UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O USO E A COMPREENSÃO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA POR ESTUDANTES DO 3.º CICLO

Kelly Nunes Aguiar

MESTRADO EM EDUAÇÃO

Didática da Matemática

Dissertação Orientada pelo Prof. Doutor João Pedro da Ponte

2019

Resumo

Ao final do 3.º ciclo da educação básica, é importante que os estudantes sejam capazes de usar linguagem algébrica para analisar e generalizar padrões, representar situações e resolver problemas. Para melhorar a aprendizagem nesse domínio da Matemática é fundamental investigar o modo como os estudantes compreendem e usam a linguagem algébrica. Assim, este estudo tem o objetivo de analisar significados construídos por estudantes e suas dificuldades no uso e compreensão da linguagem algébrica no final do 3.º ciclo da educação básica.

O quadro teórico, além de apresentar a linguagem algébrica como representação, aborda a importância dos significados construídos por estudantes para objetos algébricos, bem como aspectos de suas dificuldades. A investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, realizada por meio de entrevistas. A recolha de dados, feita com estudantes de 9.º ano, inclui suas produções ao realizarem duas tarefas e a gravação de áudio das entrevistas.

Os resultados mostram que os estudantes aparentam ter alguma dificuldade em relacionar representações algébricas e representações em linguagem verbal, não transitando com familiaridade entre estas formas de representação. No que respeita aos significados construídos para objetos algébricos, os estudantes interpretam símbolos algébricos como quantidades, medidas e valores desconhecidos. Tendem a priorizar procedimentos na construção de significados para as expressões algébricas e a desconsiderar suas ideias baseadas essencialmente na interpretação das situações. Apresentam dificuldades ao criar e interpretar expressões algébricas, tanto para fazer generalizações como para resolver problemas. Na manipulação algébrica destacam-se as dificuldades com uso dos parênteses, representação de dobro e quadrado de um número, e operações de adição, multiplicação e potenciação de termos algébricos.

Palavras-Chave: Álgebra escolar, Linguagem algébrica, Significados, Dificuldades.

Abstract

At the end of the third cycle of basic education, it is important for students to be able to use algebraic language to analyze and generalize patterns, represent situations and solve problems. To improve learning in this field of mathematics, it is essential to investigate the way students understand and use algebraic language. Thus, this study aims to analyze meanings constructed by students and their difficulties in using and understanding algebraic language at the end of the third cycle of basic education.

The theoretical framework, besides presenting the algebraic language as representation, addresses the importance of the meanings constructed by students for algebraic objects, as well as the aspects of their difficulties. The research follows a qualitative and interpretative approach, conducted through interviews. The data collection, gathered with 9th grade students, includes their productions, when taking part of two tasks, and audio recording of the interviews.

The results show that students have some difficulty relating algebraic and verbal language representations, not familiarly moving between these forms of representation. Regarding the meanings constructed for algebraic objects, students interpret algebraic symbols as quantities, measurements and unknown values. They tend to prioritize procedures when constructing meaning for algebraic expressions and disregard their ideas based essentially on the interpretation of situations. They present difficulties while creating and interpreting algebraic expressions for, both generalizations and problem solving. In algebraic manipulation the difficulties with the use of parentheses, double and squared representation of a number and addition, multiplication and potentiation operations of algebraic terms are highlighted.

Keywords: School algebra, Algebraic language, Meanings, Difficulties.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor João Pedro da Ponte, pela disponibilidade e confiança, e pelas sugestões e críticas, que me incentivaram a concretizar esta investigação.

Aos meus professores e colegas do ano curricular, por tudo o que me ensinaram e pelos momentos partilhados.

À minha colega Sandra Leitão, pelo apoio para a realização deste estudo, por sua disponibilidade e empenho, e pela simpatia e acolhimento.

Aos alunos que participaram no estudo, pela disponibilidade e pelo interesse que demonstraram.

À minha amiga Rachel, por me incentivar e por partilhar comigo as alegrias de cada conquista.

À Carolina e ao meu irmão, por terem me apoiado e ajudado ao longo de todo o percurso.

Ao Rodolfo, pelo carinho e compreensão, e por me encorajar nos momentos finais deste trabalho.

Aos meus pais, que sempre me incentivaram a estudar ao longo da vida, pelo apoio incondicional e pelo amor.

A Deus, acima de tudo, pelo sustento e por ter me concedido a realização deste trabalho. Tudo o que foi feito, foi por sua graça!

Índice

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Anexos

Capítulo 1

Introdução

Neste primeiro capítulo começo por apresentar os motivos que me levaram à realização desta investigação sobre uso e compreensão da linguagem algébrica por estudantes do final do 3.º ciclo da educação básica. Seguidamente, apresento o objetivo e as questões orientadoras do estudo.

1.1. A importância da Álgebra

A Álgebra constitui um dos grandes ramos da Matemática e tem um importante papel na sociedade atual, uma vez que suas ideias fundamentam o trabalho matemático em muitas áreas como ciência, estatística e economia. A notação simbólica algébrica permite que ideias matemáticas complexas sejam expressas suscintamente e interpretadas eficazmente, pelo que são usadas em diversos domínios (NCTM, 2000). As raízes históricas da Álgebra estão na sistematização de métodos gerais de resolução de problemas que já eram usadas na Antiguidade na Babilônia, China, Egito e Índia. O desenvolvimento do conceito de equação e de uma linguagem com abreviações figuram as origens dessa área da Matemática que, ao longo dos séculos, passou por um avanço contínuo incluindo progressos na resolução de equações, demonstrações de importantes teoremas e o surgimento dos números complexos (Ponte, Branco & Matos, 2009). A profunda evolução da Álgebra ocorrida a partir do século XIX teve um papel fundamental no desenvolvimento da ciência e da tecnologia e, atualmente, as competências algébricas constituem aspecto essencial da formação de uma pessoa.

Em nossa sociedade a tecnologia tem um lugar incontestável e o desenvolvimento da ciência avança continuamente. Nesse cenário, as competências matemáticas ganham uma grande importância, em especial o uso e a compreensão de sistemas simbólicos, como a linguagem algébrica, dado que as máquinas executam comandos criados na mente humana, por meio de sistemas simbólicos (Kaput & Shaffer, 2002). Este é um dos motivos pelos quais o desempenho algébrico é atualmente visto como determinante para o sucesso escolar. Os conhecimentos de Álgebra são fundamentais, uma vez que a linguagem algébrica é essencial tanto para permitir o prosseguimento de estudos quanto para possibilitar o acesso a um vasto leque de opções profissionais. O estudante que não tem capacidade de entender e usar a linguagem abstrata da Álgebra fica seriamente limitado nas suas opções escolares e profissionais (Ponte, Branco & Matos, 2009). Nesse sentido, a aprendizagem da Álgebra representa também um momento de seleção na educação escolar, uma vez que apenas alunos com bom desempenho nessa área têm a possibilidade de ingressar em cursos de ensino superior relacionados com ciência e tecnologia.

1.2. Motivações, enquadramento e relevância do estudo

A Álgebra aprendida na escola é frequentemente vista como consistindo na aplicação de regras de manipulação simbólica, como ocorre, por exemplo, em resolução de equações e simplificação de expressões. Certamente os símbolos algébricos e os respetivos procedimentos de trabalho são uma aquisição matemática histórica e cumulativa, fundamentais no trabalho matemático. No entanto, a Álgebra é mais do que a manipulação de símbolos e os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica (NCTM, 2000).

De acordo com o NCTM (2014), um ensino efetivo da Matemática foca no desenvolvimento tanto de compreensão conceptual quanto de fluência procedimental, onde conceitos e procedimentos sejam desenvolvidos de modo integrado e equilibrado. Nessa perspectiva, e particularmente no ensino e aprendizagem da Álgebra, a fluência procedimental deve estar baseada em compreensão conceptual, raciocínio estratégico e resolução de problemas. No entanto, o caráter estritamente procedimental com que a Álgebra é tradicionalmente apresentada na escola concorre para que este seja um tema pouco interessante para muitos alunos, contribuindo para o aumento do fracasso em Matemática. Enquanto professora de Matemática em turmas de 6.º a 9.º ano, percebi que muitos alunos começam a perder o gosto por esta disciplina quando os estudos se tornam mais formais e a linguagem agrega mais símbolos. Assim, um dos meus principais objetivos é que os alunos aprendam Álgebra com compreensão, na medida em que adquirem destreza na manipulação simbólica, a fim de contribuir para seu sucesso escolar e interesse pela Matemática.

As dificuldades dos estudantes em Álgebra têm sido amplamente referidas ao longo dos anos (Cai & Knuth, 2011; Kieran, 2007; Ponte, Branco & Matos, 2009; Radford, 2004). O simbolismo, bem como a manipulação algébrica, constitui um dos obstáculos para a aprendizagem do tema. Desse modo, tanto a crescente preocupação com a inadequada compreensão e preparação dos alunos neste ramo da Matemática quanto seu caráter seletivo têm feito da Álgebra um foco de pesquisas e políticas. A partir dos anos 80, discussões acerca de seu ensino e aprendizagem levaram ao surgimento de novas ideias acerca da Álgebra Escolar. Nos Estados Unidos, por exemplo, a crescente necessidade por uma maior literacia matemática e científica, bem como o objetivo de garantir equidade em educação matemática, levou um grupo de pais e professores a desenvolver, a partir da década de 90, uma política conhecida como "Projeto Álgebra". Esse projeto destacava a importância da aprendizagem das bases da Álgebra nos níveis intermédios de escolaridade para que os alunos pudessem optar por um ensino secundário com maior ênfase em matemática e ciências, e impulsionou o debate sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra. Também o NCTM (2000) indicou que a aprendizagem da Álgebra deve começar desde os primeiros anos de escolaridade e que estudantes de níveis intermédios devem ter experiências que os preparem melhor para o estudo formal da Álgebra nos anos seguintes, destacando a ideia da "Álgebra para todos".

Em Portugal, discussões acerca da aprendizagem da Álgebra também têm conduzido a mudanças significativas no ensino do tema. De acordo com o Programa de Matemática (2007), o grande objetivo do estudo da Álgebra nos ensinos básico e secundário é o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, e este deve ser trabalhado ao longo de todos os anos de escolaridade (ME, 2007). Este programa reintroduziu a Álgebra como tema programático no currículo português dos 2.º e 3.º ciclos, que havia desaparecido como grande tema desde o período da Matemática Moderna, e orientou uma iniciação ao pensamento algébrico no 1.º ciclo (Ponte, Branco & Matos, 2009). Nessa perspectiva, as ideias algébricas devem aparecer no 1.º ciclo no trabalho com sequências, ser aprofundadas no 2.º e 3.º ciclo, institucionalizadas por meio do uso da linguagem algébrica (ME, 2007).

O Programa de Matemática (2007) enfatiza o desenvolvimento de compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos; capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas; capacidade de abstração e generalização; e capacidade de comunicar em matemática, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias. Todas essas finalidades aplicam-se ao ensino da Álgebra, e o programa destaca a promoção do pensamento algébrico nos alunos, bem como da sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos (ME, 2007).

As orientações presentes no referido documento representam um avanço na Didática da Álgebra em Portugal e são consoantes aos princípios e normas para a Matemática escolar, NCTM (2000), para os quais o ensino da Álgebra deve habilitar todos os alunos para: 1) compreender padrões, relações e funções; 2) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; 3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e 4) analisar a variação em diversos contextos. Segundo o NCTM (2000), é expectável que a consolidação das bases da Álgebra ocorra no final do 8.º ano, onde o aluno deverá analisar e generalizar padrões usando diversas formas de representação e usar Álgebra simbólica tanto para representar situações quanto para resolver problemas, com compreensão conceptual de diferentes utilizações das variáveis e de formas equivalentes de expressões algébricas.

Nessa perspectiva, para promover o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica no 3.º ciclo, é fundamental conhecer mais acerca das aprendizagens dos alunos. Nomeadamente, é importante saber se é claro para os alunos o que representam os símbolos, se eles sabem como passar de uma situação problemática a linguagem algébrica, se sabem manipular as operações algébricas e se reconhecem as potencialidades do uso da linguagem algébrica. De acordo com Weinberg, Dresen e Slater (2016), apesar de haver um amplo corpo de investigações que descrevem o modo como estudantes pensam em conceitos e representações, tais investigações mostram-se incompletas ao desenhar o modo como os estudantes compreendem e usam símbolos algébricos. Nesse contexto, surge como pertinente a realização de uma investigação centrada no uso e na compreensão da linguagem algébrica por alunos do 3.º ciclo, com o intuito de contribuir para a aprendizagem significativa da Álgebra, no que se refere tanto aos seus conceitos próprios, quanto à fluência procedimental algébrica.

Considerando a relevância da Álgebra e da Álgebra escolar, pelos aspectos apresentados, minha opção por esse tema liga-se ainda com todo o meu percurso escolar, onde houve um maior interesse por esta área da Matemática, e com minha prática profissional, que tem incidido principalmente no 3.º ciclo. A investigação foca-se, portanto, nas aprendizagens e dificuldades dos alunos no 9.º ano de escolaridade, uma vez que neste período os estudantes já devem ter consolidadas as bases da Álgebra, e centra-se no uso e na compreensão da linguagem algébrica. Com este estudo pretendo ainda contribuir para a aprendizagem significativa da Álgebra e para um aprofundamento dos conhecimentos, tanto no âmbito da prática quanto no âmbito da investigação em Educação Matemática, sobre o modo como os alunos pensam em conceitos algébricos e usam a linguagem algébrica simbólica.

1.3. Objetivos e questões do estudo

O objetivo desse estudo é analisar significados construídos por estudantes e suas dificuldades no uso e compreensão da linguagem algébrica no final do 3.º ciclo da educação básica. Deste objetivo de estudo resultam as seguintes questões de investigação:

i) De que modo os estudantes relacionam representações algébricas com representações em linguagem verbal?

ii) Que significados os estudantes constroem para objetos e procedimentos algébricos?

iii) Quais são as dificuldades dos estudantes no uso e compreensão da linguagem algébrica?

Capítulo 2

Representações

Tendo em conta o objetivo desta investigação, que está centrado no uso e na compreensão da linguagem algébrica, faz-se necessária uma discussão acerca das representações e de seu papel na aprendizagem matemática. Deste modo, neste capítulo são abordados os seguintes temas: conceito, representações internas e externas, os tipos de representações, transformações de representações e múltiplas representações.

2.1. Introdução e conceito

Na aprendizagem matemática, o uso de representações começa no início da escolarização uma vez que o acesso ao objeto número não é direto, mas passa por representações variadas. Segundo Duval (2011), “a matemática começa quando não nos limitamos mais ao que é dado concretamente ou fisicamente, mas quando mergulhamos esse dado no conjunto de tudo o que podemos conceber como possível” (p. 46). Nessa perspectiva, o uso de representações possibilita ultrapassar a limitação da capacidade humana de acesso aos objetos matemáticos e é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Duval (2011) argumenta que a aprendizagem da matemática apresenta problemas de compreensão que não são encontrados nos outros domínios de conhecimento devido à própria natureza do conhecimento matemático bem como ao modo como temos acesso a eles. O acesso aos objetos matemáticos não decorre de uma percepção imediata possível, o que implica a produção de conceitos, cuja existência seria puramente mental ou intencional, e de representações produzidas em um sistema de signos. Dessa forma, as representações assumem um papel fundamental na aprendizagem dos conceitos matemáticos: “a matemática é o domínio do conhecimento no qual existe quase sempre, se não sempre, prioridade das representações sobre os objetos do conhecimento” (p. 34). Na sua perspectiva, constituem um aspecto fundamental para entender as principais dificuldades de compreensão na aprendizagem matemática. A capacidade de distinguir entre os objetos matemáticos e suas representações é indicada por Duval (2011) como uma das principais dificuldades na aprendizagem matemática.

Goldin (2002) conceitua representação como uma “configuração que pode representar outra coisa de alguma forma, como uma palavra que pode representar um objeto da vida real, um numeral que pode representar a cardinalidade de um conjunto, ou que pode representar uma posição em uma reta numérica” (p. 208). Uma representação pode, por exemplo, agir em lugar de, ser interpretada como, ligar a, corresponder a, denotar, codificar, evocar, significar, produzir, referir a, substituir, sugerir ou simbolizar o objeto representado. Esta configuração de representação pode fazer uma dessas coisas ou mais no pensamento das pessoas, individualmente. No contexto da educação matemática, Triphati (2008), ao abordar o desenvolvimento da compreensão matemática através das representações, considera que “uma representação matemática pode ser descrita como um construto mental ou físico que descreve aspectos da estrutura inerente a um conceito e as relações entre este conceito e outras ideias” (p. 438). Assim, representações são formas de uma ideia, que podem incluir componentes verbais, pictóricos, numéricos, gráficos, simbólicos, contextuais e concretos, por meio das quais podemos interpretar, comunicar e discutir essa ideia com outras pessoas.

Goldin (2002), ao usar o termo *representações* para referir-se às configurações que estão em lugar de outros objetos, destaca que estas configurações e suas relações com o objeto representado se estabelecem apenas após um período de tempo, inicialmente sendo apenas invenções individuais e eventualmente se tornando convenções partilhadas. Este autor expõe que a matemática é composta por estas representações convencionadas que se tornaram normativas a fim de permitir uma interação coerente entre duas pessoas relativamente ao mesmo objeto matemático e indica que “é importante haver um modo de se mover nas representações externas para descrever o que estudantes, professores e matemáticos estão fazendo internamente” (p. 208).

Ao analisar o desenvolvimento das competências representacionais humanas a partir de uma perspectiva histórica, Kaput e Shaffer (2002) destacaram o surgimento dos símbolos escritos. Segundo eles, a necessidade de representar quantidades colocou a matemática em um lugar central nesse processo, pois as demandas do comércio e da astronomia foram determinantes para a criação de um sistema simbólico externo. Assim, os autores acreditam que os símbolos numéricos constituem os primeiros símbolos puramente visuais, que “a invenção da escrita e a invenção de uma maneira de representar quantidades parecem coincidir" (Kaput & Shaffer, 2002, p. 283), e que tais símbolos foram aperfeiçoados a fim de se tornarem mais eficientes e de evitar a ambiguidade. As representações que inicialmente expressavam cada item, deram espaço a representações mais sofisticadas que indicavam um conjunto de itens, a fim de evitar a repetição que dificultava a contagem de grandes quantidades. Nesse sentido, as representações nos possibilitam exprimir os objetos matemáticos bem como comunicá-los, constituindo parte fundamental do desenvolvimento da matemática como ciência e, consequentemente, do processo de aprendizagem desse domínio de conhecimento, como refere Duval (2011): "a matemática é o único domínio em que o processo de conhecimento está estreitamente ligado à invenção de novos sistemas semióticos. Seu desenvolvimento deu acesso a novos objetos matemáticos" (p. 84).

Segundo Duval (2011), o uso dos sistemas de signos deu origem à semiótica, ciência que estuda os signos, no fim do século XIX, na qual se destacaram os autores Pierce, Frege e Saussure. Duval (2011) propõe-se a distinguir *signos* de *representações semióticas* a partir da ideia de que as representações semióticas têm uma organização interna que varia de um tipo de representação para outra e os signos só ganham sentido dentro dessa organização interna. Por exemplo, as representações semióticas são as frases em linguagem natural e as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. Assim, os signos são as unidades elementares às quais damos sentido dentro de um sistema de representações. Este autor refere-se ainda aos *registos de representação* como um sistema semiótico cognitivamente criador, um sistema semiótico particular que não funciona como um sistema formal, mas como um suporte para o pensamento humano. Este autor expõe que os registos de representação diferem dos códigos, uma vez que sua função principal não é a comunicação e sim o processo do pensamento em atos e o desenvolvimento do conhecimento. Dessa forma, os registos de representação servem fundamentalmente para auxiliar o pensamento humano, mas cumprem ainda a função de comunicação.

A álgebra e a análise, particularmente, se desenvolveram com a constituição de registros de representação específicos, as escritas simbólicas e as representações gráficas, e estes registros foram determinantes para um processo de queda do papel da linguagem natural no desenvolvimento do pensamento científico e matemático. Nesse aspecto, Duval (2011) argumenta que a linguagem natural tem sido vista na aprendizagem matemática prioritariamente como um código, na medida em que tem a comunicação como sua principal função enquanto seu caráter de registo é fundamental no processo de compreensão de conceitos, "a língua constitui o primeiro registo de representação semiótica para o funcionamento do pensamento" (Duval, 2011, p. 83). Duval (2011) indica, entretanto, que a distância cognitiva entre a língua natural e os outros registros, principalmente os simbólicos e gráficos, é uma das origens da incompreensão.

2.2. Representações externas e internas

As representações matemáticas são tradicionalmente apresentadas na literatura como internas ou externas. As representações internas são, por exemplo, os processos e estratégias de resolução de problemas ou a capacidade de processar a linguagem natural enquanto as representações externas tratam-se de organizações simbólicas externas como palavras, figuras, equações e gráficos. O primeiro tipo de representações não pode ser acessado diretamente uma vez que, sob circunstâncias normais, não é possível observar as representações internas de ninguém. Segundo Goldin (2002) "até mesmo a extensão da introspecção que permitiria descrever nossas próprias representações internas é questionável" (p. 210). É possível fazer inferências a partir dos comportamentos observáveis das pessoas e de suas interações com o sistema de representações externas, entretanto, não é possível acessar diretamente seu sistema de representações internas.

Segundo Goldin (2002) as representações internas podem pertencer a cinco tipos de sistemas: (a) sistemas verbais/sintáticos; (b) sistemas imagéticos; (c) sistemas de notação formal; (d) sistemas de planejamento, monitoração e controle de execução e (e) sistemas afetivos. Estes sistemas internos se relacionam bidireccionalmente com os sistemas externos de representação usados pelo indivíduo. Isso significa que, no processo em que os estudantes aprendem a interpretar e usar representações matemáticas externas para resolver problemas, representações externas traduzem representações internas e representações internas traduzem representações externas, "as notações simbólicas formais da matemática, a reta numérica, planos complexos, gráficos e diagramas de Venn também são representados e processados internamente" (Goldin 2002, p. 211).

Este autor introduz a ideia de representações externas indicando que os padrões existentes na natureza constituem o objeto de estudo fundamental da matemática e que, a fim de entendê-los, podemos mobilizar representações internas e exprimi-los por meio de representações externas. Nesse sentido, a matemática pode ser vista como uma linguagem onde as estruturas representacionais internas estão ligadas entre si por meio de uma relação de significados. Cada um dos cinco tipos de sistemas internos de representação permite ao indivíduo produzir um vasto e complexo conjunto de representações externas que podem ser interpretadas por outras pessoas. Seriam elas: (a) linguagem escrita e falada; (b) desenhos, representações pictóricas e musicais; (c) fórmulas matemáticas e equações; (d) expressões de objetivos e planejamento; e (e) expressões faciais e linguagem corporal.

2.3. Tipos de representações

As representações têm diversas classificações. De acordo com Bruner (1999), para quem as representações são uma maneira de traduzir as experiências num modelo de mundo, existem três categorias de representações que intervêm no processo de desenvolvimento humano: a) ativas, que se referem a ações com objetos ou movimentos; b) icônicas, que tratam das imagens visuais; e c) simbólicas, com respeito às palavras e à linguagem simbólica. Este autor destaca que as representações simbólicas têm uma propriedade que permite compactação, por exemplo, $F = M.A$, que significam um grande salto no crescimento intelectual e na compreensão do mundo.

Para Lesh, Post e Behr (1987) as representações são manifestações externas das conceituações internas dos estudantes, e podem ser classificadas da seguinte maneira: a) contextuais, que consistem em situações do mundo real que servem como contextos gerais para interpretação e resolução de outras situações problemáticas; b) concretas, que se tratam de materiais manipuláveis como barras de frações ou blocos Multibase; c) pictóricas ou diagramas, que podem ser internalizadas como imagens estáticas; d) linguagem oral; e e) simbolismo, notações que, assim como na linguagem oral, podem expressar sentenças completas. Estes autores enfatizam que, além do conhecimento destas representações ser importante, a realização de transformações entre elas é também essencial, estabelecendo relações de um sistema de representações para outro preservando significado e características estruturais do objeto matemático em questão.

2.4. Transformação de representações

De acordo com Duval (2011), a atividade matemática consiste fundamentalmente na transformação das representações semióticas e pode mobilizar representações semióticas muito diferentes para representar os mesmos objetos. Para ele, "a *transformação de representações semióticas* é o processo que encontramos em todas as formas de atividade matemática. Quer quando se trata de explorar situações, resolver problemas ou demonstrar conjecturas, ela constitui a dinâmica de progressão" (p. 66). Assim, as representações semióticas, além de cumprirem um papel central relativamente ao conhecimento dos objetos matemáticos, também caracterizam a própria atividade matemática por meio de suas transformações, que se tratam precisamente da potencialidade de cada representação matemática ser facilmente transformada em outra representação semiótica. Nesse sentido, o autor considera que essas transformações podem ser de dois tipos: tratamentos (transformações dentro do mesmo tipo de representação) e conversões (transformações que envolvem diferentes tipos de representações). A transformação de números decimais para sua representação decimal seria um tratamento uma vez que se situa na mesma representação simbólica, enquanto representar um número fracionário por meio de uma imagem seria uma conversão, pois passa de uma representação simbólica para uma representação icônica.

Segundo Duval (2011), a importância das transformações de representação está relacionada à necessidade de não confundir o objeto matemático com sua representação, o que significa que é preciso dispor de uma segunda representação cujo conteúdo seja diferente da primeira. Autores como Duval e Triphati defendem que o uso de diversas representações funciona como olhar para os objetos matemáticos através de diferentes lentes e assim, chegar a um entendimento mais profundo do conceito matemático envolvido. Nesse sentido, Duval (2011) usa a expressão *colocar em correspondência as unidades de sentido* próprias de cada representação para referir-se à ação de comparar elementos dos conteúdos respectivos de duas representações.

Lesh, Post e Berh (1987) relatam ainda que os resultados de suas pesquisas apontam para uma deficiência na compreensão de modelos e linguagens necessárias para representar e manipular ideias matemáticas. Segundo estes autores, a capacidade de transformações de representações é essencial na atividade matemática e tem figurado entre as principais dificuldades dos estudantes: "essas habilidades de transformação são fatores significativos que influenciam tanto a aprendizagem matemática quanto o desempenho da resolução de problemas, e o fortalecimento ou correção dessas habilidades facilita a aquisição e o uso de ideias matemáticas elementares" (p. 34).

2.5. Representações múltiplas

A partir da ideia inicial de que os objetos matemáticos não são acessíveis fora das representações semióticas, Duval (2011) indica que é necessário perspectivá-los por meio de mais de um tipo de representação e colocar em correspondência suas unidades de sentido. Em outras palavras, a única maneira de acesso possível aos objetos empiricamente não acessíveis é colocar em correspondência representações semióticas diferentes. Nesse sentido, o autor destaca que "a discriminação das unidades de sentido pertinentes nas diferentes representações não é a consequência da aquisição dos conceitos, mas a condição preliminar dessa aquisição” (p. 49), uma vez que cada tipo de representação evidencia diferentes aspectos do objeto.

Semelhantemente, Triphati (2008) considera que cada representação matemática evidencia apenas um aspecto do objeto matemático em causa e que, portanto, os conceitos matemáticos são compreendidos apenas quando o indivíduo vê o objeto a partir de perspectivas variadas, ou seja, a partir de diversos tipos de representações. Como refere a autora “uma representação matemática sempre destaca apenas um aspecto de um conceito matemático. Restringir o mesmo a uma representação matemática qualquer é abordar o conceito de olhos vendados” (p. 438). Como vimos acima, Duval (2011) destaca a importância, em matemática, de colocar em correspondência as unidades de sentido de diversas representações e afirma que colocar em correspondência é a única operação cognitiva que permite retirar as propriedades ou ter acesso a novos objetos de conhecimento baseando-se nestas unidades de sentido que constituem o conteúdo das representações semióticas. Assim, o objeto representado é acedido ou conhecido através das diferentes representações, precisamente pelos elementos evidenciados em cada representação. O autor enfatiza que “não podemos nos concentrar em um único registro e privilegiá-lo como mais representativo que os outros, pois a compreensão se situa no nível da coordenação de pelo menos dois registros” (Duval, 2011, p. 149) e que a linguagem natural, por exemplo, não deve ser marginalizada em detrimento dos outros registros.

A importância das representações tem sido reiterada constantemente nas publicações do NCTM. O NCTM (2000), ao exemplificar a importância do uso de diversas representações na aprendizagem da álgebra, expõe que a compreensão conceitual desenvolve-se gradualmente quando os alunos criam e usam expressões simbólicas e as relacionam com gráficos, tabelas e representações em linguagem natural. De acordo com o NCTM (2014), as representações constituem parte importante das estruturas mentais articuladas em atividade matemática e é preciso dar-lhe grande atenção em sala de aula, uma vez que relacionar diversos tipos de representação, nomeadamente visuais, físicas, simbólicas, verbais e contextuais, possibilita ao aluno uma compreensão mais profunda do conceito matemático em foco. O uso e estabelecimento de conexões entre as representações matemáticas não só sustentam a compreensão de conceitos e procedimentos, mas também contribuem para um ensino eficaz da matemática, onde os alunos apreciam a matemática como uma disciplina unificada e coerente.

Assim, relativamente ao uso das diversas representações matemáticas, o NCTM (2014) aponta que as representações devem ser tratadas explicitamente no contexto da sala de aula e que deve haver uma intencionalidade do professor na preparação de tarefas que incentivem ao uso de representações variadas, na condução de momentos de discussão, nas comparações entre as representações e nos diálogos que expressam as representações como ferramentas para a compreensão de ideias matemáticas. É importante perceber que os autores destacam o uso de diversas representações como uma capacidade a ser desenvolvida pelos alunos e que o trabalho feito em sala de aula deve visar ao desenvolvimento desta competência. Trata-se da capacidade do aluno "mover-se" com flexibilidade entre os diversos tipos de representação durante a atividade matemática, o que evidenciaria não apenas a compreensão dos conceitos em causa como também o discernimento de que tipo de representação é mais adequado em cada situação.

A ideia de usar múltiplas representações objetivando a compreensão conceitual destaca a necessidade de que os alunos depreendam os significados implícitos em cada representação. Goldin (2002) refere-se a uma noção sintática ou estrutural de significado que complementa e contrasta com uma noção semântica onde os significados das representações e configurações são inerentes a elementos externos ao sistema de representação (p. 209). Nesse sentido, este autor exemplifica com o caso da do valor desconhecido introduzido na Álgebra a necessidade de articular abstração e processos de contextualização na aprendizagem deste conceito. Ainda segundo Kieran (2007) uso de múltiplas representações é uma fonte de significado especificamente no campo da Álgebra. Oportunizar o estudante a observar o mesmo objeto algébrico a partir de duas representações, como pelo gráfico e pela expressão algébrica, o ajuda na construção de significado em Álgebra. Nesse sentido, um estudo empírico realizado por Guerreiro (2009) indica que existem muitas dificuldades na articulação entre as várias representações das funções, principalmente quando está envolvida a representação algébrica. Os alunos revelam dificuldades ao nível da escrita e interpretação de expressões, e não conseguem associar diretamente as expressões algébricas das funções aos seus gráficos, recorrendo às representações numéricas como passo intermédio. Os resultados apresentados pela autora mostram que a passagem entre as representações algébricas e as representações gráficas e verbais tem associadas muita dificuldade.

Especificamente no que se refere à linguagem algébrica, Radford tem realizado diversos estudos e destaca a importância da linguagem natural no processo de aquisição da linguagem algébrica. Assim, Radford (2000) relata resultados de um programa de pesquisa cujo objetivo era entender as dificuldades que alunos geralmente encontram no domínio da linguagem algébrica e indica que articular linguagem natural, representações pictóricas e linguagem simbólica é imprescindível para que os alunos sejam bem sucedidos neste processo. Assim, como em toda a matemática, na aprendizagem da Álgebra o uso de múltiplas representações fez-se necessário para que os alunos tenham compreensão dos conceitos algébricos e desenvolvam a capacidade de transitar entre os diferentes tipos de representações matemática.

Capítulo 3

Álgebra e Simbolização

Uma discussão relativamente a aspectos da simbolização e do seu papel na Álgebra é essencial ao tema da linguagem algébrica e sua compreensão pelos estudantes, onde este estudo está inserido. Desse modo, neste capítulo serão abordados os seguintes tópicos: processo de simbolização, aquisição da linguagem algébrica e sentido de símbolo.

3.1. Introdução

Como vimos, a Matemática desempenhou um papel crítico no desenvolvimento das competências representacionais humanas, especialmente da escrita. A simbolização, especialmente no caso da Álgebra, permite-nos fazer generalizações e utilizá-las para obter novas generalizações, de forma que novas possibilidades matemáticas se tornaram possíveis. De acordo com Kaput e Shaffer (2002), a partir da emergência das ideias de universal e abstrato, a Álgebra começou a ser desenvolvida e a ser usada para criar um conjunto de poderosos modelos para o mundo material. Isto possibilitou grande avanço científico e tecnológico e fomentou a aprendizagem da Álgebra. Estes autores argumentam que as transformações que ocorrem atualmente devido à computação e ao avanço tecnológico, onde a compreensão algébrica ganha cada vez mais um importante papel, tornam necessário reexaminar as ideias de abstração matemática e criar espaço em nossa noção de compreensão para uma 'abstração concreta' que constrói significado matemático como uma teia de associações significativas.

Historicamente as origens da Álgebra situam-se na formalização e sistematização de técnicas de resolução de problemas. Assim, a Álgebra começou a ser entendida como o estudo da resolução de equações e o uso de símbolos literais para a resolução de equações (Ponte, Branco & Matos, 2009). Para Kaput (2008), assim como a Matemática, que pode ser perspectivada como corpo de conhecimento recebido culturalmente ou como atividade humana que envolve representações e suas transformações, o termo Álgebra pode referir a um corpo de conhecimento e ainda a uma atividade humana, o pensamento algébrico. Na sua perspectiva, a generalização e a simbolização são fundamentais ao pensar em Álgebra: "o coração do raciocínio algébrico é composto por um complexo processo de simbolização que serve ao propósito da generalização e do raciocínio com generalização" (p. 9).

Kaput (2008) descreve dois aspectos centrais da Álgebra: (A) Álgebra como generalização de regularidades por meio da simbolização sistemática e (B) Álgebra como raciocínio e ação guiados sintaticamente em generalizações expressas em um sistema simbólico convencional. Para este autor, estes dois aspectos estão presentes de alguma maneira nas três vertentes da Álgebra: 1) Álgebra como estudo de estruturas e sistemas abstratos de cálculos e relações, incluindo a Álgebra como Aritmética generalizada e raciocínio quantitativo; 2) Álgebra como estudo de funções, relações e variação; e 3) Álgebra como linguagem de modelação dentro e fora da Matemática. A primeira vertente engloba a construção dos aspetos sintáticos da Álgebra a partir da estrutura da Aritmética, generalização de relações e propriedades, e o desenvolvimento da ideia de que uma expressão pode ser substituída por uma outra equivalente. A segunda vertente envolve generalizações a partir da ideia de função, onde as expressões de generalização descrevem uma variação sistemática em um domínio determinado. A terceira vertente refere-se à atividade algébrica como modelação e segundo Kaput (2008), pode envolver modelação de problemas, generalização para expressar funções e situações de resposta única ou problemas de palavras puramente aritméticos.

Relativamente à aprendizagem algébrica, existem diversas opiniões de matemáticos e educadores matemáticos acerca de qual dos dois aspectos referidos por Kaput (2008), é mais importante ao definir a Álgebra. Para alguns, a manipulação simbólica por meio de regras é o cerne do raciocínio algébrico independentemente de estar ligada a generalizações e modelação. Enquanto outros argumentam que apenas após repetitiva experiência de expressão de generalizações se deve introduzir a notação algébrica convencional. Carraher, Schliemann e Schwartz (2008) indicam que há muito interesse em como os alunos constroem compreensão da sintaxe da Álgebra e que, porém, deveríamos dar também atenção às ações sobre símbolos por uma perspectiva mais linguística, observando as interações entre como os símbolos são analisados visualmente e como são construídos matematicamente. Da mesma forma, Kaput e Shaffer (2002) defendem que, ainda que a emergência da Álgebra tenha possibilitado um distanciamento dos referenciais físicos dos símbolos matemáticos, o que facilitou a utilização e tratamento de ideias matemáticas, e a criação de um sistema simbólico poderoso, a ciência e a tecnologia utilizam-se dele precisamente para generalização de regularidades e modelação de situações reais a partir de seus significados.

3.2. Processo de simbolização

De acordo com Kaput, Blanton e Moreno (2008), generalização e simbolização estão fortemente ligadas pelo fato de que a única maneira de uma pessoa fazer uma afirmação que se aplique a múltiplos casos, sem fazer afirmações repetitivas sobre cada caso, é referi-los através de uma expressão que abranja todos eles de maneira única. Isso requer algum tipo de forma simbólica por meio da qual se unifique a multiplicidade, e a generalização seria o ato de criação destes objetos simbólicos. Estes autores destacam que os próprios símbolos apoiam o processo de raciocínio uma vez que carregam as estruturas da generalização de forma mais cristalizada, concreta e compacta, e assim possibilitam a comparação de generalizações, a análise de sua aplicabilidade e a ação direta nos próprios símbolos para manipular sistematicamente suas configurações, representando-as de diferentes formas. Os autores referem ainda que as regras de substituição que constituem a sintaxe da ação sobre os símbolos capturam e fixam ações mentais de operação sobre símbolos físicos cujos resultados são objetos equivalentes, que representam tanto uma fonte de força matemática quanto uma fonte de dificuldades para estudantes e professores.

Relativamente ao processo de simbolização, Kaput, Blanton e Moreno (2008) argumentam que este tem início a partir de uma situação problemática, matemática ou não, quando os alunos começam a produzir representações informais orais, escritas ou pictóricas para descrevê-la. A análise e a comunicação destas representações dão origem a uma nova conceituação da situação inicial, que é também descrita por meio de novas representações externas e assim, este processo continua em direção aos símbolos convencionais. Trata-se, portanto, de um processo reflexivo e recursivo no qual o aluno constroi um conjunto de conceituações e que converge para os símbolos convencionais durante a socialização destas conceituações. Tal processo de simbolização prescinde de uma distinção entre o símbolo e seu referente, que resulta de uma cadeia de significação guiada pela comunicação de ideias e reformulação da situação inicial. Em cada estágio, a externalização e a reformulação acontecem simultaneamente até que o estudante compreende que o símbolo é uma entidade física separada do objeto que ele representa.

Quando as situações que dão origem ao processo de simbolização são de natureza matemática, a simbolização ocorre em função da generalização e converge para o sistema simbólico convencional, em particular para a notação algébrica. Kaput, Blanton e Moreno (2008) destacam a diferença entre as ações realizadas em um sistema simbólico convencional, quando este é o resultado de uma simbolização ativa pelo aluno, que permite sua coordenação com os referenciais iniciais, e as ações realizadas em um sistema simbólico convencional que não é resultado de uma simbolização ativa e onde os alunos não têm acesso direto ao campo referencial. Neste último caso, as ações de manipulação simbólica são guiadas apenas pelas regras do sistema simbólico, sem nenhuma ligação com a aprendizagem no campo referencial. A falta de ligações conceituais torna muito frágil este sistema simbólico adotado pelo aluno. Para estes autores, apesar de haver muito o que aprender sobre o processo de simbolização, é certo que este não pode ser separado da conceituação: “Ideias se expandem através de nossas tentativas de expressá-las para nós mesmos e para outros, e nossas tentativas de expressá-las dão origem a simbolizações que ajudam a construir e preencher estas ideias de forma que conceituação e simbolização se tornam inseparáveis” (Kaput, Blanton & Moreno, 2008, p. 21)

O uso estritamente procedimental do sistema simbólico algébrico não fornece uma base para uma simbolização crítica, mas a instrução apropriadamente processada, por meio das experiências de generalização e simbolização, de fato apoia a simbolização com significado para o aluno. Kaput, Blanton e Moreno (2008) afirmam que “as ações em sistemas simbólicos não são frutíferas até que sejam resultados de generalizações de situações expressas de modo compacto e cristalizado pela simbolização” (p. 44). Estes autores destacam que o processo de simbolização resulta tanto na separação do símbolo de seu referente, quanto na forte conexão entre eles.

Desta maneira, a linguagem simbólica pode ser usada para ver ou trabalhar com o símbolo sem pensar em seu referente ou ainda para conectá-los e compreender o significado expresso pelo símbolo. Trata-se da capacidade de discernir o que é mais conveniente, adiar a busca pelo significado implícito na expressão simbólica, em função de uma rápida aplicação de um procedimento ou, parar e proceder à interpretação desses símbolos com o objetivo de compreender e construir novos significados. Portanto, a capacidade de escolher uma ação ou outra constitui uma competência essencial em Álgebra e deve ser desenvolvida ao longo da aprendizagem algébrica.

3.3. Aquisição da linguagem algébrica

O desenvolvimento das competências algébricas pressupõe diversas experiências com os símbolos algébricos que permitam aos alunos ver seus diferentes significados e aplicações. Como referem Sfard e Linchevski (1994), os símbolos algébricos não falam por si próprios, de modo que o que uma pessoa vê ao olhar para uma expressão algébrica simbólica depende do problema ao qual esta expressão é aplicada, e ao que o observador está apto para perceber. Radford (2000a) afirma que "a compreensão da estrutura sintática da linguagem algébrica e dos significados dos símbolos é um longo processo na trajetória ontogenética dos alunos" (p. 240). Dessa forma, a aquisição da linguagem algébrica tem lugar por meio do processo em que os alunos entendem, produzem e usam símbolos.

Sfard e Linchevski (1994) defendem que há duas formas de pensamento matemático distintos na origem da maioria dos conceitos matemáticos: uma concepção operacional, de acordo com a qual as noções matemáticas são compreendidas por meio de certos processos, e a concepção estrutural, onde as noções matemáticas referem-se a entidades como objetos reais, estruturas que podem ser manipuladas e combinadas. Para estes autores, essas duas concepções não são mutuamente exclusivas, mas complementares, sendo ambas indispensáveis para uma compreensão profunda da Matemática. No desenvolvimento conceitual dos estudantes, porém, a concepção operacional é a primeira a emergir e, por meio da reificação dos processos, permite o avanço para a concepção estrutural: "parece razoável que podemos tirar proveito da propensão natural dos estudantes para uma abordagem operacional começando por processos em vez de objetos algébricos prontos" (p. 224). A reificação é designada por estes autores como a etapa do desenvolvimento onde ocorre a aquisição da capacidade de ver os símbolos como objetos permanentes de direito próprio e é precedida pela interiorização, onde os processos são realizados em objetos matemáticos familiares, e pela condensação, onde os processos são transformados em unidades compactas, os símbolos (Sfard & Linchevski, 1994).

