

Stavros A. Savidis, Daniel Aubram

Lagrange-Euler Formulierungen in der Bodenmechanik

Conference paper | Accepted manuscript (Postprint)

This version is available at <https://doi.org/10.14279/depositonce-9153>



Savidis, S. A., & Aubram, D. (2015). Lagrange-Euler Formulierungen in der Bodenmechanik. In Aktuelle Forschung in der Bodenmechanik 2015 (pp. 29–46). Springer Berlin Heidelberg.
https://doi.org/10.1007/978-3-662-45991-1_2

Terms of Use

Copyright applies. A non-exclusive, non-transferable and limited right to use is granted. This document is intended solely for personal, non-commercial use.

WISSEN IM ZENTRUM
UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK

Technische
Universität
Berlin

Lagrange-Euler Formulierungen in der Bodenmechanik

Stavros A. Savidis und Daniel Aubram

Zusammenfassung Bodenmechanische und geotechnische Problemstellungen werden häufig durch große Materialverformungen und andere damit einhergehende Phänomene gekennzeichnet. Bei deren Modellierung stoßen die klassische Bodenmechanik und die traditionelle Finite Elemente Methode basierend auf der Lagrange Formulierung an ihre Grenzen. In dem Beitrag werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen einer verallgemeinerten Lagrange-Euler Formulierung vorgestellt. Anschließend werden ihre unterschiedlichen Ausprägungen im Rahmen der numerischen Umsetzung anhand von Anwendungsbeispielen diskutiert sowie das Potential dieser Simulationsmethoden in der Bodenmechanik und Geotechnik aufgezeigt.

1 Einleitung

Zahlreiche bodenmechanische und geotechnische Anfangsrandwertprobleme werden durch große lokale Materialverformungen gekennzeichnet. Beispiele sind Naturereignisse wie Rutschungen und Erdbeben-induzierte Verflüssigung sowie elementare geotechnische Herstellungsvorgänge wie Verdrängen bzw. Eindringen, Bearbeiten und Mischen (Abb. 1). Auch beim Verlust der Standsicherheit von Flachgründungen, Böschungen und Stützbauwerken treten mitunter Verschiebungsfelder auf, für die die weit verbreitete Annahme einer linearen Kinematik unzutreffend ist.

Die großen Verformungen gehen in der Regel einher mit der Entstehung und/oder der Veränderung von Kontaktflächen und freien Oberflächen, mit veränderlichen

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Stavros A. Savidis

Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik – Degebo, Technische Universität Berlin, E-mail: savidis@tu-berlin.de

Dr.-Ing. Daniel Aubram

Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik – Degebo, Technische Universität Berlin, E-mail: daniel.aubram@tu-berlin.de

