioni di anticommutazione per i corrispettivi operatori. Per un sistema bosonico, l'azione può essere scritta in funzione delle usuali coordinate dello spazio delle fasi (x, p) , nel seguente modo

$$S_B[x, p] = \int dt (p\dot{x} - H(x, p)) \quad (2.1)$$

in cui il primo termine è detto *Termine Simplettico* e fissa la struttura delle parentesi di Poisson per il sistema. La (2.1) può essere riscritta in una forma più simmetrica, in modo tale che le derivate temporali siano equamente condivise da entrambe le variabili, ottenendo

$$S_B[x, p] = \int dt \left(\frac{1}{2} (p\dot{x} - x\dot{p}) - H(x, p) \right)$$

Con l'utilizzo delle variabili di Grassmann e grazie alle loro proprietà di parità si possono descrivere sistemi misti, ovvero sistemi in cui sono presenti sia variabili fermioniche sia variabili bosoniche. Difatti possiamo descrivere lo spazio delle fasi denotando collettivamente le sue coordinate con $Z^A = (z^a, \Psi^\alpha)$, dove $z^a = (x^i, p_i)$ sono variabili di Grassmann pari e definiscono le usuali coordinate dello spazio delle fasi, mentre Ψ^α sono variabili di Grassmann dispari, per descrivere i fermioni presenti nel sistema. Possiamo costruire il funzionale d'azione per tale sistema seguendo lo stesso schema logico adottato per il sistema bosonico

$$S[Z^A] = \int dt \left(\frac{1}{2} Z^A (\Omega^{-1})_{AB} \dot{Z}^B - H(Z) \right) \quad (2.2)$$

dove anche in questo caso l'azione è stata riscritta, in modo tale che le derivate temporali siano spartite su tutte le variabili. Come detto sopra, è il termine simplettico che definisce l'algebra delle parentesi di Poisson ed in questo caso è stato costruito in modo tale da dipendere da una matrice Ω^{AB} che ha la proprietà di essere antisimmetrica per le variabili pari (variabili bosoniche) e simmetrica per le variabili dispari (variabili fermioniche). Da tale proprietà possiamo esplicitare la matrice che avrà una forma diagonale a blocchi

$$\Omega^{AB} = \begin{pmatrix} \Omega^{ab} & 0 \\ 0 & \Omega^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

dove Ω^{ab} è una matrice antisimmetrica, mentre $\Omega^{\alpha\beta}$ è una matrice simmetrica. L'algebra delle parentesi di Poisson sarà dunque definita da (2.3). Allora siano F e G due funzioni dello spazio delle fasi a valori nell'algebra di Grassmann, l'algebra delle parentesi di Poisson è definita da

$$\{F, G\}_{PB} = \frac{\partial_R F}{\partial Z^A} \Omega_{AB} \frac{\partial_L G}{\partial Z^B} \quad (2.4)$$

dove ∂_L e ∂_R sono definite nella (1.7). In particolare avremo che

$$\{Z^A, Z^B\} = \Omega_{AB}$$

Per un sistema così fatto, l'algebra di Poisson è detta graduata, e dunque la definizione (2.4) soddisfa una versione graduata delle usuali proprietà delle parentesi di Poisson. Siano F, G e H funzioni dello spazio delle fasi a valori nell'algebra di Grassmann, dunque se $F, G, H \in \mathfrak{G}$ possiamo definire su ognuna una certa parità denotata da $(-1)^{\epsilon_F, \epsilon_G, \epsilon_H}$ con le proprietà viste nel Capitolo 1, di conseguenza le parentesi di Poisson, per un sistema

descritto con le variabili di Grassmann, godono delle seguenti proprietà

$$\begin{aligned}\{F, G\}_{PB} &= (-1)^{\epsilon_F \epsilon_G + 1} \{G, F\}_{PB} \\ \{F, GH\}_{PB} &= \{F, G\}H + (-1)^{\epsilon_F \epsilon_G} G\{F, H\} \\ \{F, \{G, H\}_{PB}\}_{PB} &+ (-1)^{\epsilon_F(\epsilon_G + \epsilon_H)} \{G, \{H, F\}\} + (-1)^{\epsilon_H(\epsilon_F + \epsilon_G)} \{H, \{F, G\}\} = 0\end{aligned}$$

Le equazioni del moto che derivano dal formalismo hamiltoniano sono equazioni differenziali al primo ordine nel tempo e si ricavano minimizzando il funzionale d'azione. Si possono esprimere in termini delle parentesi di Poisson, ottenendo le equazioni del moto canoniche

$$\dot{Z}^A = \{Z^A, H(Z)\}_{PB} \quad (2.5)$$

e in particolare

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}_{PB} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{PB}$$