Relativamente ao processo de aquisição da linguagem algébrica, Sfard e Linchevski (1994) afirmam que "tanto historicamente quanto no processo de aprendizagem, o raciocínio algébrico aparece antes de qualquer notação ser introduzida" (p. 92) enfatizando o papel da linguagem verbal nesta construção do raciocínio algébrico. Também Radford (2002), ao realizar um estudo empírico com alunos do 8.º ano de escolaridade em que é proposta a realização de uma tarefa de generalização, apresentou um caso em que a expressão algébrica escrita pelos alunos não era compatível com o padrão por eles expresso corretamente em linguagem verbal e destacou que as expressões algébricas escritas pelos alunos evidenciam o caminho de suas ações, ou seja, sua experiência: "a fórmula expressa a incorporação da experiência matemática dos alunos" (p.19). Radford (2002) argumenta que a sintaxe das operações é sempre ditada pela ordem das ações e que, nas estratégias dos alunos, as ações precedem a simbolização de forma que estes compreendem a situação, desenvolvem o raciocínio algébrico proposto e caminham para a linguagem algébrica simbólica. Este autor enfatiza ainda que a partir de diversos meios semióticos, por exemplo, linguagem natural, gestos e artefatos, há um maior acesso às ideias matemáticas abstratas, ou seja, há uma maior compreensão dos conceitos algébricos se vistos sob diversas perspectivas.

Assim, vemos que o processo de aquisição da linguagem algébrica tem início a partir de situações familiares aos alunos, onde o raciocínio algébrico emerge em função da generalização e é expresso por meio de linguagem natural, gestos e outras representações, em um ciclo de aprendizagem de conceitos algébricos. Entretanto, os alunos avançam para a construção de expressões simbólicas e, por meio da reificação destes processos, chegam a uma concepção estrutural da linguagem simbólica, onde passam a enxergar os símbolos como objetos permanentes de direito próprio (Sfard & Linchevski, 1994). Ao longo deste processo, expressões simbólicas simples, como $3(x+5)+1$, ganham diferentes significados para os alunos, por exemplo como representação de um determinado número, de uma função ou uma família de funções. Com base nas ideias da Aritmética generalizada, dos padrões de números e operações e, dos símbolos que representam valores desconhecidos ou variáveis, os alunos passam a manipular as expressões simbólicas de forma independente de contexto, em direção à versatilidade e adaptabilidade do conhecimento algébrico (Sfard & Linchevski, 1994).

Sfard e Linchevski (1994) destacam que, em suas pesquisas com estudantes, a maioria deles não sabe lidar com problemas que não estejam no campo dos procedimentos ensinados. Em sua perspectiva, uma vez que a concepção operacional não constitui um caminho simples e rapidamente acessível, mas que pressupõe um processo de aprendizagem, é possível entender porque a abordagem mecanicista e pseudoestrutural pode eventualmente ser a primeira opção de ensino para professores e dominar o raciocínio dos estudantes, não deixando espaço para perspectivas que destacam conceitos e significados (Sfard & Linchevski, 1994, p.119). Nesse sentido, os autores argumentam que essa alternativa não promove um ensino da Álgebra com foco nos conceitos algébricos, e que ambas as abordagens são fundamentais na aprendizagem, sendo por meio de sua complementariedade que os alunos adquirem versatilidade e adaptabilidade no conhecimento algébrico.

3.4. Sentido de símbolo

Ao longo dos ciclos de escolaridade, a aprendizagem matemática envolve um simbolismo cada vez mais sofisticado. No 3.º ciclo, os alunos aprofundam seus conhecimentos em Álgebra e devem tornar-se capazes de recorrer ao simbolismo algébrico para resolver problemas. Esse tema matemático é visto comumente pelos alunos apenas como manipulação simbólica, resolução de equações e simplificação de expressões, mas, no entanto, apesar destes aspectos serem cruciais no trabalho matemático, a Álgebra é mais do que a manipulação de símbolos, e a aprendizagem algébrica deve evidenciar isto. Como destaca o NCTM (2000), “os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser usados para registar ideias e tirar ilações face a certas situações” (p. 39). Neste sentido, Arcavi (2006) argumenta que o desenvolvimento das competências algébricas leva ao que chama de ‘sentido de símbolo’. Este autor relaciona inicialmente o sentido de símbolo ao sentido de número, uma vez que o entendimento de sentido de número pode ser estendido ao campo da Álgebra a partir de reflexões análogas. Refere ainda que a necessidade de obter significados é a força motriz básica de todas as atividades intelectuais, inclusive na atividade algébrica, e levanta questionamentos acerca de como ocorrem estes processos de busca de significados e como podem ser promovidos através do ensino.

Arcavi (2006) propõe uma definição de sentido de símbolo através de uma lista de componentes essenciais: 1) simpatia com os símbolos, incluindo a compreensão dos símbolos e um sentido estético de seu poder – constitui a iniciativa de recorrer facilmente aos símbolos para entender situações, crendo que estes são as ferramentas apropriadas para a resolução do problema bem como o reconhecimento de que o uso de outras representações pode ser mais adequado na situação matemática proposta; 2) capacidade de manipular e também de ‘ler’ através das expressões simbólicas, como dois aspectos complementares na resolução de problemas algébricos – que inclui a importância da eficiência e da rapidez na manipulação simbólica e ainda de um sentido crítico quanto aos resultados e seus significados; 3) consciência de que é possível representar informações com exatidão por meio de expressões simbólicas; 4) capacidade de selecionar uma representação simbólica possível para uma informação ou problema e de reconhecer a própria insatisfação com a notação escolhida, empenhando-se na busca por uma melhor; 5) Consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos durante a aplicação de um procedimento, a resolução de um problema ou a verificação de um resultado e comparar esses resultados com as intuições acerca dos resultados esperados e com a situação do problema, isto é, a revisão do resultado simbólico para recuperar seus resultados e origens; e 6) Consciência de que os símbolos podem desempenhar funções distintas em contextos diferentes e desenvolver um sentido intuitivo dessas diferenças.

Arcavi (2006) argumenta que o desenvolvimento do sentido de símbolo está mais ligado à cultura de aula, que o promove ou não, do que às habilidades matemáticas inatas dos alunos. Para ele, este é um fator crucial do que se aprende e do que se desenvolve, e pode ter implicações para apoiar o desenvolvimento do sentido de símbolo, se este for colocado, por vezes, em primeiro plano. Com isto o autor destaca que é importante mostrar aos alunos os benefícios de raciocinar informalmente sobre um problema antes de abordá-lo simbolicamente. Se os alunos não vivenciam esses momentos ou se os professores não aprovam este tipo de raciocínio, então o uso espontâneo do senso comum e a busca de significados serão menosprezados, como uma prioridade inferior diante das manipulações simbólicas: “devemos repensar o que nossas práticas de aula recompensam, o que é valorizado, o que é aceito como as regras do jogo além da manipulação simbólica” (p. 9). Arcavi (2006) inclui também em competências algébricas o que chama de ‘paciência intelectual’, a capacidade de conviver com compreensão parcial por longos períodos de tempo. No caso da Álgebra, esta paciência intelectual manifesta-se, por exemplo, por meio da ideia de que às vezes os significados emergem de expressões simbólicas que não têm sentido para a pessoa até o momento.

Uma questão fundamental colocada por Arcavi (2006) refere-se ao papel da manipulação algébrica no desenvolvimento do sentido de símbolo e se o ensino dessas técnicas e procedimentos deve ser feito de modo anterior, paralelo ou posterior ao processo de busca de significados nas situações algébricas. Nesse sentido, indica a importância de ambos e destaca que uma das principais componentes do sentido de símbolo é a capacidade de transição flexível entre os procedimentos automáticos com símbolos e a aplicação do sentido comum, que consiste em “adiamento dos significados em favor da aplicação rápida e eficiente de um procedimento e, quando necessário, interrupção de uma rotina automática com o objetivo de questionar, refletir, conectar ideias, tirar conclusões e elaborar novos significados” (p. 11). Dessa forma, a busca de significados e a manipulação algébrica são, ambos, fundamentais na atividade algébrica e cabe ao aluno discernir em que momento é mais apropriado aplicar cada um. O domínio de técnicas de manipulação algébrica é valorizado por carregar procedimentos que exprimem significados sem, entretanto, requerer um constante esforço cognitivo, enquanto as ações de raciocínio e conexão de ideias trazem a elaboração de novos significados à situação em questão na atividade matemática. Por meio da aprendizagem algébrica, pretende-se, portanto, desenvolver não apenas as competências que compõem o sentido de símbolo, mas também essa capacidade de transição flexível que evidencia tanto compreensão conceitual algébrica quanto domínio das regras de manipulação simbólica.

Capítulo 4

Álgebra Escolar

Neste capítulo apresento diferentes perspectivas sobre a Álgebra escolar, destacando os seguintes tópicos: abordagens e conteúdos, atividade algébrica, significado algébrico e dificuldades dos alunos neste domínio da matemática. Tal discussão é essencial para a análise dos significados e dificuldades dos estudantes que participaram da pesquisa e para responder às questões de investigação.

4.1. Abordagens e conteúdos

A visão da Álgebra como consistindo fundamentalmente no trabalho com símbolos e expressões é muito comum, apesar da generalização e das relações abstratas estarem no centro deste tema matemático. No entanto, muitos autores têm vindo a afirmar que, mais do que numa prática de manipulação simbólica, o ensino da Álgebra deve basear-se na compreensão de conceitos algébricos, das estruturas e dos princípios que regem os procedimentos de trabalho com os símbolos (NCTM, 2000; Ponte, Branco & Matos, 2009; Sfard & Linchevski, 1994). De acordo com o NCTM (2000), esta perspectiva não se coaduna com o início do ensino da Álgebra de forma abrupta, mas com um trabalho desenvolvido desde os primeiros anos de escolaridade, ou seja, a Álgebra como um fio condutor curricular por meio do qual o aluno tem, ao longo da vida escolar, experiências que lhe permitam compreender padrões, relações e funções, representar e analisar situações usando símbolos algébricos, usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas e analisar a variação em diversos contextos.

Kieran (2007), ao abordar o ensino e a aprendizagem da Álgebra, afirma que o conteúdo da Álgebra escolar pode variar muito e que, atualmente, existem diversas vertentes, nomeadamente, a tradicional e a não tradicional. Na sua perspectiva, a vertente tradicional tem uma forte orientação simbólica, com foco na manipulação simbólica e na resolução de equações, inequações e sistemas de equações, dando ainda algum espaço para os problemas verbais, onde os alunos podem aplicar as regras de manipulação simbólica. A abordagem não tradicional perspectiva a Álgebra a partir do pensamento funcional, focando no uso de diversas representações e na resolução de problemas reais. Segundo esta autora, há também uma vertente híbrida que é bastante criticada sob o argumento de que pode criar dificuldades adicionais nos estudantes. As duas abordagens principais disputam se a ênfase da educação matemática deve estar na manipulação simbólica ou na resolução de problemas reais a partir da Álgebra, o que revela os posicionamentos distintos característicos de matemáticos, educadores matemáticos e pesquisadores em educação matemática.

No que respeita a capacidades a desenvolver, as normas para a Álgebra do NCTM (2000) indicam que os programas de ensino deverão habilitar os alunos para: a) compreender padrões, relações e funções; b) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; c) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e d) analisar a variação em diversos contextos. Particularmente no que se refere ao ensino da Álgebra no 3.º ciclo, o NCTM (2000) defende que a consolidação das bases da Álgebra deve ocorrer no final do 8.º ano, onde o aluno deverá analisar e generalizar padrões usando diferentes formas de representação, identificar funções lineares explorando a ideia de declive em gráficos e expressões algébricas e usar Álgebra simbólica para representar situações e resolver problemas, com compreensão conceitual de diferentes utilizações das variáveis e de formas equivalentes de expressões algébricas.

4.2. Atividade algébrica

Na perspectiva de Kieran (2007), as atividades da Álgebra escolar podem ser classificadas em três tipos: geracional, transformacional e 'metaglobal'. As atividades geracionais envolvem a construção e interpretação de objetos algébricos, expressões e equações, em diversos contextos de atividade, como situações-problema, generalização de padrões geométricos ou sequências numéricas e propriedades características das relações numéricas. Para esta autora, esse tipo de atividade algébrica é muito importante para a construção de significados: "grande parte do significado construído para objetos algébricos é construído no contexto de atividade geracional" (p. 713). As atividades transformacionais constituem as ações de manipulação simbólica como simplificação de expressões, fatoração e resolução de equações. Um aspecto importante desse tipo de atividade é a sua relação com a noção de equivalência, onde os significados devem ser construídos de forma que os alunos compreendam a possibilidade de mudar a forma simbólica da expressão ou equação mantendo a equivalência. Assim, as atividades transformacionais também trabalham significado conceitual, não se tratando apenas da habilidade de manipulação algébrica, mas de uma atividade que pode proporcionar aos alunos a compreensão de elementos teóricos e estruturais, principalmente durante o período em que essas transformações são aprendidas. O último tipo de atividades, metaglobal, não envolve exclusivamente a Álgebra e não se situa necessariamente no campo da Matemática, mas utiliza estes domínios como ferramenta para um propósito mais geral. Essas atividades incluem resolução de problemas, modelação, generalização de padrões, justificações, demonstrações e muitas outras.

Segundo Radford (2001), nas atividades geracionais a Álgebra tem a função de linguagem para expressar significado sendo, portanto, um tipo de atividade fundamental na aprendizagem algébrica uma vez que muito do significado algébrico que os alunos constroem tem lugar nesse tipo de atividades. Para esse autor, uma vez que o conhecimento matemático se desenvolveu em volta de resolução de problemas, "o significado epistemológico da Álgebra pode fornecer algumas ideias sobre como introduzir e estruturar a Álgebra escolar, e levar a uma reflexão sobre a função da resolução de problemas no ensino da Álgebra" (p. 61).

4.3. Significado algébrico

Segundo Sfard e Linchevski (1994), um sentido de significado para conceitos e procedimentos algébricos vem com a habilidade de ver ideias abstratas através dos símbolos. Radford (2004) indica que a habilidade de manipulação simbólica requer primeiramente uma compreensão das propriedades e relações matemáticas estruturais, o que constitui o aspecto semântico da Álgebra: "a dificuldade na aprendizagem da sintaxe é resultado de uma compreensão pobre das estruturas matemáticas subjacentes às representações algébricas" (p. 162). Na perspectiva deste autor, os alunos produzem significado para a Álgebra escolar através de diversos sistemas semióticos, matemáticos e não matemáticos, e há diferentes fontes de significado algébrico: (a) o significado que vem da própria estrutura algébrica; (b) o significado dos contextos dos problemas e (c) o significado exterior ao contexto matemático. Para Kieran (2007), estas fontes de significado devem incluir também as múltiplas representações que, na sua perspectiva constituem uma quarta fonte de significado algébrico (Kieran, 2007, p. 711).

A estrutura algébrica, como fonte de significado algébrico, constitui o aspecto semântico da Álgebra e está relacionada à compreensão das propriedades das operações e relações matemáticas. Essa fonte é considerada por muitos educadores matemáticos como fundamental para a aprendizagem da Álgebra. A segunda fonte, significado que vem do contexto do problema, refere-se ao sentido que os alunos dão aos significados externos dos objetos e processos algébricos relacionados com eventos ou situações. Uma vez que a resolução de problemas foi a base para a emergência e evolução do raciocínio algébrico e que a Álgebra constitui uma importante ferramenta para modelação e resolução de problemas, esta é uma fonte crucial também na aprendizagem. A terceira fonte destacada por Radford (2004) indica que os alunos também constroem significado algébrico em contextos não matemáticos. Trata-se de um significado construído interiormente, por meio de gestos, movimentos corporais, palavras, metáforas e outros artefatos que são expressos durante a atividade. A quarta fonte de significados proposta por Kieran (2007) destaca o uso de múltiplas representações como uma oportunidade que o aluno tem de observar o mesmo objeto algébrico a partir de diversas perspectivas e assim, compreender melhor seus significados.

A partir disso, ao falar em significado algébrico ou em significado construído para objetos e procedimentos algébricos, consideramos tratar-se fundamentalmente de uma "habilidade de ver ideias abstratas através dos símbolos" como destacam Sfard e Linchevski (1994), e que os estudantes desenvolvem por meio das fontes referidas. Na perspectiva destas autoras, seria um erro afirmar que as atividades e decisões dos estudantes são inteiramente desprovidas de uma lógica interna, antes os estudantes lidam sempre com significados, e quando os significados apropriados não são desenvolvidos, os estudantes criam seus próprios significados, que são muitas vezes totalmente inapropriados.

4.4. Dificuldades dos alunos em Álgebra

Como vimos ao tratar da importância da Álgebra, a linguagem algébrica cria a possibilidade de um distanciamento em relação aos significados que os símbolos carregam e, assim, torna-se uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), esta grande potencialidade do simbolismo pode ser também a sua grande fraqueza. A tendência de desligamento dos referenciais concretos iniciais pode tornar o símbolo incompreensível para os alunos: "é o que acontece quando se utiliza simbologia de modo abstrato, sem referentes significativos, transformando a Matemática num jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, ou quando se evidenciam apenas as propriedades das estruturas algébricas" (p. 8). Nesse sentido, muitos obstáculos e dificuldades surgem na aprendizagem algébrica ao longo do ensino básico nos principais tópicos trabalhados na Álgebra – relações, sequências, expressões algébricas, equações, inequações e funções.

O trabalho com relações tem início no 1.º ciclo e estende-se até ao 3.º ciclo. Envolve as relações entre números, operações e propriedades, onde é muito importante a noção de igualdade e o uso da linguagem algébrica para descrever relações. De acordo com a literatura, o uso e a compreensão da relação de igualdade constituem uma dificuldade expressa pelos alunos desde os primeiros anos de escolaridade (Kieran, 2007; Ponte, Branco & Matos, 2009). Ponte, Branco e Matos (2009) indicam essa dificuldade a partir da forma que os alunos usualmente veem o sinal de igual: "os alunos realizam operações de um modo sequencial, da esquerda para a direita, usando o sinal de igual tanto como 'separador' entre dois raciocínios como para introduzir um novo resultado, a partir de valores numéricos anteriores" (p. 22). Destacam a necessidade de propor aos alunos situações que promovam a compreensão da equivalência, de forma que analisem e comparem as expressões dos dois lados de um sinal de igual, verificando a equivalência de ambos e ainda a aprendizagem dos diversos significados do sinal de igual. A noção de equivalência é muito importante e reflete em aprendizagens futuras, por exemplo, no estudo de equações de 1.º grau e das funções. A relação de desigualdade também traz dificuldades significativas para os alunos, por exemplo, na ordenação dos números racionais e, no final do 3.º ciclo, no trabalho com inequações (Ponte, Branco & Matos, 2009).

O trabalho com sequências e regularidades percorre todo o ensino básico e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Inicialmente como expressão não formal de uma lei de formação, o estudo das sequências avança dando lugar à aquisição da linguagem simbólica e ao desenvolvimento da capacidade de generalização (Ponte, Branco & Matos, 2009). De acordo com Branco e Ponte (2012), a compreensão de símbolos, expressões e equações é desenvolvida por meio deste trabalho com sequências, na medida em que promove o desenvolvimento da capacidade de generalização e do sentido de símbolo. Ponte, Branco e Matos (2009) indicam diversas dificuldades apresentadas pelos alunos ao longo do trabalho com regularidades. Destacam que o uso de uma abordagem recursiva na determinação de um termo de uma sequência é uma estratégia que muitas vezes constitui um obstáculo à determinação da relação entre cada termo e a sua ordem. Estes autores indicam também que a estratégia do objeto inteiro, que constitui a determinação de um termo com base na ideia de múltiplos, conduz, muitas vezes, a generalizações erradas.

Relativamente aos símbolos e às expressões, Ponte, Branco e Matos (2009) referem que a Álgebra acrescenta novos símbolos e envolve uma mudança de significado de alguns dos símbolos existentes, o que pode trazer dificuldades de compreensão para os alunos. Nesta perspectiva, a mudança de significado do símbolo ‘=’ é um dos aspectos que mais traz dificuldade aos alunos, bem como o significado das letras e expressões. As letras usadas em Álgebra podem ser vistas como incógnita, como número generalizado ou como variável e as expressões também podem ser interpretadas de modos distintos, como por exemplo, fórmula, equação, identidade, expressão de uma propriedade ou função (p. 73). Assim, o uso das letras e das expressões envolve diferentes significados que dependem do contexto em que se encontram. Estes autores destacam algumas das principais dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra: 1) ver a letra como representando um número ou um conjunto de números; 2) pensar numa variável como significando um número qualquer; 3) atribuir significado às letras existentes numa expressão; 4) dar sentido a uma expressão algébrica; 5) passar informação da linguagem natural para a algébrica; e, 6) compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos ‘+’ e ‘=’ e, em particular, distinguir adição aritmética da adição algébrica.

Ponte, Branco e Matos (2009) sugerem que, no trabalho com expressões algébricas é importante que os alunos reconheçam a noção de equivalência de expressões, e que as compreendam por meio das propriedades das operações (comutativa, associativa, distributiva, existência do elemento neutro e existência do elemento absorvente) ou pela definição das operações inversas. Destacam que a dificuldade em compreender a noção de monômio e de monômios semelhantes implicam outros obstáculos na simplificação de expressões. Em expressões, como $2x + 3$, os alunos tentam prosseguir com sua simplificação, uma vez que não a encaram como uma expressão irredutível e não aceitam a falta de um ‘fechamento’ para a questão. Para estes autores, “dificuldades relacionadas com conceitos ou representações próprios da Aritmética contribuem também para o surgimento de dificuldades adicionais nos conceitos e representações algébricos” (p. 79). Isto é evidenciado, por exemplo, nas dificuldades que os alunos apresentam em adições algébricas de polinômios, dificuldades estas acentuadas quando se trata de uma expressão onde é necessário eliminar parênteses e há uma subtração. Ponte, Branco e Matos (2009) defendem que explorar sequências e regularidades pode promover a compreensão da equivalência existente entre as diversas expressões algébricas ao trabalhar aspectos como o desembaraçar de parênteses e as operações entre monômios semelhantes.

Relativamente às dificuldades dos alunos associadas aos conceitos básicos de equações, Ponte, Branco e Matos (2009) indicam que estes resultam também de uma incompleta apreensão dos conceitos aritméticos. Apresentam uma série de erros e dificuldades na resolução de equação do 1.º grau, amplamente destacadas na literatura: 1) Adição de termos que não são semelhantes; 2) Interpretação dos sinais “+”e “=” como indicadores de uma ação; 3) Interpretação incorreta de monômios do 1.º grau; 4) Uso de parênteses; 5) Não saber como começar a resolver uma equação; 6) Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número; 7) Adição incorreta de termos semelhantes; 8) Adição incorreta de termos não semelhantes; e 9) Transposição incorreta de termos. Também Kieran (2007), ao abordar as dificuldades dos alunos na resolução de problemas que envolvem equações, apresenta resultados que mostram que os alunos têm mais sucesso na resolução de problemas verbais simples do que na resolução da equação matemática que traduz o mesmo problema. Segundo esta autora, é muito pequeno o número de casos em que os alunos preferem transformar os problemas verbais em equação, pois, "a linguagem simbólica da Álgebra apresenta novas exigências que não são comuns à experiência dos alunos com problemas aritméticos em linguagem natural" (p. 722).

Como vimos, a simbologia promovida pela Álgebra pode levar muitos alunos à incompreensão dos conceitos algébricos. Ponte, Branco e Matos (2009) indicam algumas dificuldades no que diz respeito a notação simbólica. No estudo de equações, tanto o uso exclusivo de algumas letras quanto o uso de uma grande variedade de letras, podem criar obstáculos de aprendizagem aos alunos. Da mesma maneira, no estudo de funções, há dificuldade em lidar eficazmente com a simbologia própria deste tópico, x, y e $f(x)$, de forma que os alunos, muitas vezes, confundem domínio, objeto e imagem. Ao longo do processo de aprendizagem algébrica, a transformação de representações está sempre presente e, novamente, é importante destacar que muitas dificuldades dos alunos têm a sua origem na correspondência destas representações. Além da transformação de informações de linguagem natural para linguagem simbólica algébrica, que já constituem uma das dificuldades dos alunos, no tópico das funções, uma série de outras representações ganham destaque e devem ser trabalhadas de maneira que os alunos compreendam os significados expressos em cada uma delas (descrições verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas). Relativamente às representações, Kieran (2007) argumenta que existem lacunas significativas nas habilidades dos estudantes de compreender e produzir representações, e que estes precisam adquirir mais fluência com o uso de tabelas e gráficos antes de trabalhar com expressões e equações (p. 719).

Dados os tópicos da Álgebra e os obstáculos de aprendizagem aqui apresentados, vemos que as dificuldades dos alunos têm muitas origens, como a falta de compreensão dos enunciados em linguagem natural, o desconhecimento das regras de sintaxe da linguagem algébrica e o estabelecimento de relações incorretas entre as duas linguagens. Radford (2000), ao tratar da relação entre linguagem natural e simbólica em situações de generalização, apresenta resultados de estudos empíricos que destacam as dificuldades que os alunos geralmente encontram no domínio da linguagem algébrica. As estratégias usadas pelos alunos revelam que estes empregam os símbolos como indexicais, expressões cujo referente varia de acordo com o contexto, e que apenas com o auxílio do aluno é possível decodificar os símbolos usados por eles, uma vez que o mesmo símbolo pode aparecer mais de uma vez na mesma expressão fazendo referência a objetos distintos. Em outras palavras, o aluno olha para o mesmo símbolo atribuindo-lhe diferentes significados, que geralmente estão associados à ordem de ações que o levaram à generalização. Assim, uma das dificuldades dos alunos está associada ao significado que atribuem aos símbolos, de modo que interpretar com sucesso a linguagem algébrica depende, até certo ponto, da possibilidade de fornecer aos símbolos indexicais significados não-indexicais.

Para Radford (2004) a passagem entre o trabalho com símbolos em situações contextualizadas e a manipulação dos símbolos por meio de regras procedimentais, constitui uma das principais dificuldades dos alunos: "certamente, um dos problemas cruciais do desenvolvimento do raciocínio algébrico é se mover da compreensão dos símbolos que estão contextualizados e que têm um significado corporificado, para a compreensão de símbolos que podem estar sujeitos a transformações formais" (p. 162). No entanto, a capacidade de transição flexível entre estes dois aspectos da atividade algébrica constitui competência fundamental a desenvolver na aprendizagem da Álgebra (Sfard & Linchevski, 1994; Arcavi, 2006) e deve ser promovida por meio de compreensão conceptual e estrutural dos objetos algébricos.

Capítulo 5

Metodologia de Investigação

Neste capítulo indico as opções metodológicas feitas neste estudo e a sua justificação, relacionando-as com a natureza da investigação e com o intuito de alcançar o seu objetivo. Apresento ainda os procedimentos metodológicos adotados relativamente à escolha dos participantes, dos instrumentos de recolha de dados e de sua análise, e a justificação de cada um deles.

5.1. Opções metodológicas gerais

O presente estudo tem como objetivo analisar significados construídos por estudantes e suas dificuldades no uso e compreensão da linguagem algébrica no final do 3.º ciclo da educação básica. Procuro conhecer os significados que os estudantes participantes da pesquisa constroem para objetos e procedimentos algébricos, no contexto das tarefas propostas, bem como as dificuldades que evidenciam no uso e compreensão da linguagem algébrica. Busco ainda identificar o modo como os estudantes relacionam representações simbólicas algébricas com representações verbais ao resolverem problemas. Assim, atendendo ao objetivo do estudo e às questões que o envolvem, esta investigação insere-se numa perspectiva interpretativa, usando uma metodologia qualitativa.

A opção pelo paradigma interpretativo está ligada ao objetivo de investigação e às questões propostas, uma vez que tenciono conhecer mais acerca do modo como estudantes compreendem e usam a linguagem algébrica ao final do 3.º ciclo do ensino básico. Trata-se de buscar entender os significados que constroem socialmente para símbolos, linguagem e procedimentos algébricos, pelo que se faz apropriado optar por este paradigma. De acordo com Erickson (1986), a criação de significados pelos indivíduos está relacionada com uma dimensão social, de modo que a natureza da sala de aula, a natureza do ensino e a natureza dos próprios significados construídos pelos estudantes estão relacionados. Nesta pesquisa, ainda que não tenha um foco na dimensão social, é basilar a ideia de que os significados construídos pelos estudantes se ligam a ela.

A escolha de uma metodologia qualitativa deve-se ao fato de o estudo ter como pressupostos as cinco características de uma investigação interpretativa e qualitativa indicadas por Bogdan e Biklen (1994): (i) o ambiente natural é a fonte direta de dados, uma vez que as entrevistas são realizadas na escola onde estudam os participantes, em um ambiente que lhes é familiar; (ii) os dados recolhidos são essencialmente descritivos, na medida em que por meio das entrevistas e da interação com os participantes busca-se obter dados com riqueza de detalhes; (iii) o investigador está mais interessado no processo do que nos resultados ou produtos, considerando que os dados são recolhidos e explorados de forma a conhecer como interpretam situações e usam a linguagem algébrica; (iv) a análise dos dados é feita de modo indutivo, uma vez que a pesquisa não tem como objetivo confirmar hipóteses previamente definidas, mas relacionar os dados a procura de aspectos específicos; e (v) busca-se conhecer o significado que os participantes atribuem às suas experiências, na medida em que as perspectivas dos estudantes são o foco de interesse.

5.2. Recolha de dados

Atendendo ao objetivo de estudo, e a intenção de obter dados muito específicos relativamente aos significados construídos pelos estudantes, optei pela realização de entrevistas e recolha de documentos. A entrevista constitui uma fonte de dados bastante rica tendo como objetivo reunir dados detalhados acerca da perspectiva dos estudantes em relação as suas experiências e ao mundo que os rodeia. Bogdan e Biklen (1994) referem que “a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo” (p.134), motivo pelo qual se mostra ideal para a presente investigação.

Segundo os mesmos autores, as entrevistas podem ser utilizadas de duas formas em investigação qualitativa, como estratégia dominante ou em conjunto com observação, análise de documentos e outras técnicas. Nesta investigação ela é utilizada em conjunto com a análise das resoluções dos estudantes registadas por escrito e tem um papel fundamental na compreensão dos raciocínios dos estudantes enquanto realizam uma tarefa.

Foram realizadas duas entrevistas a cada participante com duração de aproximadamente uma hora. Nas entrevistas, os estudantes realizaram uma tarefa enquanto responderam a questões da pesquisadora relativamente às suas resoluções, raciocínios e dificuldades. Os dados da primeira entrevista foram utilizados para aprimorar as questões da segunda entrevista e guiar as perguntas feitas pela pesquisadora. É importante destacar que foi utilizado o recurso de gravação de áudio em cada entrevista.

As representações escritas do raciocínio dos estudantes são muito importantes para a análise e ilustração de situações, razão pela qual recolhi e analisei as tarefas realizadas por eles em cada encontro. Ao tentar resolver cada questão que compunham a tarefa os estudantes registavam na sua folha a estratégia seguida, evidenciando a sua compreensão da tarefa e apresentando as suas dúvidas e dificuldades.

5.3. Participantes

Um dos aspectos fundamentais para a investigação é a escolha dos participantes, com base em critérios relacionados ao objetivo do estudo. Neste sentido, importava que os participantes fossem estudantes do final do 3.º ciclo de escolaridade, ou seja, do 9.º ano para que tivessem analisadas suas ações diante de questões que apresentam linguagem algébrica ou requerem seu uso, pois nesta altura é expectável que já tenham desenvolvido competência algébricas. Tendo em vista que o trabalho seria desenvolvido por meio de análise documental e realização de entrevistas, fez-se necessário convidar um número de participantes que viabilizasse a recolha de dados, no que se refere ao tempo e à organização dos dados, e que possibilitasse abranger estudantes de diferentes níveis de desempenho em Matemática. Este último critério apresentado justifica-se pela intenção de obter um conjunto de dados mais diversificado, uma vez que estudantes de diferentes níveis de desempenho podem apresentar aspectos distintos na compreensão da linguagem algébrica. Desse modo, foram convidados seis estudantes de 9.º ano, com as características citadas, integrantes de uma mesma turma de uma escola de 2.º e 3.º ciclos do distrito de Santarém. A professora de Matemática da turma foi fundamental nesta escolha, indicando estudantes que se adequassem ao que foi solicitado.

Por meio das informações dadas pela professora, que leciona nesta turma há três anos, foi possível vislumbrar o perfil de cada estudante e da turma onde estão inseridos. Trata-se de uma turma com um ambiente de trabalho produtivo, onde a maioria dos estudantes demonstra interesse nas aulas e atividades propostas. Apesar de apresentarem diferentes níveis de desempenho, não há histórico de reprovação entre os estudantes selecionados e todos eles fazem parte desta turma desde o 6.º ano. Os seis estudantes serão aqui identificados como

Maria, Rosa, Laura, José, Daniel e Paulo. Maria apresenta muita dificuldade em Matemática e tem o rendimento abaixo do esperado. Rosa também apresenta dificuldade em Matemática, mas é muito dedicada e geralmente tem resultados satisfatórios. Laura é uma aluna que não apresenta muita dificuldade em Matemática e seu nível de desempenho é intermédio. José e Daniel são ambos muito atentos e dedicados e apresentam bons resultados em Matemática. Paulo é um ótimo estudante, tem excelentes resultados e demonstra particular interesse por problemas matemáticos.

5.4. Tarefas

Cada tarefa é composta por quatro questões: um problema geométrico, um problema de partilha, uma questão de generalização e uma questão de manipulação algébrica. A escolha destas questões está baseada no objetivo da pesquisa, analisar os significados construídos por estudantes e suas dificuldades no uso e compreensão da linguagem algébrica no 3.º ciclo, e busca responder às questões de investigação.

Os problemas geométricos aparecem comumente na introdução ao ensino das expressões algébricas, uma vez que os conceitos de perímetro e área podem auxiliar na compreensão das regras de manipulação simbólica, e integram estas tarefas a fim de explorar conceitos e procedimentos algébricos em situações conhecidas pelos estudantes. Os problemas de partilha são situações problemáticas descritas por palavras, usados para explorar a tradução de linguagem verbal para linguagem algébrica e, neste estudo, possibilitam verificar se os estudantes sabem representar tais situações algebricamente bem como se reconhecem as vantagens do uso de símbolos na resolução de problemas. Os dois problemas usados no estudo são classificados como do tipo composição, segundo Marchand e Bednarz (1999), que se refere a problemas onde o encadeamento entre as relações é estabelecido seguindo uma sequência e que apresentam um nível de dificuldade intermédio. As questões de generalização são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento algébrico e das habilidades algébricas podendo ser promovidas, por exemplo, por meio do estudo de sequências e padrões (Branco & Ponte, 2012). Assim, as duas questões presentes neste estudo têm o objetivo de verificar o uso da linguagem algébrica pelos estudantes em situações de generalização e perceber ainda os significados que atribuem a símbolos e expressões. A fluência procedimental tem um lugar muito importante na aprendizagem da Álgebra, uma vez que os estudantes devem usar a representação simbólica para expressar e usar suscintamente ideias abstratas. Nesse sentido, as questões de manipulação algébrica integram as tarefas propostas a fim de verificar a destreza na manipulação algébrica e sua relação com a compreensão da linguagem algébrica.

As tarefas foram construídas a partir de tarefas usadas em outras pesquisas e trabalhos, como apresentado no quadro 1.

Quadro 1 - Fonte das Tarefas

Tarefa	Questão	Referência
1	1	Vlassis e Demonty (2002)
	2	Adaptado de Marchand e Bednarz (1999)
	3	Vlassis e Demonty (2002)
	4	Grupo Azarquiel (2007)
2	1	Adaptado de Vlassis e Demonty (2002)
	2	Adaptado de Marchand e Bednarz (1999)
	3	Adaptado de Branco (2008)
	4	Adaptado de Pesquita (2007)

5.4.1. Tarefa 1

Questão 1 – É um problema geométrico em que os estudantes devem usar conceito e cálculo de área bem como efetuar adição algébrica e produto de monômios. Com este problema pretendemos saber se compreendem o significado das letras a e b no problema, se conseguem usar expressões algébricas para representar a relação multiplicativa $comprimento \times largura$, se utilizam-se da linguagem algébrica em suas estratégias de resolução, se identificam na figura 2 a área que excede a da figura 1 e expressam a diferença das áreas por meio de notação algébrica. Procuramos ainda perceber que relação há entre o uso das linguagens verbal e algébrica, e se os estudantes simplificam as expressões autonomamente.

Questão 2 – É um problema de partilha, do tipo composição, onde os estudantes devem interpretar e equacionar o problema, realizar adição algébrica e resolver equação do 1.º grau com uma incógnita. O objetivo investigativo neste problema é verificar se recorrem à linguagem algébrica e reconhecem vantagens em seu uso, se sabem como passar de uma situação problemática à linguagem algébrica, expressando relações aditivas e multiplicativas, verificar se sabem resolver a equação e que significados atribuem à incógnita, bem como se interpretam os valores encontrados e refletem sobre sua validade.

Questão 3 – Trata-se de uma situação-problema de generalização onde os estudantes devem compreender a situação problemática, determinar termos da sequência e seu termo geral ou lei de formação em linguagem simbólica. Pretendemos verificar se compreendem os comandos de generalização, se conseguem expressá-la em linguagem verbal e algébrica, e que significados atribuem à variável adotada e à expressão criada.

Questão 4 – É uma questão de manipulação algébrica onde os estudantes devem aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, os produtos notáveis e a simplificação de expressões algébricas. O objetivo investigativo nesta questão é verificar se percebem erros nas operações realizadas e aplica as regras de manipulação simbólica corretamente.

5.4.2. Tarefa 2

Questão 1 – É um problema geométrico onde os estudantes devem usar o conceito de área, compreender a notação algébrica e realizar operações com monômios e polinômios. Com este problema pretendemos observar se enxergam nas expressões dadas o produto das dimensões dos retângulos e a soma de áreas, e perceber que significado atribuem à expressão, por meio da justificação oral de suas escolhas. Procuramos também observar a habilidade que demonstram no uso das regras de manipulação simbólica.

Questão 2 – Trata-se de um problema de partilha, também do tipo composição, em que os estudantes devem interpretar e equacionar o problema, bem como resolver equação do 1.º grau com uma incógnita. O objetivo investigativo neste problema é verificar se recorrem à linguagem algébrica para resolvê-lo, se conseguem traduzir o problema em equação bem como resolvê-la, e se interpretam a solução encontrada relacionando-a com o significado atribuído à incógnita.

Questão 3 – É uma situação problemática de generalização em que os estudantes devem determinar termos da sequência e a expressão geradora da figura usando linguagem verbal e algébrica. Pretendemos observar se conseguem expressar em linguagem verbal e algébrica uma generalização para a situação descrita, bem como perceber que significados atribuem às variáveis e expressões.

Questão 4 – É uma questão de manipulação algébrica em que os estudantes devem usar notação algébrica, efetuar adição algébrica e resolver equações do 1.º grau com uma incógnita. O objetivo investigativo desta questão é verificar se recorrem a equações para expressar a condição que constitui o quadrado mágico (apresentar a mesma soma nas linhas, colunas e diagonais), e se têm fluência procedimental na manipulação das expressões e resolução de equações. Procuramos ainda observar a sua atitude relativamente às diversas equações possíveis e ao resultado encontrado, a fim de compreender que significado atribuem à incógnita e às expressões.

Além dos objetivos específicos apresentados, é importante salientar que cada uma das questões visa identificar as dificuldades dos estudantes e proporcionar elementos para responder às questões de pesquisa.

5.5. Análise de dados

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados é o processo de busca e de organização sistemáticos de materiais que foram sendo acumulados ao longo da pesquisa com o objetivo de aumentar a compreensão destes e de apresentar aos outros aquilo que foi encontrado. A partir disso e tendo em vista as características deste estudo, a análise de dados foi realizada em duas fases, uma decorrente dos dados recolhidos na primeira ronda de entrevistas e outra que teve início após a conclusão da recolha de dados e que consistiu em analisar os dados obtidos na segunda ronda de entrevistas e proceder uma interpretação mais global dos resultados.

Relativamente ao trabalho realizado, destaco que ao final de cada ronda de entrevistas, procedi à transcrição integral das gravações áudio, dada a importância destes dados para a análise. Em seguida, iniciei, como referem Bogdan e Biklen (1994), "um trabalho de organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes" nos dados recolhidos, a partir das tarefas 1 e 2. Desse modo, procurei apresentar os resultados oferecendo primeiramente uma descrição das produções e dos discursos de cada participante, incluindo transcrições e imagens, a fim de preservar a riqueza dos dados.

Inicialmente os dados foram agrupados de acordo com cada uma das quatro questões que compõem a tarefa. Posteriormente, procedi a uma categorização destes dados buscando identificar neles os aspectos centrais da investigação e apresentar uma análise mais aprofundada. Para tanto, ao final de cada tarefa, há um quadro síntese com as três categorias de análise: 1) linguagem verbal e linguagem algébrica, onde busca-se destacar as principais compreensões dos estudantes e, eventualmente obstáculos, quando não houveram compreensões significativas quanto ao uso destas linguagens; 2) dificuldades, onde identifica-se as dificuldades que surgiram ao longo da resolução das questões; e 3) significados, onde busca-se descrever a forma como cada estudante interpreta símbolos e expressões criados por eles ou dados no enunciado da questão.

5.6. Aspectos de natureza ética

Neste estudo, são tidos em conta os aspectos de natureza ética e os procedimentos de autorização para a realização da investigação. Assim, a identidade dos participantes é protegida, estes são tratados respeitosamente e foram feitos os pedidos de autorização (os quais apresento no anexo 2) tanto aos encarregados de educação quanto aos representantes da escola. A participação na pesquisa é voluntária, os objetivos de estudo, bem como suas implicações foram conhecidos pelos participantes e seus responsáveis antes de sua adesão, e as condições acordadas foram mantidas até ao final da pesquisa.

Capítulo 6

Resultados

No presente capítulo apresento e analiso os dados recolhidos durante as entrevistas, com base nos trabalhos realizados pelos estudantes e suas justificações orais. Esta apresentação dos dados organiza-se em subcapítulos referentes às tarefas 1 e 2, referindo as quatro questões de cada tarefa. Em cada um destes subcapítulos são analisadas as ações, estratégias, dificuldades e compreensões de cada participante.

6.1. Tarefa 1

6.1.1. Questão 1

A questão 1 (Figura 1) é um problema geométrico em que o estudante deve representar as áreas das figuras, bem como a diferença entre elas, por meio de expressões algébricas.