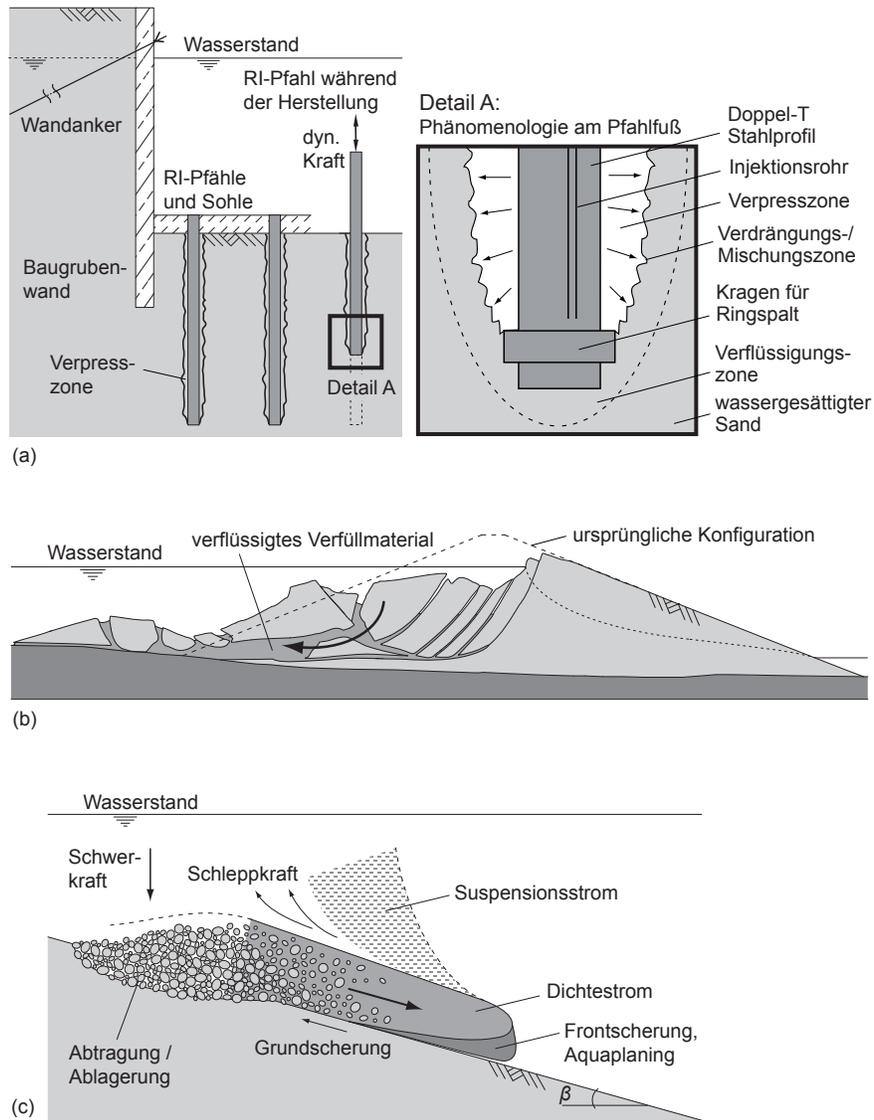


Abb. 1 Schematische Darstellung bodenmechanischer und geotechnischer Anfangsrandwertprobleme mit großen Verformungen und einhergehenden Phänomenen. (a) Herstellung von Rüttel-injektionspfählen (RI-Pfählen), (b) Verflüssigungsbedingtes Versagen eines Damms unter Erdbebeneinwirkung (in Anlehnung an [33]), (c) Submarine Hangrutschung (in Anlehnung an [23]).

Kontaktbedingungen und mit der Interaktion des Korngerüsts mit den Porenfluiden. Das mechanische Verhalten des Korngerüsts selbst ist im Allgemeinen abhängig vom Spannungs- und Dichtezustand, der Materialgeschichte und der Dehnungsrate, um nur einige Einflussfaktoren zu nennen. Darüber hinaus können große Scherdehnungsraten oder Porenwasserüberdrücke (Verflüssigung) dazu führen, dass sich der Boden lokal wie ein Fluid und nicht mehr wie ein Festkörper verhält.

Für eine realitätsnahe Prognose der Bodenverformungen sowie des Trag- und Verformungsverhaltens von Grundbauwerken ist es unerlässlich, den lokalen Zustands des Bodens und somit die jüngste Belastungsgeschichte im Berechnungsmodell hinreichend genau abzubilden. Die mathematische Modellierung (z.B. Materialmodell für den Boden, Modell für Porenfluid-Kornstruktur-Kopplung) und die numerische Modellierung (z.B. Diskretisierungstechnik) der oben genannten Problemstellungen im Bereich großer Verformungen ist jedoch äußerst komplex. Die klassische Bodenmechanik und die traditionelle Finite Elemente Methode (FEM) basierend auf der Lagrange Formulierung stoßen hierbei an ihre Grenzen: entweder müssen sie sich auf bestimmte Aspekte im Bereich kleiner Verformungen beschränken oder sie bilden die beschriebenen Phänomene nur stark vereinfacht und daher unzureichend ab (Beispiel: Modellierung von Herstellungsvorgängen als „wished-in-place“ oder „staged construction“).

Üblicherweise wird für bodenmechanische Problemstellungen die sog. Lagrange Formulierung verwendet, bei der der Beobachter (bzw. das Berechnungsnetz) die Bewegung der Materialpartikel, also die Materialverformungen verfolgt. Die Berücksichtigung von inelastischen Materialien und instationären Materialrändern ist dadurch sehr einfach. In der numerischen Umsetzung mittels Lagrange FEM sind zu jeder Zeit die Netzknoten bestimmten Partikeln zugeordnet. Dadurch können große Bodenverformungen jedoch starke Elementverzerrungen hervorrufen, welche die Genauigkeit der Lösung reduzieren und unter Umständen zum Abbruch der Berechnung führen.