La quantizzazione canonica per tali sistemi consiste nel promuovere le variabili canoniche Z^A nei relativi operatori lineari \hat{Z}^A , che devono soddisfare le relazioni di commutazione e anticommutazione, compattate nella seguente forma

$$[\hat{Z}^A, \hat{Z}^B] = i\hbar\{Z^A, Z^B\}_{PB} = i\hbar\Omega^{AB} \quad (2.6)$$

dove $[\circ, \circ]$ è detto *commutatore graduato* e opera nel seguente modo

$$[\circ, \circ] = \begin{cases} \{\circ, \circ\} & \text{anticommutatore se entrambe le variabili sono fermioniche} \\ [\circ, \circ] & \text{commutatore negli altri casi} \end{cases}$$

Per esempio \hat{x}^i e \hat{p}_j sono entrambi operatori bosonici allora la (2.6) prende la forma

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = [\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\{x^i, p_j\}_{PB}$$

Analogamente $\hat{\Psi}^\alpha$ e \hat{p}_{Ψ_β} sono entrambi operatori fermionici e la (2.6) diventa

$$[\hat{\Psi}^\alpha, \hat{p}_{\Psi_\beta}] = \{\hat{\Psi}^\alpha, \hat{p}_{\Psi_\beta}\} = i\hbar\{\Psi^\alpha, p_{\Psi_\beta}\}_{PB}$$

2.2 Oscillatore armonico di fermioni

Classicamente, un oscillatore armonico fermionico può essere descritto da una funzione complessa $\Psi(t)$ a valori nell'algebra di Grassmann e dalla sua complessa coniugata $\bar{\Psi}(t)$. Dunque possiamo definire l'azione in funzione di questi due numeri di Grassmann, ottenendo

$$S_F[\Psi(t), \bar{\Psi}(t)] = \int dt (i\bar{\Psi}\dot{\Psi} - \omega\bar{\Psi}\Psi)$$

dunque la Lagrangiana di questo sistema sarà

$$\mathcal{L}_F = i\bar{\Psi}\dot{\Psi} - \omega\bar{\Psi}\Psi$$

Consideriamo ora la struttura hamiltoniana del sistema, dove il momento coniugato alla variabile Ψ è definito

$$p_\Psi = \frac{\partial_L \mathcal{L}_F}{\partial \dot{\Psi}} = -i\bar{\Psi} \quad (2.7)$$

tale relazione mostra che il sistema così costruito è già in forma hamiltoniana, dato che il momento coniugato è proprio la variabile $\bar{\Psi}$, a meno di una costante. Esplicitiamo allora le parentesi di Poisson per questo oscillatore

$$\{\Psi, \bar{\Psi}\}_{PB} = -i \quad (2.8)$$

Nota L'azione dell'oscillatore armonico fermionico è stata costruita seguendo lo stesso schema logico per costruire l'usuale azione di un oscillatore armonico bosonico nello spazio delle fasi, approfondito nell' *Appendice*, in cui si utilizzano due nuove variabili (a, \bar{a}) come combinazioni complesse delle variabili (x, p) e la cui quantizzazione definisce gli operatori di creazione e distruzione per questo oscillatore. L'azione nel caso bosonico sarà data da

$$S_B[a, \bar{a}] = \int dt (i\bar{a}\dot{a} - \omega\bar{a}a)$$

Quantizzazione canonica

Sotto quantizzazione le variabili Ψ e $\bar{\Psi}$ vengono promosse ad operatori lineari, rispettivamente $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}^\dagger$ e devono soddisfare le relazioni di anticommutazione, definite essere $i\hbar$ volte il valore delle parentesi di Poisson, allora dalla (2.8) otteniamo

$$\{\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger\} = \hbar \quad \{\hat{\Psi}, \hat{\Psi}\} = \{\hat{\Psi}^\dagger, \hat{\Psi}^\dagger\} = 0$$

che in unità naturali, definisco l'algebra degli operatori fermionici di creazione e distruzione :

$$\{\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger\} = 1 \quad \{\hat{\Psi}, \hat{\Psi}\} = \{\hat{\Psi}^\dagger, \hat{\Psi}^\dagger\} = 0 \quad (2.9)$$

dove $\hat{\Psi}$ è l'operatore di distruzione, mentre $\hat{\Psi}^\dagger$ è l'operatore di creazione.

Spazio di Hilbert

Nel caso bosonico, possiamo associare un singolo bosone ad un oscillatore armonico, e l'algebra degli operatori di creazione e distruzione : $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ dà origine ad uno spazio di Hilbert di dimensione infinita formato da tutti gli stati $|n\rangle$ con $n = 1, \dots, \infty$. Nel caso fermionico, la situazione cambia, lo spazio di Hilbert è uno spazio 2-dimensionale formato dai soli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$, in accordo con il Principio di esclusione di Pauli, per cui non è possibile avere due o più fermioni identici nello stesso stato quantico.