Paulo

Paulo não teve dificuldades ao interpretar a situação que envolvia os comprimentos a e b, e começou por escrever expressões algébricas para representar as áreas das figuras. O estudante demonstra entender o conceito de área, bem como saber calcular área de um retângulo. Ele usou a estratégia de subtração de áreas na figura 1 e a estratégia de adição de áreas para calcular a área da figura 2. Inicialmente Paulo escreveu $A_1 = c \times l$ para a área da figura 1 e apenas no final de sua resolução notou que se esqueceu de subtrair a área do retângulo branco, como tinha pensado, e incluiu o termo negativo em sua expressão. Paulo compreende a relação multiplicativa entre $3b$ e $a + 2b$, altura e comprimento do retângulo, respectivamente, para expressar a área da figura. No entanto, Paulo escreveu $3b \times 2b + a$ considerando que isso representa o mesmo que $3b \times (2b + a)$. Em seguida, multiplicou $3b$

apenas por $2b$, como era esperado uma vez que não colocou os parênteses, e calculou este produto como $6b$ e não como $6b^2$.

1) As duas figuras são construídas com segmentos de comprimentos a e b.

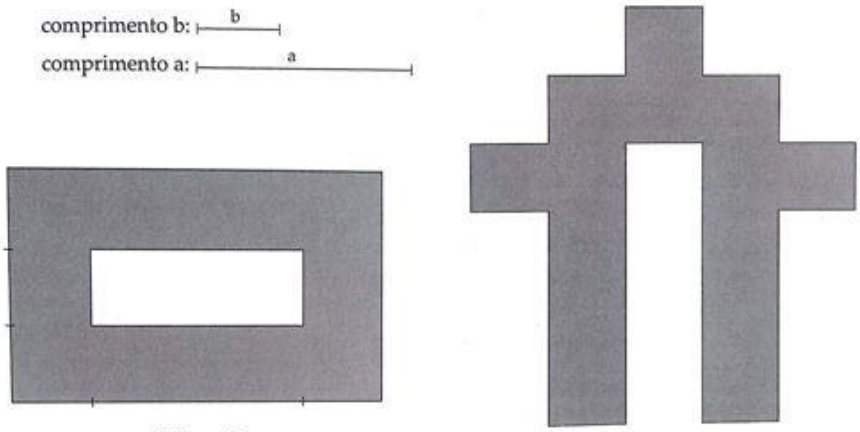


Figura 1

Figura 2

a) As partes sombreadas das duas figuras têm a mesma medida de área? Explica o teu raciocínio recorrendo a palavras e/ou desenhos.

b) Escreve expressões algébricas para representar a medida de cada área:

Área Sombreada	Expressão
Figura 1	
Figura 2	

c) Qual é a diferença das medidas das duas áreas?

Figura 1 - Questão 1 da Tarefa 1

Paulo dividiu a figura em cinco partes a fim de calcular cada área e somar (Figura 2). Novamente, o estudante apresentou um raciocínio correto para calcular cada área, mas omitiu os parênteses, o que o levou a erros nas operações. Escreveu a expressão $a + 2b \times b$ para representar a área do retângulo B, quando seu raciocínio evidencia a intenção de calcular o produto de $a + 2b$ (comprimento) por b (largura). Diferente da primeira situação, onde o estudante calculou $3b \times 2b = 6b$, Paulo operou corretamente $2b \times b$. Vemos que o estudante teve a iniciativa de simplificar as expressões por ele elaboradas e realizou a adição algébrica sem dificuldades.

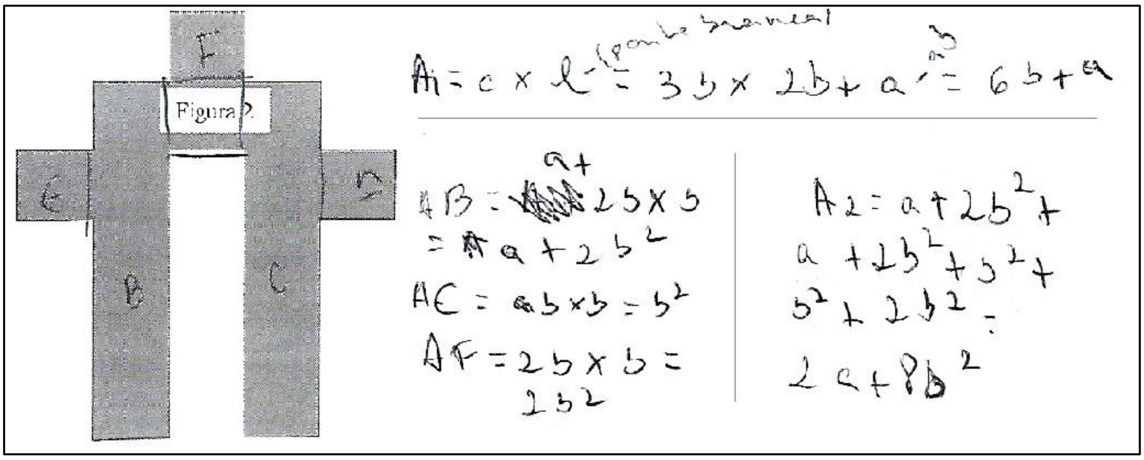


Figura 2 - Resolução de Paulo da questão 1 da Tarefa 1

Na alínea c, Paulo fez a área da figura 1 menos a área da figura 2, expressando dúvida quanto ao uso dos parênteses. O estudante optou por não usá-lo, mas no passo seguinte de sua resolução, subtraiu cada termo como deve ser. Paulo considerou $8b^2$ igual a $8b + 8b$ (Figura 3) a fim de operá-lo com $6b$, uma vez que não é possível somar $8b^2$ e $6b$. Paulo concluiu que a área da figura 2 é maior, mas não justificou corretamente sua resposta. O aluno não expressou que a área da figura 2 excede a da figura 1 em $2b^2$ ou que há dois quadrados de lado b a mais que na figura 1.

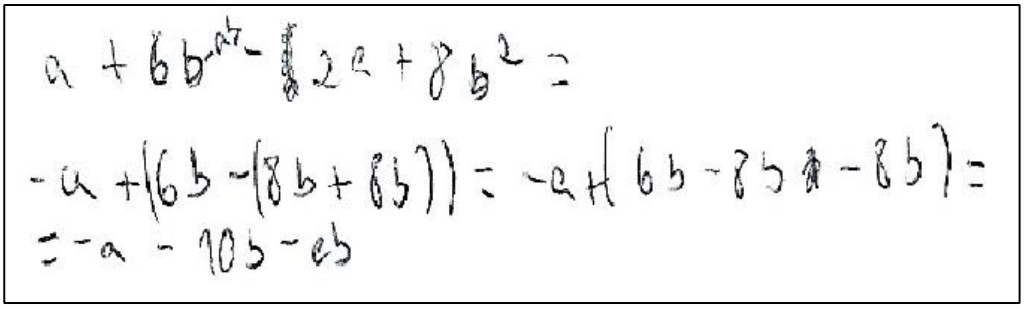


Figura 3 - Resolução de Paulo da questão 1 da Tarefa 1 (alínea c)

Assim, observamos que Paulo tentou usar expressões algébricas para representar produto de comprimento por largura bem como adição e subtração de medidas de área. O seu raciocínio tê-lo-ia levado às expressões corretas para as áreas das figuras 1 e 2 se tivesse usado parênteses para expressar produto de um número pela soma de dois números, e realizado corretamente a multiplicação de monômios. O estudante compreende que a, b, $3b$ e $a + 2b$ representam medidas de comprimentos e as expressões que elaborou pretendiam representar medida de área, por adição ou subtração de medidas de áreas, mas as suas dificuldades em manipulação algébrica e uso dos parênteses, impediram-no de fazê-lo corretamente. Não é possível dizer que tenha visualizado na figura a diferença das medidas de área, mas prendeu-se à manipulação algébrica de suas expressões.

Daniel

Daniel demonstra compreensão do conceito de área bem como saber calcular área de retângulos. O estudante não teve dificuldades em interpretar os símbolos a e b como medidas e iniciou sua resolução escrevendo expressões algébricas para representar as áreas das figuras. Daniel escreveu corretamente a relação multiplicativa $comprimento \times largura$ por meio da expressão $3b \times (2b + a)$, ao representar a área do retângulo maior na figura 1, mas errou no produto dos monômios $2b$ e $3b$, dando como resposta $6b$ (Figura 4).

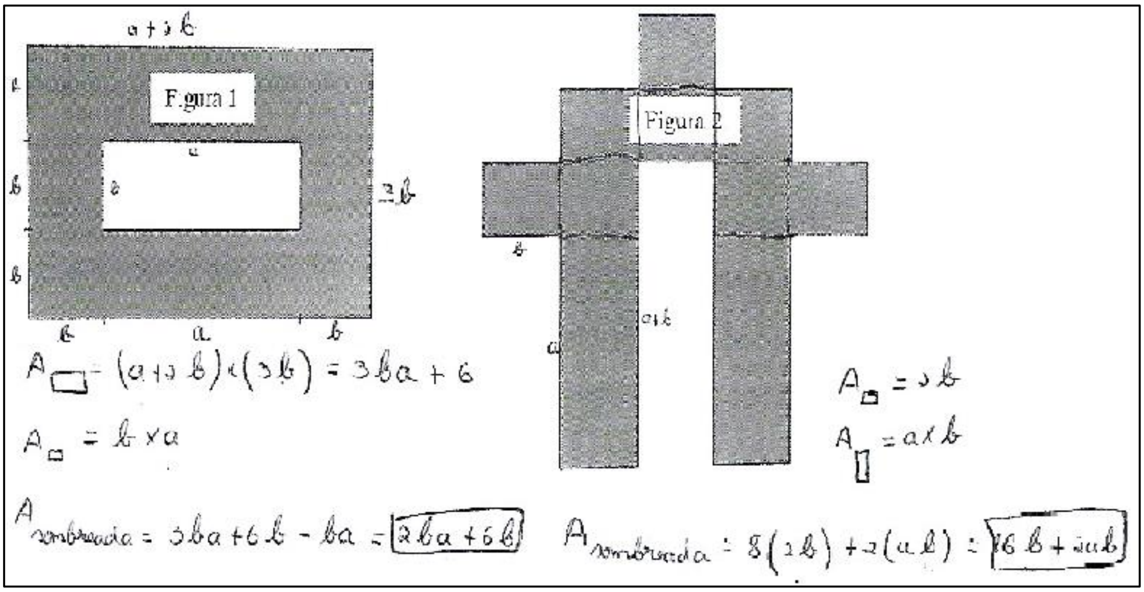


Figura 4 - Resolução de Daniel da questão 1 da Tarefa 1

O estudante usou a estratégia de subtração de áreas e expressou claramente seu raciocínio verbalmente:

> *Daniel:* Eu fiz a área do retângulo todo depois fiz a área do pequenino e subtraí e dá a área sombreada.

Para calcular a área da figura 2 o estudante dividiu a figura e somou suas áreas. Expressou corretamente a área dos retângulos maiores, ab, identificou que havia oito quadrados de lado b, mas no cálculo de sua área escreveu $2b$ em vez de b^2.

> *Daniel:* Fiz a área destes quadrados e depois fiz a área deste retângulo que tá aqui e depois somei eles dois, os dois não, porque como são oito quadrados, fiz oito vezes a área de um quadrado e duas vezes a área do retângulo.

Na alínea c, o estudante não expressou a diferença das duas áreas por meio de uma expressão. Daniel afirmou que a área 2 é maior do que a área 1 justificando que a primeira excede a segunda em $10b$ (devido a erros na multiplicação de monômios). O estudante também não fez nenhuma referência aos dois quadrados a mais que a figura 2 apresenta relativamente à figura 1.

> *Daniel:* Esta (figura 2) tem mais $10b$ do que esta (figura 1).
>
> *Pesquisadora:* E como encontraste este $10b$?
>
> *Daniel:* Porque aqui está $2ba$ e $2ab$, que é a mesma coisa, e depois aqui está, na figura 1, $6b$ e na figura 2, $16b$.

Observamos que Daniel conseguiu expressar algebricamente o raciocínio comunicado verbalmente, representando a área sombreada por meio de adição e subtração de medidas de área. Simplificou as expressões autonomamente e não teve dificuldades na adição algébrica, mas teve dificuldades na multiplicação de monômios. O seu raciocínio levá-lo-ia à resolução correta do problema, não fosse pelos erros na multiplicação dos monômios. Relativamente aos significados, compreende que a, b, $3b$ e $a + 2b$ representam medidas de comprimentos e sua expressão $(a + 2b) \times (3b)$ representa uma medida de área através do produto do comprimento pela largura. O significado de suas expressões, entretanto, não está relacionado à disposição visual das figuras, mas ao resultado dos procedimentos realizados, pelo que não enxergou na figura a diferença das medidas de áreas.

José

José, assim como Paulo e Daniel, compreende o conceito de área, sabe como calcular área de um retângulo e interpretou adequadamente o uso das letras a e b para representar medidas de comprimento. O estudante começou sua resolução por escrever expressões algébricas para representar as áreas das figuras, expressando a relação multiplicativa $comprimento \times largura$, e usou estratégias de subtração e adição de medidas de área, para as figuras 1 e 2 respectivamente. Para a área da figura 1, José pretendia fazer o produto de $2b + a$ por $3b$ (área do retângulo maior) e, em seguida, subtrair ab, área do retângulo branco. Para calcular a área da figura 2, José observou que deslocando um dos quadrados obtém-se a figura 1 acrescida de 2 quadrados.

> *José:* Sabemos que a é deste tamanho e b é deste. Então, na figura 1 vimos que a base tem $a + 2b$ e a altura são $3b$, e vendo na figura 2, podemos ver que as figuras são semelhantes, mas foram acrescentados três quadrados e um foi tirado daqui. Logo, se colocássemos este quadrado aqui, teríamos estes dois a mais.

José expressou verbalmente muito bem seu raciocínio, mas ao escrever as equações cometeu erros já observados nas resoluções de outros participantes. Inicialmente não usou os parênteses em $(2b + a) \times 3b$ e a área $b \times b$ foi calculada como $2b$ (Figura 5).

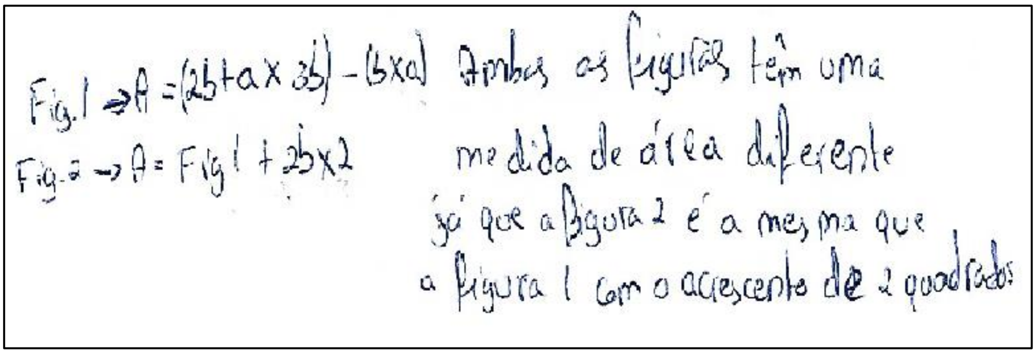


Fig.1 → $A = (2b + a \times 3b) - (b \times a)$ Ambas as figuras têm uma
Fig.2 → $A =$ Fig 1 $+ 2b \times 2$ medida de área diferente
já que a figura 2 é a mesma que
a figura 1 com o acrescento de 2 quadrados

Figura 5 - Resolução de José da questão 1 da Tarefa 1 (alínea a)

Na alínea b, José reescreveu a expressão da área da figura 1 corretamente e escreveu uma expressão para a área da figura 2 a partir de soma de áreas. O estudante abandonou seu primeiro raciocínio, onde a área da figura 2 era a área da figura 1 acrescida da área de dois quadrados, e optou por calcular a área das partes. O estudante calculou corretamente cada parte, com exceção de uma, onde supôs que $3b$ é igual a a, e usou $b \times a$ em vez de $b \times 3b$. Na alínea c, entretanto, o estudante confundiu-se na cópia da expressão e substituiu o termo $b \times a$ por $b \times 2$. É importante notar que José, ao calcular a diferença das áreas, escreveu uma expressão que representa a área da figura 2 menos a área da figura 1, mas não usou parênteses ou subtraiu cada um dos três termos que compõe a área da figura 1 (Figura 6).

Nesta questão vemos ainda que José, que já havia dito em linguagem verbal que a figura 2 tinha dois quadrados a mais que a figura 1, não usou esta ideia para apresentar a diferença das áreas, antes escreveu uma expressão de subtração e fez as operações algébricas.

Observamos que José expressou seu raciocínio para calcular a área sombreada. por meio de linguagem algébrica, teve a iniciativa de simplificar as expressões por ele elaboradas e realizou a adição algébrica. Porém, apresenta dificuldades quanto ao uso dos parênteses em contexto de multiplicação e subtração, e ainda em expressar dobro e quadrado, uma vez que usa $2b$ em vez de b^2. Compreende que a, b, $3b$ e $a + 2b$ representam medidas de comprimentos e que as suas expressões estão relacionadas ora aos procedimentos de multiplicação, adição e subtração para calcular área, ora à disposição visual das figuras. Neste sentido, apesar de afirmar que a figura 2 tinha dois quadrados a mais que a figura 1, não foi capaz de expressar esta diferença por meio da linguagem algébrica, prendendo-se à manipulação algébrica.

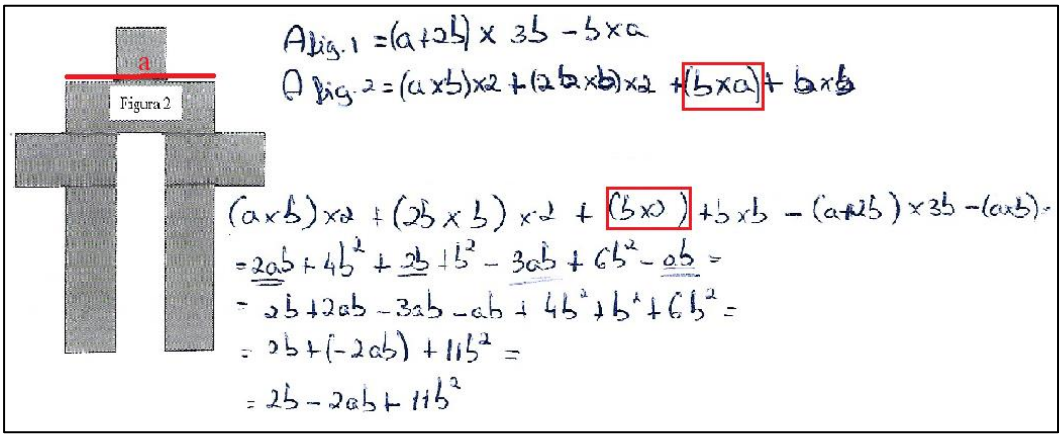


Figura 6 - Resolução de José da questão 1 da Tarefa 1 (alínea c)

Laura

Laura demonstra compreender o conceito de área e saber calcular a área de um retângulo, e não teve dificuldade na interpretação do problema e no uso das letras a e b para representar medidas. A estudante, diferente dos outros participantes do estudo, não recorreu à linguagem algébrica para explicar que a área da figura 2 é maior que a área da figura 1, antes justificou seu raciocínio verbalmente e por meio de um desenho (Figura 7).

> *Laura:* As áreas não têm a mesma medida porque a figura 2, esta parte aqui se for pra aqui, fica a mesma imagem que a figura 1. E fica a sobrar estes dois depois, e este (figura 2) tem mais área do que este (figura 1).

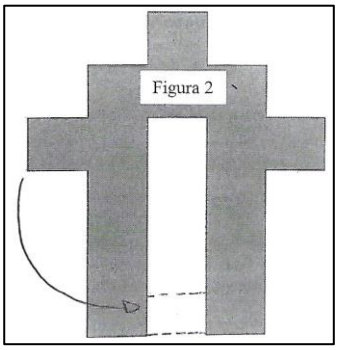


Figura 7 - Estratégia de Laura na questão 1 da Tarefa 1

Na alínea b, Laura escreveu as expressões algébricas para as áreas usando a estratégia de subtração e adição de áreas. A estudante compreende a relação multiplicativa $comprimento \times largura$, e expressou a área da figura 1 por meio do produto de $3b$ por $2b + a$, ao que pretendia subtrair $a \times b$, área do retângulo branco. Entretanto, Laura não usou parênteses na primeira relação, obtendo $A = 3b \times 2b + a - (a \times b)$. Para o cálculo da área da figura 2, a estudante utilizou sua ideia inicial, de que esta apresenta dois quadrados a mais que a figura 1, e expressou tal área como sendo igual à área da figura 1 mais $(b \times b) \times 2$.

Laura não simplificou as expressões algébricas que criou, deixando-as exatamente como pensou (Figura 8).

Área Sombreada	Expressão
Figura 1	A= 3b x 2b+a-(axb)
Figura 2	A= 3b x 2b+a-(axb) A=(bxb)2 A=3bx2b+a-(axb)+(bxb)2

Figura 8 – Resolução de Laura da questão 1 da Tarefa 1 (alínea b)

Na alínea c, Laura não expressou a diferença das áreas por meio do uso do sinal de menos, mas disse que a figura 2 tem uma área maior, de acordo com seu raciocínio expresso verbalmente e algebricamente nas alíneas anteriores. A estudante é a única participante a responder corretamente a esta alínea da questão, escrevendo que a diferença das medidas das duas áreas é $2(b \times b)$, que representa o dobro da área de um quadrado de lado b (Figura 9).

c) Qual é a diferença das medidas das duas áreas?

A diferença das medidas das duas áreas é que a figura 2 vai ter uma área superior, (bxb)2

Figura 9 – Resposta de Laura à questão 1 da Tarefa 1 (alínea c)

Assim, Laura privilegiou a linguagem verbal relativamente à linguagem algébrica nas suas estratégias de resolução da questão, mas foi capaz de expressar por meio da linguagem algébrica o produto do comprimento pela largura e adição e subtração de medidas de área, para chegar à área sombreada. A omissão dos parênteses foi uma das suas dificuldades, e como optou por não simplificar as expressões, não foi possível observar adição algébrica e multiplicação de monômios. Relativamente aos significados das variáveis e expressões, observamos que compreende que a, b, $3b$ e $a + 2b$ representam medidas de comprimentos e que as suas expressões representam medida de área. Em sua estratégia, destaca-se o fato de ter resolvido o problema a partir da disposição visual da figura e de ter usado linguagem algébrica para expressar o seu raciocínio. Neste sentido, as expressões algébricas não estão ligadas à manipulação algébrica, mas ao seu processo de raciocínio e visualização.

Rosa

Rosa interpretou corretamente o enunciado, não teve dificuldades para perceber o que significam as letras a e b no problema, porém, não demonstra compreender claramente o conceito de área. A estudante recorreu à linguagem algébrica em sua resolução, por vezes confundiu área e perímetro, e apesar de afirmar que a área da figura 2 é maior do que a área da figura 1, não o justificou adequadamente.

Pesquisadora: O que significa o a e o b?

Rosa: O a e o b, os comprimentos! Não diz o valor, então mete-se as letras.

Ao calcular a área da figura 1, Rosa disse que era o produto do comprimento pela largura, escreveu a expressão $3b \times 2b \times a$ e não mencionou o fato de haver um retângulo branco que não faz parte da área sombreada na figura 1. Ao calcular a área da figura 2, Rosa escreveu que a área dos retângulos é $a \times b$ e que a área dos oito quadrados é $(b \times b) \times 8$. Rosa pretendia calcular sua área por partes, mas expressou uma multiplicação e não uma adição de termos (Figura 10).

Rosa teve um raciocínio correto para o cálculo da área da figura 2, uma vez que a estudante representou corretamente a área de cada parte e pretendia juntá-las, porém escreveu o produto destas áreas em vez da adição. Além de escrever uma multiplicação de todos os termos, a estudante calculou $b \times b$ como $2b$ em vez de b^2 e, o produto $(a \times b) \times (a \times b)$, teve como resultado $2a \times 2b$, evidenciando dificuldades na multiplicação de monômios. A estudante indica, no diálogo, a dificuldade na manipulação algébrica.

Rosa: Aqui é um quadrado e aqui é o total deste, a área deste, depois vezes oito porque tem oito quadradinhos.

Pesquisadora: Então é a área do retângulo 1 vezes a área do retângulo 2, vezes a área do quadradinho vezes oito? (lendo o que Rosa escreveu).

Rosa: Sim. ... Agora aqui é que eu não consigo. É $a \times b$ depois $b \times b$, que é lado vezes lado.

Pesquisadora: Ok. Mas lado vezes lado dá o quê?

Rosa: $2b$?

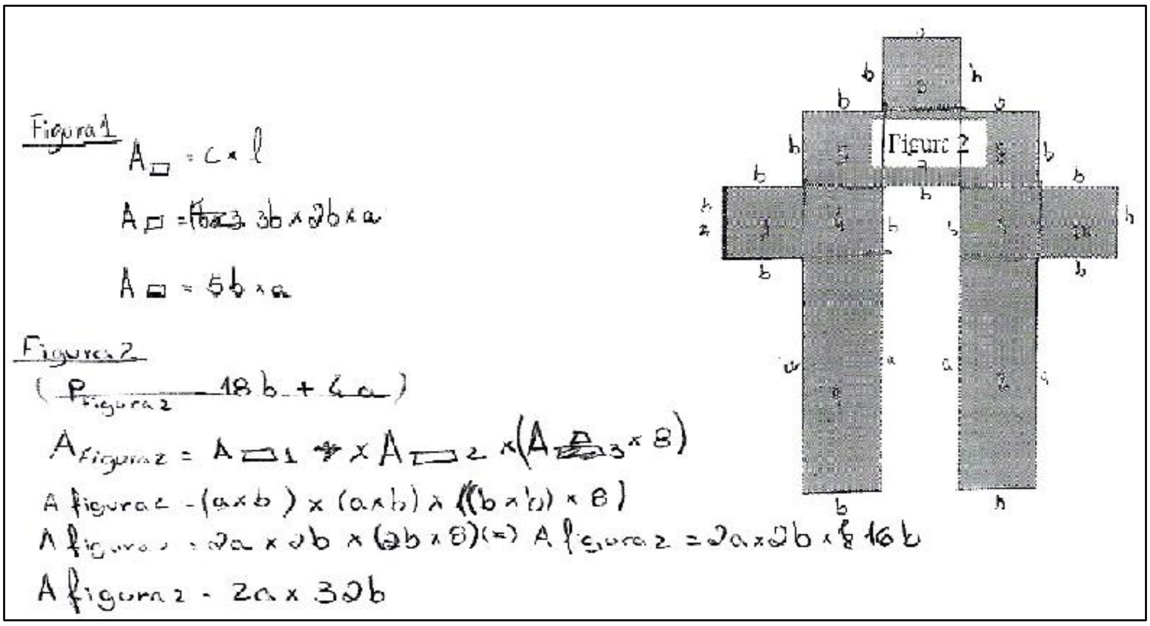


Figura 10 - Resolução de Rosa da questão 1 da Tarefa 1

Na alínea c, Rosa teve dificuldades ao simplificar a expressão da diferença das duas áreas (Figura 11). Referiu que agora está estudando as inequações e equações, e que já não se lembra de como operar em uma subtração de termos algébricos.

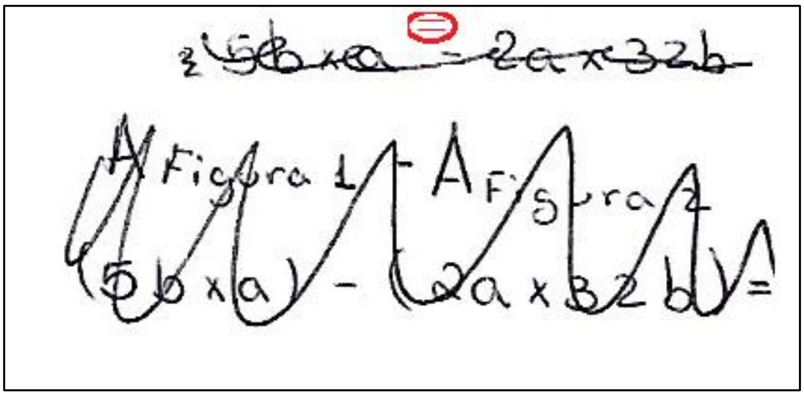


Figura 11 – Resolução de Rosa na questão 1 da Tarefa 1 (alínea c)

Pesquisadora: Por que está mal? Colocaste $5b \times a = 2a \times 32b$. Por que riscaste?

Rosa: Porque diferença, eu acho que não é assim. A diferença é menos ... Então tenho de fazer a área da figura 1 menos a da figura 2. ... Posso passar à frente e depois voltar?

Pesquisadora: Podes. Mas qual é a dificuldade?

Rosa: É fazer isto aqui (simplificar a expressão). É que eu agora tô com as inequações e já não lembro como se faz, sei que passa o a para um lado e o b para o outro, mas aqui não dá pra fazer, porque aqui tem o menos. Se tivesse aqui um igual assim já dava, metia o $2a$ pra o pé do a e o $5b$ pra o pé do $32b$ mas como não tá aqui o igual, não dá.

Observamos que Rosa expressou algumas das medidas de comprimento, como $3b$, $a \times b$ e $(b \times b) \times 8$, mas não conseguiu representar a área das figuras por meio da linguagem algébrica. Apresenta dificuldades na manipulação algébrica, particularmente na multiplicação de monômios e no uso de dobro e quadrado de um termo. Demonstra não ter clareza quanto ao uso da soma e da multiplicação de termos, pelo que usa multiplicação a fim de representar situações de adição. Compreende que a e b representam medidas de comprimento e que a sua expressão $(b \times b) \times 8$ representa medida de área, mas os significados das expressões estão essencialmente ligados aos procedimentos realizados para calcular área, sem referência à disposição visual da figura.

Maria

Maria apresentou dificuldade na interpretação do problema, bem como na compreensão dos símbolos a e b. A estudante demorou bastante lendo a questão e, em seguida, perguntou o que seriam estas letras.

Maria: Aqui o comprimento a é de qual? O a? Como assim? Comprimento b...

Para responder à primeira pergunta, relativamente a qual das figuras tem maior área, Maria percebeu que a área da figura 2 excede a da figura 1 em dois quadrados e não recorreu a expressões algébricas para justificar sua afirmação, antes usou um desenho e uma explicação verbal.

Pesquisadora: Entendeste a pergunta Marta? Quer saber qual das duas áreas é maior.

Maria: É esta (figura 2).

Pesquisadora: Por quê?

Maria: Vê-se! Por exemplo, se tirarmos este (quadrado lateral de lado b) vamos ver que este depois vai juntar aqui (em baixo, na figura 2) e é igual a este (figura 1).

Pesquisadora: E sobrava algo?

Maria: Estes dois. Então significa que este (figura 2) é maior.

Na alínea b, Maria demonstrou desconforto, ao perceber que tinha de fazer expressões algébricas, e precisar de alguma ajuda para começar. A estudante teve dificuldades para identificar as medidas dos lados nas figuras e não se lembrava de como calcular área de retângulo.

Pesquisadora: É para escrever uma expressão algébrica.

Maria: Não sei.

Pesquisadora: Consegues perceber onde estão o a e o b nessa figura?

Maria: Sim.

Pesquisadora: Mostra-me lá então.

Maria: O a tá aqui (apontando para o total da base do retângulo, $a + 2b$).

Pesquisadora: Achas que o a é grande assim?

Maria: É este (a, na base do retângulo). E o b são estes pedacinhos (apontando para a largura, $3b$). E isto é o a também.

Pesquisadora: Então 3 vezes o b é igual ao a?

Maria: Assim, vendo aqui (na legenda), não! Seria um bocadinho mais.

Pesquisadora: O enunciado diz que as figuras são construídas com segmentos de comprimentos a e b.

Maria: Então, o a tá ... O b são estes (apontando para o lado esquerdo na figura).

Pesquisadora: E estes também (medida no lado direito)?

Maria: Pode ser. Se estiver assim com os tracinhos.

Pesquisadora: Ok.

Maria: Este também é b (em cima). Este também. Aqui (embaixo) também, se dividirmos. Depois isto e isto é o a.

Pesquisadora: E a área, como tu farias? Lembra-te como se calcula área de retângulo?

(...)

Seria multiplicação?

Maria: Ah! b vezes h. Alguma coisa assim. h é de altura, utilizam h porque depois os estrangeiros já sabem...

Maria identificou nas figuras as medidas e somou todas as medidas de a e todas as medidas de b. A estudante demonstra não compreender o conceito e o cálculo de área, pelo que também teve dificuldades em escrever as expressões algébricas, e escreveu um produto. Porém, não expressou a relação multiplicativa de $comprimento \times largura$, antes multiplicou o total de medidas de a pelo total de medidas de b (Figuras 12 e 13).

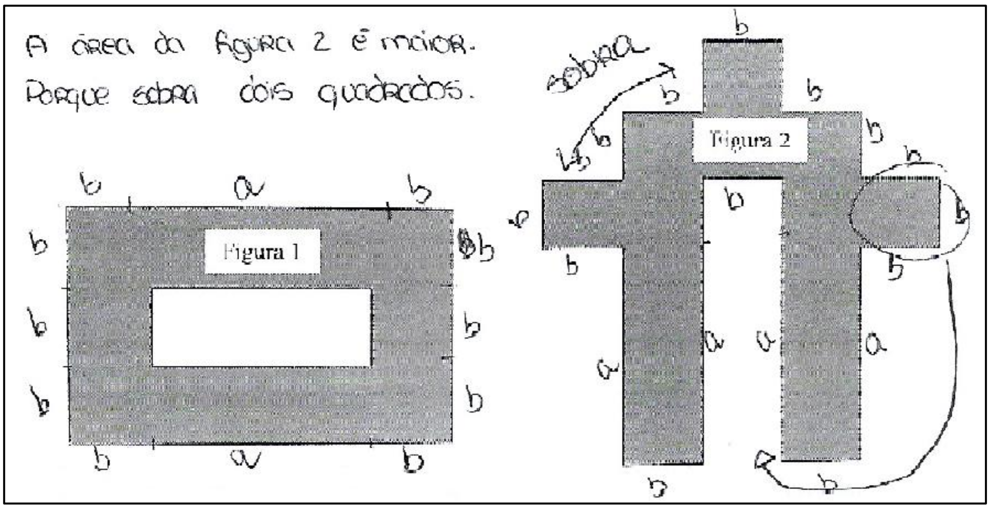


Figura 12 - Resolução de Maria da questão 1 da Tarefa 1

Área Sombreada	Expressão
Figura 1	Figura 1 área = 2a x 10b
Figura 2	Figura 2 área = 4a x 13b

Figura 13 - Resolução de Maria da questão 1 da Tarefa 1 (alínea b)

Da mesma maneira, na alínea c, Maria fez mentalmente as subtrações de $4a$ e $2a$ e de $13b$ e $10b$, valores encontrados por ela na contagem de termos nas figuras. A estudante respondeu, portanto, que a área da figura 2 é maior porque tem dois a e três b a mais que a figura 1. Não expressou a diferença das áreas por meio de notação algébrica, mas escreveu em linguagem verbal.

Observamos que Maria não recorreu à linguagem algébrica até o enunciado da questão o solicitar, mas resolveu o problema a partir da disposição visual da figura. Reconhece que a e b representam medidas de comprimento, mas tentou expressar área a partir de uma adição de termos e do produto de seus resultados. Não simplificou suas expressões, pelo que não foi possível observar dificuldades na manipulação algébrica, sendo provável que existam. Apesar de resolver o problema a partir da disposição visual da figura, não representou esta ideia por meio da linguagem algébrica e suas expressões não se relacionam com o raciocínio demonstrado, mas com os procedimentos de adição e multiplicação de termos.

O Quadro 2 sintetiza as situações apresentadas na questão 1 da tarefa 1 no que se refere ao uso de linguagem verbal e algébrica, e aos significados e dificuldades.

Quadro 2 - Síntese (Tarefa 1 - Questão 1)

Estudante	Linguagem Verbal e Linguagem Algébrica	Dificuldades	Significados
Paulo	- Expressa, com dificuldade relacionada ao uso de parênteses, a área sombreada por meio da linguagem algébrica.	- Não usa parênteses ao representar produto. Ex: $3b \times 2b + a$ em vez de $3b \times (2b + a)$; - Multiplicação de monômios. Ex: $3b \times 2b$ igual a $6b$.	- Medidas de comprimentos (a, b, $3b$ e $a + 2b$) e de área; - Produto do comprimento pela largura, e soma ou subtração de medidas de área; - Expressão de diferença relaciona-se com manipulação algébrica.
Daniel	- Expressa, com dificuldade a área sombreada por meio da linguagem algébrica.	- Multiplicação de termos. Ex: $3b \times 2b$ igual a $6b$; - Usa incorretamente dobro e quadrado. Ex: Usa $2b$ em vez de b^2.	- Medidas de comprimentos (a, b, $3b$ e $a + 2b$) e de área; - Produto do comprimento pela largura, e soma ou subtração de medidas de área; - Expressão de diferença relaciona-se com manipulação algébrica.
José	- Expressa, com dificuldade relacionada aos parênteses e à manipulação algébrica, a área sombreada por meio da linguagem algébrica.	- Não usa parênteses ao representar produto e diferença. Ex: $3b \times 2b + a$ em vez de $3b \times (2b + a)$; - Usa incorretamente dobro e quadrado. Ex: Usa $2b$ em vez de b^2.	- Medidas de comprimentos (a, b, $3b$ e $a + 2b$) e de área; - Produto do comprimento pela largura, e soma ou subtração de medidas de área; - Expressões relacionam-se com a disposição visual da figura e com os procedimentos realizados.

Laura	- Privilegia a linguagem verbal; - Expressa, com dificuldade relacionada ao uso de parênteses, a área sombreada por meio da linguagem algébrica.	- Não usa parênteses ao representar produto. Ex7: $3b \times 2b + a$ em vez de $3b \times (2b + a)$; - Não simplifica as expressões autonomamente.	- Medidas de comprimentos (a, b, $3b$ e $a + 2b$) e de área; - Produto do comprimento pela largura, e soma ou subtração de medidas de área; - Expressões relacionam-se com a disposição visual da figura e com os procedimentos realizados.
Rosa	- Expressa algumas medidas de comprimento por meio da linguagem algébrica.	- Usa indiscriminadamente soma, multiplicação e potência; - Multiplicação de monômios. Ex: $(a \times b) \times (a \times b)$ é igual a $2a \times 2b$; - Usa incorretamente dobro e quadrado. Ex: Usa $2b$ em vez de b^2.	- Medidas de comprimentos (a, b e $3b$) e de área; - Expressões relacionam-se com procedimentos, em uma junção de termos.
Maria	- Expressa verbalmente a diferença das medidas de área, mas não o fez algebricamente.	- Não simplifica as expressões elaboradas.	- Medidas de comprimentos (a, b); -Expressões relacionam-se com procedimentos, em uma junção de termos.

6.1.2. Questão 2

A questão 2 é um problema de partilha onde o estudante deve interpretar o problema e equacioná-lo, realizar adição algébrica e resolver a equação, bem como interpretar os valores encontrados (Figura 14).

> 2) Numa época desportiva estão inscritos 380 alunos nas diferentes modalidades. A modalidade de basquetebol tem 3 vezes mais alunos do que a patinagem, e a natação tem mais 114 alunos que o basquetebol. Quantos alunos participam em cada modalidade?

Figura 14 - Questão 2 da Tarefa 1

Paulo

Paulo leu o problema, interpretou e, imediatamente, recorreu à linguagem algébrica para resolvê-lo. O estudante demonstrou familiaridade com situações como esta, no que refere ao processo de tradução de uma situação descrita em linguagem verbal para linguagem algébrica. Designou x para representar o número de alunos inscritos na patinagem, compreendeu que o número de alunos inscritos no basquetebol estava relacionado com este, e que o número de alunos inscritos na natação estava relacionado com o número de alunos inscritos no basquetebol, representando-os por $3x$ e $3x + 114$ (Figura 15). A equação que Paulo escreveu expressa as relações aditivas e multiplicativas entre o número de participantes nas diferentes modalidades, bem como que sua soma representa o total de alunos inscritos.

> tem mais 114 alunos que o basquetebol. Quantos alunos participam em cada modalidade?
>
> $x =$ patinagem
>
> $380 = 3x + x + (3x + 114) \Leftrightarrow$
>
> $\Leftrightarrow 380 = 4x + 3x + 114 \Leftrightarrow$
>
> $\Leftrightarrow 380 = 7x + 114 \Leftrightarrow$
>
> $\Leftrightarrow 380 - 114 = 7x \Leftrightarrow 266 = 7x \Leftrightarrow 7x = \frac{266}{7} \Leftrightarrow$
>
> $x = 38$
>
> $380 - 114 = 266$

Figura 15 - Resolução de Paulo da questão 2 da Tarefa 1.

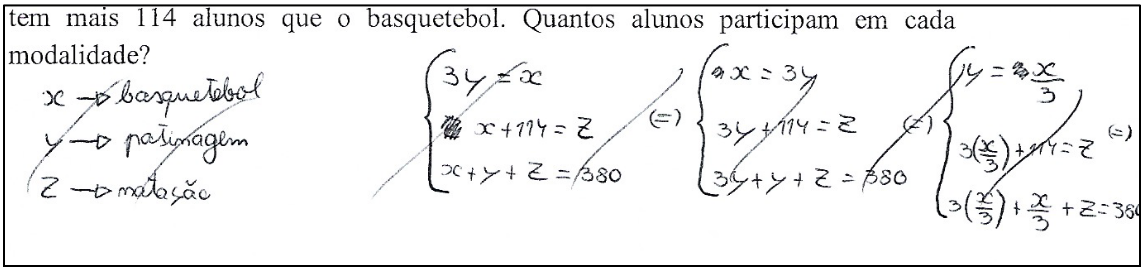
Observamos que Paulo não teve dificuldades na resolução da equação e interpretou seus resultados à luz do problema, encontrando os números corretos de alunos inscritos em cada modalidade, como solicitava o problema. O estudante indica reconhecer as vantagens do uso da linguagem algébrica para resolver problemas, usar os símbolos sem preocupar-se com seus significados no momento da manipulação simbólica e voltar a interpretá-los no final de sua resolução.

> *Pesquisadora:* Ok. Então, tens que a o número de alunos na patinagem é 38. E achas que estes valores fazem sentido no problema?
>
> *Paulo:* Acho que sim. É só somar tudo isto e ver se dá.
>
> (...)
>
> *Pesquisadora:* Neste problema, por que é que já fizeste logo a expressão? Não era possível fazer isso usando outros cálculos?
>
> *Paulo:* Sim, mas acho que depois ia ficar um bocado mais difícil. Assim acho que é mais fácil.

Vemos que Paulo recorreu espontaneamente à linguagem algébrica para resolver o problema e não teve dificuldades na tradução da situação em linguagem verbal para linguagem algébrica. Reconhece as vantagens de equacionar o problema e fá-lo com familiaridade, demonstrando fluência na manipulação algébrica e na resolução da equação. Relativamente aos significados dos símbolos e equações, observamos que compreende que a sua incógnita x representa uma quantidade, que as expressões $3x$ e $3x + 14$ indicam relações entre quantidades e que $3x + x + 3x + 14 = 380$ representa o total de alunos apresentado no problema.