Um die Nachteile der traditionellen FEM zu überwinden, wurden in den letzten Jahren vielversprechende Simulationsmethoden aus dem Bereich der Computerphysik an bodenmechanische Probleme angepasst und erfolgreich angewendet. Hierzu zählen Diskrete Elemente Methoden [20, 29] und punktbasierte Methoden [10, 12], aber auch netzbasierte Verfahren wie die Coupled Eulerian-Lagrange (CEL) Methoden [16, 36] und Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Methoden [14, 35, 31, 4, 2, 5]. Einen Überblick über die unterschiedlichen Herangehensweisen liefert [3].

Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit der Verallgemeinerung der traditionellen Lagrange und Euler Formulierungen in der Kontinuumsmechanik (sog. ALE Formulierung) und ihrer Anwendung in der Bodenmechanik. In Abschnitt 2 werden zunächst einige grundlegende kontinuumsmechanische Begriffe und Zusammenhänge eingeführt. Anschließend wird die Modellierung des mechanischen Verhaltens von wassergesättigtem Boden, insbesondere Sand, diskutiert und die allgemeine Lagrange-Euler Darstellung der Gleichungen präsentiert. Abschnitt 3 stellt verschiedene Lagrange-Euler FE Methoden vor, und zwar vereinfachte bzw. Simplified ALE (SALE), Multi-Materielle ALE (MMALE) sowie CEL Methoden. Aspek-

te ihrer numerischen Implementierung werden in Abschnitt 4 skizziert. Der Beitrag endet mit Schlussfolgerungen und einem kurzen Ausblick im Abschnitt 5.

2 Kontinuumsmechanische Modellierung

2.1 Kinematik und Bilanzgleichungen

Kontinuumsmechanik unter Berücksichtigung großer Materialverformungen hat einen umfangreichen mathematischen und physikalischen Hintergrund. Die für die ALE Formulierung notwendige Einführung eines unabhängigen Bezugsgebiets erhöht die Komplexität zusätzlich. Hier werden nur einige grundlegende Beziehungen vorgestellt. Ausführliche Darstellungen befinden sich in [1, 2].

Die Bezugsconfiguration eines materiellen Körpers im umgebenden, nicht notwendigerweise Euklidischen Raum \mathcal{S} ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$. Wir betrachten ausschließlich den Fall, dass \mathcal{B} und \mathcal{S} dieselbe Dimension haben. Materialpartikel in der Bezugsconfiguration werden mit $X \in \mathcal{B}$ und Raumpunkte allgemein mit $x \in \mathcal{S}$ bezeichnet. Die Bewegung des Körpers ist eine differenzierbare Abbildung $\varphi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ parametrisiert durch die Zeit $t \in [0, T]$, mit $\varphi_t(\cdot) = \varphi(\cdot, t)$ bei festem t . Die Momentanconfiguration zum Zeitpunkt t ist daher $\varphi_t(\mathcal{B}) \subset \mathcal{S}$, und $x = \varphi(X, t)$ ist der aktuelle Ort des Partikels X (Abb. 2).

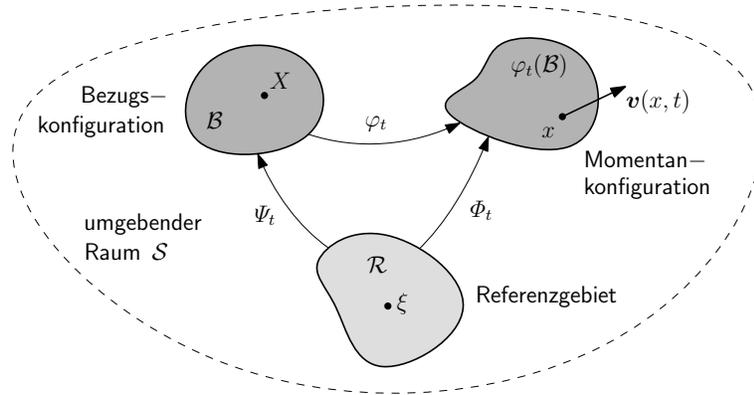


Abb. 2 Kontinua und Abbildungen der Lagrange, Euler und ALE Formulierungen: Bezugsconfiguration des Körpers \mathcal{B} und seine Bewegung φ_t im umgebenden Raum \mathcal{S} , Referenzgebiet \mathcal{R} und Relativbewegungen Φ_t, Ψ_t .