Per verificarlo esplicitiamo la relazioni di anti-commutazione per gli operatori di creazione e distruzione

$$\{\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger\} = 1 \quad \longrightarrow \quad \hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger + \hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi} = 1 \quad (2.10)$$

mentre

$$\{\hat{\Psi}, \hat{\Psi}\} = \{\hat{\Psi}^\dagger, \hat{\Psi}^\dagger\} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\Psi}\hat{\Psi} = \hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}^\dagger = 0$$

Definiamo inoltre l'operatore *numero*, i cui autovalori specificano il numero di fermioni che occupano un determinato stato

$$\hat{N} = \hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}$$

allora, nel caso bosonico avremo $\hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger = \hat{N} + 1$, mentre nel caso fermionico

$$\hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger = 1 - \hat{N}$$

allora

$$\hat{N}(1 - \hat{N}) = \hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}\hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger = 0 \quad \text{dato che} \quad \hat{\Psi}\hat{\Psi} = 0$$

così tutti gli autovalori n dell'operatore \hat{N} devono soddisfare la relazione $n(1 - n) = 0$ e gli unici valori che la soddisfano sono $n = 0$ e $n = 1$. Dunque l'algebra degli operatori di creazione e distruzione fermionici genera uno spazio di Hilbert 2-dimensionale formato dai due stati indipendenti $|n = 0\rangle$ e $|n = 1\rangle$. Per studiare come i due operatori agiscono sui due stati, partiamo definendo lo stato di vuoto, notando che

$$\hat{\Psi}(1 - \hat{N}) = \hat{\Psi}\hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger = 0 \quad \text{dato che} \quad \hat{\Psi}\hat{\Psi} = 0$$

inoltre dalla definizione degli autostati di \hat{N} avremo che $\hat{N}|1\rangle = |1\rangle$ e $(1 - \hat{N})|0\rangle = |0\rangle$, allora

$$\hat{\Psi}|0\rangle = \hat{\Psi}(1 - \hat{N})|0\rangle = 0 \quad (2.11)$$

Dunque lo stato di vuoto è definito dalla condizione $\hat{\Psi}|0\rangle = 0$. Il secondo stato allora si può ottenere applicando l'operatore di creazione allo stato di vuoto, ottenendo

$$\hat{\Psi}^\dagger|0\rangle = |1\rangle \quad (2.12)$$

nessun altro stato può essere costruito applicando nuovamente l'operatore di creazione, infatti

$$\hat{\Psi}^\dagger |1\rangle = \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger |0\rangle = 0$$

dato che $\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger = (\hat{\Psi}^\dagger)^2 = 0$. Analogamente si può partire dall'autostato $|1\rangle$ e ricavare lo stato di vuoto applicando l'operatore di distruzione

$$\hat{\Psi} |1\rangle = |0\rangle \quad (2.13)$$

anche in questo caso, per l'equazione (2.11), nessun altro stato può essere costruito applicando nuovamente l'operatore di distruzione.

Si dimostra facilmente che questi due stati sono tra loro ortonormali, infatti avremo

$$\hat{\Psi} |0\rangle = |1\rangle \longrightarrow \langle 1|1\rangle = \langle 0|(\hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger)|0\rangle = \langle 0|(1 - \hat{N})|0\rangle = \langle 0|0\rangle$$

viceversa, avremo

$$\hat{\Psi} |1\rangle = |0\rangle \longrightarrow \langle 0|0\rangle = \langle 1|(\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi})|1\rangle = \langle 1|\hat{N}|1\rangle = \langle 1|1\rangle$$

dunque se normalizziamo lo stato di vuoto $\langle 0|0\rangle = 1$, avremo che $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$, cioè i due stati sono ortonormali.

Possiamo dare una rappresentazione matriciale dei due operatori

$$\hat{\Psi} \longrightarrow \begin{pmatrix} \langle 0|\hat{\Psi}|0\rangle & \langle 0|\hat{\Psi}|1\rangle \\ \langle 1|\hat{\Psi}|0\rangle & \langle 1|\hat{\Psi}|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \langle 0|0\rangle \\ 0 & \langle 1|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Psi}^\dagger \longrightarrow \begin{pmatrix} \langle 0|\hat{\Psi}^\dagger|0\rangle & \langle 0|\hat{\Psi}^\dagger|1\rangle \\ \langle 1|\hat{\Psi}^\dagger|0\rangle & \langle 1|\hat{\Psi}^\dagger|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0|1\rangle & 0 \\ \langle 1|1\rangle & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ritrovando le stesse rappresentazioni (1.12) e (1.13) trovate nel Capitolo 1 per le due variabili di Grassmann coniugate, utilizzando l'algebra di Clifford. In questo caso $\hat{\Psi}^\dagger$ rappresenta la variabile coniugata di $\hat{\Psi}$ dato che le due variabili non anticommutano $\{\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^\dagger\} = 1$.