Daniel

Daniel, assim como Paulo, leu o problema e recorreu à linguagem algébrica imediatamente. O estudante, porém, usou três incógnitas para representar os números de inscritos nas diferentes modalidades, escreveu um sistema de equações relacionando-as e, ao deparar-se com a dificuldade de resolver um sistema com três incógnitas, desistiu de sua estratégia e foi em busca de outra forma de fazer (Figura 16). Paulo designou o número de inscritos no basquetebol por x e relacionou-o com os números de inscritos nas outras modalidades, $x = 3y$ expressando uma relação multiplicativa onde y é o número de inscritos na patinagem e $x + 114 = z$ expressando uma relação aditiva onde z é o número de inscritos na natação e $x + y + z = 380$ representando o total de inscritos nas diferentes modalidades. É importante observar que, apesar de não ser a opção mais econômica, o sistema de equações escrito pelo estudante traduz corretamente a situação apresentada em linguagem verbal para linguagem algébrica e teria o levado à solução do problema, caso tivesse continuado a resolver o sistema de equações.

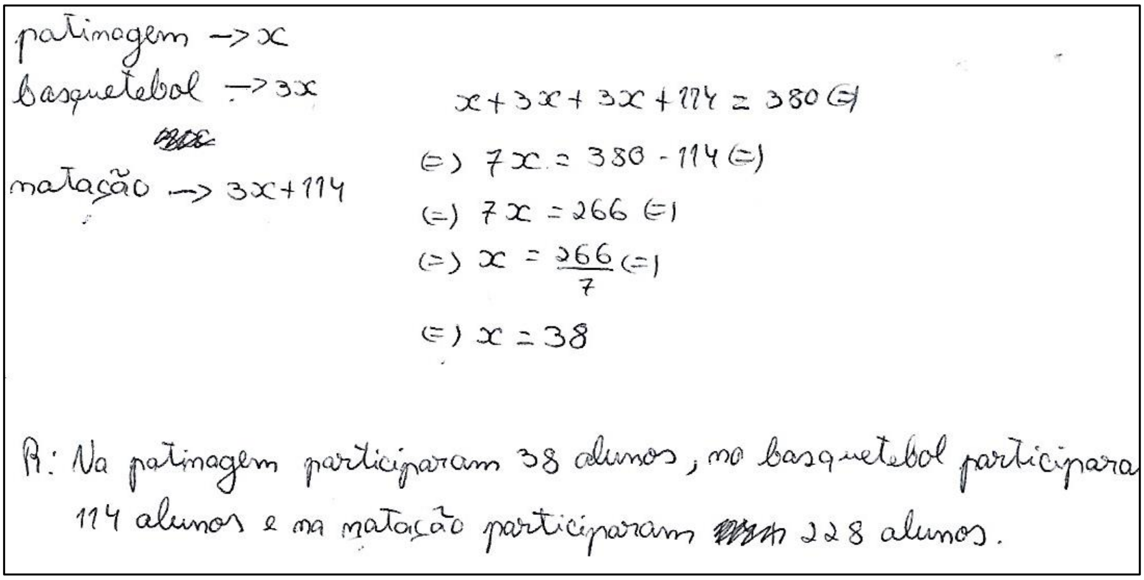

tem mais 114 alunos que o basquetebol. Quantos alunos participam em cada modalidade?

$x \rightarrow$ basquetebol
$y \rightarrow$ patinagem
$z \rightarrow$ natação

$$\begin{cases} 3y = x \\ x + 114 = z \\ x + y + z = 380 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 3y + 114 = z \\ 3y + y + z = 380 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{3} \\ 3\left(\frac{x}{3}\right) + 114 = z \\ 3\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{3} + z = 380 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Figura 16 – Primeira resolução de Daniel da questão 2 da Tarefa 1

Daniel, ao desistir do sistema de equações e refletir novamente sobre o problema foi, aos poucos construindo um novo raciocínio que resultou em uma equação onde as modalidades foram todas expressas em função de x, número de alunos inscritos na patinagem (Figura 17). O estudante demonstrou saber representar um problema por meio de linguagem algébrica, pois o fez corretamente em suas duas estratégias e, apesar de não perceber que era possível continuar a resolução do sistema, não teve dificuldades na resolução da equação e interpretou corretamente os valores encontrados.


patinagem $\rightarrow x$
basquetebol $\rightarrow 3x$
natação $\rightarrow 3x + 114$

$$x + 3x + 3x + 114 = 380 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x = 380 - 114 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x = 266 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{266}{7} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 38$$

R: Na patinagem participaram 38 alunos, no basquetebol participara 114 alunos e na natação participaram 228 alunos.

Figura 17 - Resolução de Daniel da questão 2 da Tarefa 1

Observamos que Daniel também usa com familiaridade a linguagem algébrica a fim de resolver problemas como este. Não apresenta dificuldades para traduzir em linguagem algébrica a situação apresentada em linguagem verbal, privilegiando o uso de mais de uma incógnita. Entretanto, apresentou dificuldade na resolução do sistema com três equações e na construção de apenas uma equação que traduzisse o problema. Resolveu equações sem dificuldade no uso de técnicas e procedimentos. Relativamente aos significados das incógnitas e da equação, compreende que x, y e z representam quantidades e que suas expressões traduzem as relações entre as quantidades, assim como sua equação representa que a soma das três quantidades expressas em linguagem algébrica é igual ao total de alunos inscritos nas diferentes modalidades.

José

José usou exatamente a mesma estratégia que Daniel tentou inicialmente, escrevendo um sistema de equações onde o número de inscritos no basquetebol relaciona-se com os números de inscritos nas demais modalidades e a soma de inscritos nas três modalidades é igual a 380 (Figura 18). O estudante, porém, seguiu com a resolução do sistema de equações, que consistiu basicamente na substituição de expressões, e chegou à solução do problema, evidenciando não apenas capacidade de manipulação algébrica como também compreensão do significado de cada incógnita designada, das equações, e dos valores encontrados.

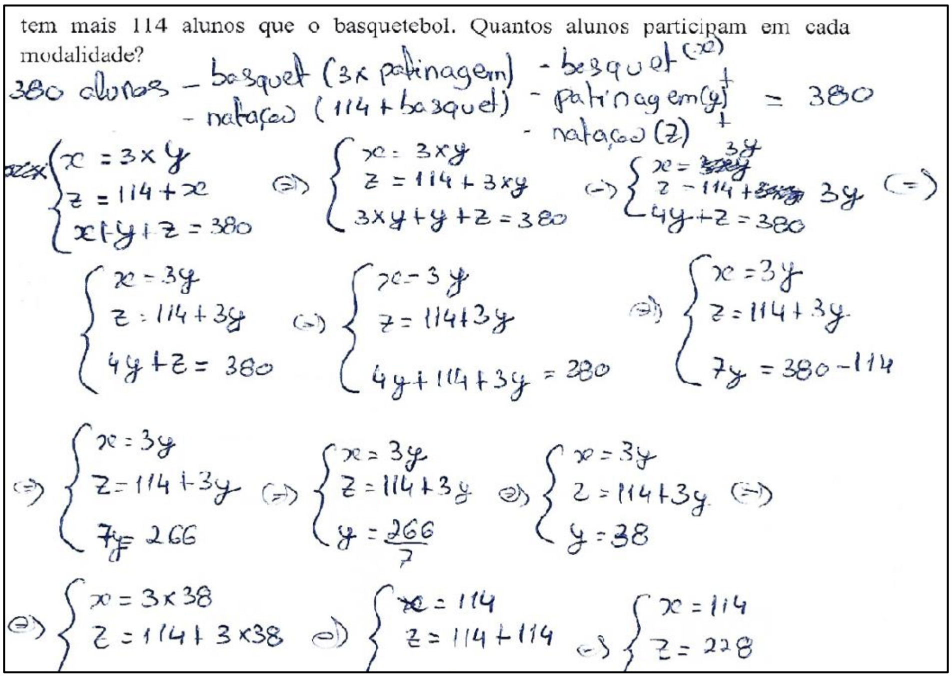


Figura 18 - Resolução de José da questão 2 da Tarefa 1

> *José:* Então, o basquete, que é o x, é três vezes a patinagem, que será o y. E a natação que é o z é 114 mais o x, que é o basquete.

Observamos que José recorreu imediatamente ao uso de símbolos e demonstrou saber como passar de uma situação problemática em linguagem verbal a linguagem algébrica, expressando as relações aditivas e multiplicativas apresentadas no problema. Não teve dificuldades na manipulação simbólica, nomeadamente na resolução do sistema de equações, e demonstrou familiaridade com os símbolos. Relativamente aos significados das incógnitas e expressões, vimos que o estudante compreende que x, y e z representam quantidades e suas expressões indicam as relações entre elas. A interpretação dos valores encontrados demonstra que não perdeu de vista a situação problema e preocupou-se com a validade destes resultados.

Laura

Laura interpretou corretamente o problema, mas não conseguiu resolvê-lo. A estudante raciocinou durante muito tempo sobre a situação descrita e chegou a algumas conclusões acerca do número de alunos em cada modalidade, entretanto, não calculou os valores e acabou por passar às questões seguintes.

> *Laura:* Porque supostamente estão, no mínimo, 114 alunos na natação. Então, como estão no mínimo 114 alunos vão sobrar 266. Destes 266 ainda tem de haver mais alunos para a natação, e tem de haver mais alunos para o basquetebol e para a patinagem, mas a patinagem tem sempre menos que o basquetebol e a natação tem sempre mais que o basquetebol.
>
> *Pesquisadora:* Então qual é a ordem? De quem tem menos para quem tem mais.
>
> *Laura:* Patinagem, basquetebol e natação.
>
> *Pesquisadora:* E a questão não diz quão maior é cada um?
>
> *Laura:* Diz, porque diz que o basquetebol tem três vezes mais do que a patinagem, e que a natação tem mais 114 alunos do que o basquete.

Laura calculou a diferença de 380 e 114, pensou na possibilidade de dividir 380 por 3 mas não chegou a fazer a operação e escreveu ainda $\times 3 +$ (Figura 19). Neste momento, cogitei que a estudante iria equacionar o problema, e que o sinal $\times$ tratava-se de uma incógnita x, porém ela estava apenas representando que o número de inscritos no basquetebol é três vezes o número de inscritos na patinagem, ou seja, o símbolo $\times$, nesta situação, teve para Laura o significado de sinal indicativo de multiplicação.

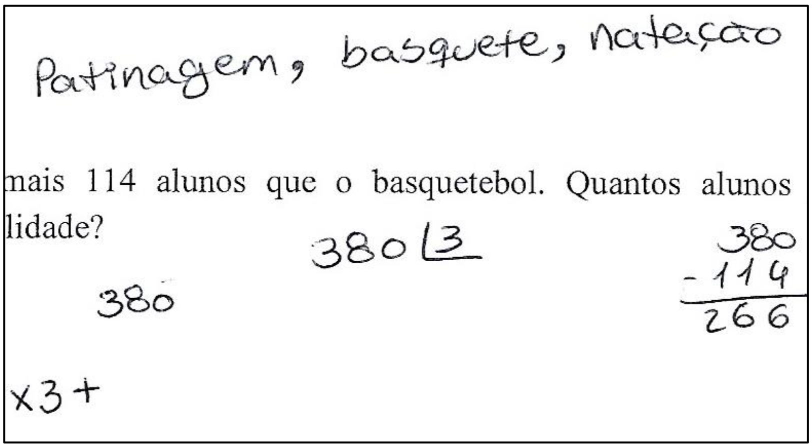


Figura 19 - Resolução de Laura da questão 2 da Tarefa 1

Pesquisadora: O que representa este ‘x’?

Laura: É três vezes mais. O basquetebol tem três vezes mais alunos do que a patinagem.

Pesquisadora: Então o ‘x’ é o quê?

Laura: É o vezes.

Laura, como vimos, não recorreu à linguagem algébrica para resolver o problema, antes tentou resolvê-lo aritmeticamente e referiu, ao final da entrevista, que nem mesmo pensou em traduzir o problema para linguagem algébrica, ficando evidente que, para ela, não é natural recorrer a esta linguagem. Teve dificuldade na interpretação e resolução do problema e, uma vez que não usou linguagem algébrica, não podemos falar em manipulação algébrica ou ainda em significados para incógnitas e expressões algébricas.

Rosa

A resolução de Rosa foi feita combinando linguagem simbólica não convencional e operações aritméticas. A estudante usou o símbolo ‘?’ em uma organização inicial dos dados informados no problema, e demonstrou estar confusa com o significado que deveria atribuir a este símbolo (Figura 20). Representou por $3(?+114)$ e $?+114$ o número de inscritos na natação e no basquetebol, mas riscou suas expressões e recomeçou seu raciocínio, concluindo que ‘?’ seria o número de inscritos na patinagem e representando corretamente os outros valores em função deste.

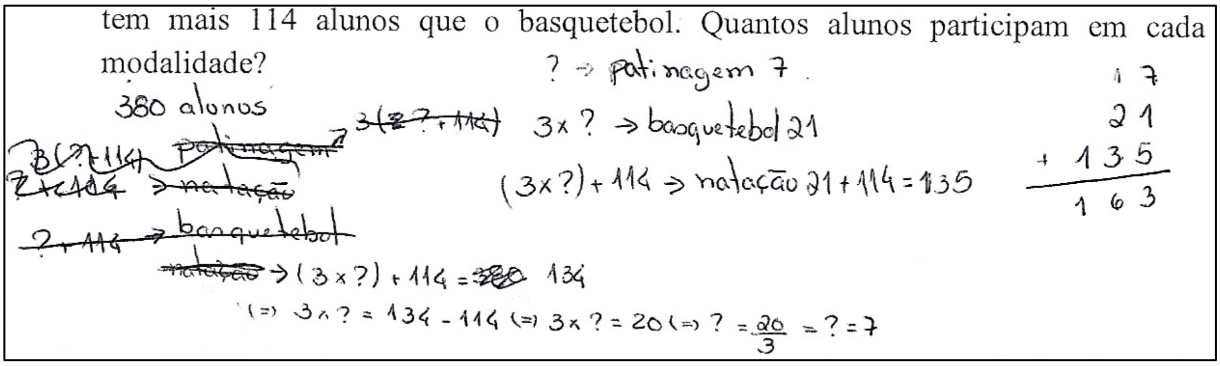


Figura 20 - Resolução de Rosa da questão 2 da Tarefa 1

Pesquisadora: Esse ponto de interrogação, estás a usá-lo para representar o quê?

Rosa: antes era o basquetebol, mas agora já não é.

Pesquisadora: Vamos lá ver, temos três modalidades.

Rosa: Então patinagem tem ... o basquetebol tem três vezes mais do que a patinagem. Ah, então o basquetebol é três vezes mais.

(...)

Pesquisadora: E a patinagem tem quantos?

Rosa: Não sabemos. É o ponto de interrogação. A natação nós também não sabemos, mas o basquetebol é 3 vezes o ponto de interrogação.

(...)

Pesquisadora: OK.

Rosa: E depois, aqui na natação é 3 vezes o ponto de interrogação, entre parênteses, mais 114.

Após escrever as expressões que representam o número de inscritos em cada modalidade, Rosa teve dificuldades para encontrar os valores, uma vez que não fez a soma dos termos para totalizar 380 e usou $(3 \times ? + 114) = 380$. Durante o diálogo, observei se ela conseguiria perceber que era preciso somar todos os temos, mas a estudante optou por dividir 380 por 3, já que são três as modalidades, e igualar $3 \times ? + 114$ ao resultado de sua divisão.

Pesquisadora: Como podes fazer para descobrir quantos alunos participaram em cada modalidade?

Rosa: Tem de se fazer igual (referindo-se a $3 \times ? + 114$) a 380, que é o total de alunos, e agora resolver.

Pesquisadora: Mas o que significa o 3 vezes ponto de interrogação mais 114?

Rosa: A natação.

Pesquisadora: Então apenas a natação tem 380?

Rosa: Ah, não! Não pode ser assim! O 380 era só da natação. Então faço 380 a dividir por 3, porque são as 3 modalidades que existem.

(...)

A divisão dá com vírgula. Nunca fui boa a fazer divisões! Essas partes confundem-me bué.

(...)

Pesquisadora: Então explica-me lá o que fizeste até agora.

Rosa: Passei o 114 pra o pé do 134 e depois fiz outra vez o 3 vezes ponto de interrogação, igual a 20 porque 134 menos 114 é igual a 20. Meti que o ponto de interrogação é o 20 a dividir por 3, o 3 como tá a multiplicar deste lado, passa a dividir pra este.

Pesquisadora: Encontraste o 7. O que ele significa?

Rosa: Significa a patinagem porque é o ponto de interrogação. Depois aqui para o basquetebol 3×7 dá 21. Depois já metia o 21 mais 114 para a natação. Agora vou fazer a soma para ver se dá todos os alunos.

(...)

Deu super diferente! (...) Tá mal por causa das contas, mas tá certo o resto.

Rosa teve dificuldades em escrever a equação para o problema e o fez partindo da ideia de que o número de inscritos na natação era igual a um terço do total de inscritos nas diferentes modalidades. A estudante resolveu esta equação de acordo com regras de resolução de equação do 1.º grau com uma incógnita e, diante de divisões cujo quociente não era exato, considerou apenas a parte inteira. Ao interpretar seus resultados, Rosa ignorou a discrepância entre a soma dos valores encontrados e o total de alunos apresentado no problema, justificando que errou nas operações aritméticas, mas que a equação está correta.

Rosa não recorreu à linguagem algébrica convencional, mas utilizou pensamento algébrico em sua resolução, representando os números de inscritos em cada modalidade por meio de expressões de relações aditivas e multiplicativas. Teve dificuldade em escrever uma equação para resolver o problema, igualando a expressão da quantidade de participantes em uma das modalidades ao total de inscritos, bem como nas operações aritméticas que faziam parte de sua estratégia. Relativamente aos significados dos símbolos, vimos que "?" representa uma quantidade, assim como "$3\times ?$" e "$3\times ?+114$", e que a estudante usa a expressão "$3\times ?+114=380$" a fim de saber a quantidade de inscritos em uma modalidade, de maneira que o significado de tal expressão está ligado aos procedimentos necessários para resolver o problema.

Maria

Maria, assim como Laura, não equacionou o problema, mas tentou resolvê-lo por meio de operações aritméticas e teve muita dificuldade ao tentar descobrir o número de inscritos em cada uma das modalidades. A estudante fez a diferença entre 380 e 114, dividiu o resultado por 3, já que estes alunos seriam distribuídos entre as três modalidades, concluindo que este era o número de alunos inscritos na patinagem. Em seguida, não usou este resultado para calcular o número de inscritos nas demais modalidades, antes dividiu 114 por 2 e multiplicou por 3, obtendo 171 para o número de inscritos no basquetebol. Por fim, somou 114 a este resultado para encontrar o número de alunos inscritos na natação (Figura 21).

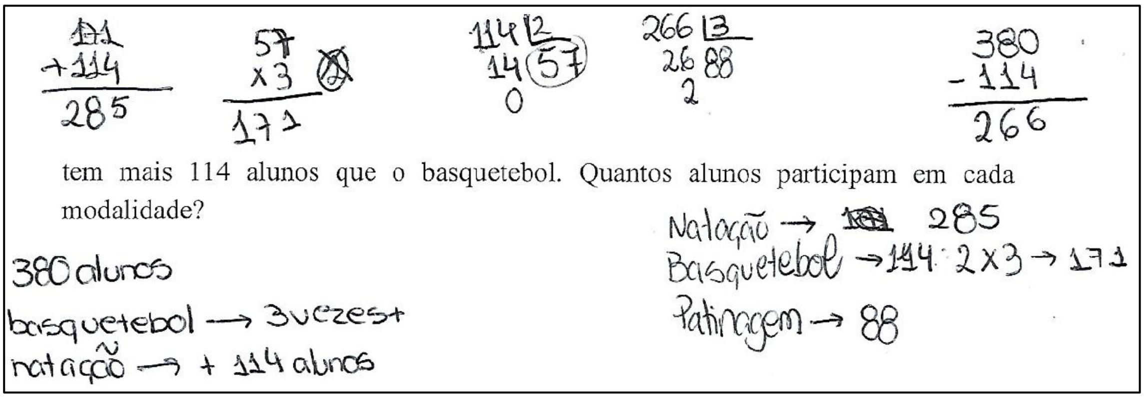


Figura 21 - Resolução de Maria da questão 2 da Tarefa 1

A resolução de Maria não sugere que ela saiba traduzir um problema em linguagem verbal para linguagem algébrica, ou que veja vantagens no uso de linguagem algébrica. Observamos ainda que a estudante teve muita dificuldade na realização das operações aritméticas e não refletiu sobre os valores que encontrou.

Assim, Maria optou por resolver o problema aritmeticamente, não recorrendo à linguagem algébrica para representar a situação e apresentou muita dificuldade na interpretação do problema, bem como na realização das operações aritméticas que compunham sua estratégia de resolução. Uma vez que a estudante não usou linguagem simbólica, não foi possível observar seu desempenho na manipulação algébrica ou ainda os significados dos símbolos.

O Quadro 3 sintetiza as situações apresentadas na questão 2 da tarefa 1 no que se refere ao uso de linguagem verbal e algébrica, e aos significados e dificuldades.

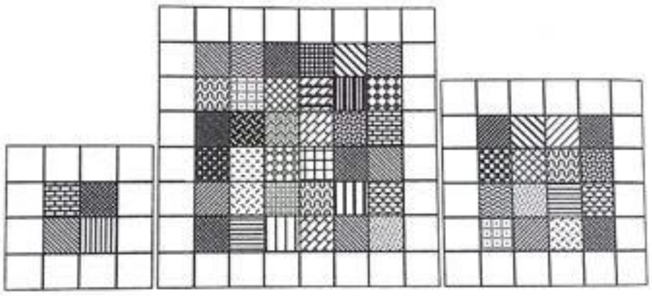
6.1.3. Questão 3

A questão 3 é uma situação problemática de generalização onde é esperado que o estudante determine termos de uma sequência e o padrão de formação da figura usando linguagem verbal e algébrica (Figura 22).

Quadro 3 - Síntese (Tarefa 1 - Questão 2)

Estudante	Linguagem Verbal e Linguagem Algébrica	Dificuldades	Significados
Paulo	- Usa a linguagem algébrica para representar a situação; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica.	- Sem dificuldades.	- Incógnita (x): Quantidade; - $3x + x + 3x + 14 = 380$ expressa a quantidade total.
Daniel	- Usa a linguagem algébrica para representar a situação; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica.	- Usa um modo menos econômico para expressar as relações entre as quantidades; - Sem dificuldade na manipulação algébrica.	- Incógnitas (x, y e z): Quantidades; - Expressões: Relações entre as quantidades.
José	- Usa a linguagem algébrica para representar a situação; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica.	- Usa um modo menos econômico para expressar as relações entre as quantidades; - Sem dificuldade na manipulação algébrica.	- Incógnitas (x, y e z): Quantidades; - Expressões: Relações entre as quantidades. Ex: $z = 114 + 3y$.
Laura	- Não usa a linguagem algébrica para representar a situação; - Usa uma estratégia aritmética.	- Dificuldade na interpretação e resolução do problema.	- Não há incógnitas nem expressões.
Rosa	- Usa linguagem simbólica não convencional para representar o problema.	- Dificuldade em representar a situação por meio de uma equação; - Dificuldade nas operações aritméticas.	- Não há incógnitas; - $?$, $3 \times ?$ e $3 \times ? + 114$ representam quantidades; - $3 \times ? + 114$ é igual a 380 porque pretende saber uma quantidade de inscritos.
Maria	- Usa uma estratégia aritmética.	- Dificuldade na interpretação e resolução do problema; - Dificuldade nas operações aritméticas.	- Não há incógnitas nem expressões.

3) A Germana está a fazer mantas de retalhos, para isso está a usar quadrados de tecido de todas as cores e vai acrescentar uma volta completa de quadrados brancos, como mostra a figura abaixo. Ela precisa de contar o número de quadrados necessários para acrescentar uma volta completa a cada manta. Ajuda a Germana!



a) Quantos quadrados brancos são necessários para aumentar uma manta de 8 quadrados de lado? E para uma manta de 16 quadrados de lado?

b) Encontra um processo que permita à Germana conhecer o número de quadrados a acrescentar sem que tenha que contar os quadrados. Escreve esse processo por palavras tuas.

c) Exprime, recorrendo a linguagem matemática, o processo descrito na alínea anterior.

Figura 22 - Questão 3 da Tarefa 1

Paulo

Paulo não teve dificuldade em interpretar o problema e em perceber que era preciso encontrar um padrão de formação para a figura. O estudante não se prendeu aos enunciados descritos nas alíneas a, b e c, e começou sua resolução procurando uma expressão de generalização para o número de quadrados brancos necessários para aumentar uma manta como a descrita no problema. Realizou uma contagem por meio da figura e comparou o número de quadrados coloridos com o número de quadrados brancos em cada manta, concluindo que este excede o primeiro em 8 quadradinhos (Figura 23).

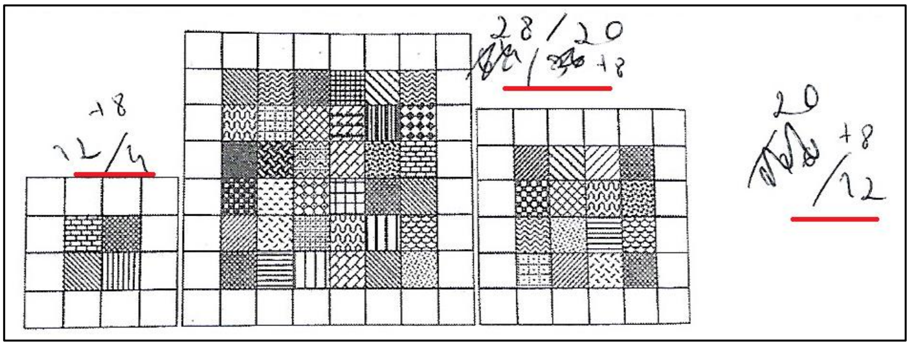


Figura 23 - Contagem de Paulo na questão 3 da Tarefa 1

Paulo escreveu a expressão $n = x + 8$, onde n é o número de quadrados brancos necessários e x é o número de quadrados coloridos na borda da manta, e teve dificuldade em explicar seu raciocínio usando linguagem verbal, relativamente às partes que compõem a figura e ao significado de sua variável x. É importante observar que esta generalização feita por Paulo não exclui a necessidade de uma contagem, uma vez que x representa o número de quadrados coloridos na borda da manta, e que por isso, o estudante recorreu a uma nova estratégia para evitar a contagem um a um. Explicou-a, usando um exemplo, e não escreveu esta generalização recorrendo à linguagem algébrica, apesar de evidenciar pensamento algébrico e muita clareza ao justificar verbalmente seu processo para calcular o número x de quadradinhos ($8 + 6 + 7 + 7$, para a manta com 8 quadradinhos no lado).

Pesquisadora: Estás a responder para oito, para dezasseis, ou já estás a fazer uma expressão?

Paulo: É que é mais fácil fazer logo uma expressão para descobrir logo todos.

Pesquisadora: Então qual é a tua expressão?

Paulo: É x que é, ... Tenho que explicar o que é x.

Pesquisadora: Pois.

Paulo: Se eu disser "os quadrados que estão por fora", pode ser? Ou "os quadrados que estão à volta da manta".

Pesquisadora: Pode ser.

(...)

Paulo: Tem trinta e oito quadrados à volta e, agora falta o dezasseis (...) Já está.

Pesquisadora: Ok. Então, explica-me lá.

Paulo: Neste aqui, como tem oito quadrados de lado, são oito mais seis em baixo e depois faço mais sete, mais sete.

Pesquisadora: Estás a fazer para oito?

Paulo: Sim, estou a fazer para oito. Por exemplo para oito. O quadrado tem quatro lados iguais e para fazer os à volta faço os oito de cima, depois mais seis embaixo porque tiro os das pontas e depois mais sete, mais sete.

Pesquisadora: Ok.

Paulo: Mas isso é só pra contar os de dentro, para ver quantos quadrados estão à volta, depois tem que somar mais os oito.

Apesar de Paulo explicar verbalmente um raciocínio correto, calculou mal $8 + 6 + 7 + 7$ e por isso chegou a um número errado de quadradinhos brancos para uma manta de 8 quadrados coloridos de lado. Já para 16 quadrados coloridos de lado o estudante operou corretamente, justificando sua estratégia de cálculo (Figura 24). Usando linguagem algébrica, a estratégia de Paulo seria calcular $x = a + (a-2) + (a-1) + (a-1)$, onde a é o número de quadrados do lado da manta e x é o total de quadrados coloridos na borda da manta e, em seguida, fazer $x + 8$ para encontrar o total de quadrados brancos necessários para aumentar a manta, n. Assim, o processo descrito verbalmente por Paulo expressa $n = a + (a-2) + (a-1) + (a-1) + 8$, e o estudante demonstrou enxergar esta generalização na disposição da figura (Figura 25).

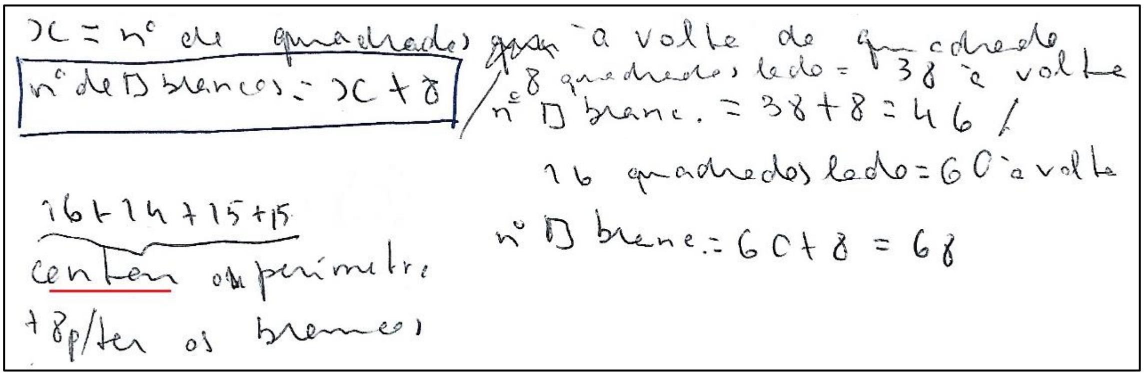


Figura 24 - Resposta de Paulo à questão 3 da Tarefa 1

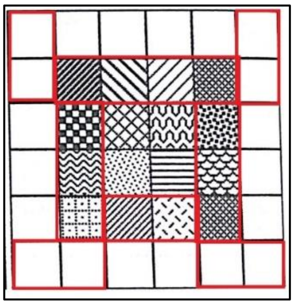


Figura 25 - Estratégia de Paulo na questão 3 da Tarefa 1

As estratégias de Paulo evidenciam que ele não tem dificuldades para compreender o comando de generalização, reconhece as vantagens do uso da linguagem algébrica no processo de generalização e expressa com clareza seu raciocínio em linguagem verbal. Teve dificuldade em traduzir para a linguagem algébrica todos os passos do processo utilizado para resolver o problema. Apesar de não ter escrito uma expressão algébrica capaz de evitar a contagem um a um, demonstrou um raciocínio algébrico correto e compreensão de que n e x representam as quantidades de azulejos brancos e os coloridos da borda da manta, respectivamente. O significado da expressão, $n = x + 8$, está relacionado a primeira generalização que pensou e seu raciocínio liga-se à disposição geométrica da figura.

Daniel

Daniel interpretou o problema corretamente e não teve dificuldades para calcular o número de quadrados brancos necessários para aumentar as mantas com 8 e 16 quadrados de lado. Sua estratégia, neste primeiro momento, foi adicionar 2 ao número do lado da manta, multiplicar por dois e adicionar duas vezes o número do lado da manta, expressando verbalmente uma generalização para o cálculo de quadrados brancos a adicionar:

> *Pesquisadora:* O que fizeste para chegar ao 36 e ao 68?
>
> *Daniel:* Eu fiz mentalmente e vi que no lado, pronto, aqui por exemplo tem 6 (no lado da manta) e tem 8 quadrados brancos. Portanto, aqui tem 8 mais 8, 16, e depois somei 6 e 6 é 12, 16 mais 12.
>
> *Pesquisadora:* E para dar 36?
>
> *Daniel:* Fiz 8 e contei nove, dez com os dos cantos e agora vezes dois porque é um quadrado, pronto, o lado oposto, e depois os laterais fiz só 8 mais 8 porque os cantos eu já tinha contado no 8 mais 2.
>
> *Pesquisadora:* Tá bem.
>
> *Daniel:* No 16 foi a mesma coisa, 18 vezes dois mais 16, mais 16.

Para responder à alínea b, Daniel não considerou o raciocínio usado na alínea a, invalidando-o enquanto forma de generalização e escreveu duas sequências numéricas, comparando o número de quadrados do lado com o total de quadrados necessários para aumentar a manta (Figura 26). Observamos que o estudante considerou apenas números pares para o lado da manta, devido aos exemplos apresentados na questão, e por isso concluiu que a lei de formação da sequência seria ‘termo anterior mais oito’, quando na verdade seria o termo anterior mais quatro, considerando como termo anterior o número de quadrados brancos necessários para aumentar a manta com um quadradinho a menos no lado.

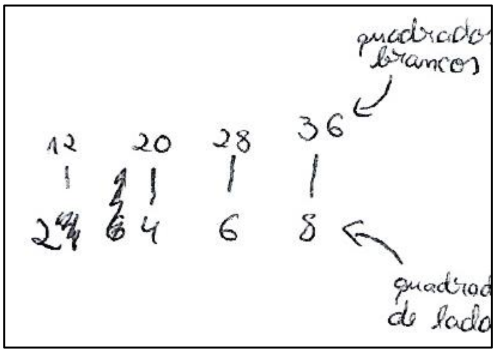
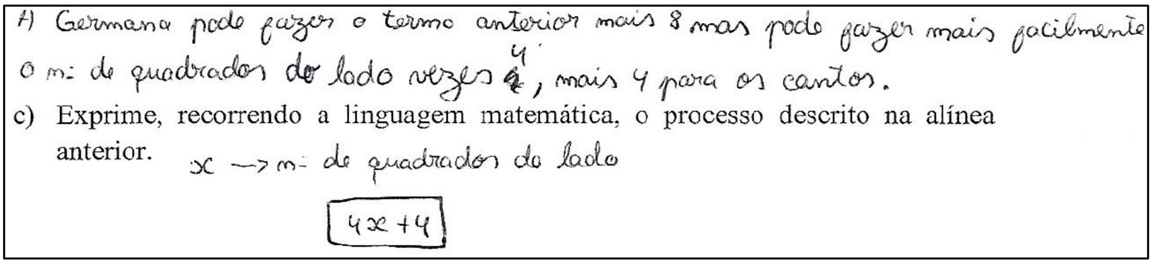


Figura 26 – Estratégia de Daniel na questão 3 da Tarefa 1

O próprio estudante reconheceu, porém, que este processo não facilitaria os cálculos, uma vez que seria necessário descobrir o número de quadrados necessários para aumentar cada manta, repensou sua estratégia olhando novamente para a disposição da figura e conseguiu expressar verbalmente e algebricamente uma generalização para o problema (Figura 27):

> *Daniel:* Já tenho uma sequência, mas não consigo descrever. É sempre 8 mais 8 mais 8, .. 2 corresponde a 12, mais 8 dá 20, mais 8 dá 28, depois 36 e vai.
>
> *Pesquisadora:* Então é o termo anterior mais 8?
>
> *Daniel:* Exato! Mas não posso dizer assim, porque teria de fazer sempre a conta desde o início.
>
> *Pesquisadora:* Este é o problema.
>
> (...)
>
> *Daniel:* Agora sei uma para fazer mais facilmente! Número de quadrados do lado mais 2, é isso que tá aqui, pronto (referindo-se ao raciocínio usado na alínea a). Não, vou por outra maneira mais fácil! O número do lado vezes 4, mais quatro para os cantos!


b) Germana pode fazer o termo anterior mais 8 mas pode fazer mais facilmente o nº de quadrados do lado vezes 4, mais 4 para os cantos.

c) Exprime, recorrendo a linguagem matemática, o processo descrito na alínea anterior.

$x \rightarrow$ nº de quadrados do lado

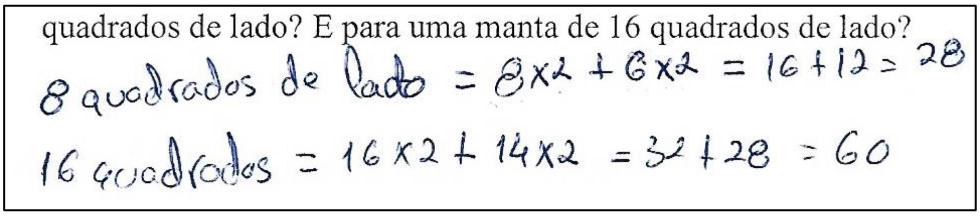
$\boxed{4x+4}$

Figura 27 - Resolução de Daniel da questão 3 da Tarefa 1

Daniel não recorreu à linguagem algébrica antes de ser solicitado e usou a linguagem verbal para apresentar a generalização, mas desconsiderou este primeiro raciocínio quando precisou escrever uma expressão algébrica. Demonstrou estar mais familiarizado com a estratégia de comparação de suas sequências numéricas para generalizar e, em sua terceira estratégia, elaborou a expressão $4x + 4$ a partir da disposição geométrica da figura, sendo x o número de quadrados coloridos no lado da manta. Dessa forma, destacamos o fato de ter recorrido primeiramente ao procedimento padrão que aprendeu para elaborar a expressão de generalização deixando de traduzir sua generalização inicial para linguagem algébrica.

José

José não teve dificuldades em compreender o comando de generalização, mas equivocou-se relativamente à expressão ‘número de quadrados de lado’, de maneira que, na alínea a calculou errado o número de quadrados necessários para aumentar as mantas de 8 e 16 quadrados de lado. Entretanto, sua estratégia de cálculo expressa a identificação de um padrão de formação da figura, visualizado na disposição geométrica, e indica a quantidade de quadrados brancos necessários para aumentar mantas de 6 e 14 quadrados de lado (Figura 28):


quadrados de lado? E para uma manta de 16 quadrados de lado?

8 quadrados de lado $= 8\times2 + 6\times2 = 16+12 = 28$

16 quadrados $= 16\times2 + 14\times2 = 32+28 = 60$

Figura 28 - Estratégia de José na questão 3 da Tarefa 1

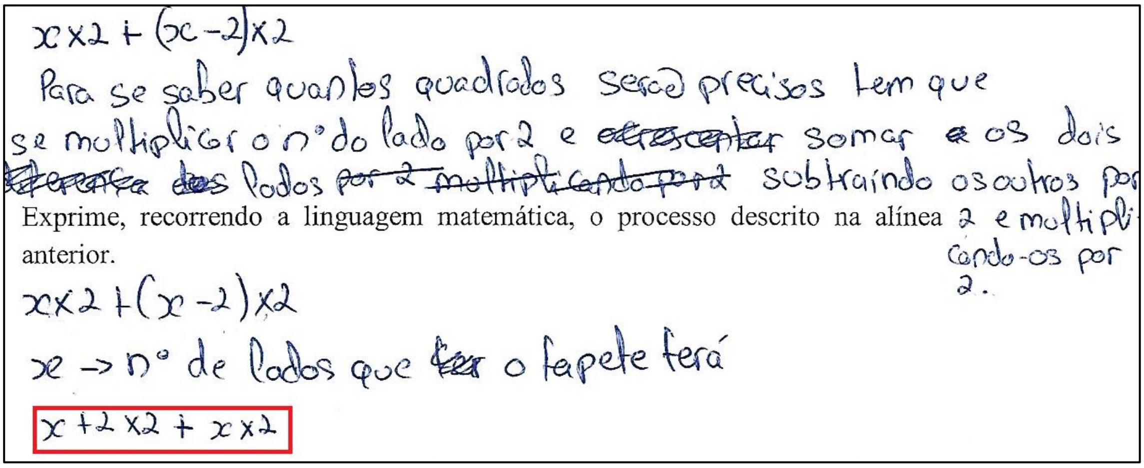
Já na alínea b, o estudante empenhou-se em escrever uma expressão algébrica que permitisse resolver o problema de forma mais econômica, demonstrando reconhecer as vantagens do uso da linguagem algébrica, e chegou a uma expressão que seria adequada ao problema, não fosse o erro relativamente ao lado da manta (Figura 29).

Pesquisadora: Expressar em linguagem algébrica é melhor? Fizeste isso já aqui na b.

José: Expressar por palavras, pode-se dizer o porquê de fazer e explicar-se mais, mas por linguagem matemática dá-se simplesmente a fórmula e assim já sabemos para quê que é preciso, sem dar voltas.

Pesquisadora: OK, e aqui o que é o x?

José: O x é o número de lados que o tapete irá ter.


$x\times2 + (x-2)\times2$

Para se saber quantos quadrados serão precisos tem que se multiplicar o nº do lado por 2 e ~~acrescentar~~ somar ~~a~~ os dois ~~dos~~ lados ~~por 2 multiplicando por 2~~ subtraindo os outros por 2 e multiplicando-os por 2.

Exprime, recorrendo a linguagem matemática, o processo descrito na alínea anterior.

$x\times2 + (x-2)\times2$

$x \rightarrow$ nº de lados que ~~ter~~ o tapete terá

$\boxed{x+2\times2+x\times2}$

Figura 29 - Resolução de José da questão 3 da Tarefa 1

Observamos que o significado que José atribuiu à variável x é o número de quadrados brancos que o tapete irá ter em cada lado, não o número de quadrados no lado da manta antes de aumentá-la, como solicita o enunciado. No fim da entrevista, questionei o estudante sobre o significado de sua variável x e o problema dado, pelo que o ele, identificou seu erro e, não teve dificuldades em reescrever a expressão, substituindo x por $x + 2$, porém esqueceu-se de colocar parênteses.

Vimos que José não tem dificuldades em compreender os comandos de generalização, reconhece as vantagens em usar a linguagem algébrica e consegue expressar uma generalização por meio de uma expressão algébrica. Mostrou dificuldades no uso dos parênteses e em traduzir da linguagem algébrica para a linguagem verbal, indicando incerteza sobre a ordem das operações quando expressas em linguagem verbal, ao invés de linguagem algébrica. Demonstrou clareza no significado da variável, uma vez que conseguiu corrigir sua expressão ao alterá-la, e sua expressão $x \times 2 + (x - 2) \times 2$ está relacionada com a disposição geométrica da figura.