Im Rahmen der ALE Formulierung heißt eine weitere Teilmenge $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ ein Referenzgebiet, falls differenzierbare Abbildungen $\Psi_t : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{B}$ und $\Phi_t : \mathcal{R} \rightarrow \varphi_t(\mathcal{B})$ für alle $t \in [0, T]$ derart existieren, dass

$$\varphi_t = \Phi_t \circ \Psi_t^{-1} \quad (1)$$

gilt. Hierin bezeichnet \circ die Komposition (Verkettung). Die Geschwindigkeiten des Materials und des Referenzgebiets werden jeweils definiert durch $\mathbf{v}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\partial \varphi_t / \partial t) \circ \varphi_t^{-1}$ und $\mathbf{w}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\partial \Phi_t / \partial t) \circ \Phi_t^{-1}$, und ihre Differenz

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v} - \mathbf{w} \quad (2)$$

bezeichnet die Konvektivgeschwindigkeit. Die Konvektivgeschwindigkeit ist die von der aktuellen Konfiguration aus gemessene relative Geschwindigkeit zwischen dem Körper und dem Referenzgebiet. Bei der Lagrange Formulierung ist $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, während bei der Euler Formulierung $\mathbf{c} = \mathbf{v}$ gilt. Die ALE Formulierung ist daher eine Verallgemeinerung der klassischen Betrachtungsweisen.

Es seien nun $x \in \varphi_t(\mathcal{B})$ und $\xi \in \mathcal{R}$, und $q(x, t)$ sei ein zeitabhängiges Tensorfeld (Cauchy Spannung, Massendichte, etc.) in räumlicher bzw. Euler Darstellung. Dann liefert die totale Zeitableitung seiner referentiellen Darstellung $\hat{q} \stackrel{\text{def}}{=} q \circ \Phi$ bzw. $\hat{q}(\xi, t) \stackrel{\text{def}}{=} q(\Phi(\xi, t), t)$ den fundamentalen ALE Operator

$$\dot{q} = \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} \circ \Phi^{-1} + \mathbf{c} \cdot \nabla q. \quad (3)$$

∇q ist die kovariante Ableitung von q auf dem umgebenden Raum, $\dot{q} = \partial q / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla q$ ist die materielle Zeitableitung und das Punktprodukt bezeichnet die Überschiebung (Kontraktion) von Tensoren. Somit ergibt sich die herkömmliche materielle Zeitableitung aus einer lokalen Zeitableitung am festen Referenzpunkt und einem konvektiven Term infolge der Relativbewegung zwischen dem Material und dem Referenzgebiet. Die Komposition des ersten Terms auf der rechten Seite von (3) mit der Inversen der Abbildung Φ ist erforderlich, weil $\partial \hat{q} / \partial t$ an den Referenzpunkten ξ und nicht an Raumpunkten x definiert ist.

Der Operator (3) bildet die grundlegende Beziehung zur Herleitung der ALE Formulierung von Bilanzgleichungen und konstitutiven Gleichungen. Sind beispielsweise

$$\dot{q} = b + \text{divs} - q \text{div} \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(q\mathbf{v}) = b + \text{divs} \quad (4)$$

jeweils die Lagrange und Euler Formulierungen derselben allgemeinen Bilanzgleichung für das Feld q (bezogen auf die aktuelle Konfiguration), dann sind

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} \circ \Phi^{-1} + \mathbf{c} \cdot \nabla q = b + \text{divs} - q \text{div} \mathbf{v} \quad (5)$$

die konvektive ALE Formulierung und

$$\frac{\partial \hat{q} J_\Phi}{\partial t} + J_\Phi (\text{div}(q \otimes \mathbf{c})) \circ \Phi = J_\Phi (b + \text{divs}) \circ \Phi \quad (6)$$

die konservative ALE Formulierung der Bilanzgleichung. Die Größen $b(x,t)$ und $\mathbf{s}(x,t)$ sind jeweils Quellen pro Einheitsvolumen und Einheitsfläche, div ist der Divergenz-Operator auf dem umgebenden Raum und J_Φ ist die Jacobi-Determinante der Abbildung Φ .