Hamiltoniana e autovalori energetici

L'hamiltoniana classica si ricava dalla *Trasformata di Legendre* della Lagrangiana

$$H = \dot{\Psi}p_\Psi - \mathcal{L}_F = \dot{\Psi}p_\Psi - i\bar{\Psi}\dot{\Psi} + \omega\bar{\Psi}\Psi$$

utilizzando l'espressione (2.7)

$$H = -\dot{\Psi}i\bar{\Psi} - i\bar{\Psi}\dot{\Psi} + \omega\bar{\Psi}\Psi = i\bar{\Psi}\dot{\Psi} - i\dot{\Psi}\bar{\Psi} + \omega\bar{\Psi}\Psi = \omega\bar{\Psi}\Psi$$

allora,utilizzando le proprietà di anticommutazione delle variabili di Grassmann, possiamo esprimere l'hamiltoniana classica

$$H = \frac{\omega}{2}(\bar{\Psi}\Psi - \Psi\bar{\Psi}) \quad (2.14)$$

L'operatore hamiltoniano si ottiene dalla (2.14) promuovendo le variabili Ψ e $\bar{\Psi}$ ad operatori lineari, ottenendo

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi} - \hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger) = \frac{\omega}{2}(\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi} + (\hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger - \hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger) - \hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger)$$

utilizzando la (2.10)

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(\{\hat{\Psi}^\dagger, \hat{\Psi}\} - 2\hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger) = \frac{\omega}{2}(-1 + 2\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi})$$

allora l'operatore hamiltoniano per un oscillatore armonico di fermioni diventa

$$\hat{H} = \omega(\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi} - \frac{1}{2}) \quad (2.15)$$

Gli autovalori all'energia si trovano facendo agire l'hamiltoniana (2.15) su ognuno dei due stati

$$\begin{aligned} \hat{H} |0\rangle &= \omega\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi} |0\rangle - \frac{\omega}{2} |0\rangle = -\frac{\omega}{2} |0\rangle \\ \hat{H} |1\rangle &= \omega |1\rangle - \frac{\omega}{2} |1\rangle = \frac{\omega}{2} |1\rangle \end{aligned}$$

Allora se $\omega > 0$, lo stato di vuoto $|0\rangle$ rappresenta lo stato fondamentale dell'oscillatore ed ha energia negativa, mentre lo stato eccitato $|1\rangle$ avrà energia positiva.

2.3 Stati coerenti

In meccanica quantistica un utile strumento per descrivere sistemi bosonici o fermionici è la definizione di stati coerenti per tali sistemi. Uno stato coerente è uno specifico stato di un oscillatore armonico quantistico che può essere descritto in modo tale che la sua dinamica sia molto simile alla dinamica oscillatoria di un oscillatore armonico classico. Per esempio, uno stato coerente può descrivere un determinato stato di un sistema per cui il livello fondamentale è stato spostato dall'origine del sistema, in questo caso tale stato può essere associato alla soluzione classica per una particella oscillante con un'ampiezza uguale allo spostamento effettuato. Per un oscillatore armonico quantistico bosonico, tali stati sono gli autostati dell'operatore di distruzione associato all'oscillatore, essi formano una base completa di vettori per lo spazio di Hilbert su cui agiscono gli operatori di creazione e distruzione del sistema. Similmente, per un sistema fermionico descritto utilizzando le variabili di Grassmann, si possono introdurre gli stati coerenti fermionici come gli autostati $|\eta\rangle$ dell'operatore di distruzione $\hat{\Psi}$, aventi come autovalore un numero di Grassmann complesso η .

$$\hat{\Psi} |\eta\rangle = |\eta\rangle \eta \quad (2.16)$$

Dove l'algebra degli operatori di questo sistema è definita dalla (2.9) e come abbiamo visto agiscono su uno spazio di Hilbert 2-dimensionale definito dalle relazioni (2.11) e (2.12).

Nota Per definizione le variabili di Grassmann, quali possono essere η ed il suo complesso coniugato $\bar{\eta}$, anticommutano tra loro, ma possono essere definite in modo tale che anticommutino anche con gli operatori di creazione e distruzione fermionici $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Psi}^\dagger$.

Una volta definiti tali stati, si possono dedurre alcune loro proprietà:

$$|\eta\rangle = e^{\hat{\Psi}^\dagger \eta} |0\rangle \quad (2.17)$$

$$\langle \bar{\eta} | = \langle 0 | e^{\bar{\eta} \hat{\Psi}} \longrightarrow \langle \bar{\eta} | \hat{\Psi}^\dagger = \langle \bar{\eta} | \bar{\eta} \quad (2.18)$$

$$\langle \bar{\eta} | \eta \rangle = e^{\bar{\eta} \eta} \quad (2.19)$$

$$\mathbb{I} = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} |\eta\rangle \langle \bar{\eta}| \quad (2.20)$$

È interessante notare che tali relazioni possono essere ricavate utilizzando le proprietà delle variabili di Grassmann viste nel Capitolo 1.