Laura

Laura interpretou o problema sem dificuldade, fez algumas contagens analisando as figuras, concluiu que uma manta com 8 quadrados no lado, terá 10 quadrados brancos em cada lado na manta maior e conseguiu encontrar um processo para calcular o total de quadradinhos necessários para aumentar as mantas evitando a contagem (Figura 30):

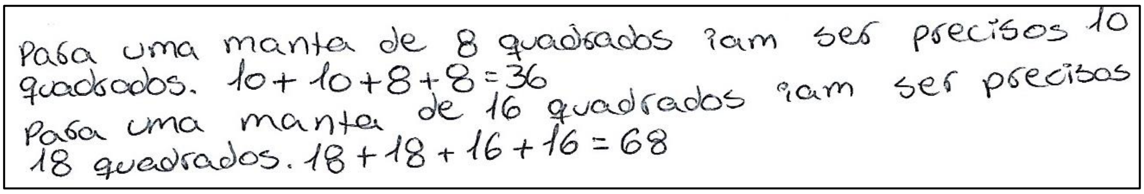
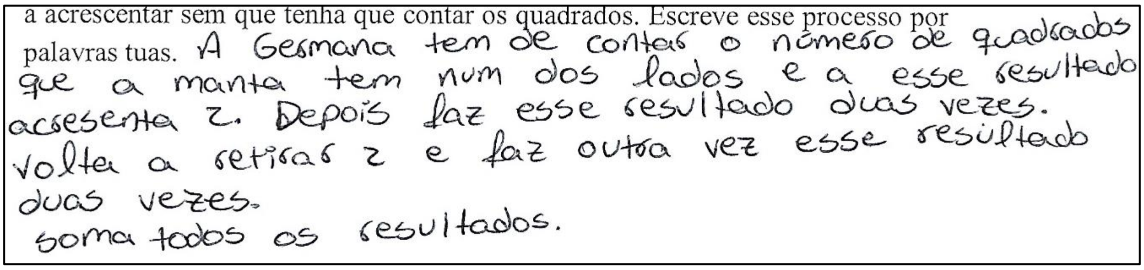

Para uma manta de 8 quadrados iam ser precisos 10 quadrados. 10+10+8+8=36 Para uma manta de 16 quadrados iam ser precisos 18 quadrados. 18+18+16+16=68

Figura 30 - Resposta de Laura à questão 3 da Tarefa 1 (alínea a)

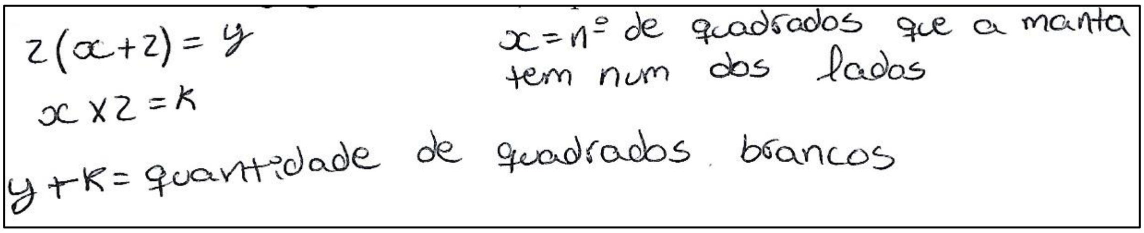
Laura não recorreu à linguagem algébrica até a alínea c e, na alínea b, compreendeu o comando de generalização e expressou por palavras o processo apresentado na primeira alínea. A estudante indicou exatamente os passos que fez em sua resolução e o fez por partes, de modo que não se deparou com a dificuldade de apontar a ordem de realização das operações (Figura 31):



a acrescentar sem que tenha que contar os quadrados. Escreve esse processo por palavras tuas. A Germana tem de contar o número de quadrados que a manta tem num dos lados e a esse resultado acresenta 2. Depois faz esse resultado duas vezes. volta a retirar 2 e faz outra vez esse resultado duas vezes. soma todos os resultados.

Figura 31 - Resposta de Laura à questão 3 da Tarefa 1 (alínea b)

Para escrever uma expressão algébrica, Laura usou três letras diferentes e representou exatamente a ideia expressa na alínea anterior (Figura 32). A estudante demonstrou compreender o significado da variável x, bem como o de cada expressão e não teve a iniciativa de fazer manipulação algébrica, de modo que as expressões descrevem exatamente o seu raciocínio para resolver o problema:



$2(x+2) = y$

$x = n^{o}$ de quadrados que a manta tem num dos lados

$x \times 2 = k$

$y + k =$ quantidade de quadrados brancos

Figura 32 - Resposta de Laura à questão 3 da Tarefa 1 (alínea c)

As expressões algébricas criadas por Laura não são econômicas, y e k não são definidos (apesar de, para a estudante, significarem os resultados em cada parte do processo de resolução do problema), e a expressão final combina linguagem verbal e linguagem algébrica. Laura apresenta uma resolução caracterizada por um raciocínio intuitivo.

Assim, vimos que Laura não recorreu à linguagem algébrica até a alínea onde isso foi solicitado, mas compreendeu o comando de generalização e conseguiu expressar sua estratégia de resolução do problema tanto em linguagem verbal como em linguagem algébrica. Não apresentou dificuldades na questão, mas é importante referir que usou expressões algébricas menos econômicas e não se preocupou em realizar a manipulação algébrica. Relativamente aos significados dos símbolos e expressões, observamos que $2 \times (x + 2) = k$, $x \times 2 = y$ e $y + k = quantidade$ descrevem exatamente o raciocínio da estudante para resolver o problema. Essa resolução está relacionada com a disposição geométrica da figura e indica que a estudante foi capaz de traduzir para a linguagem algébrica todo o caminho que percorreu em sua resolução.

Rosa

Rosa interpretou corretamente o problema proposto, desenhou a forma da manta com 8 quadrados de lado e percebeu que, ao aumentar a manta, esta teria 10 quadrados brancos no novo lado. Assim, a estudante concluiu que para calcular o total de quadrados brancos necessários, bastava adicionar dois ao número do lado da manta e multiplicar o resultado por 4 (Figura 33). Não notou que, ao multiplicar por 4, os quadrados dos cantos são contados duas vezes:

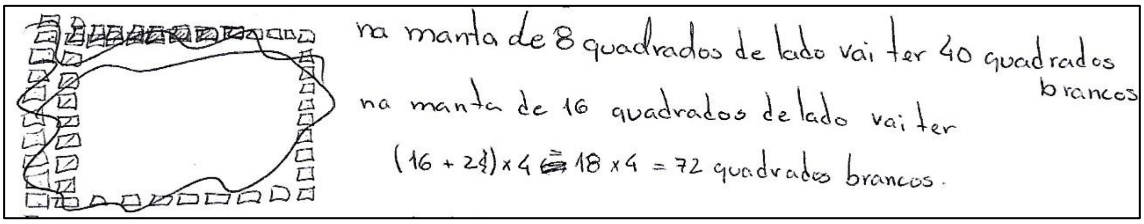
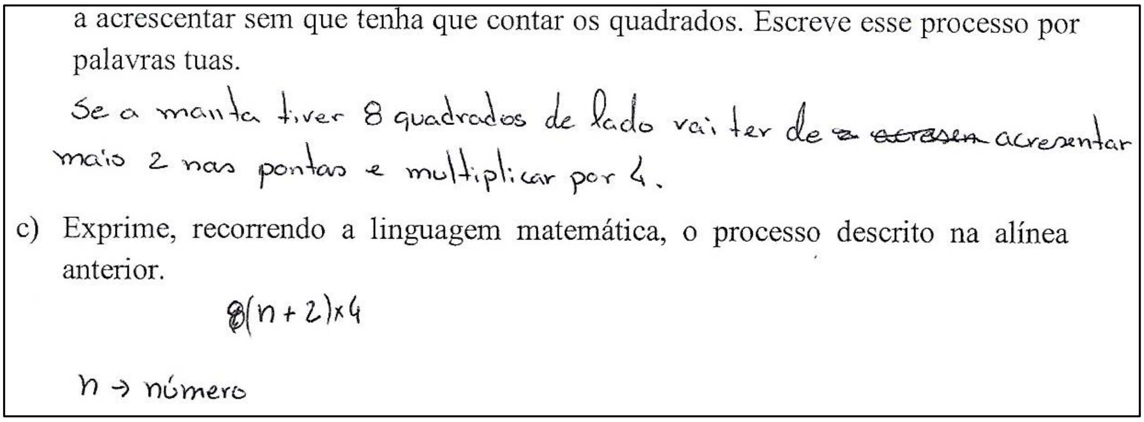


Figura 33 - Resposta de Rosa à questão 3 da Tarefa 1 (alínea a)

Rosa teve dificuldade em entender o comando de generalização e, na alínea b, respondeu à questão utilizando um exemplo. Da mesma maneira, na alínea c, começou a escrever o cálculo para um caso particular e após minha intervenção, buscou expressar a generalização (Figura 34).



a acrescentar sem que tenha que contar os quadrados. Escreve esse processo por palavras tuas.

Se a manta tiver 8 quadrados de lado vai ter de ~~acrasen~~ acresentar mais 2 nas pontas e multiplicar por 4.

c) Exprime, recorrendo a linguagem matemática, o processo descrito na alínea anterior.

$\cancel{8}(n + 2) \times 4$

$n \rightarrow$ número

Figura 34 - Resposta de Rosa à questão 3 da Tarefa 1 (alíneas b e c)

Pesquisadora: Agora expressa este processo em linguagem algébrica.

Rosa: Ok. Seria 8 ...

Pesquisadora: Mas a expressão deve ser para um número qualquer.

Rosa: Ah!

(...)

Então $n + 2$ entre parênteses vezes 4.

Pesquisadora: E qual é o significado do n?

Rosa: n é o número de quadrados no lado.

Observamos que Rosa teve dificuldades em compreender o comando de generalização, mostrou-se mais confortável ao tratar de casos particulares, mas conseguiu representar por meio de uma expressão algébrica sua estratégia para a resolução do problema. Não demonstrou familiaridade com o uso de expressões para indicar uma generalização, mas atribuiu a n o número de quadrados coloridos no lado do quadrado e sua expressão $(n + 2) \times 4$ é a tradução em linguagem algébrica da estratégia apresentada para resolver o problema. É importante destacar ainda que a expressão algébrica que criou, apesar de incorreta, apresenta parênteses para indicar a ordem de realização das operações e a estudante não se preocupou em simplificá-la.

Maria

Maria não compreendeu bem o problema e assim como José, raciocinou como se o número dado na questão fosse o número de quadradinhos que a nova manta deveria ter em cada lado. Para calcular os números de quadrados brancos necessários para mantas de lado 8 e 16, desenhou as figuras e contou os quadradinhos um a um, recomeçando a contar a cada vez que fazia um novo lado da manta, de forma que os lados não tinham o mesmo número de quadrados (Figura 35):

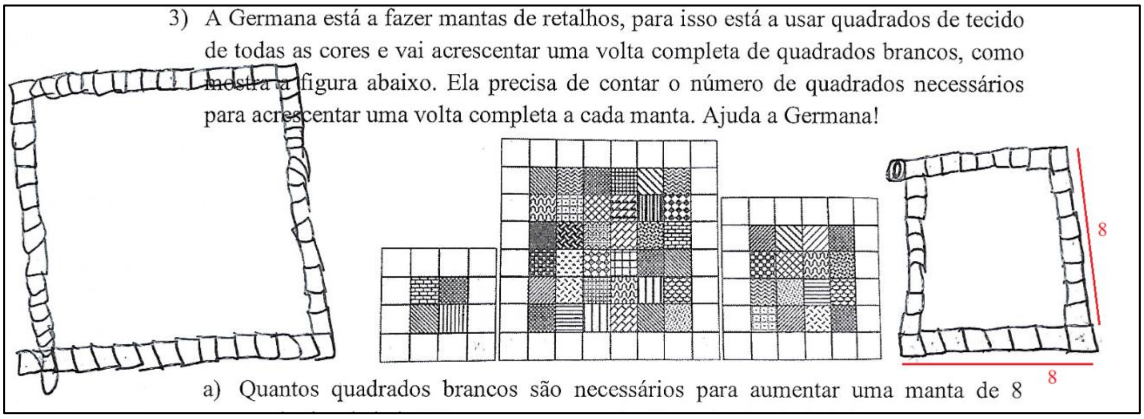


Figura 35 - Resolução de Maria da questão 3 da Tarefa 1

Uma vez que Maria não interpretou corretamente o problema, concluiu que para calcular o número total de quadrados a acrescentar era preciso apenas multiplicar o número de lados por 4. Na alínea b, a estudante demonstrou não entender o comando de generalização e respondeu dando dois exemplos (para 4 quadrados de lado faz-se 4×4 e para 6 quadrados de lado, faz-se 4×6), assim como teve dificuldade em escrever uma expressão algébrica na alínea c (Figura 36):

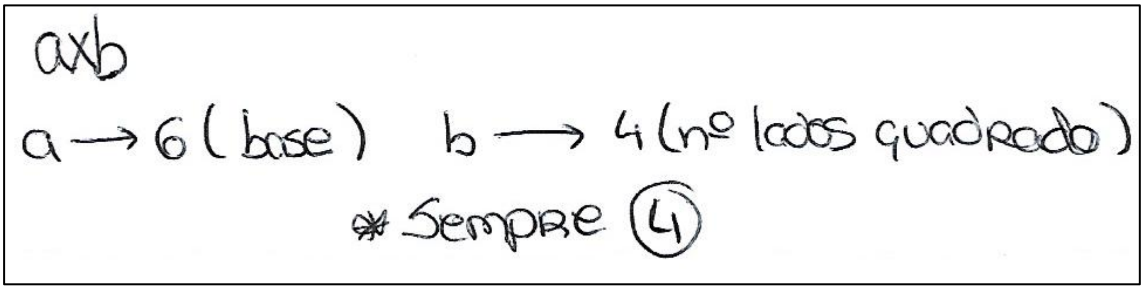


Figura 36 - Resposta de Maria à questão 3 da Tarefa 1 (alínea c)

Pesquisadora: O que é expressar em linguagem algébrica?

Maria: É pôr números e coisas de matemática... Letras também, por exemplo a, b... Também há o π.

Pesquisadora: Ok. Neste caso vais usar uma letra?

Maria: Sim. Tenho de usar. Por exemplo, 4 é igual a a e b é igual a 6, e fazemos $a \times b$, que é 6×4.

Pesquisadora: O que seria o a e o b?

Maria: O a é 6 e o b é 4.

Pesquisadora: E o 6 é o número do lado do quadrado?

Maria: Sim.

Pesquisadora: E o 4?

Maria: É o número de lados do quadrado.

Pesquisadora: Ok. Mas esse 6, nós não sabemos qual é o número de quadradinhos na base da manta. Temos de escrever a expressão para um número geral. Por exemplo, se fossem 30?

Maria: 30 vezes 4.

Pesquisadora: É sempre vezes 4 então?

Maria: Sim.

Pesquisadora: E como podes escrever a expressão?

Maria: $a \times b$.

Vimos que Maria, fez um desenho para descobrir o número pedido, teve dificuldade em compreender o comando de generalização e não conseguiu expressar em linguagem algébrica seu raciocínio expresso em linguagem verbal. Escreveu a expressão $a \times b$ e, apesar de ter afirmado que o produto é sempre por 4, porque o quadrado tem quatro lados, não representou isto por meio da expressão e não indicou o que é o a, mas usou um caso particular para exemplificar seu raciocínio.

O Quadro 4 sintetiza as situações apresentadas na questão 3 da tarefa 1 no que se refere ao uso de linguagem verbal e algébrica, e aos significados e dificuldades.

6.1.4. Questão 4

É uma questão de manipulação algébrica onde o estudante deve aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, os produtos notáveis e a simplificação de expressões algébricas (Figura 37):

4) Verifica se existe algum erro nas operações efetuadas e no caso de existir, corrige as erradas:

a) $-4(x-1)+1=-4x-1+1$

b) $(x-3)^2=x^2-9$

c) $(x+y)(2+y)=2x+2y+xy+y^2$

Figura 37 - Questão 4 da Tarefa 1

Paulo

Paulo não teve dificuldades para perceber os erros nas operações. Usou a propriedade distributiva e efetuou as multiplicações de monômios corretamente. Na alínea b, o estudante tentou lembrar-se de um caso notável de multiplicação, mas não conseguiu e fez a multiplicação usando a propriedade distributiva, demonstrando à vontade com a manipulação algébrica. O estudante não evidencia enxergar qualquer significado para as variáveis e expressões, além do significado puramente algébrico relacionado à aplicação de técnicas de simplificação:

> *Pesquisadora:* Tem alguma relação entre o que tu estavas a tentar lembrar, o caso notável e o que tu fizeste aqui?
>
> *Paulo:* Sim. Eu a fazer isto (caso notável), estou a fazer isto também.
>
> *Pesquisadora:* E como é que fizeste isso?

Quadro 4 - Síntese (Tarefa 1 - Questão 3)

Estudante	Linguagem Verbal e Linguagem Algébrica	Dificuldades	Significados
Paulo	- Usa espontaneamente a linguagem algébrica; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica;	- Traduzir para a linguagem algébrica todos os passos do processo utilizado para resolver o problema.	- Quantidade de quadrados brancos no lado (n) e coloridos no lado (x); - $n = x + 8$ relaciona-se com contagem e com a disposição visual da figura.
Daniel	- Expressa sua primeira ideia de generalização em linguagem verbal, mas não o faz em linguagem algébrica.	- Traduzir para a linguagem algébrica um dos processos utilizados para resolver o problema.	- Quantidade de quadrados coloridos no lado da manta (x); - $4x + 4$ relaciona-se à disposição visual da figura; - "adicionar sempre 8" relaciona-se com a sequência numérica associada à figura.
José	- Expressar generalização por meio de uma expressão algébrica; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica.	- Uso dos parênteses em expressões algébricas. - Traduzir da linguagem algébrica para a linguagem verbal;	- Quantidade de quadrados brancos no lado da manta (x); - $x \times 2 + (x - 2) \times 2$ relaciona-se com a disposição visual da figura.
Laura	- Traduz sua estratégia de resolução da linguagem verbal para a linguagem algébrica.	- Uso de expressões menos econômicas;	- x, y e k são quantidades de quadrados; - $2 \times (x + 2) = k$, $x \times 2 = y$ e $y + k$ relacionam-se com o caminho de resolução seguido pela aluna e ainda com a disposição visual da figura.
Rosa	- Traduz sua estratégia de resolução da linguagem verbal para a linguagem algébrica.	- Desenho e contagem; - Compreender o comando de generalização.	- Quantidade de quadrados coloridos (n); - $(n + 2) \times 4$ relaciona-se com o caminho de resolução seguido pela aluna.
Maria	- Expressa verbalmente uma generalização.	- Desenho e contagem; - Compreender o comando de generalização.	- a e b representam valores particulares; - $a \times b$ relaciona-se com os procedimentos realizados para realizar o problema.

Paulo: É a maneira como aprendemos. Primeiro aprendemos isto (multiplicação usando a distributiva) e depois passamos para o caso notável.

Pesquisadora: Então o caso notável serve para quê?

Paulo: (Paulo ri) Para desfazer isto aqui (aponta para a expressão). Porque quando eu tenho isto, por exemplo, se eu quiser usar isto. Há exercícios que eu preciso usar isto, por exemplo para $(x-3)^2$ mais $(x+4)^2$, eu preciso desenvolver para conseguir fazer.

Assim, Paulo identificou corretamente os erros nas expressões e não apresentou dificuldades na manipulação algébrica. Relativamente aos significados dos símbolos e expressões, é possível dizer que o estudante as relaciona, neste contexto, apenas com a realização de procedimentos de simplificação e manipulação algébrica, e não se incomoda ao lidar com os símbolos fora de uma situação problema.

Daniel

Daniel, assim como Paulo, não teve dificuldade em nenhuma das alíneas da questão, identificando os erros e realizando as operações corretamente. O estudante também tentou recordar o caso notável do quadrado de binômio, mas acabou por realizar a multiplicação por meio da propriedade distributiva (Figura 38):

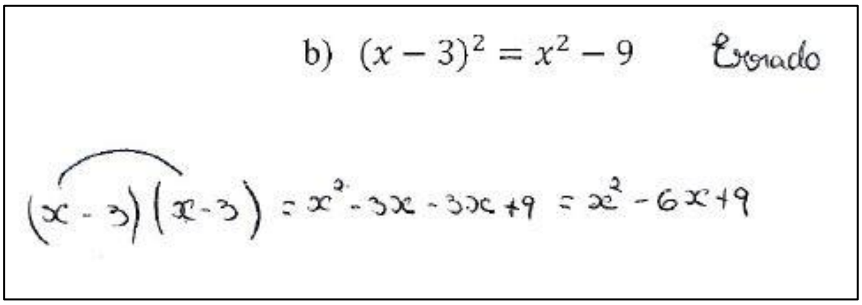


Figura 38 - Resolução de Daniel da questão 4 da Tarefa 1

Assim, Daniel não teve dificuldades em identificar os erros nas figuras e realizou corretamente as simplificações nas expressões algébricas. Assim como José, não lembrou o caso notável, mas não teve dificuldades em usar a propriedade distributiva da multiplicação. Relativamente aos significados dos símbolos e das expressões, observamos que os liga aos procedimentos corriqueiros de simplificação e sente-se à vontade com isto.

José

José identificou com facilidade os erros nas operações apresentadas nas alíneas a e b e fez a multiplicação corretamente na alínea c. Diferente das resoluções dos demais participantes, José efetuou a multiplicação usando o caso notável da multiplicação. Ao final de sua resolução, o questionei sobre seu erro no produto de monômios na questão 1, ao que o estudante justificou que poderia ser por causa da área da figura:

Pesquisadora: Na segunda expressão apresentaste $(b \times 2)$ para a área de dois quadrados, mas como se faz área de quadrado?

José: base vezes altura ou lado vezes lado, $b \times b$ que é $2b$.

Pesquisadora: Então $b \times b$ é $2b$?

José: Ah não! $b \times b$ é b^2.

Pesquisadora: Aqui fizeste $3b \times 2b$ e chegaste a $6b^2$, mas aqui fizeste como $2b$, certo?

José: Pois.

Pesquisadora: Aqui nas expressões é mais fácil ver que $b \times b$ é b^2?

José: Acho que pensei "são dois quadrados" e coloquei $2b$.

Observamos que José não teve dificuldades para identificar os erros nas expressões, usou o caso notável da multiplicação e demonstrou familiaridade com a manipulação algébrica. Assim como Daniel e José, compreende que os significados das expressões estão ligados à manipulação simbólica, sem se preocupar com um contexto.

Laura

Laura usou a propriedade distributiva nas alíneas a e c, respondendo corretamente à questão, mas considerou que a operação realizada na alínea b estava correta (Figura 39). Não escreveu a multiplicação $(x-3) \times (x-3)$, mas respondeu que $(x-3)^2$ equivale a $x^2 - 3^2$:

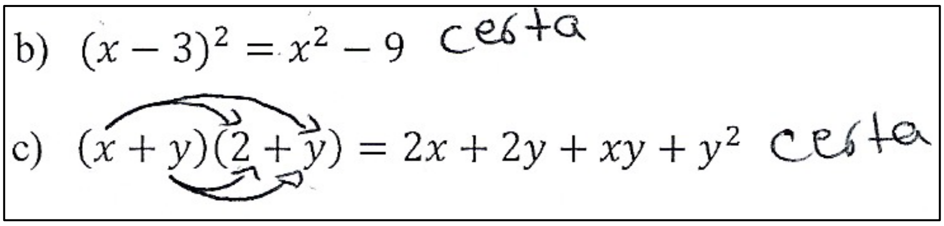


Figura 39 - Respostas de Laura à questão 4 da Tarefa 1

A estudante não fez referência ao caso notável de multiplicação e confundiu o quadrado de um número com o seu dobro, como ocorreu em outras questões e com outros estudantes:

Laura: Ficava $2x$ menos 9.

Pesquisadora: Ficava $2x - 9$?

Laura: Ah, não! Está certa! Era x ao quadrado.

Assim, observamos que Laura não mostra segurança na manipulação algébrica e apresenta dificuldade com a representação de dobro e quadrado de um termo, bem como em desenvolver o quadrado da diferença de dois termos. Os significados das expressões ligam-se apenas às técnicas de manipulação, técnicas estas que não estão bem definidas para a estudante.

Rosa

Rosa respondeu corretamente apenas à alínea c, onde realizou corretamente as multiplicações de monômios ao aplicar a propriedade distributiva da multiplicação. Entretanto, a estudante também considerou que $(x-3)^2$ equivale a x^2-3^2 e, na alínea a, errou ao aplicar a propriedade distributiva (Figura 40). Observou apenas os sinais e não efetuou $(-4)\times(-1)$.:

a) $-4(x-1)+1 = -4x-1+1$

$= -4x+1+1$

Figura 40 - Resolução de Rosa da questão 4 da Tarefa 1 (alínea a)

Observamos que Rosa conseguiu realizar as multiplicações de monômios, mas teve dificuldades na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação e no desenvolvimento do quadrado da diferença de dois termos. A estudante compreende que as expressões têm um significado puramente matemático, relacionada às técnicas de manipulação algébrica.

Maria

Maria teve dificuldades na questão 4, demonstrando não saber aplicar as regras de manipulação algébrica e incompreensão dos conceitos envolvidos em cada alínea. A estudante não identificou a operação de multiplicação existente em cada expressão e parece julgar a correção das operações de acordo com uma percepção visual das expressões, verificando se os termos se mantêm e se surgem termos novos (Figura 41).

Maria: Aqui também está mal.

Pesquisadora: Por quê?

Maria: Porque aqui não há dois 2. Está aqui um dois a mais.

Pesquisadora: Por que só há um dois na primeira expressão e na segunda apareceram duas vezes?

Maria: É. De resto, o x está bem. De resto está bem.

Pesquisadora: Mas aqui há um $2x$ e há esse y.

Maria: Isto também está a mais.

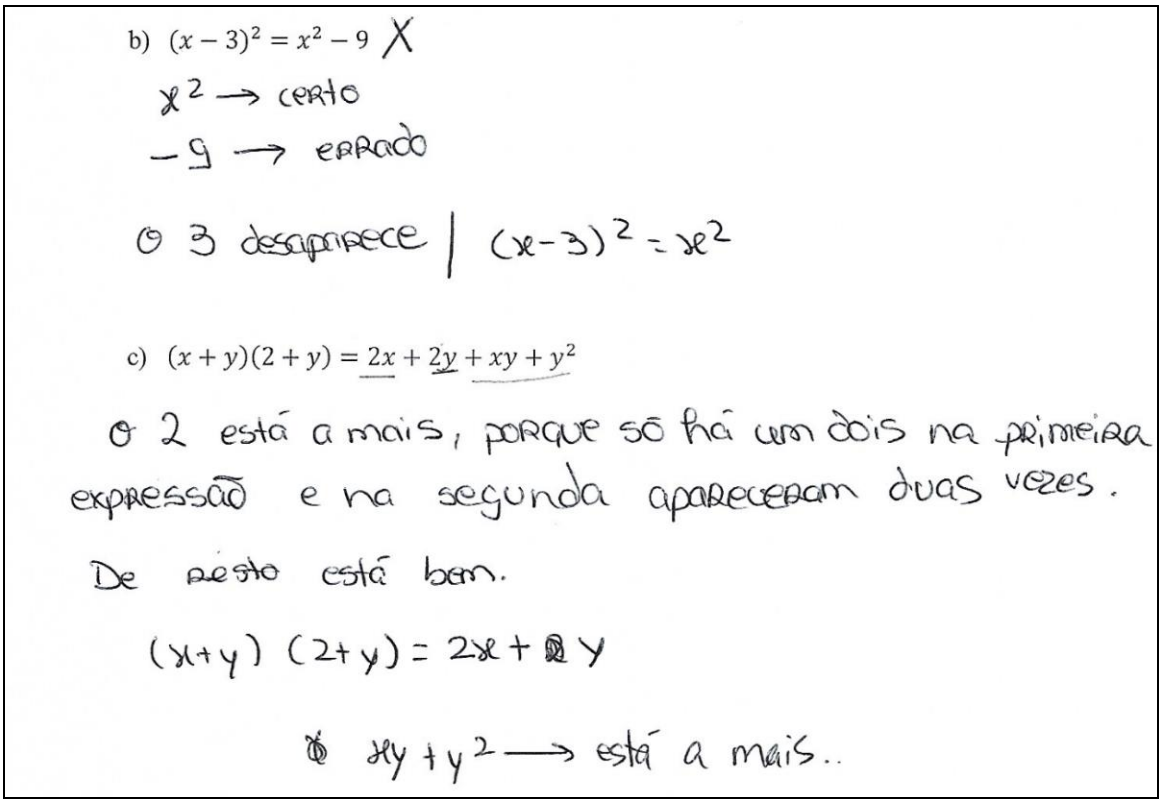


Figura 41 - Resolução de Maria da questão 4 da Tarefa 1 (alíneas b e c)

Observamos que Maria não compreende as relações representadas nas expressões, uma vez que não identifica as multiplicações ou as potências apresentadas. A estudante tem dificuldades na simplificação das expressões e não aplica as regras de manipulação algébrica.

O Quadro 5 sintetiza as situações apresentadas na questão 4 da tarefa 1 no que se refere ao uso de linguagem verbal e algébrica, e aos significados e dificuldades.

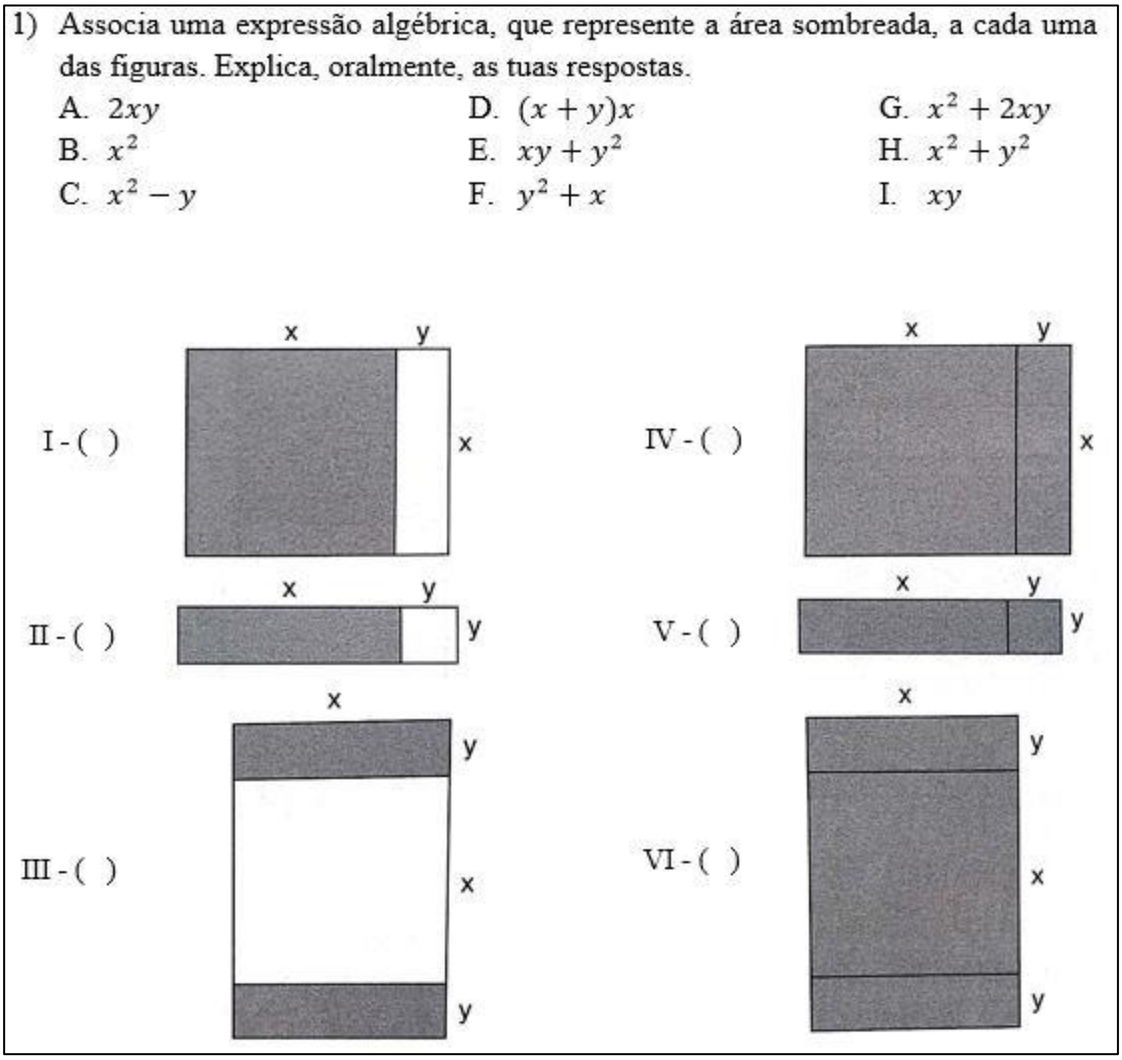
Quadro 5 - Síntese (Tarefa 1 - Questão 4)

Estudante	Linguagem Algébrica	Dificuldades	Significados
Paulo	- Apresentou boa fluência na manipulação algébrica.	- Sem dificuldades. (Não usou o produto notável)	- As expressões relacionam-se a procedimentos de simplificação e manipulação algébrica.
Daniel	- Apresentou boa fluência na manipulação algébrica.	- Sem dificuldades. (Não usou o produto notável)	- As expressões relacionam-se a procedimentos de simplificação e manipulação algébrica.
José	- Apresentou boa fluência na manipulação algébrica.	- Sem dificuldades.	- As expressões relacionam-se a procedimentos de simplificação e manipulação algébrica.
Laura	- Realizou corretamente a multiplicação de monômios; - Usou a propriedade distributiva da multiplicação.	- Representar dobro e quadrado de um termo; - Desenvolver o quadrado da diferença de dois termos. Ex: $(x-3)^2 = x^2 - 9$.	- As expressões relacionam-se a procedimentos de simplificação e manipulação algébrica.
Rosa	- Realizou corretamente a multiplicação de monômios.	- Aplicar a propriedade distributiva da multiplicação; - Desenvolver o quadrado da diferença de dois termos. Ex: $(x-3)^2 = x^2 - 9$.	- As expressões relacionam-se a procedimentos de simplificação e manipulação algébrica.
Maria	- Incompreensão das relações expressas em linguagem algébrica.	- Não há domínio das técnicas de manipulação algébrica; - Não identifica a multiplicação nas expressões algébricas.	- As expressões relacionam-se a procedimentos de simplificação e manipulação algébrica;

6.2. Tarefa 2

6.2.2. Questão 1

A questão 1 é um problema geométrico onde o estudante deve associar a expressão correta à área sombreada em cada figura e justificar sua escolha oralmente (Figura 42).


1) Associa uma expressão algébrica, que represente a área sombreada, a cada uma das figuras. Explica, oralmente, as tuas respostas.

A. $2xy$ D. $(x+y)x$ G. x^2+2xy

B. x^2 E. $xy+y^2$ H. x^2+y^2

C. x^2-y F. y^2+x I. xy

Figura 42 - Questão 1 da Tarefa 2

Paulo

Como vimos na análise da primeira questão na tarefa 1, Paulo tem uma compreensão clara do que é área e sabe calcular a área de um retângulo. Nesta questão, o estudante associou a expressão correta à área sombreada de cada figura. Inicialmente, não havia observado que se tratava da área sombreada e respondeu que a área da figura I era $x+y$ (comprimento) vezes x (largura), demonstrando familiaridade com os símbolos. Quando percebeu seu erro, disse, então, que a área seria menor, evidenciando que, apesar de estar usando expressões algébricas, não perdeu de vista tratar-se de uma medida:

Paulo: Então, este aqui, como é um retângulo, vai ser comprimento vezes largura, ou seja, tem de ser x mais y, vezes x, que é... Este aqui! O D!

Pesquisadora: Toma lá atenção que é a área sombreada.

Paulo: Ah, é só a sombreada? Então tem de ser menos.

Paulo: Mas é, na mesma, este vezes este, (procurando nas expressões) x vezes x que é x^2, é o B.

O estudante não tem dificuldades na multiplicação e adição de monômios, referindo que $x \times x$ é igual a x^2 e que $xy + xy$ é igual a $2xy$. Entretanto, como também ocorreu com outros estudantes, por vezes confunde os termos “ao quadrado” e “vezes dois”:

Paulo: Depois é x vezes y, que é a mesma coisa, é este aqui (xy), depois x vezes y ao quadrado, porque este é igual a este, a largura deste é igual a deste (referindo-se aos dois retângulos) e o comprimento é igual, então este é igual a este, por isso, tem de ser a área deste vezes dois, que é $2xy$, a A.

Nas figuras IV, V e VI, Paulo pretendia representar as áreas apenas a partir do retângulo maior, porém, como a expressão $(x + y) \times y$ não estava entre as opções, olhou novamente para as figuras e percebeu que também era possível calcular a área de cada parte da figura e somar:

Paulo: Este aqui há de ser $x + y$ ... (procurando nas expressões) Ah, ou então pode ser... Aqui pode ser o comprimento vezes largura ou então a área deste mais deste. Como isto é um quadrado é y^2 mais xy (procurando nas expressões). Hum, mais x não. Ah, tá aqui, é o E!

Pesquisadora: O que é que tinhas pensado primeiro?

Paulo: Era fazer $x + y$, que era o comprimento, vezes y, que é a largura, só que depois vi que também dá para fazer o quadrado mais o retângulo.

Uma questão levantada na primeira tarefa que procuramos ter em atenção nesta segunda tarefa é quanto ao uso dos parênteses. Paulo, que teve dificuldades na questão 1 da tarefa 1, expressou desta vez mais certeza relativamente à função dos parênteses:

Pesquisadora: E o parêntese, faz diferença?

Paulo: Faz, pois se eu tirasse, o y tinha prioridade (na multiplicação) e depois não dava este mais este ($x + y$), então é preciso! Acho que é.

Pesquisadora: OK.

Paulo: Este daqui, é fazer a mesma coisa, comprimento vezes largura, $2y + x$ vezes x ou então xy, não, $2xy$ mais x^2, que é fazer o raciocínio deste! Fazer por partes.

Vemos que Paulo não teve dificuldades para associar as expressões às áreas sombreadas, nem para realizar manipulação simbólica. Fez mentalmente as operações com monômios e polinômios, incluindo a propriedade distributiva da multiplicação. A única dificuldade que evidenciou nesta questão relaciona-se com a expressão verbal das relações dobro e quadrado de um número. Relativamente aos significados atribuídos aos símbolos e às expressões algébricas, percebemos que o estudante não só se referiu a x e y como medidas, como também enxergou a ideia de área em cada expressão, seja como área de uma figura onde o comprimento ou a largura são dados por uma soma, ou como soma das áreas dos retângulos que compõem a figura.

Daniel

Daniel também não teve dificuldades com o conceito e cálculo de área, calculou cada área a partir da multiplicação de comprimento por largura e associou corretamente cada área sombreada à expressão correta. O estudante não teve dificuldades em manipulação algébrica, realizando corretamente e mentalmente as operações com monômios e polinômios. Em cada uma das figuras IV, V e VI calculou a área a partir do retângulo maior, usando a propriedade distributiva da multiplicação para desenvolver $(x + y) \times y$ e $(x + 2y) \times x$, uma vez que estas expressões não estavam entre as opções dadas no enunciado da questão:

> *Daniel:* Aqui vai ser $x + y$ vezes x porque se esquecermos esse traço aqui isto vai ser um retângulo, isto vai ser $x + y$ e isto vai ser x, e pronto. E aqui (referindo-se à figura seguinte) vai ser igual, só que em vez de x é o y. Esquecendo aquele traço.
>
> *Pesquisadora:* O quê que diferencia a IV da V?
>
> *Daniel:* É, são iguais, o resultado vai ser o mesmo, mas diferencia porque aqui já está, já se tirou os parênteses. Aqui por exemplo, também podíamos ter na IV, podia estar x ao quadrado mais xy.

Daniel não fez referência à soma de áreas das partes que compõem as figuras, antes, sua estratégia envolveu o cálculo da área de retângulos onde comprimento ou largura eram expressos pela soma de termos. Destacamos ainda que, assim como Paulo, Daniel também usou “ao quadrado” em uma multiplicação por 2, mas nota-se que é um equívoco na linguagem verbal, uma vez que rapidamente voltou atrás e expressou corretamente:

> *Daniel:* Isto é x mais y, ao quadrado. Ah, não é nada! x mais $2y$ vezes x. Ah, já percebi! Isto vai ser igual a x ao quadrado mais $2xy$, então aqui é a G.

Verificamos que Daniel não teve dificuldades na manipulação algébrica, nomeadamente, na multiplicação e adição de monômios e polinômios, mas demonstrou dificuldade na expressão verbal das relações dobro e quadrado de um número. Relativamente aos significados dos símbolos, encarou-os como representantes de medidas de comprimento. Quanto às expressões algébricas, enxergou-as como resultado das operações feitas para calcular a área em cada figura, demonstrando não notar que elas também podem expressar a soma das áreas dos retângulos que compõem cada figura.

José

José compreende o conceito de área e sabe calcular a área de um retângulo. O estudante, entretanto, demonstrou inicialmente ter algumas dificuldades nas operações com monômios e polinômios. Em vez de expressar a soma $xy + xy$ para calcular a área da figura III, fez $xy \times xy$ e associou isto à expressão $x^2 + y^2$, assinalando a opção errada neste item. Ao justificar sua escolha, porém, percebeu o erro e o corrigiu:

> *José:* Nesta aqui temos dois retângulos que são iguais, a base temos x e a altura é y logo xy vezes xy deu-me $x^2 + y^2$.
>
> (...)
>
> *José:* Esta tá mal, é o A porque os dois retângulos são iguais, base x e altura y, $xy + xy$ dá $2xy$.

Ao calcular as áreas das figuras IV, V e VI, José fez duas delas usando os comprimentos expressos por meio de soma e fez a última por meio da soma das áreas dos retângulos que compõem a figura:

> *José:* Depois nesta temos de fazer base vezes altura e íamos calcular a área primeiro deste quadrado grande, depois do retângulo ou temos de calcular tudo. Eu calculei de tudo, ou seja, fiz $x + y$ vezes x, deu-me ... Tá aqui! $x + y$ e x, que era o vezes (referindo-se à expressão $(x + y)x$).
>
> *José:* Depois nesta, o retângulo, como na outra, podíamos ter feito este mais este, eu decidi fazer tudo logo de uma vez, que me deu $x + y$ vezes y, e então tá aqui, que era x, y vezes y que era $y^2 + x$, opção F.
>
> *José:* E nesta, eu achei melhor estar a ver por cada polígono, por isto fiz do retângulo xy e deste outro retângulo xy, $xy + xy$ dava-nos $2xy$ depois com mais este que era x^2, $x^2 + 2xy$, opção G.