Es sei angemerkt, dass im Gegensatz zur Lagrange Formulierung bei der ALE Formulierung - ebenso wie bei der Euler Formulierung - die Massenerhaltung nicht automatisch erfüllt ist, weil ein Materialfluss relativ zum beobachteten Volumenelement stattfindet. Durch diesen konvektiven Anteil, der sich in dem zweiten Term auf der rechten Seite von (3) manifestiert, gestaltet sich die numerische Umsetzung deutlich schwieriger und erfordert Verfahren vergleichbar mit denen der Strömungsmechanik.

2.2 Modellierung des Bodens

Ein spezifisches bodenmechanisches Anfangsrandwertproblem (ARWP) wird definiert durch ein geeignetes System von Bilanzgleichungen sowie entsprechenden Anfangs-, Rand- und gegebenenfalls Kontaktbedingungen. Für eine eindeutige Lösung müssen darüber hinaus Beziehungen zwischen den abhängigen und den unabhängigen Variablen des Problems angegeben werden, z.B. in Form von Materialmodellen (Stoffgesetzen) oder Evolutionsgleichungen.

Generell handelt es sich bei Boden um ein dreiphasiges Medium, das aus einer Feststoffphase (Korngerüst) und zwei Flüssigkeitsphasen (Wasser und Luft) besteht. Auf der Mikroskala ist Boden ein heterogenes Material, und die realen physikalischen Feldgrößen besitzen eine mikroskopische Verteilung auf den einzelnen Bestandteilen des Gemisches (z.B. Spannung innerhalb und zwischen den einzelnen Bodenkörnern). Üblicherweise ist man in der Bodenmechanik jedoch nicht an der realen Verteilung der Feldgrößen interessiert, sondern an gewissen räumlichen Mittelwerten bezüglich eines „Bodenelements“, d.h. eines repräsentativen Volumenelements (RVE) für den Boden. Es wird also ein fiktives Bodenkontinuum betrachtet, welches ein äquivalentes mechanisches Verhalten auf der Makroskala zeigt.

Das Verhalten des Bodenelements wird aus der Kopplung des Korngerüsts mit den Porenfluiden sowie aus dem Verhalten der einzelnen Phasen abgeleitet. Die drei grundsätzlichen Herangehensweisen für die Modellierung der Kopplung sind die Biot-Theorie [11], die Theorie Poröser Medien [13] und die Mittelungstheorie [21]. Werden für wassergesättigten Boden ausschließlich die Verschiebungen des Korngerüsts \mathbf{u} und der Porendruck p als unabhängige Variablen definiert, so besitzen die zwei grundlegenden Differentialgleichungen des Zweiphasenmodells für den Boden in allen drei Theorien eine vergleichbare Struktur. Das sog. $(\mathbf{u}-p)$ -Modell besitzt die Form [21, 39]:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}' - \nabla p + \rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$\frac{\dot{p}}{Q} + \alpha \operatorname{tr} \mathbf{d} - \operatorname{div} \left(\frac{k}{\rho^f g} \left(\nabla p - \rho^f \mathbf{b} + \rho^f \ddot{\mathbf{u}} \right) \right) = 0, \quad (8)$$

mit $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$. Je nach untersuchtem Problem können auch andere Systeme von Bilanzgleichungen sinnvoll sein.

In den Gleichungen (7) und (8) sind alle Größen makroskopische Größen. Es bezeichnen $\boldsymbol{\sigma}'$ die effektive Spannung, $\mathbf{d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{u}} + (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T)$ die Dehnungsrate des Korngerüsts, ρ und ρ^f jeweils die Massendichten des Gemisches und des Fluidanteils, k die Durchlässigkeit, und \mathbf{b} ist eine äußere Kraft pro Einheitsmasse des Gemisches. Darüber hinaus berücksichtigt Q die Kompressibilitäten des Fluids und des Kornmaterials, g ist die Erdbeschleunigung und α ist der Biot-Willis Koeffizient; bei inkompressiblen Körnern gilt $\alpha = 1$ [39].

Die benötigten Materialmodelle sind jeweils für die Einzelphasen zu formulieren, wobei das Porenwasser in der Bodenmechanik meistens als ideale Flüssigkeit modelliert wird. Eine wesentliche Komponente zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens des Bodens ist daher das Materialmodell für das als Kontinuum beschriebene Korngerüst. Das Verhalten des Korngerüsts zeichnet sich durch eine hohe Komplexität aus, insbesondere bei Sand. Es hängt nicht nur vom aktuellen Spannungs- und Dichtezustand des Sandes ab, sondern auch von dessen Materialgeschichte aufgrund monotoner oder zyklischer Beanspruchung. Unabhängig von der Ausgangslagerungsdichte wird beim monotonen Abscheren ein kritischer Zustand erreicht, ab dem die Spannung und die Dichte auch bei weiterer Scherverformung konstant bleiben. Hinreichend mitteldicht und dicht gelagerte Sande durchlaufen zuvor einen Zustand der Phasentransformation, in dem das Verhalten von kontraktant zu dilatant wechselt.