Per verificare la (2.17), dobbiamo dimostrare che uno stato definito in quel modo è uno stato coerente. Per fare ciò espandiamo in serie di Taylor l'esponenziale

$$|\eta\rangle = e^{\hat{\Psi}^\dagger \eta} |0\rangle = (1 + \hat{\Psi}^\dagger \eta) |0\rangle = |0\rangle - \eta \hat{\Psi}^\dagger |0\rangle$$

utilizzando la (2.12) otteniamo $|0\rangle - \eta \hat{\Psi}^\dagger |0\rangle = |0\rangle - \eta |1\rangle$ allora

$$e^{\hat{\Psi}^\dagger \eta} |0\rangle = |0\rangle - \eta |1\rangle$$

Per verificare che $|\eta\rangle$ è uno stato coerente, dobbiamo verificare che sia un autostato dell'operatore di distruzione $\hat{\Psi}$

$$\hat{\Psi} |\eta\rangle = \hat{\Psi} e^{\hat{\Psi}^\dagger \eta} |0\rangle = \hat{\Psi} (|0\rangle - \eta |1\rangle) = -\hat{\Psi} \eta |1\rangle = \eta \hat{\Psi} |1\rangle = \eta |0\rangle$$

Per la proprietà (1.2) possiamo sommare o sottrarre termini proporzionali a η^2

$$\hat{\Psi} |\eta\rangle = \eta |0\rangle = \eta (|0\rangle - \eta |1\rangle) = \eta |\eta\rangle$$

dunque $e^{\hat{\Psi}^\dagger \eta} |0\rangle$ è uno stato coerente.

La (2.18) definisce gli stati coerenti per i "Bra". Per verificarla bisogna prendere l'aggiunto della (2.17)

$$|\eta\rangle = e^{\hat{\Psi}^\dagger \eta} |0\rangle \longrightarrow \langle \bar{\eta} | = \langle 0 | e^{\bar{\eta} \hat{\Psi}} \quad (2.21)$$

dove per la proprietà (1.6) delle variabili di Grassmann, si ottiene

$$(\hat{\Psi}^\dagger \eta)^\dagger = \bar{\eta} \hat{\Psi}$$

La (2.19) definisce il prodotto scalare di dei due autostati, e si verifica utilizzando lo sviluppo visto nella dimostrazione della (2.17)

$$\langle \bar{\eta} | \eta \rangle = (\langle 0 | - \langle 1 | \bar{\eta}) (|0\rangle - \eta |1\rangle) = \langle 0 | 0 \rangle + \bar{\eta} \eta \langle 1 | 1 \rangle \quad (2.22)$$

essendo gli stati ortonormali e normalizzati a 1 avremo

$$\langle \bar{\eta} | \eta \rangle = \langle 0 | 0 \rangle + \bar{\eta} \eta \langle 1 | 1 \rangle = 1 + \bar{\eta} \eta = e^{\bar{\eta} \eta} \quad (2.23)$$

Infine la (2.20) si verifica sviluppando in serie di Taylor i vari elementi dell'integrali

$$\begin{aligned} \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} |\eta\rangle \langle \bar{\eta} | &= \int d\bar{\eta} d\eta (1 - \bar{\eta} \eta) (|0\rangle - \eta |1\rangle) (\langle 0 | - \langle 1 | \bar{\eta}) \\ &= \int d\bar{\eta} d\eta (1 - \bar{\eta} \eta) (|0\rangle \langle 0 | + \eta \bar{\eta} |1\rangle \langle 1 |) \\ &= \int d\bar{\eta} d\eta \eta \bar{\eta} |1\rangle \langle 1 | + \int d\bar{\eta} d\eta \eta \bar{\eta} |0\rangle \langle 0 | \end{aligned} \quad (2.24)$$

applicando la proprietà (1.10) degli integrali di Berezin alla (2.24) e ricordando che per definizione gli stati coerenti formano un insieme completo di vettori, si ottiene

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta} |\eta\rangle \langle \bar{\eta} | = |1\rangle \langle 1 | + |0\rangle \langle 0 | = \mathbb{I}$$