No item IV, José não teve dificuldade, uma vez que a expressão $(x + y)x$ estava entre as opções dadas. No item V, calculou $(x + y)y$ como $y^2 + x$ e assinalou a opção F e não a E, como era suposto. O estudante fez este cálculo mentalmente e acabou por não utilizar a propriedade distributiva da multiplicação. No item VI, fez corretamente as multiplicações de monômios e somou, expressando corretamente a área da figura. No final de sua resolução, pedi para que olhasse novamente para uma das áreas e escrevesse o que tinha expressado verbalmente, a fim de verificar se perceberia seu erro (Figura 43):

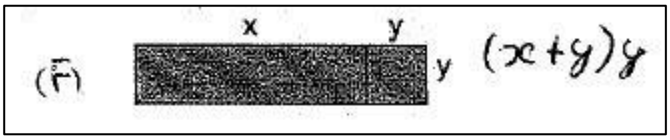


Figura 43 - Resolução de José da questão 1 da Tarefa 2

> *Pesquisadora:* Nestas três tinhas a opção de fazer a área de tudo, como fizeste na IV ou fazer por partes, como fizeste na VI. Na V fizeste por parte ou fizeste do retângulo todo?
>
> *José:* Fiz tudo de uma vez. Seria $x + y$ vezes y.
>
> *Pesquisadora:* Podes escrever?
>
> *José:* Sim.
>
> *Pesquisadora:* Faz diferença colocar ou não os parênteses?
>
> *José:* Faz. Com parênteses vamos multiplicar tudo, o que está aqui sem parênteses, não! Porque isto aqui é uma parte, é só a base. Teríamos de somar tudo...Ahhh não! Está errada então! Está errado.
>
> *Pesquisadora:* Por quê?
>
> *José:* Eu agora vi que se eu fizesse x mais y, vezes y... Isso daria xy mais y^2 e a F é só y^2 mais x. Por isso seria a E, que é $xy + y^2$. Fazíamos $y \times x$ dava xy mais y^2 que era $y \times y$.

José fez o cálculo das áreas por meio do produto de comprimentos por largura, ainda que estas medidas estivessem representadas por meio de somas, mas no último problema evidenciou seguir a estratégia de soma de três áreas. Observamos que teve dificuldades para expressar a soma das áreas $xy + xy$, relacionando isto à soma dos quadrados de x e de y, o que nos remete novamente à dificuldade com dobro e quadrado de um termo. Esta dificuldade manifesta-se tanto em linguagem verbal quanto em linguagem algébrica, mesmo ao nível operacional. O estudante também expressou dificuldade com o produto de $x + y$ por y, uma vez que não usou a propriedade distributiva, ou seja, desconsiderou os parênteses referidos por ele mesmo na entrevista. Relativamente aos significados que atribuiu aos símbolos, vimos que os enxerga como medidas, tanto de comprimento quanto de área, e que as expressões representam para ele o produto das medidas de comprimento e largura e ainda a soma de medidas de área, como mostra a sua justificação oral na figura VI.

Laura

Laura não mostrou dificuldade com o conceito e o cálculo de área de retângulo, entretanto, evidenciou dificuldade na multiplicação de monômios. Como surgiu nas tarefas de outros estudantes, também confunde as ideias de dobro e quadrado de um número. Apesar de expressar verbalmente que a área seria dada pelo produto de x por x, fica em dúvida se a resposta seria $2x$ ou x^2, porém, como a primeira expressão não está entre as opções dadas, assinala corretamente x^2:

> *Laura:* Aqui é o B porque é o x duas vezes, é a base vezes a altura.
>
> *Pesquisadora:* Então é x vezes x que dá quanto?
>
> *Laura:* Dá $2x$.
>
> *Pesquisadora:* Mas respondeste aqui x^2. É a mesma coisa?
>
> *Laura:* Não, tá errado.
>
> *Pesquisadora:* Qual é a medida da base?
>
> *Laura:* É x.
>
> *Pesquisadora:* E da altura?
>
> *Laura:* É x.
>
> *Pesquisadora:* Então a área, quanto é?
>
> *Laura:* É $2x$.
>
> *Pesquisadora:* E esta solução está entre as opções? (A aluna pensa um pouco)
>
> *Laura:* Aqui também podia ser xy, não, $x + y$ vezes x. Mas não pode ser, porque o y não está na parte sombreada.
>
> *Laura:* Mas também pode ser o B porque é o x duas vezes. E a área é $x \times x$.
>
> *Pesquisadora:* Então dá $2x$ ou x^2?
>
> *Laura:* $x \times x$ é... (a estudante hesita) É x^2.

Laura compreendeu que x e y representam medidas que compõem comprimentos e larguras nos retângulos, mas teve dificuldades ao efetuar as operações algébricas. Inicialmente, expressou dúvida se a medida do comprimento do retângulo no item V era representado por $x + y$ ou por xy mas, por fazer uma associação com o item IV, percebeu seu erro. Após a correção, entretanto, fez o cálculo sem usar a propriedade distributiva da multiplicação e quando questionada sobre a importância dos parênteses, a estudante referiu a sua função aritmética, apesar de esta ser uma questão onde é possível ver no problema a diferença entre calcular $(x + y) \times y$ e $x + y \times y$:

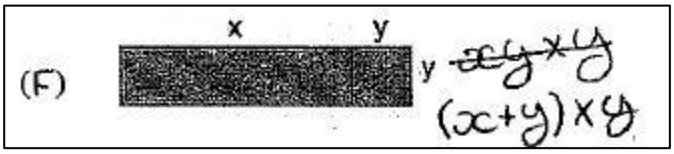


Figura 44 - Resolução de Laura da questão 1 da Tarefa 2

Laura: Esta é xy vezes y. Não, acho que tem de ser $x + y$, vezes y.

Laura: Mas esta expressão não está aqui.

Pesquisadora: Não?

Laura: Só se fosse a F, porque é y duas vezes, mais o x (referindo-se a $y^2 + x$).

(...)

Pesquisadora: E se não houvesse os parênteses, faria diferença?

Laura: Sim, porque quando há parênteses fazemos primeiro o que está entre parênteses.

Assim como José, Laura fez o cálculo das áreas a partir do produto das medidas de comprimento e largura, expressas por uma soma ou não, mas na figura VI recorreu à ideia de soma de áreas, associando-a às figuras I e III. Referiu-se a y^2 como "y duas vezes", evidenciando dificuldades com as relações dobro e quadrado de um número, expressas tanto em linguagem verbal como em linguagem algébrica. Suas dificuldades envolveram, assim, a multiplicação de monômios e polinômios bem como o uso incorreto dos parênteses e da propriedade distributiva da multiplicação. Atribuiu o significado de medidas de comprimento e área a símbolos e expressões, percebendo-os como expressão do produto de comprimento por largura, mas no caso em que este raciocínio se mostrou mais complicado, percebeu uma expressão como soma de medidas de área.

Rosa

Rosa não expressou a ideia de produto de comprimento por largura para calcular as áreas das figuras, antes observou a quantidade de vezes que cada letra aparece na parte sombreada da figura e fez associações entre suas observações e as expressões dadas. Desta maneira, não recorreu a operações com monômios e polinômios, e não demonstrou compreensão da notação algébrica utilizada, pelo que não podemos dizer que ela tenha utilizado estratégia de soma de áreas ou de cálculo da área do retângulo maior. Na figura I, ficou na dúvida entre as expressões x^2 e $x^2 - y$, demonstrando que o 'menos y' tem para ela o significado de tirar a área do retângulo de largura y, uma vez que esta parte não está sombreada. Em seguida escreveu x no lado do quadrado e concluiu que deveria ser x^2, mas referiu-se ao quadrado de x como 'dois x', como visto nas tarefas de outros estudantes, depois corrigiu sua frase, mas voltou a cometer este erro nos outros itens:

> *Rosa:* Então nesta figura primeiro, como tem a mesma altura, fica $2x$!
>
> *Rosa:* Pode ser esta aqui que é $2x$ (referindo-se a $x^2 - y$, que era a opção C), 2 ao quadrado, x ao quadrado e depois tiro esse y aqui.
>
> *Rosa:* Estou em dúvida entre esta (opção B) e esta (opção C).

Rosa atribuiu as expressões corretas ao item II, porque também escreveu y na altura do retângulo, percebendo que a expressão adequada era xy mas não encontrou uma expressão que representasse a área da figura em III. No item IV, assinalou a expressão $2xy$, referindo-se ao número de vezes que o x aparece na figura, enquanto no item V, assinalou a expressão $y^2 + x$, referindo-se também ao número de vezes que o y aparece mas dessa vez em uma soma com o termo x. No item VI a estudante assinala a expressão $x^2 + y^2$, opção H, justificando novamente pelo número de vezes que cada termo aparece e representa uma soma:

> *Rosa:* Esta eu meti A porque tem $2x$ e depois tem y. É porque aqui tá $2x$, aqui é vezes y.
>
> *Rosa:* Nesta aqui como tem dois y e só um x, acho que é a F, como é y ao quadrado mais x.
>
> (...)
>
> *Pesquisadora:* Podes explicar por que esta é a opção H?
>
> *Rosa:* Porque aqui tem dois x e aqui tem dois y, então meti esta que tinha 'ao quadrado'.

Observamos que Rosa fez uma junção dos termos que apareciam na parte sombreada de cada figura, representando-a por meio de adição, multiplicação e potência, indiscriminadamente. Assim como outros estudantes, apresenta dificuldades com as relações dobro e quadrado de um número, tanto na linguagem verbal como na linguagem algébrica e ao nível operacional mais básico, uma vez que não vê diferença entre representar, no mesmo tipo de situação, expressões na forma de produto e na forma de potência. Além desta dificuldade, percebemos que não associa os significados das expressões ao conceito de área, mas enxerga as letras desconectadas das situações e manipula-as a partir do número de vezes em que aparecem na figura. O significado que atribuiu aos símbolos e expressões, ainda que se relacione com a ideia de medida, está ligado principalmente à manipulação simbólica.

Maria

Maria, como vimos na questão 1 da tarefa 1, não tem compreensão do conceito e do cálculo de área, pelo que nesta questão associou as expressões às áreas das figuras com base principalmente em uma contagem de termos x e y. A estudante demonstrou ter dúvidas nas questões e estar pouco motivada na resolução, afirmando não saber lidar com expressões algébricas. Atribuiu a expressão $x^2 - y$ à área da figura I, justificando que havia dois x e tirava-se o y, e, assim como outros estudantes, referiu-se ao quadrado de x como dois x. Na figura II, também fez uma contagem de termos, mas não questionou o fato de y^2 não ser negativo, o que seria coerente com o raciocínio apresentado no item anterior. Da mesma forma, atribuiu a expressão $x^2 + y^2$ ao item III sem observar a área não sombreada, e isto a levou a marcar uma opção mais de uma vez, como ocorreu com as figuras II e V:

Pesquisadora: Por que que a figura I é a C?

Maria: Tem dois x, x ao quadrado menos este y (aponta para y na figura).

Maria: Este é porque é dois y e mais x (referindo-se ao item II).

Pesquisadora: Ok.

Maria: Dois y e dois x (referindo-se ao item III).

No item IV, Maria disse que estava à procura da expressão $x^2 + y$, mas que como não havia esta opção, assinalaria mesmo a expressão x^2. No item VI, assinalou a opção G, $x^2 + 2xy$, justificando que eram dois x e dois y, como se x^2 e $2y$ tivessem a mesma função, ou seja, que quadrado e dobro representam o mesmo e ignorou o fato de haver um x entre 2 e y:

Maria: Aqui é dois x só que o y não está (referindo-se ao item IV).

Pesquisadora: Não está entre as opções?

Maria: Não. Estou à procura de uma que tenha x ao quadrado mais y, só que aqui só está um.

(...)

Maria: Então aqui no VI pode ser a H. Ah, não! A H já está! Pois! É este (referindo-se à opção G) porque é dois x mais dois y.

Pesquisadora: Mas tem aqui um x!

Maria: Esse x é ...

Pesquisadora: Não sabes de onde vem este x?

Maria: Não!

Observamos que Maria usou a mesma estratégia que Rosa, realizando uma contagem dos termos e juntando-os de maneira que fosse conveniente às respostas disponíveis na questão, usando adição, subtração e multiplicação de termos. Assim como outros estudantes, tem dificuldades com os conceitos e representações de dobro e quadrado de um número e usa os símbolos que representam adição, subtração, multiplicação e potenciação de forma indiscriminada. Relativamente aos significados que atribuiu a símbolos e expressões, não os relaciona com a ideia de medida de área nem mesmo de comprimento, uma vez que não se refere à área ou à maneira de a calcular. Ao longo do trabalho perde de vista a importância da área sombreada das figuras e desconsidera os símbolos quando lhe é conveniente. Ficou evidente em seu trabalho que os significados que atribuiu a expressões e símbolos estão relacionados principalmente com a manipulação algébrica e que esta não é guiada por regras claras e lógicas.

O Quadro 6 sintetiza as situações apresentadas na questão 1 da tarefa 2 no que se refere ao uso de linguagem verbal e algébrica, e aos significados e dificuldades.

6.2.2. Questão 2

A questão 2 é uma situação de partilha onde o estudante deve interpretar e resolver o problema, usando uma equação ou outra estratégia adequada (Figura 45):

2) Martin, Maria e João têm juntos 109 berlindes. Martin tem a metade da quantidade de berlindes de João e Maria têm 17 berlindes a mais que Martin. Quantos berlindes cada criança tem?

Figura 45 - Questão 2 da Tarefa 2

Paulo

Paulo teve dificuldade inicial na interpretação da situação, pelo que cogitou resolvê-la aritmeticamente, mas ao ler novamente o enunciado, compreendeu o problema e optou por equacioná-lo, justificando sua ação pelo fato de as ideias ficarem mais 'arrumadas' e, portanto, ser mais fácil resolvê-lo por meio de uma equação:

Pesquisadora: Por que começaste por resolver aritmeticamente?

Quadro 6 - Síntese (Tarefa 2 - Questão 1)

Estudante	Linguagem Verbal e Linguagem Algébrica	Dificuldades	Significados
Paulo	- Expressa, com familiaridade, a área de um retângulo por meio da linguagem algébrica.	-Usa incorretamente "vezes dois" e "ao quadrado" (linguagem verbal).	- Medida (comprimentos x e y e área); - Produto do comprimento pela largura e soma de medidas de área.
Daniel	- Expressa a área de um retângulo por meio da linguagem algébrica.	-Usa incorretamente "vezes dois" e "ao quadrado" (linguagem verbal).	- Medida (comprimentos x e y); - Produto do comprimento pela largura.
José	- Expressa, com dificuldades de manipulação, a área de um retângulo por meio da linguagem algébrica.	- Multiplicação e adição. Ex: Usa $xy \times xy$ em vez de $xy + xy$. - Usa incorretamente "vezes dois" e "ao quadrado" (linguagem verbal). -Propriedade distributiva. Ex: Usa $x + y \times y$ em lugar de $(x + y)y$.	- Medida (comprimentos x e y e área); - Produto do comprimento pela largura e soma de medidas de área.
Laura	- Expressa verbalmente como calcular a área de um retângulo, usando x e y (medidas apresentadas).	- Multiplicação e adição. Ex: Usa xy em vez de $x + y$; - Usa incorretamente "dobro" e "quadrado" (linguagem verbal) e x^2 e $2x$; - Propriedade distributiva. Ex: Usa $x + y \times y$ em lugar de $(x + y)y$.	- Medida (comprimentos x e y, e área); - Produto do comprimento pela largura e soma de medidas de área.
Rosa	- Expressa verbalmente que x e y são medidas de comprimento.	- Usa indiscriminadamente soma, multiplicação e potência; - Usa incorretamente "dobro" e "quadrado", (linguagem verbal) e x^2 e $2x$.	- Medida (comprimentos x e y); - Manipulação simbólica.
Maria	- Não identifica medidas de comprimento e não expressa medida da área de um retângulo.	- Usa indiscriminadamente soma, multiplicação e potência; - Usa incorretamente x^2 e $2x$.	- Manipulação simbólica (sem regras claras e lógicas).

Paulo: Porque da maneira como eu li primeiro achei que era mais fácil fazer assim. Mas depois desta maneira (algebricamente) fica mais... (procurando a palavra adequada).

Pesquisadora: Fácil?

Paulo: Também, mas é mais... Arrumada!

Como ocorreu na resolução da questão 2 na tarefa 1, Paulo não teve dificuldades na tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica. Designou x para representar o número de berlindes do João, escreveu de forma adequada as relações multiplicativas e aditivas presentes na situação, demonstrou segurança na realização das manipulações algébricas e calculou corretamente o valor da incógnita (Figura 5). É importante referir que o estudante voltou ao problema a fim de interpretar os valores por ele encontrados, demonstrando transitar entre a manipulação simbólica puramente e a compreensão do significado dos símbolos, equação e resultados.

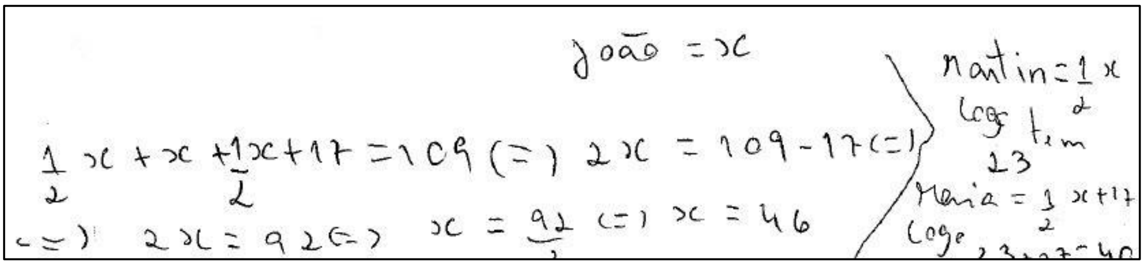


Figura 46 - Resolução de Paulo da questão 2 da Tarefa 2

Assim, vemos que Paulo usou a linguagem algébrica a fim de facilitar a resolução do problema, representando as relações aditivas e multiplicativas corretamente. Não teve dificuldade em equacionar o problema nem em resolver a equação do 1.º grau com uma incógnita, demonstrando segurança na manipulação algébrica e interpretação dos dados. Teve clareza quanto ao significado de sua incógnita x, número de berlindes do João, e quanto ao significado da expressão $\frac{1}{2}x + x + \frac{1}{2}x + 17 = 109$, que representa a soma das quantidades de berlindes de cada criança e, portanto, o total. Isso é evidenciado ainda pela verificação de valores que fez ao final de sua resolução, para ver se os números encontrados faziam sentido no contexto do problema.

Daniel

Daniel não teve dificuldades na interpretação do problema e imediatamente buscou traduzi-lo para linguagem algébrica. Entretanto, teve dificuldades em representar as relações entre as quantidades em função de uma única incógnita e, assim como na questão 2 da tarefa anterior, escreveu um sistema de três equações com três incógnitas (Figura 47). Apesar de traduzir corretamente as situações para a linguagem algébrica, referiu dificuldades na resolução de um sistema com três incógnitas, mas levei-o a tentar substituir as informações de uma equação na outra e, assim ele conseguiu resolver o sistema:

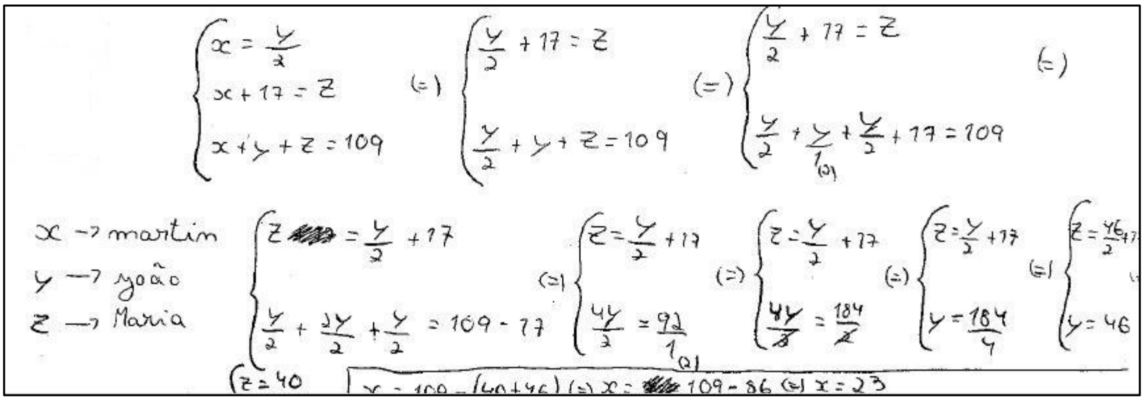


Figura 47 - Resolução de Daniel da questão 2 da Tarefa 2

Observamos que Daniel usou linguagem algébrica para resolver o problema e teve sucesso em sua estratégia, por meio de um sistema de equações. O estudante não teve dificuldade na manipulação algébrica e calculou corretamente o número de berlindes de cada criança, e interpretou os resultados à luz do problema. O significado atribuído a cada uma das três incógnitas x, y e z, era claro para o estudante: número de berlindes de Martin, João e Maria, respectivamente. Da mesma maneira, $x = \frac{y}{2}$ expressa que Martin tem a metade do número de berlindes de João, $x + 17 = z$ expressa que Maria tem 17 berlindes a mais que Martin e $x + y + z = 109$ expressa o total de berlindes. Entretanto, não viu representados na expressão $\frac{y}{2} + y + \frac{y}{2} + 17 = 109$ a quantidade de berlindes de cada criança e o total, uma vez que esta expressão foi obtida após manipulação algébrica e o estudante não a observou especificamente.

José

José também não teve dificuldades na interpretação do problema e recorreu imediatamente à linguagem algébrica. Assim como Daniel, representou a situação por meio de um sistema de três equações usando três incógnitas, mas não teve dúvidas na resolução do sistema (Figura 48):

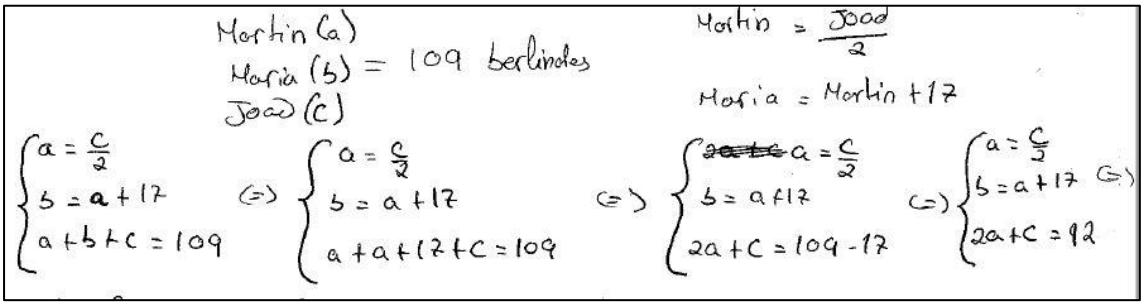


Figura 48 - Resolução de José da questão 2 da Tarefa 2

O estudante não teve dificuldade na manipulação algébrica e expressou por meio de equações exatamente as ideias apresentadas na questão, justificando o uso de incógnitas como uma forma de economia de espaço, mas com a função de representar a quantidade de berlindes que tinha cada criança:

> *José:* Porque pra saber quantos berlindes é que tinha cada pessoa, a melhor forma de fazer tinha de ser a partir de um sistema, logo tínhamos de tornar os nomes em incógnitas para não estarmos a escrever os nomes, pra não ocupar muito espaço e então fiz um sistema.
>
> *Pesquisadora:* E o que significa o a, o b e o c?
>
> *José:* O a é o Martin, os berlindes que o Martin tem, são as incógnitas para saber que pessoa é que era. Depois no final, com as incógnitas, o resultado que elas obtinham era os berlindes que cada pessoa tinha.

Observamos que José recorreu ao uso da linguagem algébrica para resolver o problema, usando um sistema com três incógnitas. O estudante, tal como Daniel, apesar de não ter tido dificuldade em interpretar do problema, na manipulação algébrica e na resolução da equação do 1.º grau, demonstrou mais segurança em designar uma incógnita para o número de berlindes de cada criança do que em estabelecer as relações entre as quantidades de berlindes a partir de uma única incógnita. Esta foi a primeira ideia dos dois estudantes tanto na questão 2 da tarefa 1 como nesta. Relativamente aos significados das incógnitas e expressões, José considerou que a, b e c representam a quantidade de berlindes de cada criança e que $a = \frac{c}{2}$, $b = a + 17$ e $a + b + c = 109$ representam as relações entre os números de berlindes de Martin e das outras duas crianças e o total de berlindes.

Laura

Laura referiu inicialmente que, por meio de meu questionamento no final da primeira entrevista relativamente ao uso de equações para resolver problemas, percebeu que poderia ter recorrido a uma equação para resolver a questão 2 e, desta vez, começou imediatamente por equacionar o problema. A estudante não teve dificuldades em escrever as expressões e relacioná-las, designou por x o número de berlindes do João e resolveu corretamente a equação do 1.º grau, porém, cometeu um erro ao calcular o número de berlindes de Maria porque adicionou 17 ao número de berlindes de João e não ao número de berlindes de Martin (Figura 49):

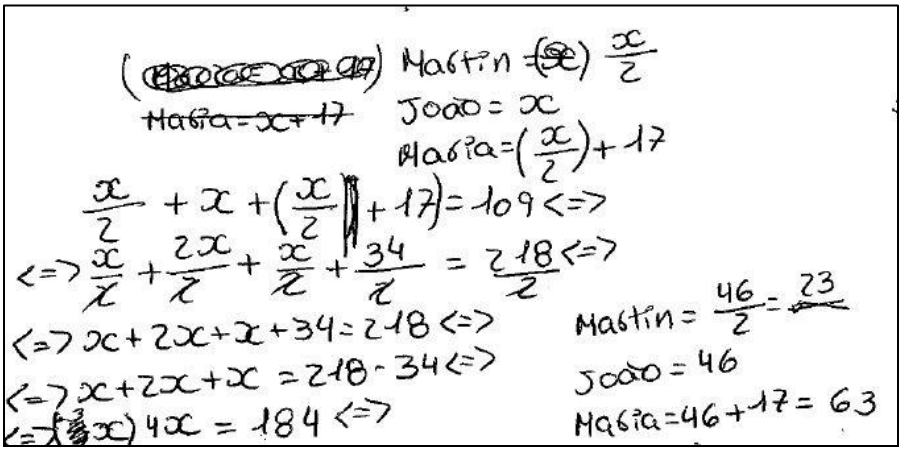


Figura 49 - Resolução de Laura da questão 2 da Tarefa 2

Observamos que Laura recorreu à linguagem algébrica para resolver o problema e que esta estratégia não surgiu espontaneamente, mas em resposta aos questionamentos que emergiram na entrevista anterior. Não teve dificuldades em equacionar o problema, estabelecendo corretamente as relações entre as quantidades, e na resolução da equação do 1.º grau. Entretanto, teve dificuldades ao interpretar o valor encontrado e descobrir a quantidade de berlindes de Maria. Relativamente aos significados da incógnita e das expressões, considerou x como a quantidade de berlindes do João e $\frac{x}{2} + x + \frac{x}{2} + 17 = 109$ como o total de berlindes, mas, ao interpretar o resultado encontrado para a incógnita, perdeu de vista que o número de berlindes de Maria havia sido representado por $\frac{x}{2} + 17$.

Rosa

Rosa interpretou bem a situação apresentada e recorreu, logo de início, à linguagem algébrica para resolver o problema. A estudante teve dificuldades tanto em representar as quantidades de berlindes de cada criança quanto em escrever uma equação para resolver o problema. Designou x para o número de berlindes do João, mas ficou em dúvida se a metade disto, número de berlindes de Martin, era $\frac{x}{2}$ ou $x \times 2$ (Figura 9). Em seguida, Rosa tentou escrever uma equação para descobrir o número de berlindes de Maria, igualando a expressão $17 + \frac{x}{2}$ a 109, o total de berlindes:

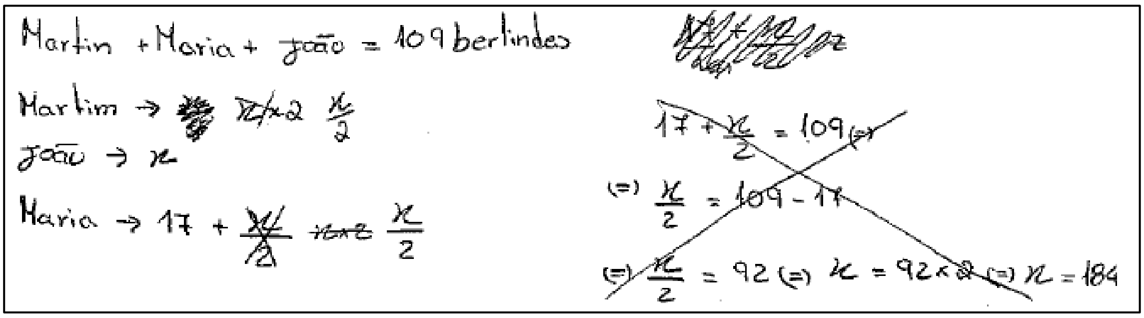


Figura 50 - Resolução de Rosa da questão 2 da Tarefa 2

Rosa: Então, eu escrevi aqui que o Martin, a Maria e o João têm 109 berlindes, que é aquilo que diz aqui ao início, depois tive a fazer esta parte que é: o Martin tem a metade da quantidade de berlindes de João, o João eu meti o x e depois o Martin meti, no início meti x a dividir por 2, mas acho que não é assim porque a metade, a metade... Ah, não! É, é! Porque a metade é...

Pesquisadora: Agora meteste $x \times 2$, mas estás em dúvida?

Rosa: É mesmo x a dividir por 2!

(...)

Pesquisadora: O que representa esta expressão?

Rosa: É para saber quantos berlindes tem a Maria.

Pesquisadora: Está bem. Fizeste $17 + \frac{x}{2} = 109$. Por que 109?

Rosa: Porque era para saber deles todos juntos, mas não dá, não tá dar.

Pesquisadora: Por que não está a dar?

Rosa: Porque o 184 é maior que o deles todos.

Pesquisadora: Tu tens que a soma dos berlindes de Maria, João e Martin é 109, tu aqui colocaste só o que a Maria tem igual a 109.

Rosa: Pois, mas se eu juntar os três, fazer o $\frac{x}{2}$ mais x mais o da Maria, que é 17 mais x meios, não vou saber quantos é que vai ter cada um, porque vai me dar o x junto.

Dessa maneira, fica evidente que Rosa não compreende o significado de x, ainda que tenha atribuído essa incógnita à quantidade de berlindes do João, pois não consegue perceber que o resultado obtido para x será o número de berlindes do João. A estudante acredita que se representar na mesma expressão as quantidades de berlindes de cada criança, não saberá a qual deles atribuir o resultado encontrado. Teve êxito na resolução da equação que criou e interpretou o resultado encontrado, concluindo que 184 não poderia ser o número de berlindes de Maria porque isso é mais do que o total de todas as crianças juntas. Em uma nova tentativa, conduzi a estudante a perceber que era necessário somar as quantidades de berlindes das três crianças e igualar a 109, mas ela teve dificuldade em resolver a equação do 1.º grau e, portanto, não chegou ao resultado correto do número de berlindes de cada criança.

Vemos que Rosa recorreu imediatamente à linguagem algébrica e que sua estratégia foi equacionar o problema para descobrir o número de berlindes de cada criança. Representou pela incógnita x a quantidade de berlindes de João, mas teve dificuldades em representar metade de um número bem como em construir uma equação que lhe desse o número de berlindes de uma das crianças. Teve dificuldades ainda na resolução da equação, cancelando os denominadores nos termos do primeiro membro e desconsiderando a necessidade de fazê-lo no segundo membro da equação, e em efetuar divisão. Relativamente aos significados da incógnita x, observamos que a enxergou como uma quantidade, mas perdeu de vista esse significado quando x estava inserido na equação. Em sua perspectiva, a expressão $\frac{x}{2} + x + 17 + \frac{x}{2} = 109$ representava a situação, mas não resolvia o problema, uma vez que não compreendeu que o valor encontrado seria o número de berlindes de João.

Maria

Maria teve dificuldades na interpretação da situação apresentada e não equacionou o problema, antes tentou resolvê-lo aritmeticamente por meio de divisões e adições (Figura 51). Acredita que João e Maria têm juntos a metade dos berlindes, pelo que divide o total por dois duas vezes para encontrar a quantidade de berlindes de cada um, ignorando o fato de as divisões não serem exatas.

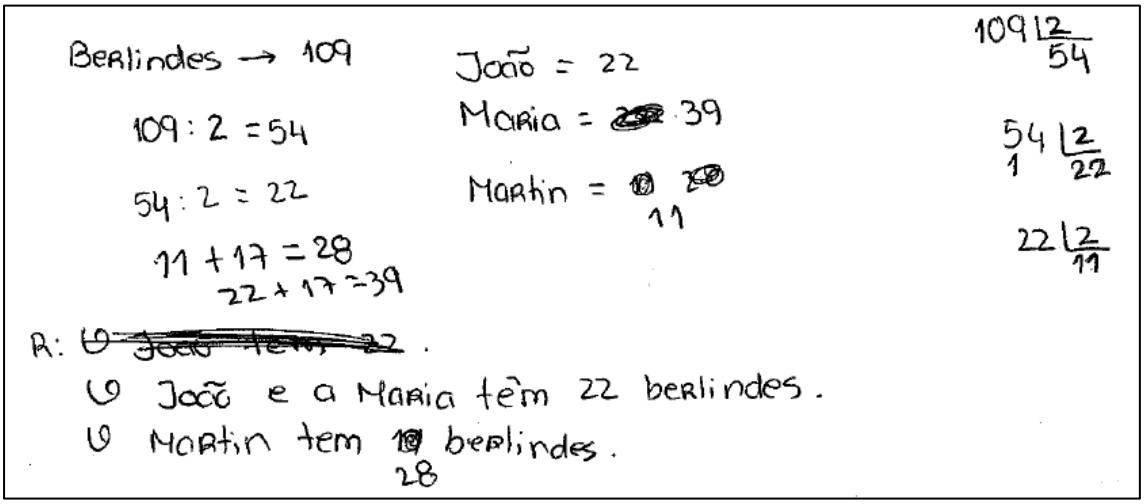


Figura 51 - Resolução de Maria da questão 2 da Tarefa 2

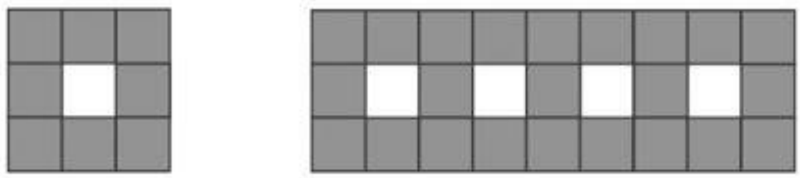
Observamos que Maria não recorreu à linguagem algébrica, mas usou uma estratégia aritmética para tentar resolver o problema. A estudante não representou por uma equação os dois problemas propostos nas tarefas 1 e 2, e demonstrou, durante as entrevistas, evitar o uso da linguagem algébrica devido às dificuldades que tem na sua compreensão e na manipulação algébrica. Teve dificuldades em interpretar o problema e em efetuar as divisões e não voltou ao problema a fim de interpretar seus resultados.

O Quadro 7 sintetiza as situações apresentadas na questão 2 da tarefa 2 no que se refere ao uso de linguagem verbal e algébrica, e aos significados e dificuldades.

6.2.3. Questão 3

A questão 3 é uma situação problemática de generalização em que pede para o aluno determinar termos da sequência e sua expressão geradora, bem como verificar a equivalência de equações (Figura 52).

3) Um passeio será construído por azulejos cinzentos e brancos. Cada azulejo branco é cercado por azulejos cinzentos, como os modelos seguintes:



a) Quantos azulejos cinzentos são necessários para construir um passeio com 10 azulejos brancos?

b) De que maneira é possível calcular o número de azulejos cinzentos para um passeio com um número qualquer de azulejos brancos? Escreve a tua resposta usando palavras e, em seguida, recorrendo a uma expressão algébrica.

c) Ao responder ao problema da alínea anterior, a Sara escreveu a expressão $C = 2B + 3(B + 1)$ e o José escreveu a expressão $C = B + (B + 1) + 2(B + 1)$, onde C é o número de azulejos cinzentos e B é o número de azulejos brancos. Eles estão certos? Justifica.

Figura 52 - Questão 3 da Tarefa 2

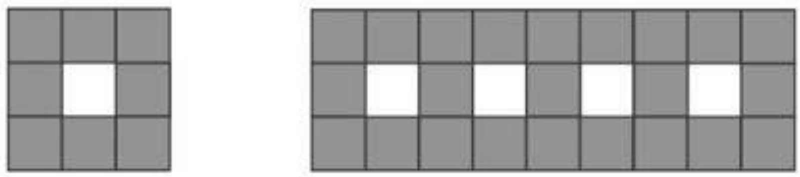
Quadro 7 - Síntese (Tarefa 2 - Questão 2)

Estudante	Linguagem Verbal e Linguagem Algébrica	Dificuldades	Significados
Paulo	- Usa a linguagem algébrica para representar a situação; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica.	- Sem dificuldades.	- Incógnita (x): Quantidade; - $\frac{1}{2}x + x + \frac{1}{2}x + 17 = 109$ expressa a quantidade total.
Daniel	- Usa a linguagem algébrica para representar a situação; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica.	- Usa um modo menos econômico para expressar as relações entre as quantidades (sistema com 3 incógnitas).	- Incógnitas (x, y e z): Quantidades; - Expressões: Relações entre as quantidades. Ex: $x = \frac{y}{2}$.
José	- Usa a linguagem algébrica para representar a situação; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica.	- Usa um modo menos econômico para expressar as relações entre as quantidades (sistema com 3 incógnitas).	- Incógnitas (a, b e c): Quantidades; - Expressões: Relações entre as quantidades. Ex: $b = a + 17$.
Laura	- Usa a linguagem algébrica para representar a situação (não o faz espontaneamente);	- Não interpreta a solução no contexto do problema.	- Incógnita (x): Quantidade; - $\frac{1}{2}x + x + \left(\frac{1}{2}x + 17\right) = 109$ expressa a quantidade total.
Rosa	- Usa, com dificuldade, a linguagem algébrica para representar a situação (por ser habitual neste tipo de problemas).	- Usa incorretamente $2x$ para representar "metade" (linguagens verbal e algébrica); - Dificuldade em representar a situação por meio de uma equação; - Cancela denominadores em apenas um dos membros da equação.	- Incógnitas (x): Inicialmente significa uma quantidade, depois está mais ligado à manipulação simbólica; - $17 + \frac{x}{2}$ é igual a 109 porque pretende saber a quantidade de berlindes de Maria.
Maria	- Usa uma estratégia aritmética.	- Não interpreta corretamente o problema; - Comete erros aritméticos.	- Não há incógnitas nem expressões.

6.2.3. Questão 3

A questão 3 é uma situação problemática de generalização em que pede para o aluno determinar termos da sequência e sua expressão geradora, bem como verificar a equivalência de equações (Figura 52).

3) Um passeio será construído por azulejos cinzentos e brancos. Cada azulejo branco é cercado por azulejos cinzentos, como os modelos seguintes:



a) Quantos azulejos cinzentos são necessários para construir um passeio com 10 azulejos brancos?

b) De que maneira é possível calcular o número de azulejos cinzentos para um passeio com um número qualquer de azulejos brancos? Escreve a tua resposta usando palavras e, em seguida, recorrendo a uma expressão algébrica.

c) Ao responder ao problema da alínea anterior, a Sara escreveu a expressão $C = 2B + 3(B + 1)$ e o José escreveu a expressão $C = B + (B + 1) + 2(B + 1)$, onde C é o número de azulejos cinzentos e B é o número de azulejos brancos. Eles estão certos? Justifica.

Figura 53 - Questão 3 da Tarefa 2

Paulo

Paulo procedeu imediatamente à generalização por meio de uma expressão algébrica, ainda na alínea a) que solicitava apenas o número de azulejos necessários para um passeio com 10 azulejos brancos e, em seguida calculou-o a partir de sua expressão. Vemos novamente que o estudante enxerga as vantagens do uso da linguagem algébrica, recorrendo a ela mesmo quando é possível resolver a questão por meio de outras estratégias menos econômicas. O estudante observou as imagens apresentadas na questão e, justificou sua resposta baseando-se na disposição visual da figura, demonstrando compreender o significado de sua variável n e a maneira como a figura cresce em função do número de azulejos brancos que apresenta. Assim, a expressão $5n + 3$ significa para ele os três azulejos cinzentos iniciais que a figura possui e a adição de 5 azulejos cinzentos para cada azulejo branco que é acrescentado (Figura 53):

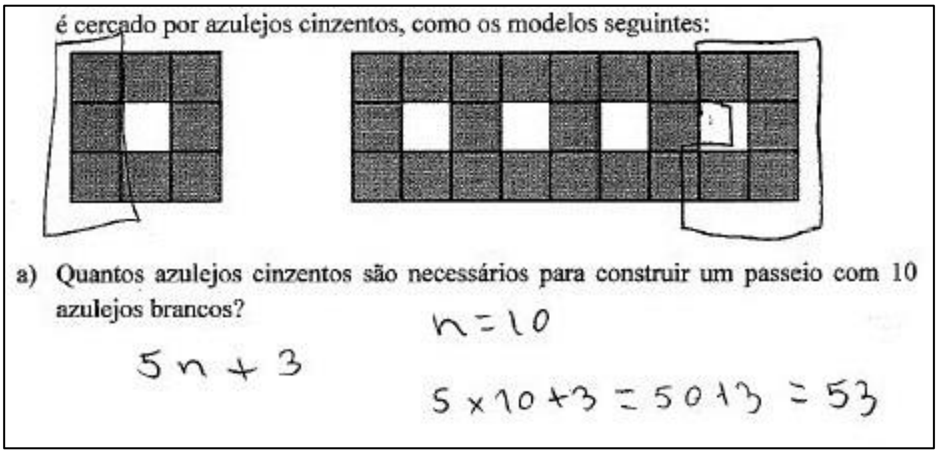


Figura 54 - Resolução de Paulo da questão 3 da Tarefa 2

> *Paulo:* Eu fui buscar a expressão algébrica, como é uma sequência, o $5n + 3$ é a expressão algébrica, eu fiz de cada um, entre... Como é que se chama? Não é membros.
>
> *Pesquisadora:* Termos.
>
> *Paulo:* Isto, termos! Entre cada termo soma-se 5, faz-se $5n$ e depois ...
>
> *Pesquisadora:* Soma 5 por quê? Contaste?
>
> *Paulo:* Como só acrescenta esta parte aqui (a apontar para a figura), neste aqui eu somei este aqui. Acrescenta-se esta parte, por isso é que $5n$ e depois é o que fica (referindo-se aos 3 azulejos do início do passeio), esta parte aqui (rodeou na imagem), por isso é que é 3.
>
> *Pesquisadora:* Então viste isso na formação da figura?
>
> *Paulo:* Sim.