2.4 Gradi di libertà multipli

Consideriamo un sistema fermionico con N gradi di libertà e definiamo un insieme di operatori di creazione e distruzione $\hat{\Psi}_\alpha$ e $\hat{\Psi}_\alpha^\dagger$, con $\alpha = 1, \dots, N$, per tale sistema. L'algebra di tali operatori sarà definita dalle relazioni di anticommutazione che per un sistema con N gradi di libertà diventano

$$\{\hat{\Psi}_\alpha, \hat{\Psi}_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} \quad \{\hat{\Psi}_\alpha, \hat{\Psi}_\beta\} = 0 \quad \{\hat{\Psi}_\alpha^\dagger, \hat{\Psi}_\beta^\dagger\} = 0 \quad (2.25)$$

In questo caso lo spazio di Hilbert altro non è che il prodotto tensoriale di N copie del singolo spazio di Hilbert dell'oscillatore armonico di fermioni \mathcal{H}_2

$$\mathcal{H}_N = (\mathcal{H}_2)^{\otimes N} = \overbrace{\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_2}^{N \text{ volte}}$$

In questo caso avremo uno spazio di Hilbert di dimensione 2^N . Possiamo anche definire l'operatore *numero* per ciascun grado di libertà

$$\hat{n}_\alpha = \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \hat{\Psi}_\alpha$$

ed anche in questo caso, gli autovalori di tale operatore potranno assumere solo due valori: $n_\alpha = 0$ oppure $n_\alpha = 1$, e ciò significa che in un determinato stato ci può essere al più un solo fermione, sempre in accordo con il Principio di Pauli. Adesso consideriamo un insieme infinito, ma discreto di modi fermionici α , dove $\forall \alpha$ corrisponde uno stato quantico $|\alpha\rangle$ ed una funzione d'onda Φ_α . Definiamo l'operatore

$$\hat{N} = \sum_\alpha \hat{n}_\alpha$$

i cui autovalori $N = 0, 1, \dots, \infty$ specificano il numero totale di fermioni per tutti i modi. In questo modo possiamo ridefinire lo spazio di Hilbert per questo sistema come somma diretta di sottospazi di Hilbert a dimensione crescente, ottenendo

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots$$

dove \mathcal{H}_0 rappresenta un unico stato con $N = 0$, ed è il così detto stato di vuoto in cui $\forall \alpha$ $|\text{vuoto}\rangle = |n_\alpha = 0\rangle$. \mathcal{H}_1 , invece, rappresenta gli stati in cui un solo $n_\alpha = 1$, mentre tutti gli altri sono 0. Come per un sistema bosonico, possiamo passare da uno stato a quello successivo (precedente) applicando l'operatore di creazione (distruzione), allora in questo caso

$$|n_\beta = 1, n_\alpha = 0\rangle = |\beta\rangle = \hat{\Psi}_\beta^\dagger |\text{vuoto}\rangle \quad \alpha = 1, \dots, \beta - 1, \beta + 1, \dots, \infty$$

dunque possiamo identificare \mathcal{H}_1 come lo spazio di Hilbert di una singola particella. Procedendo in questo modo per \mathcal{H}_2 avremo

$$|n_\beta = n_\gamma = 1, n_\alpha = 0\rangle = |\beta, \gamma\rangle = \hat{\Psi}_\beta^\dagger \hat{\Psi}_\gamma^\dagger |\text{vuoto}\rangle$$

dove $\beta \neq \gamma$, dato che per un sistema fermionico $n_\beta = 0, 1$. In maniera analoga si costruiscono gli altri termini \mathcal{H}_N .

Nota Per un qualsiasi spazio \mathcal{H}_N , l'ordine dei vari modi per cui $n = 1$, non conta fisicamente, ma per la (2.9), bisogna tener conto del segno dovuto alle varie permutazioni effettuate, ovvero

$$|\text{permutazione di } \alpha, \beta, \dots, \omega\rangle = (-1)^\epsilon |\alpha, \beta, \dots, \omega\rangle \quad (2.26)$$

dove

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{per permutazioni dispari} \\ 0 & \text{per permutazioni pari} \end{cases}$$

Hamiltoniana

Possiamo costruire l'operatore hamiltoniano per un sistema di N fermioni identici seguendo gli stessi ragionamenti fatti per l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico di fermioni (eq (2.14) e (2.15)) ottenendo

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_{\alpha_i} \hbar (\hat{\Psi}_{\alpha_i}^\dagger \hat{\Psi}_{\alpha_i} - \hat{\Psi}_{\alpha_i} \hat{\Psi}_{\alpha_i}^\dagger) \quad (2.27)$$

possiamo scrivere gli autostati come $|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle$, dove $n_{\alpha_i} = 0, 1$ allora gli autovalori di energia si trovano applicando la (2.27) agli autostati, trovando

$$E_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} = \sum_{i=1}^N (n_{\alpha_i} - \frac{1}{2}) \omega_{\alpha_i} \hbar \quad (2.28)$$

Per esempio per $N = 2$, supponendo $\omega_{\alpha_1} = \omega_{\alpha_2} = \hbar = 1$ avremo uno spazio di Hilbert 4-dimensionale e dunque formato da quattro possibili autostati e applicando la (2.28), si trovano i relativi autovalori.

- $|\alpha_1, \alpha_2\rangle = |0, 0\rangle \longrightarrow E_{0,0} = -1$
- $|\alpha_1, \alpha_2\rangle = |0, 1\rangle \longrightarrow E_{0,1} = 0$
- $|\alpha_1, \alpha_2\rangle = |1, 0\rangle \longrightarrow E_{1,0} = 0$
- $|\alpha_1, \alpha_2\rangle = |1, 1\rangle \longrightarrow E_{1,1} = 1$

Per $N = 3$, supponendo $\omega_{\alpha_i} = \hbar = 1$ con $i = 1, 2, 3$, avremo uno spazio di Hilbert 8-dimensionale, dunque avremo a disposizione 8 autostati indipendenti :

- $|0, 0, 0\rangle \longrightarrow E = -\frac{3}{2}$
- $|1, 0, 0\rangle \quad |0, 1, 0\rangle \quad |0, 0, 1\rangle \longrightarrow E = -\frac{1}{2}$
- $|1, 1, 0\rangle \quad |0, 1, 1\rangle \quad |1, 0, 1\rangle \longrightarrow E = \frac{1}{2}$
- $|1, 1, 1\rangle \longrightarrow E = \frac{3}{2}$

Nota Come già visto nel caso dell'oscillatore armonico, lo stato fondamentale di un sistema fermionico, diversamente dal caso bosonico, ha energia negativa. Inoltre si nota che a causa del Principio di Pauli, il numero di autostati indipendenti è finito e gli autovalori energetici sono sempre simmetrici rispetto allo zero di energia.

Autofunzioni

Per il principio di Pauli, una funzione d'onda che descrive un sistema di N fermioni identici, deve essere antisimmetrica in tutti ed N gli argomenti, ossia

$$\Upsilon(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = (-1)^\epsilon \Upsilon(\text{permutazione di } \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (2.29)$$

dove ϵ ha la stessa definizione della (2.26). Possiamo adesso costruire una base completa di autofunzioni per le funzioni d'onda (2.29), utilizzando il *Determinante di Slater*

$$\Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \Phi_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) & \Phi_{\alpha_2}(\mathbf{x}_1) & \cdots & \Phi_{\alpha_N}(\mathbf{x}_1) \\ \Phi_{\alpha_1}(\mathbf{x}_2) & \Phi_{\alpha_2}(\mathbf{x}_2) & \cdots & \Phi_{\alpha_N}(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{\alpha_1}(\mathbf{x}_N) & \Phi_{\alpha_2}(\mathbf{x}_N) & \cdots & \Phi_{\alpha_N}(\mathbf{x}_N) \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

che ha appunto la proprietà di essere antisimmetrico sia per lo scambio di particelle $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ sia per lo scambio degli stati $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. Allora possiamo identificare l'autofunzione così costruita, come la funzione d'onda degli stati con N fermioni identici e dove vale

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle = \hat{\Psi}_{\alpha_N}^\dagger \cdots \hat{\Psi}_{\alpha_2}^\dagger \hat{\Psi}_{\alpha_1}^\dagger |\text{vuoto}\rangle \in \mathcal{H}_N$$

Per esempio, per $N = 2$, la funzione d'onda deve essere antisimmetrica nei due argomenti $\Upsilon(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\Upsilon(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$. Utilizzando il determinante di Slater (2.30), si costruisce

una base completa di autofunzioni, che prendono la seguente forma

$$\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\Phi_\alpha(\mathbf{x}_1)\Phi_\beta(\mathbf{x}_2) - \Phi_\beta(\mathbf{x}_1)\Phi_\alpha(\mathbf{x}_2)}{\sqrt{2}} = -\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$$

Ognuna di queste autofunzioni oltre ad essere antisimmetriche per lo scambio $\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2$, è anche antisimmetrica per lo scambio dei modi $\alpha \leftrightarrow \beta$ ossia $\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\Phi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, dunque tali autofunzioni sono le funzioni d'onda per gli stati con due fermioni, in cui per la (2.26), avremo $|\alpha, \beta\rangle = \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \hat{\Psi}_\beta^\dagger |\text{vuoto}\rangle = -|\beta, \alpha\rangle \in \mathcal{H}_2$.

Conclusioni

Come è stato mostrato nel presente lavoro, è possibile descrivere un sistema di fermioni e la loro fondamentale proprietà di essere soggetti al Principio di Pauli anche a livello classico, grazie all'utilizzo di questo particolare sistema di variabili. Si fa notare che la loro proprietà di essere sempre quadrate a zero, descrive il fenomeno secondo cui due particelle fermioniche identiche, quindi descritte dalla stessa variabile, non possono coesistere simultaneamente nello stesso stato.