Relativamente ao uso da linguagem verbal para expressar a generalização, percebemos que o estudante privilegia a linguagem algébrica, mas explica bem seu raciocínio por meio de palavras, justificando seu raciocínio de maneira clara e coerente:

> *Paulo:* Por cada azulejo branco existem 5 cinzentos, mais 3, ou seja, quando adicionamos mais um azulejo branco acrescentamos mais cinco. Se não tivesse essa parte (referindo-se aos três do início) era só $5n$.

Na alínea c) o estudante, tentou primeiramente compreender o significado das letras C e B, comparando as expressões com a expressão criada por ele e, em seguida, simplificou as expressões algébricas a fim de perceber se eram equivalentes e se representavam o número de azulejos cinzentos para um número de azulejos brancos. Paulo não apresentou dificuldades a nível da manipulação algébrica, demonstrou estar à vontade com a linguagem algébrica e parece enxergar ideias claras através dos símbolos.

> *Paulo:* O B aqui é equivalente a como pus aqui este n, porque o número de quadrados, de azulejos brancos é igual ao termo, ou seja... Vou substituir e depois já vejo. Ah, não! O C é os cinzentos, por isso o C é igual a $5n + 3$, ou seja, para este estar bem tem de dar $5n + 3$ ou $5B + 3$.
>
> *Paulo:* Este tá bem. O que a Sara escreveu tá bem. Depois o outro tem que dar a mesma coisa.
>
> *Paulo:* Então, é a Sara que tem razão porque a do José tá mal, dá $4B + 3$.

Vemos que Paulo recorreu espontaneamente à linguagem algébrica para resolver o problema, demonstrando estar à vontade com essa linguagem e reconhecer vantagens no seu uso. Não teve dificuldades em determinar um termo da sequência a partir do seu número de azulejos brancos, nem em identificar equivalência de equações, mas apresentou dificuldades em expressar em linguagem verbal o raciocínio apresentado em linguagem algébrica. Relativamente aos significados que atribui à variável e à expressão, n representa o número de azulejos brancos em uma figura e $5n + 3$ representa o número de azulejos cinzentos, significado este que está ligado à disposição visual das figuras (5 azulejos cinzentos a mais para cada azulejo branco mais os 3 azulejos cinzentos do início).

Daniel

Assim como Paulo, Daniel também buscou primeiramente encontrar uma expressão geradora para os termos da sequência e, em seguida usou-a para determinar o número de azulejos cinzentos de um passeio que tem 10 azulejos brancos. Sua justificativa, entretanto, baseia-se na contagem de elementos para 1 azulejo branco e depois para 2 azulejos brancos, para descobrir quantos azulejos a mais tem-se de um termo para o outro, e na comparação de seu termo geral com o primeiro termo da sequência, para ver o quanto é necessário somar para que sua generalização satisfaça ao primeiro termo. Parece tratar-se de um procedimento conhecido pelo estudante, que não exige uma visualização e compreensão da forma de crescimento da figura e que está relacionada à comparação dos elementos de uma sequência numérica, no qual analisa a sequência numérica para chegar à expressão geradora dos termos:

> *Daniel:* Quanto mais quadrados brancos, mais cinco quadrados cinzentos. Portanto, 5 mais 5 mais 5... $5x$, $5n$... Portanto a expressão algébrica é $5n$ mais um, dois, três! $5n$ mais 3. Vamos lá ver com 2, dez, treze! Dá certo. Pronto, é esta!
>
> (...)
>
> *Pesquisadora:* Por que 5 e 3? Viste na figura?
>
> *Daniel:* Não, porque é uma sequência e eu já sei que, como é 5 mais 5 mais 5, vai ser $5n$ e depois tem-se de arranjar um exemplo para dar o número certo. Por exemplo, se

aqui fosse só $5n$ ia dar só 5 quadrados cinzentos, mas como faltam mais 3, tem que ser $5n + 3$, e isso vai dar para todos.

Daniel demonstrou compreensão de que a variável n representa o número de azulejos brancos da figura, mas não conseguiu articular verbalmente uma justificativa ou um modo para fazer o cálculo do número de azulejos cinzentos a partir do número de brancos, expressando apenas por meio da linguagem algébrica. Relativamente à alínea c), o estudante optou por usar casos particulares para resolver o problema, substituindo B por 1 e 2 e comparando com os termos que tinha encontrado anteriormente, de modo que chegou à conclusão de que apenas a expressão de Sara representava o número de azulejos cinzentos em função de um número de azulejos brancos (Figura 54). O estudante não pensou em simplificar as expressões e verificar a equivalência entre elas:

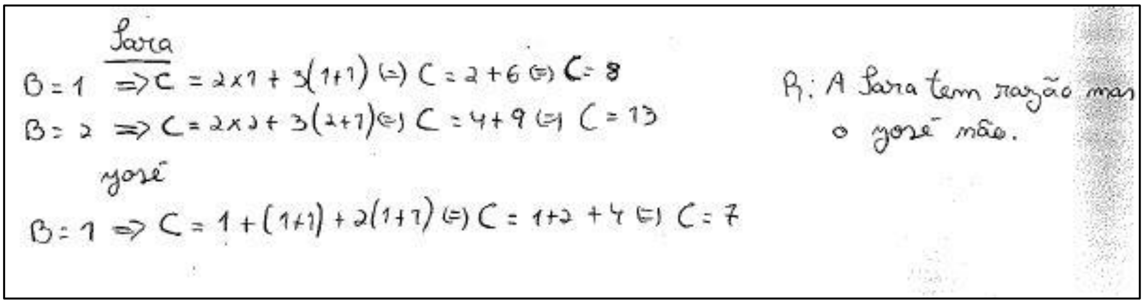


Figura 55 - Resolução de Daniel da questão 3 da Tarefa 2

Observamos que Daniel também recorreu espontaneamente à linguagem algébrica para resolver o problema, demonstrou reconhecer vantagens em seu uso para o cálculo do número de azulejos cinzentos necessários para construir um passeio com um número qualquer de azulejos brancos, e teve dificuldades em expressar a generalização por meio da linguagem verbal. O estudante, apesar de familiarizado com este tipo de questões e de compreender o significado da variável n, número de azulejos brancos, atribuiu à expressão $5n + 3$ um significado relacionado à sequência numérica, de forma desvinculada da disposição visual das figuras que compõem o padrão.

José

José, assim como Paulo e Daniel, recorreu imediatamente à expressão geradora dos termos da sequência e, a partir dela, calculou o número de azulejos cinzentos necessários para construir um passeio com 10 azulejos brancos, demonstrando reconhecer vantagens no uso da linguagem algébrica em questões de generalização. O estudante procedeu da mesma forma que Daniel para encontrar a expressão geradora $5n + 3$, por meio de uma comparação entre os elementos de uma sequência numérica relacionada aos azulejos para passeios de diferentes tamanhos (Figura 55) e percebeu o significado da variável n como o número de azulejos brancos de um passeio. Observamos que, para José, o significado da expressão criada por ele está ligado à sequência numérica e não ao padrão de crescimento da figura, mas quando questionado durante a entrevista, o estudante conseguiu enxergar o acréscimo de 5 azulejos cinzentos para cada azulejo branco a mais, porém não conseguiu compreender de que forma o 3 se relacionava com a figura:

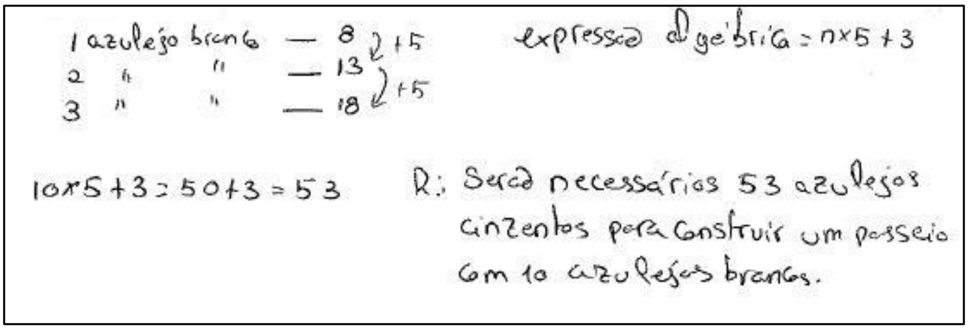


Figura 56 - Resolução de José da questão 3 da Tarefa 2

Pesquisadora: Se não tivesses feito isso e olhasses para a figura, era possível ver este cinco de alguma maneira?

José: Conseguia, porque por exemplo, se fosse a ver com um daria 6... 3, 6, 8. Mas se eu fosse colocar 2 teria este quadrado mais cinco deste lado.

Pesquisadora: Mas já tinhas visto isso ou pensaste nisso agora?

José: Pensei nisto agora. Primeiro tentei arranjar a expressão algébrica, que era mais fácil.

Pesquisadora: E o três?

José: O três? Eu sei que a expressão algébrica tinha alguma coisa com o cinco, por isso fui tentar ver alguma coisa que tinha, por exemplo, mais 5 ou vezes 5, depois arranjei vezes 5 e vi que era só preciso mais três.

Pesquisadora: OK. E na figura, é possível enxergar este 3?

José: Não sei.

Pesquisadora: Porque o 5 era isto aqui que estava sempre a somar.

José: O 3 pensei, 5×1 para 8 são mais 3, 5×2 é 10, mais 3 é 13. Como o três deu, era sempre o mesmo.

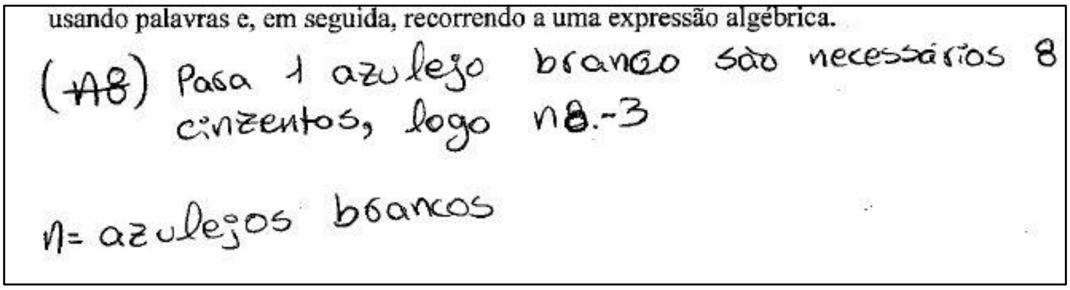
O estudante não teve dificuldades em expressar em linguagem verbal o raciocínio apresentado algebricamente por meio da expressão $n \times 5 + 3$. Relativamente à alínea c), José simplificou cada uma das equações apresentadas e usou um caso particular para verificar qual delas poderia representar o número de azulejos cinzentos, não se referindo à sua expressão criada anteriormente nem à relação que cada uma delas poderia ter com a disposição visual das figuras. Quando questionado, entretanto, o estudante afirmou que a equação criada pela Sara era equivalente à sua:

> *Pesquisadora:* E a tua expressão, que fizeste na alínea a)? Por que não a comparaste com as expressões daqui?
>
> *José:* Podia comparar sim porque, por exemplo, já que a da Sara está certa, o que eu tinha feito foi $5 \times n$ mais 3, isto é $5B$ que seria os azulejos brancos e dava n como os azulejos brancos e esta equação é igual a minha só que eu só tenho uma expressão, isto aqui já é uma equação com duas incógnitas e eu só tinha uma. Eu não tinha o C e o B porque numa expressão algébrica usa-se sempre o n.

Assim como Paulo e Daniel, José usou a linguagem algébrica espontaneamente para resolver o problema, demonstrando reconhecer que tal estratégia é mais econômica para calcular um número qualquer da sequência. Não teve dificuldades em determinar um termo da sequência, mas apresentou dificuldades na identificação de equações equivalentes, usando casos particulares para verificar se uma equação era válida para resolver o problema e sem considerar a relação entre essa equação e a criada por ele na alínea anterior. Para José, n representa o número de azulejos brancos em um passeio e $n \times 5 + 3$ representa o número de azulejos necessários, mas este significado está relacionado com uma sequência numérica uma vez que não consegue perceber completamente como tal expressão representa a disposição visual da figura.

Laura

Laura, ao compreender o problema, optou por fazer um desenho para calcular o número de azulejos cinzentos necessários para construir um passeio com 10 azulejos brancos. A estudante não recorreu à expressão geradora dos termos da sequência a fim de simplificar os cálculos, antes fez o desenho e contou 21 azulejos na parte de cima, 21 azulejos na parte de baixo e 11 na parte do meio. Observamos ainda, na alínea b), que teve dificuldade em estabelecer uma generalização para o número de azulejos cinzentos bem como em perceber um padrão de crescimento da figura, não conseguindo ligar a disposição visual da figura a uma expressão geradora (Figura 56):


usando palavras e, em seguida, recorrendo a uma expressão algébrica.

(+A8) Para 1 azulejo branco são necessários 8 cinzentos, logo n8.-3

n= azulejos brancos

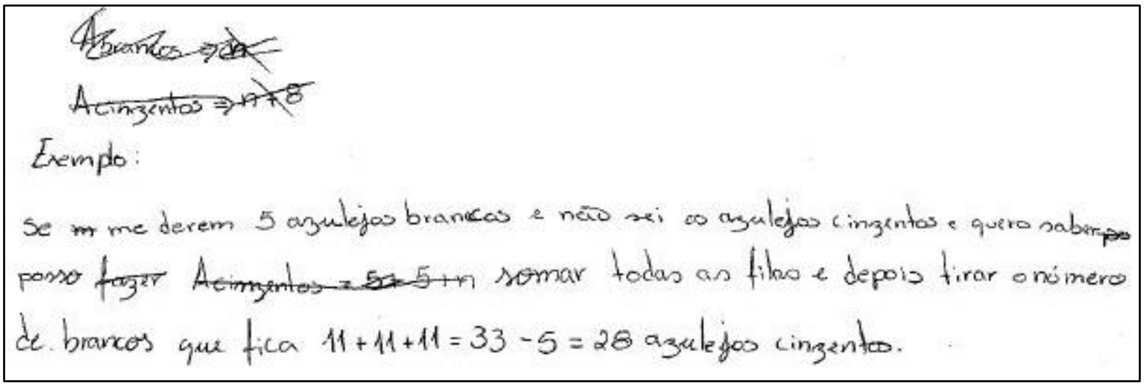
Figura 57 - Resolução de Laura da questão 3 da Tarefa 2

A primeira expressão que Laura pensou ao responder ao problema foi $n8$, ou seja, n vezes 8, onde n é o número de azulejos brancos. Entretanto, ao justificar verbalmente que para cada azulejo branco havia 8 azulejos cinzentos, a estudante percebeu que dessa forma 3 azulejos estariam sendo contados duas vezes, pelo que considerou que $n8 - 3$ seria a solução correta. A expressão indica seu caminho na compreensão do padrão de formação da figura, ou seja, para ela cada azulejo branco implica 8 azulejos cinzentos e é necessário tirar 3 que são contados duas vezes. Laura verificou se esta expressão poderia ser aplicada ao caso particular da alínea anterior, concluindo que esta expressão não estava adequada à situação descrita e que não sabia a resposta correta. A estudante disse ainda não saber se as expressões apresentadas na alínea c) estavam corretas e não verificou a equivalência destas expressões.

Assim, Laura não recorreu à linguagem algébrica, mas optou pelo desenho a fim de calcular o termo da sequência pedido, não tendo atenção inicialmente ao padrão de crescimento da figura nem à sequência numérica que poderia ser formada a partir dele. Teve dificuldade em expressar uma generalização tanto em linguagem verbal quanto em linguagem algébrica, e também em determinar expressões adequadas para resolver o problema. Suas tentativas evidenciam que atribuiu o significado correto à variável n, como o número de azulejos brancos em uma figura, e que sua expressão não estava ligada à disposição visual das figuras nem à sequência numérica relacionada a ela, mas ao seu processo de compreensão do padrão de formação da figura.

Rosa

Rosa também optou por fazer um desenho com 10 azulejos brancos a fim de saber o número de azulejos cinzentos necessários e não buscou perceber o padrão de crescimento da figura até a alínea b). A estudante teve dificuldades em expressar a generalização tanto em linguagem algébrica quanto em linguagem verbal, recorrendo a um caso particular para expressar seu raciocínio. Inicialmente, referiu-se a n como o número de azulejos brancos e à expressão $n + 8$ como o número de azulejos cinzentos, mas em seguida tentou explicar por palavras o cálculo necessário usando 5 azulejos brancos como exemplo (Figura 57). Apesar de descobrir uma generalização parcial para o padrão de crescimento da figura, teve dificuldades em associar a ela uma expressão algébrica:



~~Abrancos ⇒ ...~~

~~Acinzentos ⇒ n + 8~~

Exemplo:

Se ~~m~~ me derem 5 azulejos brancos e não sei os azulejos cinzentos e quero saber ~~po~~ posso ~~fazer~~ ~~Acinzentos = 5 5 + n~~ somar todas as filas e depois tirar o número de brancos que fica 11 + 11 + 11 = 33 − 5 = 28 azulejos cinzentos.

Figura 58 – Resposta de Rosa à questão 3 da Tarefa 2

> *Rosa:* Eu tô a tentar fazer com um exemplo meu, mas não tá a dar.
>
> *Rosa:* Fiz os 11 mais 11, mais 11 deu 33 depois tirei os 5 azulejos brancos e depois deu 28, e agora fazer a expressão é que eu não sei.
>
> *Pesquisadora:* O que era este n que tinhas usado no $n + 8$?
>
> *Rosa:* Tava a fazer que era o número dos azulejos brancos e como tenho aqui 8, depois se eu juntasse estes aqui tinha mais uma fileira de cinzentos, então não dava pra fazer.
>
> (...)
>
> *Rosa:* Se eu contasse aqui nesta fileira, depois sabia quanto é que era esta e esta, que era o mesmo valor disto e depois tirava os brancos, os brancos que me davam, mas depois não utilizava nenhuma expressão.

Relativamente à alínea c), Rosa simplificou as expressões, concluiu que não representavam o mesmo e substitui a variável B por 1 a fim de verificar qual deles estava correto. A estudante evidenciou compreender o significado das letras C e B, e identificou a expressão correta mas, o significado desta expressão está desvinculado da disposição visual das figuras que compõem o padrão e relaciona-se apenas com a validade numérica, uma vez que ao substituir o número de azulejos brancos por 1, em uma das expressões, obtém-se o número corretos de azulejos cinzentos.

Deste modo, Rosa não recorreu primeiramente à linguagem algébrica e calculou o termo da sequência por meio de um desenho. Teve dificuldades em descobrir um padrão de crescimento da figura, fazendo-o de forma incompleta, e em expressá-lo em linguagem verbal e algébrica. Identificou uma expressão válida para representar o número de azulejos cinzentos por meio de simplificação e de um caso particular, mas não percebeu como esta expressão se relaciona com a disposição geométrica da figura. Relativamente aos significados dos símbolos e expressões, representou por n o número de azulejos brancos e compreendeu o significado de B e C, mas a expressão $C = 2B + 3(B + 1)$ representa o número de azulejos cinzentos apenas a partir da manipulação algébrica, sem nenhuma ligação à disposição visual da figura ou a uma sequência numérica.

Maria

Maria, assim como Laura e Rosa, desenhou uma figura para descobrir quantos azulejos cinzentos seriam necessários para construir um passeio com 10 azulejos brancos e não observou o padrão de formação da figura. Tentou perceber se havia uma maneira mais econômica para calcular o número de azulejos, chegando a uma generalização em linguagem verbal do número de azulejos cinzentos na fileira do meio a partir do número de azulejos brancos, mas acabou por não usar isto na expressão algébrica. A estudante considerou que era necessário contar o número de azulejos cinzentos na fileira superior, o que designou por a, e fez a^2 porque este valor aparece duas vezes. Em seguida era necessário contar e somar o número de azulejos na fileira do meio, designado por Maria como b. A partir disso, e do exemplo que tinha, a estudante concluiu que a expressão adequada era $a^2 + b$ (Figura 58):

> *Maria:* Ah, eram 11 no meio, 21 em cima e 21 em baixo. Então é 21 mais 21 mais 11. E pronto.
>
> *Pesquisadora:* E se fossem 4, como nesta figura?
>
> *Maria:* É 9 mais 9 mais os 4 mais 1. Só precisamos de contar em cima porque no meio já sabemos que é os brancos mais 1!
>
> (...)
>
> *Maria:* Agora tenho é de dizer uma expressão algébrica. 21 mais 21 mais 11 é 21 ao quadrado mais 11.
>
> *Maria:* Então, pode ser por exemplo a ao quadrado mais b.
>
> *Pesquisadora:* E o que seria o b?
>
> *Maria:* O b são os do meio. O b é o 11 e o a ao quadrado é o 21 ao quadrado.

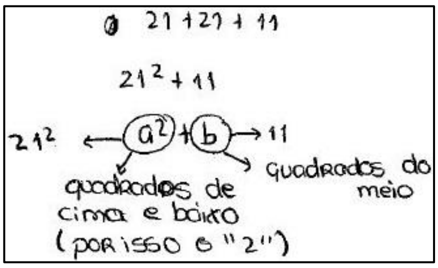


Figura 59 - Resolução de Maria da questão 3 da Tarefa 2

Observamos que o significado que Maria atribui à expressão relaciona-se com os procedimentos realizados para a resolução do problema, evidenciando muitas dificuldades com a generalização em linguagem algébrica. Na alínea c), a estudante não recorreu à verificação de equivalência de expressões, mas tentou perceber o sentido da expressão de Sara a partir da disposição visual da figura, identificando corretamente o significado das letras C e B, e que $B + 1$ refere-se ao número de azulejos cinzentos na fileira do meio (Figura 59):

> *Maria:* O C é o número de azulejos cinzentos. Então a Sara tá a dizer que o número de azulejos cinzentos é igual a dois brancos mais 3, e depois tem um branco mais 1.
>
> *Maria:* Ah, este é do meio, que é para contar mais um. Mas o 3 eu não percebo! Nem o 2.
>
> *Maria:* Ah, o 2 pode ser os de cima e os de baixo. Mas os de cima e os de baixo são cinzentos e não brancos!

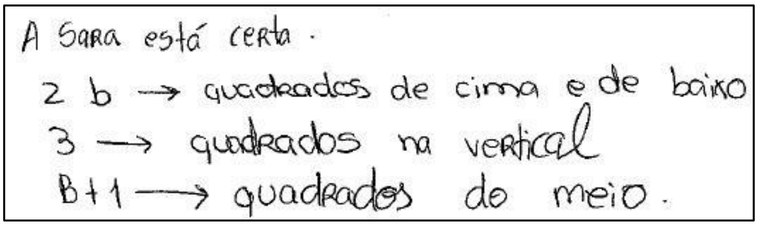

A Sara está certa.
2 b → quadrados de cima e de baixo
3 → quadrados na vertical
B+1 → quadrados do meio.

Figura 60 - Resposta de Maria à questão 3 da Tarefa 2 (alínea c)

Assim, Maria não usou linguagem algébrica espontaneamente, mas optou por determinar o termo da sequência a partir de um desenho. Teve dificuldade em generalizar e acredita que as letras são usadas para representar números sem necessariamente estabelecer uma relação entre eles. Dessa maneira, sua expressão $a^2 + b$ relaciona-se com os procedimentos realizados onde a^2 representa dobro e, ainda que compreenda o significado de B, associa a expressão $C = 2B + 3(B + 1)$ à disposição visual da figura, sem exigir uma relação lógica entre seus termos.

O Quadro 8 sintetiza as situações apresentadas na questão 3 da tarefa 2 no que se refere ao uso de linguagem verbal e algébrica, e aos significados e dificuldades.

Quadro 8 - Síntese (Tarefa 2 - Questão 3)

Estudante	Linguagem Verbal e Linguagem Algébrica	Dificuldades	Significados
Paulo	- Usa espontaneamente a linguagem algébrica; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica.	- Dificuldade em expressar em linguagem verbal o raciocínio expresso em linguagem algébrica.	- Quantidades de azulejos (n, B e C); - $5n + 3$ e $C = 2B + 3(B + 1)$ relacionam-se com a disposição visual da figura.
Daniel	- Usa espontaneamente a linguagem algébrica; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica.	- Dificuldade em expressar a generalização em linguagem verbal; - Usa casos particulares para determinar a validade da expressão.	- Quantidades de azulejos (n, B e C); - $5n + 3$ relaciona-se com a sequência numérica associada à figura; - $C = 2B + 3(B + 1)$ relaciona-se com a validade dos resultados.
José	- Usa espontaneamente a linguagem algébrica; - Reconhece vantagens no uso da linguagem algébrica.	- Usa casos particulares para determinar equivalência de equações.	- Quantidades de azulejos (n, B e C); - $n \times 5 + 3$ relaciona-se com a sequência numérica associada à figura; - $C = 2B + 3(B + 1)$ relaciona-se com a validade dos resultados.
Laura	- Verifica a validade de sua expressão para a situação descrita.	- Dificuldade em generalizar; - Dificuldade em identificar expressões que representam o problema.	- Quantidades de azulejos (n, $8n - 3$); - $8n - 3$ relaciona-se com um caso particular e com a repetição de azulejos.
Rosa	- Verifica a validade de uma expressão; - Compreende o significado de variáveis.	- Dificuldade em generalizar; - Usa casos particulares para determinar a validade da expressão.	- Quantidades de azulejos (n, B e C); - $C = 2B + 3(B + 1)$ relaciona-se com a validade dos resultados.
Maria	- Expressa verbalmente que as variáveis B e C representam quantidades.	- Dificuldade em generalizar; - Usa a^2 para representar dobro.	- Quantidade de azulejos (a, b, B e C); - $a^2 + b$ relaciona-se com os procedimentos realizados.

6.2.4. Questão 4

A questão 4 é uma questão de manipulação algébrica em que o estudante deve usar notação algébrica, efetuar adição algébrica e resolver equações do 1.º grau com uma incógnita (Figura 60).

4) O quadrado mágico é um passatempo muito antigo no qual todas as suas linhas, colunas e diagonais dão a mesma soma. Calcula o valor de x para o quadrado mágico abaixo. Apresenta todos os cálculos realizados.

$2x + 2$	x	$x + 1$
$x - 2$	$x + 2$	$5x - 6$
$3x - 3$	$2x + 1$	$x - 1$

Figura 61 - Questão 4 da Tarefa 2

Paulo

Paulo compreendeu que a soma de linhas, colunas e diagonais dão sempre o mesmo valor e traduziu essa informação para a linguagem por meio da expressão onde a soma dos termos da primeira linha é igual à soma dos termos da primeira coluna:

> *Paulo:* Ou seja, este é igual a este. Se todas as linhas, colunas e diagonais dão a mesma soma, quer dizer que este é igual a este, que é igual a este. Posso fazer uma equação que seja, este mais este mais este é igual a este mais este mais este.
>
> *Pesquisadora:* Certo.
>
> *Paulo:* Vou tentar fazer que é para ter certeza.
>
> *Paulo:* x é igual a 3. Como supostamente este é igual a este, agora posso ver se está certo.
>
> *Pesquisadora:* Então faz lá.
>
> *Paulo:* Dá quinze!

O estudante resolveu a equação sem dificuldades e, ao descobrir o valor de x, verificou se o resultado, de fato, satisfaria a condição. Não teve dificuldades com o uso de notação algébrica, realizou corretamente as adições algébricas e apresentou fluência procedimental nas manipulações algébricas.

Paulo usou a linguagem algébrica a fim de expressar a condição do quadrado mágico e demonstrou à vontade em que tal condição se tornasse uma expressão algébrica. Relativamente às expressões apresentadas em cada célula do quadrado mágico, representam valores e a equação por ele elaborada expressa que a soma dos valores da primeira linha é igual à soma dos valores da primeira coluna. Vemos ainda que x é um valor desconhecido que torna tal condição verdadeira neste quadrado, e que o estudante verificou este fato por meio da substituição do valor encontrado na expressão elaborada.

Daniel

Daniel também compreendeu bem a condição que um quadrado mágico deve satisfazer e logo escreveu uma equação para representar a igualdade entre a soma dos termos da primeira linha e a soma dos termos da primeira coluna (Figura 61). O estudante cometeu um erro na resolução da equação, porém ao verificar seus resultados, percebeu que não estava correto e voltou à equação para corrigir seu erro:

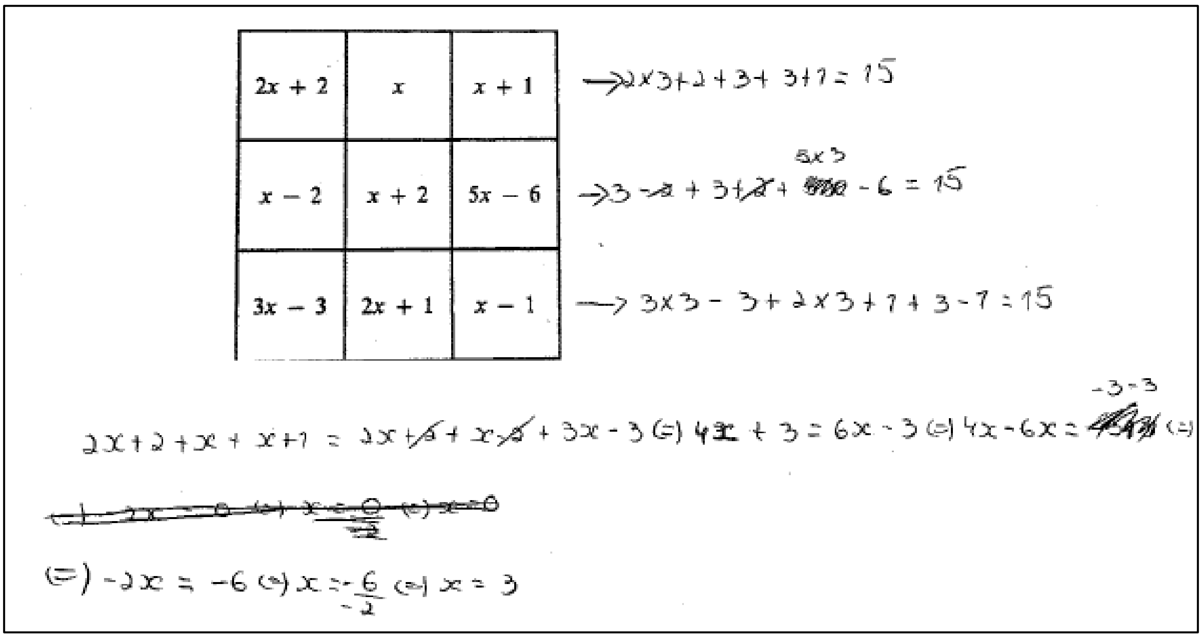


Figura 62 - Resolução de Daniel da questão 4 da Tarefa 2

Apesar de ter cometido um engano, vimos que Daniel sabe resolver equações de 1.º grau, tendo apenas uma pequena dificuldade na transposição do termo $+3$ que, para o segundo membro da equação, deveria ter sido transposto com o sinal negativo. O estudante lida bem com a notação e buscou verificar se o valor encontrado, de fato, satisfazia a equação. Assim, Daniel conseguiu expressar a condição do quadrado mágico por meio da linguagem algébrica e, apesar de ter tido uma pequena dificuldade na transposição de termos e na adição algébrica, resolveu corretamente a equação elaborada e verificou a validade do valor encontrado. Relativamente aos significados das expressões, vemos que também os associa à valores desconhecidos e que $2x + 2 + x + x + 1 = 2x + 2 + x - 1 + 3x - 3$ significa que a soma dos valores da primeira linha é igual à soma dos valores da primeira coluna. Para o estudante, a letra x representa um valor desconhecido que deve satisfazer a condição do quadrado mágico.

José

José, assim como Daniel e Paulo, compreendeu a condição do quadrado mágico e escreveu uma equação que expressa isto. O estudante fez também a soma dos termos da primeira linha igual à soma dos termos da primeira coluna, resolveu a equação sem dificuldades e verificou se o valor encontrado era válido para o quadrado mágico. José compreende e expressa que a equação escrita por ele representa a condição apresentada no enunciado e demonstra segurança e fluência na manipulação algébrica, expressa ainda que poderia usar quaisquer linhas e colunas que o resultado seria o mesmo:

> *Pesquisadora:* Então o x vale 3. Este valor de x é único? Se fizesses a linha 1 igual à coluna 3, o valor de x podia ser diferente?
>
> *José:* Não, porque isto é um quadrado mágico e a soma de cada linha na horizontal, vertical ou diagonal vai dar o mesmo e eu usei duas linhas, que foi esta na horizontal e esta na vertical, disse que elas eram iguais para achar o x, que deu 3, ou seja, daria tudo igual.
>
> *Pesquisadora:* E há alguma maneira de verificar se este valor está certo?
>
> *José:* Sim, posso ver, por exemplo, trocar esta incógnita por o x que está aqui, fazer todas as colunas que tenho.
>
> *Pesquisadora:* Queres fazer isso ou não é necessário?
>
> *José:* Eu acho que não é preciso. Talvez só fazer em duas para verificar.
>
> (...)
>
> *José:* Fiz esta na horizontal e esta na vertical, e tá certo.

Vemos que José também usou com familiaridade a linguagem algébrica para expressar a condição que o quadrado mágico deve satisfazer e resolveu a equação sem dificuldades. Demonstrou ter boas habilidades com a notação algébrica e sua manipulação. Associa à letra x e às expressões o significado de valor desconhecido e, assim como Paulo e Daniel, enxerga na expressão $2x + 2 + x + x + 1 = 2x + 2 + x - 1 + 3x - 3$ que a soma dos valores da primeira linha é igual à soma dos valores da primeira coluna.

Laura

Laura teve dificuldades em compreender a condição que um quadrado mágico deve satisfazer, considerou que o valor de cada um dos quadradinhos devia ser o mesmo, e dessa forma, também teve dificuldades na criação de uma equação para resolver o problema. A estudante escreveu $2x + 2 = x$, ou seja, igualou a expressão do primeiro quadradinho do quadrado mágico a x, na tentativa de descobrir o valor de x, mas ao substituir o número encontrado nos termos, os resultados não eram os mesmos, como havia suposto (Figura 62):

> *Laura:* Eu calculei este daqui e dá-me 2, mas depois este daqui já não dá para o resto, porque supostamente $5x$ menos 6 vai dar 4 e aqui...
>
> *Pesquisadora:* Fizeste $2x + 2$?
>
> *Laura:* Para descobrir o x, e dá 2, mas não pode ser porque aqui $5x - 6$ dá 4 e depois aqui $x + 1$ já dá 3.

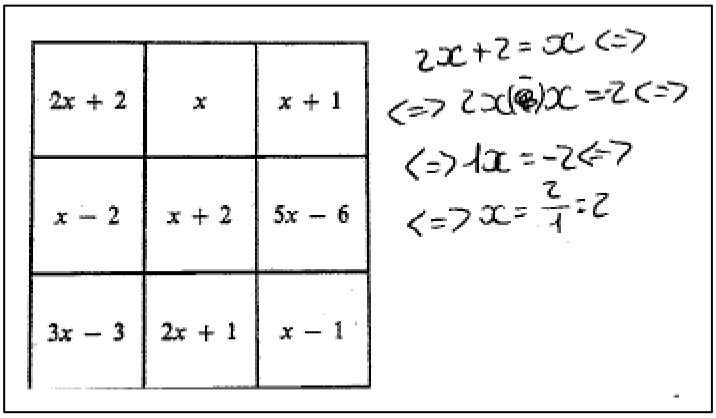


Figura 63 - Resolução de Laura da questão 4 da Tarefa 2

Na resolução desta primeira equação, a estudante demonstrou dificuldades, ignorando o sinal de menos em $1x = -2$. Observamos ainda que esta equação escrita por Laura expressa a forma como ela interpretou o problema e, na entrevista, sugeri que tivesse atenção ao enunciado a fim de que pudesse compreendê-lo. Assim, a estudante entendeu que se tratava da soma de termos em cada linha, coluna ou diagonal, mas pensou em igualar isto a x, possivelmente, na tentativa de encontrar seu valor. Ao final, Laura conseguiu perceber a condição que um quadrado mágico deve satisfazer, escreveu uma equação onde a soma dos termos de uma das diagonais era igual à soma dos termos da terceira coluna, mas não calculou corretamente o valor de x. Observamos que a estudante teve dificuldades na adição algébrica, considerando que $2x + x + x - x - 5x - x$ era igual a $-1x$ (Figura 63):

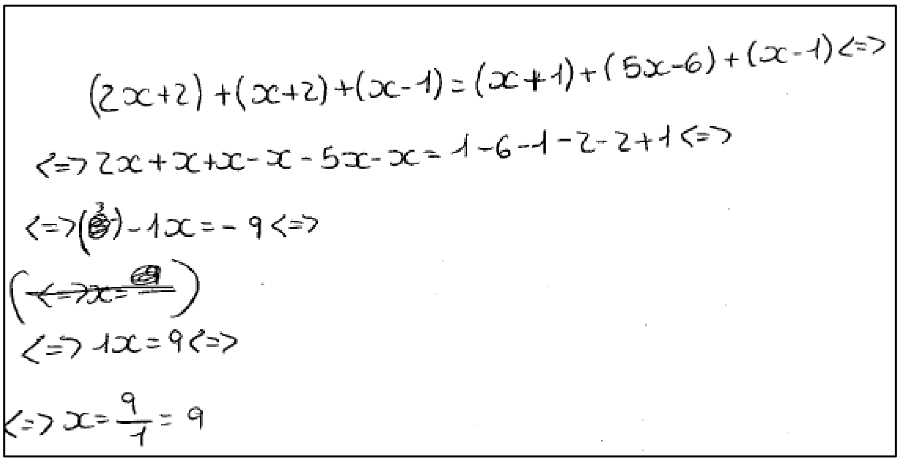


Figura 64 - Resolução de Laura da questão 4 da Tarefa 2

Pesquisadora: Mas por que a tua primeira expressão é $2x + 2 = x$?

Laura: Por causa destas aqui.

Pesquisadora: Então pegaste nesta primeira e disseste que ela é igual a x?

Laura: Sim.

Pesquisadora: Olha, as linhas, colunas e diagonais dão a mesma soma, mas tu disseste que esse número aqui ($2x + 2$) é igual a x.

Laura: Então quer dizer que a soma desta coluna aqui vai ser igual?

Pesquisadora: Vai ser igual a uma outra soma de colunas, linhas ou diagonais.

Laura: Ah! Então eu posso fazer este, mais este, mais este é igual a x? (referindo-se à primeira linha)

Pesquisadora: O que significa este x que estás a colocar do outro lado? É o mesmo valor deste x (em $2x + 2$)?

Laura: O x vai ser este aqui.

Pesquisadora: O x é este valor, não é? Por exemplo, se somares as expressões desta coluna, $x + x + 2 + 2x + 1$, tem como isto ser igual a x?

Laura: Não.

Pesquisadora: Por quê?

Laura: Porque vai dar um valor superior.

Pesquisadora: Então. Estavas a tentar criar uma equação, certo?

Laura: Sim.

Pesquisadora: Não queres ler novamente o problema?

(A estudante lê novamente o enunciado)

Laura: Quer dizer que esta coluna daqui vai ter que dar o mesmo resultado desta coluna aqui?

Pesquisadora: Sim.

Laura: Então posso fazer $2x + 2$ mais $x + 2$ mais $x - 1$ igual a esta parte aqui?

Pesquisadora: Pode sim.

Deste modo, Laura teve dificuldades em compreender a condição que um quadrado mágico deve satisfazer e em traduzir tal condição para a linguagem algébrica, mas demostrou saber que devia tentar equacionar o problema. Teve ainda dificuldades na realização da adição algébrica e desconsidera o sinal negativo no resultado da equação. Relativamente aos significados, mostra entender que as expressões representam valores e, em equações como $2x + 2 = x$ e $2x + 2 + x + x + 1 = x$, iguala as expressões a x porque seu significado está ligado à intenção de determinar o valor de x. Uma vez que não buscou verificar a validade do resultado encontrado, perdeu de vista a condição de que este valor devia tornar iguais as somas em cada linha, coluna e diagonal.

Rosa

Rosa compreendeu que a soma dos termos em cada linha devia ser a mesma e, por isso, calculou a adição algébrica em cada uma delas. Não teve dificuldades nestas adições e escreveu uma expressão igualando uma delas a x , um raciocínio semelhante ao de Laura. Da mesma forma, Rosa teve dificuldades na resolução da equação, uma vez que ignorou o sinal de menos em $-3x = 3$ (Figura 64):

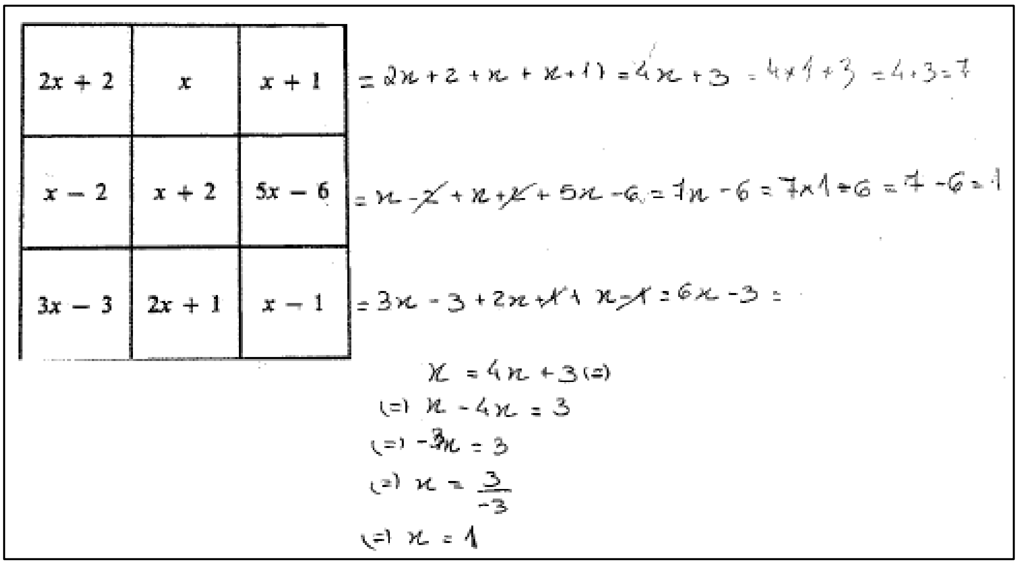


Figura 65 - Resolução de Rosa da questão 4 da Tarefa 2

A estudante compreendeu e verbalizou a condição que o quadrado mágico devia satisfazer, mas não conseguiu expressar isto por meio de uma equação, antes sua equação parece estar ligada à intenção de descobrir o valor de x, por isso igualou a soma dos termos da primeira linha a x:

> *Rosa:* Esse aqui tem que dar igual ao que me deu aqui?
>
> *Pesquisadora:* Sim.
>
> *Rosa:* Isso aqui ia dar sete x menos 6, porque quando há menos dois e mais dois pode-se cortar, porque anula-se.. e era suposto que os dois dessem iguais, mas não dá!
>
> *Rosa:* Agora este um com este um anula-se... Aqui já dá seis x menos 3. Eu tava a fazer bem, tudo.
>
> *Rosa:* Se eu agora fizer x igual a $4x + 3$, não sei se dá...
>
> (...)
>
> *Pesquisadora:* Deu igual?
>
> *Rosa:* Não! Porque um dá sete e o outro dá um.

Observamos que a estratégia inicial de Rosa consistiu em calcular a soma de cada linha e compará-las, uma vez que deviam ser iguais, depois optou por elaborar uma equação para determinar o valor de x e ao final, verificou se o resultado obtido era válido. Assim como Laura, teve dificuldades em resolver a equação, desconsiderando o sinal negativo em $x = \frac{3}{-3}$. É importante observar ainda que também igualou sua expressão a x a fim de determinar este valor, demonstrando que o significado de sua equação está relacionado com a intenção de descobrir o valor desconhecido.

Maria

Maria começou questionando se era para calcular o valor de x e tentei levá-la a compreender que sim e que a soma dos termos em cada linha, coluna e diagonal era a mesma, pelo que ela escreveu supostas expressões para representar a soma dos temos em linhas e colunas. A estudante, entretanto, colocou os termos um ao lado do outro, sem escrever o sinal '+' e fez operações entre termos não semelhantes. Na resolução de Maria vemos por exemplo que, para ela, $x - 2$ é igual a $-2x$, $x + 2$ é igual a $2x$, $5x - 6$ é igual a $-1x$ e $3x - 3$ é igual a x (Figura 65).

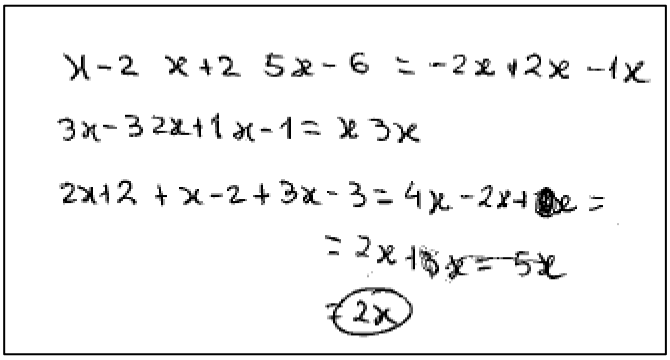


Figura 66 - Resolução de Maria da questão 4 da Tarefa 2

Na segunda linha de resolução a estudante escreveu que “$3x - 3 \;\; 2x + 1 \;\; x - 1$” é igual a “$x \;\; 3x$”, onde x é o resultado de $3x - 3$, $3x$ é o resultando de $2x + 1$ e $x - 1$ é igual a zero. Durante a entrevista questionei a estudante sobre o uso do sinal entre as expressões, pelo que na adição algébrica dos termos da primeira coluna, Maria já incluiu os sinais e pôde continuar a resolução, escrevendo que $2x + 2 + x - 2 + 3x - 3$ era igual a $4x - 2x + x$, onde $4x$ é o resultado de $2x + 2$, $-2x$ é o resultado de $x - 2$ e x é o resultado de $3x - 3$. Em seguida, Maria concluiu que $4x - 2x + x$ era igual a $2x$ porque $4x - 2x$ é $2x$, e $2x + x$ é apenas $2x$, justificando que deveria ser $2xx$ mas que isto não era possível, portanto, considerou apenas o $2x$. Percebemos aqui que para Maria, fazer a adição algébrica significa aplicar certas regras para diminuir ou simplificar as expressões, mas que a estudante não sabe tais regras, pelo que faz os cálculos como pensa que deve ser, desconsiderando termos que para ela não fazem sentido:

Maria: Está tudo mal! Eu não sei.

Pesquisadora: Não disseste que é uma soma. Não terias de colocar o sinal de mais.?

Maria: Vou tentar com esta coluna e depois com esta.

(...)

Maria: Aqui estava mais x, mas eu cortei porque depois não dava para ser dois x x, então eu cortei um deles.

Pesquisadora: Por quê?

Maria: Eu cortei o x porque não podia ficar $2xx$.

A estudante acreditava, portanto, que a soma dos termos de cada linha, coluna e diagonal era igual a $2x$ e que poderia fazer a soma dos termos de mais uma coluna para tentar descobrir o valor de x. Tratava-se da coluna do meio cuja soma dos termos seria $x + x + 2 + 2x + 1$, mas a estudante calculou apenas $x + 2 + 2x + 1$ a fim de descobrir o valor de x, ou seja, está a isolar o x para descobrir seu valor. A estudante, assim, pretendia saber o que faltava para dar $2x$ e este seria o valor de x (Figura 66):

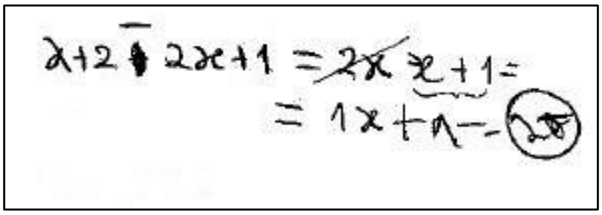


Figura 67 - Resolução de Maria da questão 4 da Tarefa 2

Maria: Agora tenho de descobrir o valor de x, mas eu não sei.

Pesquisadora: Pensa lá uma forma.

(...)

Maria: Ah, eu vou fazer estes dois ($x + 2 + 2x + 1$).

Pesquisadora: Porque é que estás a fazer estes dois e não este x (referindo-se à soma da coluna do meio)?

Maria: Eu vou fazer estes dois e ver o que falta para $2x$, que vai ser o valor de x.

Maria: Vou fazer de menos!

(...)

Maria: Então é 1! Porque assim vai dar $2x$!

Pesquisadora: Ok.

Maria: $x + 2$ é $2x$! $2x$ menos $2x$ é x. E x mais 1 é $1x$.

Pesquisadora: Por que fizeste conta de menos?

Maria: Porque se fosse mais não dava para fazer.

Pesquisadora: Por quê?

Maria: Se fosse mais dava mais do que $2x$ e assim não conseguia descobrir!

Pesquisadora: OK.

Maria: Então o que falta aqui é 1, para fazer $2x$!

Pesquisadora: Então o x é 1?

Maria: Sim.

É importante observar que Maria, quando notou que a soma de dois dos termos da coluna do meio já daria um valor maior que $2x$, optou por fazer uma subtração em vez de uma adição. A estudante escreveu que $x + 2 - 2x + 1$ é igual a $1x$, de acordo com os cálculos representados abaixo, e concluiu que o que faltava a $1x$ para dar $2x$ era 1, logo $x = 1$:

$$x + 2 - 2x + 1 =$$
$$2x - 2x + 1 =$$
$$x + 1 =$$
$$1x$$

Observamos que Maria compreendeu a condição que o quadrado mágico deve satisfazer e, entre seus cálculos, expressou a soma de uma linha e de uma coluna buscando encontrar o que faltava a uma delas para que fosse equivalente à outra, que seria o valor de x. Dessa maneira, vemos que há aqui um significado de equação, porém a estudante não sabe fazer adição algébrica, não reconhece que a adição de monômios deve ser feita entre monômios semelhantes e apresenta várias dificuldades em manipulação algébrica, associando às expressões um significado ligado apenas à manipulação e aplicação de regras e procedimentos. Vemos ainda que não se preocupou em verificar seus resultados, ou seja, não substituiu o valor encontrado a fim de saber se a soma em cada linha, coluna e diagonal seria a mesma.

O Quadro 9 sintetiza as situações apresentadas na questão 4 da tarefa 2 no que se refere ao uso de linguagem verbal e algébrica, e aos significados e dificuldades.

Quadro 9 - Síntese (Tarefa 2 - Questão 4)

Estudante	Linguagem Verbal e Linguagem Algébrica	Dificuldades	Significados
Paulo	- Usa a linguagem algébrica, com familiaridade, para expressar uma informação dada em linguagem verbal.	- Sem dificuldades.	- Valores desconhecidos (x, $2x+2$, $x+1$, ...); - $2x+2+x+x+1=2x+2+x-1+3x-3$ expressa uma condição.
Daniel	- Usa a linguagem algébrica para expressar uma informação dada em linguagem verbal.	- Transposição de termos (resolução da equação).	- Valores desconhecidos (x, $2x+2$, $x+1$, ...); - $2x+2+x+x+1=2x+2+x-1+3x-3$ expressa uma condição.
José	- Usa a linguagem algébrica, com familiaridade, para expressar uma informação dada em linguagem verbal.	- Sem dificuldades.	- Valores desconhecidos (x, $2x+2$, $x+1$, ...); - $2x+2+x+x+1=2x+2+x-1+3x-3$ expressa uma condição.
Laura	- Expressa, com dificuldade, a condição em linguagem algébrica.	- Interpretação do problema; - Adição algébrica; - Desconsidera o sinal negativo.	- Valor desconhecido (x); - $2x+2$ é igual a x porque pretende determinar o valor de x.
Rosa	- Expressa verbalmente a condição dada no enunciado.	- Desconsidera o sinal negativo. Ex: $-3x=3 \Leftrightarrow x=1$.	- Valor desconhecido (x); - $4x+3$ é igual a x porque pretende determinar o valor de x.
Maria	- Expressa, com dificuldade, a condição em linguagem algébrica.	- Justaposição de termos; - Opera com termos não semelhantes. Ex: $x-2$ é igual a $-2x$.	- Valor desconhecido (x); - Incógnita e expressões relacionam-se com a manipulação simbólica.

Capítulo 7

Conclusão

Neste capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo desenvolvido, destacando o objetivo, o quadro teórico, a metodologia de pesquisa e alguns aspectos das tarefas realizadas durante as entrevistas. De seguida, apresento as principais conclusões do estudo, organizadas de acordo com as questões de investigação. Por fim, apresento uma reflexão pessoal quanto ao trabalho realizado.

7.1. Síntese do estudo

As novas perspectivas de ensino e aprendizagem da Álgebra apontam a necessidade de desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes desde os primeiros anos de escolaridade e, como destaca o NCTM (2000), pressupõem a consolidação das bases da Álgebra no final do 8.º ano. É expectável, nessa altura, que os estudantes sejam capazes de usar a linguagem algébrica para analisar e generalizar padrões, representar situações e resolver problemas. Entretanto, a obtenção de tais capacidades até ao final do 3.º ciclo ainda constitui um objetivo ambicioso e um desafio para os professores. Nesse sentido, investigar o modo como os estudantes compreendem e usam a linguagem algébrica é fundamental a fim de melhorar sua aprendizagem nesse domínio da Matemática. Assim, este estudo tem o objetivo de analisar significados construídos por estudantes e suas dificuldades no uso e compreensão da linguagem algébrica no final do 3.º ciclo da educação básica.

Três temas essenciais à investigação foram abordados no quadro teórico: 1) representações; 2) simbolização; e 3) Álgebra escolar. Primeiramente procurei conceituar representações, destacar sua importância na aprendizagem matemática e enquadrar a linguagem algébrica, apresentando-a como um registo cuja finalidade é a comunicação e o suporte ao pensamento humano. Quanto à simbolização, é indicado o seu papel na Álgebra, relacionando-a com a generalização, bem como as características do processo de simbolização e da aquisição da linguagem algébrica, destacando o sentido de símbolo, a compreensão de conceitos algébricos e a fluência na manipulação simbólica. O terceiro aspecto do quadro teórico, foca-se na Álgebra escolar, indicando as abordagens atuais, o que se entende por significado algébrico e as dificuldades dos alunos em Álgebra, amplamente referidas por investigadores em Educação Matemática.

Uma vez que o objetivo desta investigação tem como base conhecer as perspectivas dos estudantes, na medida em que busco analisar suas dificuldades, os significados por eles construídos e o modo como usam a linguagem algébrica, a metodologia utilizada é de natureza qualitativa, no paradigma interpretativo. A pesquisa é feita por meio da realização de entrevistas a um grupo de seis estudantes com diferentes níveis de desempenho, de uma turma de 9.º ano, com recurso à gravação de áudio e recolha de suas produções escritas. A análise de dados começa a ser realizada com os dados obtidos na primeira ronda de entrevistas e, após a segunda entrevista, é desenvolvida de modo mais aprofundado.

As duas tarefas propostas aos estudantes são constituídas por quatro questões que envolvem diretamente ou potencialmente a linguagem algébrica. São usados um problema geométrico, um problema de partilha, uma questão de generalização e uma questão de manipulação algébrica em cada uma das tarefas a fim de proporcionar situações aos estudantes onde possam recorrer espontaneamente a linguagem algébrica e outras onde é necessário interpretar, usar e manipular os símbolos e expressões dadas. A escolha das questões justifica-se por serem questões com as quais os estudantes têm alguma familiaridade sendo que, algumas delas, apresentam uma natureza desafiadora quanto ao uso e compreensão da linguagem algébrica.

7.2. Conclusões

Apresento aqui as principais conclusões do estudo, organizadas de acordo com as questões de investigação. Começo por relacionar linguagem algébrica e linguagem verbal, como formas de representação de objetos e procedimentos algébricos. Em seguida, apresento uma discussão acerca dos significados que os estudantes constroem para os objetos e procedimentos algébricos ao longo da realização das tarefas. Por fim, destaco as dificuldades mais significativas que surgiram nas produções orais e escritas dos estudantes.

7.2.1. Relação entre representação algébrica e em linguagem verbal

Em muitas situações, os estudantes recorrem espontaneamente à linguagem algébrica para resolver os problemas propostos e demonstram que, neste nível da educação básica, já têm familiaridade com ela e conseguem reconhecer vantagens em seu uso, como recomenda o NCTM (2000). Nas questões de partilha, por exemplo, alguns estudantes equacionam o problema tendo consciência de que, assim, o resolverão de forma mais simples. Outros apresentam dificuldades em representar os problemas por meio de equações, como referem Ponte, Branco e Matos (2009) e, por isso, optam por resolvê-los aritmeticamente, como é o caso de Maria. É importante observar, ainda, o uso de linguagem simbólica não convencional, realizado por Rosa, que, em suas tentativas de tradução, iguala o total a partilhar à expressão que representa um dos valores procurados, a fim de encontrá-lo, evidenciando que perde de vista o significado atribuído inicialmente à incógnita.

Nas questões de generalização também observamos que alguns estudantes tendem a usar espontaneamente linguagem algébrica para expressar generalização e que isso está relacionado ao que costuma ser feito em sala de aula neste tipo de questões, mas que ainda assim o fazem com dificuldade. Uma das estratégias utilizadas com frequência por alguns estudantes é a elaboração e comparação de duas sequências numéricas relacionadas aos padrões geométricos, de forma a encontrar a expressão geradora da sequência. Nestes casos, os estudantes conseguem chegar a um resultado válido, mas não conseguem expressar em linguagem verbal o raciocínio expresso em linguagem algébrica, uma vez que o significado geométrico não foi de todo por eles considerado. Em diversas situações os estudantes apresentam verbalmente uma generalização para a situação, mas quando é solicitado que a expressem em linguagem algébrica, deixam este raciocínio de lado e recorrem a este meio mais mecânico, a comparação de sequências numéricas. Da mesma maneira, muitos estudantes não conseguem dar sentido à expressão apresentada na questão 3 da tarefa 2, por exemplo, a partir da disposição geométrica da figura, e usam casos particulares para determinar sua validade e a equivalência de equações. Observamos que, como afirma Duval (2011), a distância entre linguagem natural e simbólica é uma das origens da incompreensão dos estudantes.

Em diversas situações, os estudantes expressam verbalmente um raciocínio correto para resolver o problema, mas não conseguem traduzir adequadamente essa expressão verbal em linguagem algébrica. As ações dos estudantes precedem a simbolização de forma que estes compreendem a situação, desenvolvem o raciocínio algébrico e caminham para a linguagem algébrica simbólica, como refere Radford (2002), mas neste último passo apresentam dificuldades. É o que ocorre, por exemplo, com José e Daniel ao expressarem área por meio de linguagem algébrica, onde razões relacionadas com os símbolos algébricos e as operações levam os estudantes ao erro. Multiplicar monômios incorretamente, confundir dobro e quadrado de um termo e não usar parênteses no produto ou na diferença de um termo por uma soma de termos, surgem como os principais erros associados à incompatibilidade entre a expressão elaborada e o raciocínio correto apresentado pelo estudante.

Em síntese, nos resultados apresentados neste estudo, os estudantes aparentam ter alguma dificuldade em relacionar representações algébricas e representações em linguagem verbal, não transitando com familiaridade entre estas formas de representação. Para alguns estudantes, as representações algébricas não se ligam à função de comunicação de um raciocínio como acontece com a linguagem verbal, mas a procedimentos aprendidos para resolução de determinados problemas. Assim, estabelece-se uma distância significativa entre os dois tipos de representação, que, para os estudantes, parecem não representar o mesmo objeto ou ideia algébrica.

7.2.2. Significados

Ao resolver as tarefas propostas, os estudantes demonstram lidar sempre com significados construídos para objetos e procedimentos algébricos e, como referem Sfard e Linchevski (1994), estes significados podem ser apropriados ou não. Vimos, por meio dos resultados que, em muitas situações, os estudantes atribuem significados válidos aos símbolos algébricos, enxergando-os como quantidades, medidas e valores desconhecidos, a partir dos contextos, da situação problemática ou da disposição visual das figuras. Há, entretanto, casos onde os significados apropriados não são desenvolvidos e os estudantes criam seus próprios significados, como destacam Sfard e Linchevski (1994). Em nosso estudo, por exemplo, Maria parece usar a justaposição de termos algébricos significando “total”, ao desconsiderar a necessidade de símbolos de adição e, em outras situações, atribui significados próprios a procedimentos de manipulação simbólica.

Nos problemas geométricos que envolvem conceito e cálculo de área, os estudantes compreendem que as variáveis representam medidas de comprimento e, na maior parte dos casos procuram relacioná-las para expressar produto de comprimento por largura, mas enfrentam dificuldades quanto ao uso dos símbolos e operações. Nos casos de Rosa e Maria, vimos que elaboraram expressões com base em contagem e junção de termos apresentados nas figuras, e que seus significados estão ligados a supostas regras de manipulação simbólica.

A capacidade de transição flexível entre a realização de procedimentos automáticos com símbolos e a busca por significados para eles, que é uma das principais características que compõem o sentido de símbolo segundo Arcavi (2006), é pouco evidenciada pelos estudantes na realização das tarefas. De acordo com os resultados obtidos, a maioria dos estudantes apoia-se primeiramente na realização de procedimentos algébricos até mesmo quando seu raciocínio indica outra estratégia de resolução. Na questão 1 da tarefa 1, por exemplo, três dos estudantes não observaram a disposição geométrica das figuras para tentar encontrar a diferença entre elas, antes, abordam-na primariamente a partir de uma perspectiva procedimental e, dos três que tentaram uma estratégia ligada à disposição geométrica da figura, apenas Laura teve êxito. É importante refletir, como afirma Arcavi (2006), que isso pode estar ligado ao que as práticas de aula recompensam, como é evidenciado no caso de José, que compreendeu a diferença de medidas de área raciocinando a partir da disposição visual de figuras geométricas, porém abandonou esta estratégia, escreveu uma expressão para subtrair as medida de área e acabou por não chegar a uma expressão válida. Da mesma maneira, Maria, soube explicar a diferença entre as medidas de área, mas não soube expressá-la em linguagem algébrica.

Em síntese, os estudantes interpretam os símbolos algébricos como quantidades, medidas e valores desconhecidos e tendem a priorizar procedimentos algébricos na construção de significados para as expressões algébricas, desconsiderando suas ideias baseadas essencialmente na interpretação das situações. Indicam também que, quando os significados socialmente aceites não são desenvolvidos, os estudantes constroem significados muito particulares para objetos e expressões algébricas.

7.2.3. Dificuldades

Primeiramente, é importante indicar que, ao tratar das dificuldades apresentadas pelos estudantes relativamente ao uso e compreensão da linguagem algébrica, não pretendemos dispor uma lista completa das dificuldades que surgiram, mas fazer uma análise das que aparecem com maior expressão no desempenho dos estudantes, devido à importância do conhecimento e reflexão sobre tais dificuldades para promover um ensino que as tenha em conta. Dentro dos resultados obtidos, destacam-se as dificuldades que são de caráter procedimental e simbólico, como o uso de parênteses e da propriedade distributiva, a multiplicação de monômios, e o uso de adição e multiplicação de termos algébricos. Muitas destas dificuldades, entretanto, estão relacionadas à incompreensão dos conceitos algébricos, das estruturas e princípios que regem os procedimentos de trabalho com os símbolos, como indica o NCTM (2000), e isto fica claro na questão 1 da Tarefa 2, onde percebemos que a incompreensão de propriedades aritméticas está na base das dificuldades dos estudantes, como é amplamente referido na literatura (Kieran, 2007; Ponte, Branco e Matos, 2009; Radford, 2004).

A dificuldade relacionada com o *uso de parênteses*, tanto para criar expressões algébricas quanto para identificar expressões que representem uma situação, surgiu em muitos dos trabalhos realizados pelos estudantes. Na questão 1 da tarefa 2, por exemplo, observamos que alguns estudantes não veem com clareza a função dos parênteses, na medida em que não concebem o cálculo de área como soma de áreas e como produto entre medidas que são representadas por somas. Ao longo das entrevistas, muitos estudantes dizem que os parênteses são muito importantes, mas não sabem justificar essa afirmação e, desta maneira, destaca-se também o não uso ou o uso incorreto da propriedade distributiva da multiplicação. Tais dificuldades, que são referidas por Ponte, Branco e Matos (2009), evidenciam que a incompreensão de conceitos próprios da Aritmética está relacionada ao surgimento de dificuldades nos conceitos e representações algébricos, como afirmam os mesmos autores.

A dificuldade na *multiplicação de monômios* aparece frequentemente nos trabalhos dos estudantes. Em vários casos, calculam o produto dos coeficientes numéricos dos termos algébricos, mas não o fazem com a parte literal, particularmente quando se trata da mesma letra. Por esse motivo, associam por exemplo, a expressão $3b \times 2b$ a $6b$. Associado a este aspecto, vimos que o uso incorreto dos conceitos de *dobro e quadrado* é a dificuldade que mais surge nas produções dos estudantes. Isso ocorre tanto em situações contextualizadas, como por exemplo no cálculo da área de um quadrado, quanto em situações de manipulação algébrica. Associar $b \times b$ a $2b$ é uma dificuldade comum aos estudantes, mesmo àqueles que apresentam bom desempenho e considerável fluência procedimental, que ora cometem este erro ora não, de forma que nos dois problemas geométricos esta dificuldade surge em quase todas as resoluções dos estudantes. Laura, na questão 1 da Tarefa 2, por exemplo, afirma verbalmente tratar-se de $x \times x$, mas não sabe se isto é igual a $2x$ ou x^2. Essa dificuldade manifesta-se também a nível de linguagem, pois recorrentemente, ao longo das entrevistas, os estudantes confundem-se ao usar as expressões “dobro de”, “quadrado de” e “vezes dois”.

O uso indiscriminado das operações de *adição, multiplicação e potenciação* ao construir expressões algébricas é uma dificuldade muito significativa nas produções de Rosa e de Maria. Essa dificuldade parece surgir especialmente em situações onde é suposto que os estudantes representem situações por meio da linguagem algébrica. Entre os demais estudantes esta dificuldade também surge, mas em menos casos, e particularmente quanto ao uso de adição e multiplicação. Vemos na questão 1 da tarefa 2 que, ficar em dúvida entre expressões como $xy + xy$, $xy \times xy$ ou $x^2 + y^2$ é um equívoco comum. Na questão 4 da tarefa 2, o mesmo tipo de raciocínio é apresentado por Maria, mas por meio de uma *justaposição de termos* a fim de expressar uma soma. A estudante revela, nesta e em outras situações, que construir expressões liga-se à ação de juntar letras e números, sem necessariamente haver uma relação lógica entre eles.

É importante considerar que, nas questões de manipulação algébrica, os estudantes que têm bom desempenho, de acordo com a indicação da professora da turma, não apresentam dificuldades, no que concerne à simplificação de expressões algébricas, resolução de equações e fluência procedimental. As dificuldades apresentadas em alguns casos por estes estudantes, relativamente ao uso de parênteses e adição, multiplicação e potenciação de termos algébricos, não surgem em contexto puramente matemático, mas apenas em situações problemáticas. Enquanto isso, Laura, Rosa e Maria, que também apresentam estas dificuldades, evidenciam-nas de forma ainda mais patente nas questões de cálculo algébrico.

Nas questões de generalização, alguns estudantes apresentam dificuldade em *entender o comando de generalização*, ou seja, em compreender que se trata de fazer uma afirmação que possa ser aplicada a um caso qualquer dentro da situação problema e, muitas vezes recorrem a casos particulares, por meio de contagem um a um ou da continuação do padrão apresentado. É importante considerar que, como o trabalho com sequências e regularidades percorre toda a educação básica em Portugal, desde há alguns anos (como recomendado por Ponte, Branco e Matos, 2009), é interessante que esta dificuldade continue expressiva nos estudantes. Relativamente às questões de generalização, destaca-se ainda a dificuldade de alguns estudantes em expressar a generalização em linguagem algébrica, particularmente em traduzir para a linguagem algébrica todos os passos do processo utilizado para resolver o problema.

As dificuldades aqui apresentadas são as mais significativas nas produções dos estudantes, mas outras também surgiram com menor expressão como, por exemplo, as que se relacionam com resolução de equação ou com o uso do sinal de menos, "$-$". Vimos que, ao final do 3.º ciclo da educação básica, as dificuldades sentidas por estudantes perante situações onde devem usar linguagem algébrica, na construção, interpretação ou manipulação de expressões evidenciam insuficiência na consolidação das bases da Álgebra. Apesar de reconhecerem as potencialidades do uso da linguagem algébrica, têm dificuldades na compreensão dos significados dos símbolos algébricos, em passar de uma situação em linguagem verbal a linguagem algébrica e na manipulação das operações algébricas. Deste modo, os resultados aqui obtidos não indicam de todo uma compreensão da Álgebra baseada em conceitos e significados, particularmente de conceitos vindos desde a Aritmética, o que nos parece central para que os estudantes sintam as dificuldades apresentadas, em consonância com o que afirmam Sfard e Linchevski (1994).

Em síntese, os resultados mostram que os estudantes apresentam dificuldades ao criar e interpretar expressões algébricas, tanto para fazer generalizações como para resolver problemas. Na manipulação algébrica destacam-se as dificuldades com uso dos parênteses, representação de dobro e quadrado de um número e as operações de adição, multiplicação e potenciação de termos algébricos. Muitas destas dificuldades parecem estar ligadas a obstáculos resultantes de aprendizagens anteriores incompletas ou deficientes no campo da Aritmética.

7.3. Reflexão Final

A realização desta investigação, tanto na fase de planejamento como na recolha e análise de dados, contribuiu para o meu desenvolvimento profissional bem como para a minha iniciação como investigadora. Relativamente ao desenvolvimento profissional, este estudo proporcionou um processo de reflexão acerca do modo como os estudantes usam e compreendem a linguagem algébrica simbólica, que certamente contribuirá para a minha prática como professora no 3.º ciclo, onde tenho atuado desde que ingressei na profissão. Enquanto investigadora, este estudo levou-me a experimentar o desenvolvimento de uma pesquisa, desde a formulação do objetivo e a revisão de literatura, onde surgiram as primeiras questões acerca desta área de investigação, até a análise de dados, com toda a sua complexidade e as dificuldades que lhe são inerentes. Destaco ainda que a frequência das disciplinas que constituem a parte curricular do Mestrado em Educação Matemática foram fundamentais para o desenvolvimento das competências necessárias para a realização desta investigação e, desde logo, para despertar o meu interesse pelo tema que optei por estudar.

As maiores dificuldades que senti durante a realização do estudo estão relacionadas com a falta de familiaridade com sistema de ensino em Portugal, que tem as suas características e particularidades, e a falta de conhecimento dos estudantes. Essas dificuldades, entretanto, foram superadas com o apoio da professora de Matemática da turma, que ofereceu acolhimento e orientação, além da mediação com estudantes e encarregados de educação. Considero ainda que os meses de revisão de literatura trouxeram grandes contribuições para este trabalho, mas trouxeram também dificuldades concernentes à seleção entre os diversos autores e possibilidades de trabalho.

Considero que esta investigação contribui para o aumento do conhecimento sobre o uso e compreensão da linguagem algébrica por estudantes do final do 3.º ciclo da educação básica, sendo, por isso, relevante para os professores de Matemática. O estudo sugere a necessidade de uma abordagem da Álgebra que promova o desenvolvimento de conceitos, com ênfase na aquisição da linguagem algébrica como um meio de comunicar ideias matemáticas. Tal abordagem deve considerar a importância da aprendizagem a partir do uso de representações múltiplas, relacionando particularmente representações algébricas e em linguagem verbal. A preferência dos estudantes pela linguagem algébrica, por uma perspectiva procedimental, em relação à expressão de seu raciocínio e ideias em linguagem verbal, sugere que ambas as representações sejam valorizadas e que seja enfatizada a relação entre elas. Do mesmo modo, as dificuldades dos estudantes na utilização da linguagem algébrica, particularmente no que se refere às operações e símbolos, sugerem a necessidade de sua aquisição por meio de um processo com forte conexão com o campo da Aritmética.

Nesse sentido, a relevância deste estudo para professores de Matemática decorre do fato de que a análise dos significados e das dificuldades aqui apresentadas pode ser tida em conta no seu planejamento de trabalho, visando dar ênfase às áreas que podem ser mais frágeis para estudantes do final do 3.º ciclo da educação básica. Além disso, espero que este estudo possa contribuir, não apenas para professores, mas também para investigadores, para um conhecimento mais aprofundado dos significados e dificuldades dos estudantes no uso e compreensão da linguagem algébrica no 3.º ciclo da educação básica.

Referências

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. Em I. Vale, L. Fonseca, A. Barbosa, T. Pimentel, P. Canavarro , & L. Santos (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa. Fonte: https://repositorio.ul.pt.

Branco, N., & Ponte, J. (2012). The study of pictorial sequences as a support to the development of algebraic thinking. *Far East Journal of Mathematical Education, 8*(2), 101-135.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógio D'Água Editores.

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early Algebraization.* Heidelberg: Springer.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma - Entrar no modo matemático de pensar: Os registros de representações semióticas.* São Paulo: PROEM.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. Em M. Wittrock, *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra: A theoretical and empirical approach.* New York, NY: Springer.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. Em L. D. English (Ed.), *Handbook of International Reseach in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra.* Madrid: Síntesis.

Guerreiro, L. (2009). *O papel das representações algébricas na aprendizagem das funções.* Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa. Fonte: https://repositorio.ul.pt

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J., & Shaffer, D. (2002). On the development of human representational competence from an evolutionary point of view. Em K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. v. Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 277-293). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. Em J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton, *Algebra inthe early grades* (pp. 19-55). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Em F. Lester (Ed.), *Second handbook of reseach in mathematics teaching and learning.* Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C., Pang, J., Fong Ng, S., & Schifter, D. (2016). Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching. *ICME-13 Topical Surveys* (pp. 1-26). Springer.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1990). *Pesquisa Qualitativa.* Lisboa: Instituto Piaget.

Marchand, P., & Berdnarz, N. (Dezembro de 1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AQM, XXXIX*, 30-42.

Mata Pereira, J. (2012). *O raciocínio matemático em alunos do 9.ºano no estudo dos números reais e inequações.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa. Fonte: https://repositorio.ul.pt.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Nobre, S. (2016). *O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência com alunos do 9.º ano.* Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa. Fonte: https://repositorio.ul.pt.

Pesquita, I. (2007). *Álgebra e pensamento algébrico de alunos do 8.º ano.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa. Fonte: https://repositorio.ul.pt.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: ME, DGIDC.

Ponte, J., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *XXV*(2), 77-98.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 237-268.

Radford, L. (2000). Students' processes of symbolizing in algebra: A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. Em T. Nakahara, & M. Koyama (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education. 4*, pp. 81-88. Hiroshima: Hiroshima University.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. Em R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*, 14-23.

Radford, L. (2004). Syntax and meaning. Em M. Høines, & A. Fuglestad (Ed.), *Proceedings of the 28 Conference of the internacional group for the psychology of mathematics education. 1*, pp. 161-166. Bergen, Norway: Bergen University College.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 191-228.

Triphati, P. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *The National Council of Teachers of Mathematics*, 438-445.

Vlassis, J., & Demonty, I. (2002). *A álgebra ensinada por situações-problemas.* Lisboa: Instituto Piaget.

Weinberg, A., Dresen, J., & Slater, T. (2016). Students' understanding of algebraic notation: A semiotic systems perspective. *Journal of Mathematical Behavior, 43*, 70-88.

Anexos

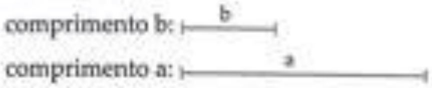
Anexo 1

Tarefas

Tarefa 1

TAREFA 1

1) As duas figuras são construídas com segmentos de comprimentos a e b.



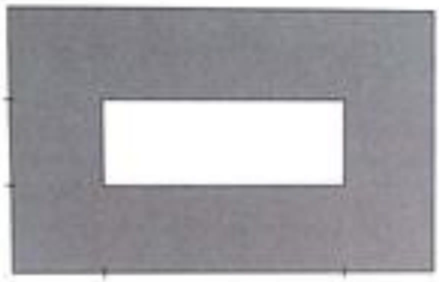


Figura 1

Figura 2

a) As partes sombreadas das duas figuras têm a mesma medida de área? Explica o teu raciocínio recorrendo a palavras e/ou desenhos.

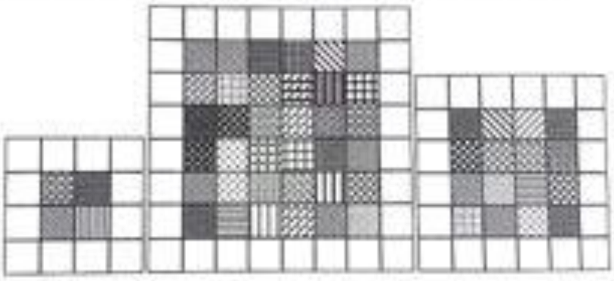
b) Escreve expressões algébricas para representar a medida de cada área:

Area Sombreada	Expressão
Figura 1	
Figura 2	

c) Qual é a diferença das medidas das duas áreas?

2) Numa época desportiva estão inscritos 380 alunos nas diferentes modalidades. A modalidade de basquetebol tem 3 vezes mais alunos do que a patinagem, e a natação tem mais 114 alunos que o basquetebol. Quantos alunos participam em cada modalidade?

3) A Germana está a fazer mantas de retalhos, para isso está a usar quadrados de tecido de todas as cores e vai acrescentar uma volta completa de quadrados brancos, como mostra a figura abaixo. Ela precisa de contar o número de quadrados necessários para acrescentar uma volta completa a cada manta. Ajuda a Germana!



a) Quantos quadrados brancos são necessários para aumentar uma manta de 8 quadrados de lado? E para uma manta de 16 quadrados de lado?

b) Encontra um processo que permita à Germana conhecer o número de quadrados a acrescentar sem que tenha que contar os quadrados. Escreve esse processo por palavras tuas.

c) Exprime, recorrendo a linguagem matemática, o processo descrito na alínea anterior.

4) Verifica se existe algum erro nas operações efetuadas e no caso de existir, corrige as erradas:

a) $-4(x-1)+1=-4x-1+1$

b) $(x-3)^2=x^2-9$

c) $(x+y)(2+y)=2x+2y+xy+y^2$

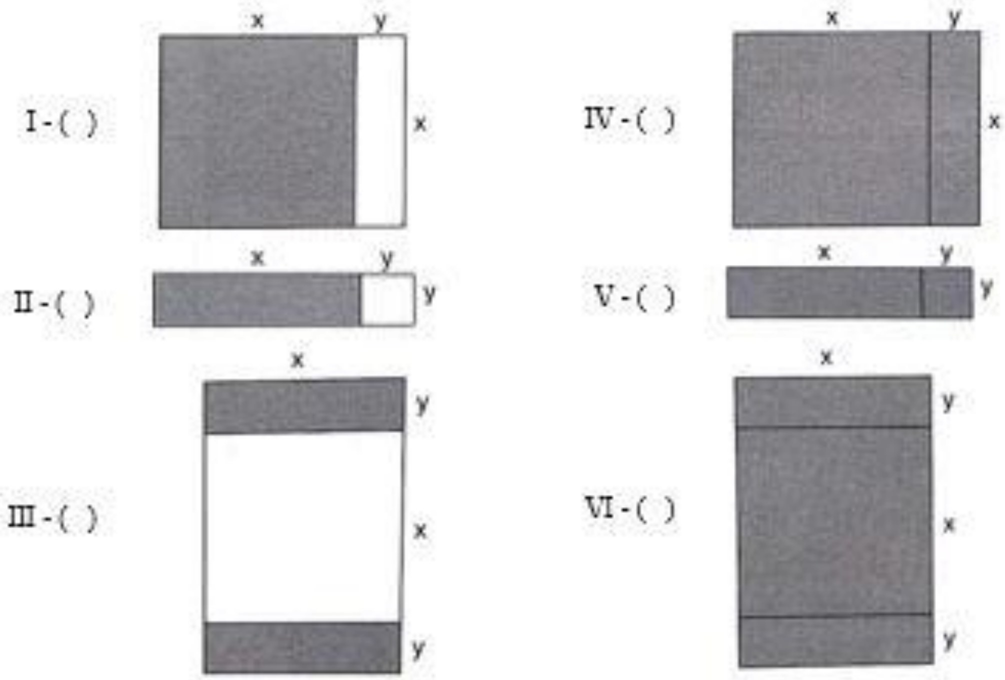
Tarefa 2

Nome: ____

TAREFA 2

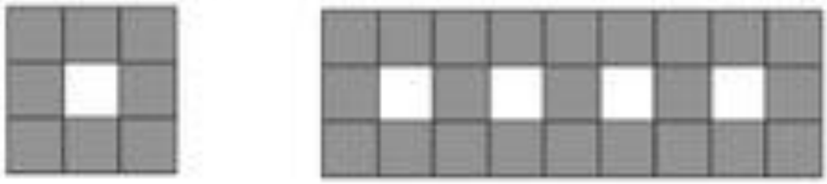
1) Associa uma expressão algébrica, que represente a área sombreada, a cada uma das figuras. Explica, oralmente, as tuas respostas.

A. $2xy$	D. $(x+y)x$	G. x^2+2xy
B. x^2	E. $xy+y^2$	H. x^2+y^2
C. x^2-y	F. y^2+x	I. xy



2) Martin, Maria e João têm juntos 109 berlindes. Martin tem a metade da quantidade de berlindes de João e Maria têm 17 berlindes a mais que Martin. Quantos berlindes cada criança tem?

3) Um passeio será construído por azulejos cinzentos e brancos. Cada azulejo branco é cercado por azulejos cinzentos, como os modelos seguintes:



a) Quantos azulejos cinzentos são necessários para construir um passeio com 10 azulejos brancos?

b) De que maneira é possível calcular o número de azulejos cinzentos para um passeio com um número qualquer de azulejos brancos? Escreve a tua resposta usando palavras e, em seguida, recorrendo a uma expressão algébrica.

c) Ao responder ao problema da alínea anterior, a Sara escreveu a expressão $C = 2B + 3(B + 1)$ e o José escreveu a expressão $C = B + (B + 1) + 2(B + 1)$, onde C é o número de azulejos cinzentos e B é o número de azulejos brancos. Eles estão certos? Justifica.

4) O quadrado mágico é um passatempo muito antigo no qual todas as suas linhas, colunas e diagonais dão a mesma soma. Calcula o valor de x para o quadrado mágico abaixo. Apresenta todos os cálculos realizados.

$2x + 2$	x	$x + 1$
$x - 2$	$x + 2$	$5x - 6$
$3x - 3$	$2x + 1$	$x - 1$

Anexo 2

Pedidos de Autorização

À diretora da Escola

Lisboa, 30 de novembro de 2018

Exma. Sra. Diretora do Agrupamento de Escolas [redacted]

Eu, Kelly Nunes Aguiar, mestranda em educação matemática, venho por este meio solicitar autorização para concretizar com um grupo de alunos da turma 9º[redacted], o trabalho que dará suporte ao meu relatório de Mestrado, a desenvolver sob orientação do Professor João Pedro da Ponte sobre o tema "Uso e compreensão da linguagem algébrica no 3.º ciclo de escolaridade". Este trabalho integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação na Área de Especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

No decorrer do trabalho as principais formas de recolha de dados para a concretização do mesmo serão: entrevistas com recurso à gravação de aúdio/vídeo, narração escrita de momentos das entrevistas e recolha dos trabalhos produzidos pelos alunos. Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste trabalho e será salvaguardado o anonimato.

Grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

Pede deferimento,

Kelly Nunes Aguiar

Aos encarregados de educação

[redacted], ____ de __________ de 2018

Exmo.(a). Sr.(a). Encarregado(a) de Educação:

Usar a linguagem simbólica algébrica é uma importante capacidade a ser desenvolvida pelos alunos no âmbito da educação matemática. É neste tópico, entretanto, que muitas dificuldades de compreensão surgem e podem influenciar o desempenho matemático dos estudantes. Assim, com o objetico de analisar significados e dificuldades de alunos no uso e compreensão da linguagem algébrica no 3.º ciclo de escolaridade, eu, Kelly Aguiar, mestranda em educação matemática, realizarei uma pesquisa com um grupo de alunos da turma 9º [redacted] da Escola [redacted]. Este trabalho integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação na Área de Especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e conta com o apoio da professora [redacted].

Para concretizar este propósito será necessário proceder a duas entrevistas, com gravação de áudio/vídeo (1) e a recolha de tarefas realizadas pelos alunos durante as entrevistas que ocorrerão no período de Janeiro a Fevereiro de 2019.

Assim sendo, e tendo em conta que é garantido o anonimato dos alunos, torna-se fundamental ter o seu consentimento para a participação do seu educando neste estudo.

Por fim informo que estou à sua inteira disposição, para prestar qualquer tipo de esclarecimento.

Agradeço a sua colaboração.

Com os melhores cumprimentos

Kelly Aguiar,

____

Email: kelly.aguiar@campus.ul.pt

(Recortar por aqui) --

Declaro que concordo que o meu educando__________________________ número _____ da turma 9º [redacted] da Escola [redacted] participe neste estudo desenvolvido pela professora Kelly Aguiar.

(1)Autorizo/Não autorizo a gravação de áudio/vídeo da entrevista (riscar o que não interessa).

Data:____________Assinatura: ______________________________