Studiando nel dettaglio l'oscillatore armonico di fermioni e descrivendo la dinamica attraverso il metodo *pseudoclassico*, si è dimostrato che anche sotto quantizzazione il sistema riproduce gradi di libertà che rispettano il Principio di Pauli.

In questo caso, le variabili sono state promosse ad operatori lineari che conservando le loro proprietà di anticommutazione definiscono l'algebra degli operatori di creazione e distruzione fermionici. Si è dunque dimostrato che tali operatori fermionici agiscono su uno spazio di Hilbert 2-dimensionale e attraverso la definizione del *operatore numero*, si è verificato che il numero di occupazione di un determinato stato quantico, può essere 0 o 1, confermando il principio di esclusione.

Utilizzando lo stesso schema logico applicato all'oscillatore armonico, si è analizzato un sistema con gradi di libertà multipli, verificando le conseguenze dovute al principio di Pauli sugli autovalori energetici e sulle autofunzioni del sistema.

Appendice

Oscillatore armonico di bosoni

Consideriamo un'oscillatore armonico quantistico di massa m e frequenza ω . Gli operatori canonici che descrivono la dinamica del sistema sono \hat{x} e \hat{p} che rappresentano rispettivamente l'operatore posizione e l'operatore impulso per l'oscillatore. L'hamiltoniana può essere costruita partendo da quella classica, promuovendo le variabili canoniche (x, p) nei rispettivi operatori lineari.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \quad (2.31)$$

In questo caso si possono costruire due nuovi operatori come combinazioni complesse di \hat{x} e \hat{p} , definendo

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\hat{p} - im\omega\hat{x}) \quad (2.32)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\hat{p} + im\omega\hat{x}) \quad (2.33)$$

Questi due operatori soddisfano la seguente relazione

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.34)$$

La (2.34) definisce l'algebra degli operatori di creazione e distruzione per questo oscillatore quantistico, dove \hat{a} rappresenta l'operatore di distruzione, mentre \hat{a}^\dagger è l'operatore di creazione. Per quest'algebra si può definire un ulteriore operatore, detto *operatore numero*

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (2.35)$$

il cui spettro di autovalori è formato da interi non negativi $n = 0, 1, 2, \dots$

Attraverso semplici passaggi algebrici si dimostra facilmente che possiamo definire l'hamiltoniana (2.31) in funzione di (2.35), ottenendo

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}) \quad (2.36)$$

Possiamo dunque definire una base ortonormale $|n\rangle$ di autoket di \hat{N} , per cui

$$\hat{N} |n\rangle = |n\rangle n \quad (2.37)$$

allora l'equazione agli autovalori per l'hamiltoniana diventa

$$\hat{H} |n\rangle = |n\rangle E_n \quad (2.38)$$

i cui autovalori energetici saranno

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (2.39)$$

Dalla relazione (2.39) si evince che un oscillatore quantistico che si trova nello stato $|n\rangle$, contiene esattamente n quanti di energia $\hbar\omega$. Dunque lo stato fondamentale $|0\rangle$, che descrive lo stato di "vuoto" per il sistema, avrà energia

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Per le proprietà appena definite tale sistema può essere usato per descrivere sistemi di particelle bosoniche, per questo motivo spesso è chiamato oscillatore armonico di bosoni.

Bibliografia

- [1] S. Braibant, G. Giacomelli, M. Spurio, "*Particelle e Interazioni Fondamentali*". Springer 2010
- [2] D.Fearneley-Sander "*Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra*". American Mathematical Monthly 86: 809–17. 1979
- [3] Fiorenzo Bastianelli. "*Appunti per il corso di Fisica Teorica 2 -2017/2018*" e "*Path integrals for fermions and supersymmetric quantum mechanics*".
- [4] F.A. Berezin e M.S. Marinov. "*Particle Spin dynamics as the Grassmann variant of Classical Mechanics*". Mosca, 9 Agosto 1976.
- [5] R. Casalbuoni "*The Classical Mechanics for Bose-Fermi systems*". Il Nuovo Cimento, Vol 33 A,N. 3, Ginevra, 1 Giugno 1976.
- [6] S.Catto, Yoon S. Choun, Y. Gürçan, A. Khalfan e L. Kurt. "*Grassmann Numbers and Clifford-Jordan-Wigner Representation of Supersymmetry*". Journal of Physics: Conference Series 411 (2013) 012009
- [7] C. Ramirez e P.A. Ritto. "*On the Hamilton-Jacobi formalism for fermionic systems*". 9 Maggio, 2019.
- [8] P. Woit. "*Quantum Mechanics for Mathematicians: The Fermionic Oscillator*". Department of Mathematics, Columbia University. 8 Febbraio, 2013