Modelle vom Raten-Typ für Sand unter Berücksichtigung großer Verformungen lassen sich in der allgemeinen Form

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}', e, \mathbf{h}, \mathbf{d}). \quad (9)$$

schreiben. Darin ist $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ eine objektive Rate der effektiven Spannung, e ist die Porenzahl, und \mathbf{h} ist eine (möglicherweise leere) Liste von weiteren Zustands- bzw. Geschichtsvariablen. Spezialisierungen von (9) sind die bekannten hypoplastischen Modelle [37, 27] sowie das hypoelasto-plastische CSSA-Modell [22]. Letzteres wird derzeit am Fachgebiet der Autoren im Rahmen eines DFG Projekts (SA 310/27-1) reformuliert und erweitert [32].

Für das Beispiel der Zaremba-Jaumann Rate $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{ZJ}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ liefert der Operator (3) die folgende ALE Formulierung des Stoffgesetzes (9):

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}' \circ \Phi)}{\partial t} \circ \Phi^{-1} + \mathbf{c} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}', e, \mathbf{h}, \mathbf{d}) - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}'. \quad (10)$$

Der Tensor $\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{u}} - (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T)$ heißt Drehgeschwindigkeitstensor.

3 Lagrange-Euler Methoden

Als Lagrange-Euler Finite Elemente Methoden werden solche netzbasierten numerischen Simulationswerkzeuge bezeichnet, bei denen sich Teile des Berechnungsnetzes nicht mit dem Material verformen, sondern entweder ortsfest sind (Euler) oder sich unabhängig bewegen können (ALE). Dadurch kann die Qualität des Netzes ohne Änderung der Netztopologie im Zuge der Berechnung weitestgehend aufrechterhalten werden, so dass auch große Materialverformungen abgebildet werden können. Gleichzeitig kann die Bewegung von freien Oberflächen und Kontaktflächen detailliert verfolgt werden. Man unterscheidet Lagrange-Euler Methoden hinsichtlich ihrer Netzdefinition und ihrer Vorgehensweise zur Beschreibung von Materialrändern bzw. Kontaktflächen [8, 25]. Eine schematische Darstellung zeigt Abb. 3.

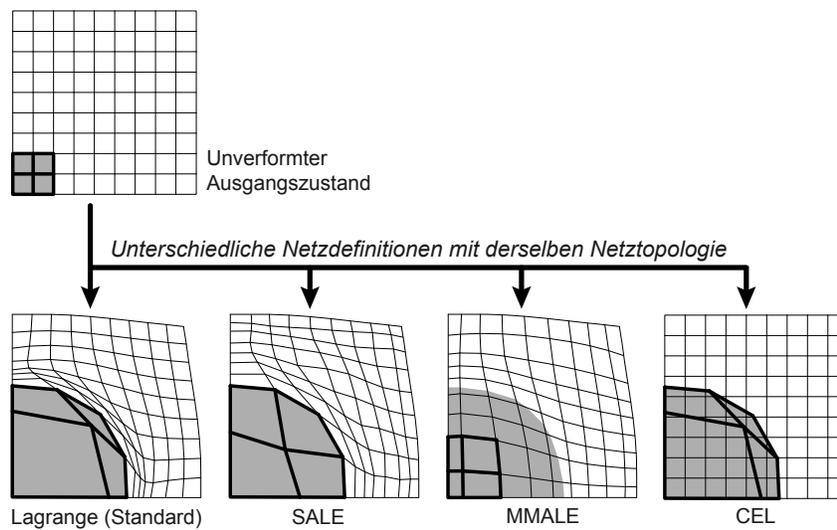


Abb. 3 Schematische Darstellung der unterschiedlichen Netzdefinitionen von Lagrange, SALE, MMALE und CEL Methoden. Die Materialzone (grau schraffiert) ist im Ausgangszustand einer Elementgruppe (fett umrandet) zugewiesen.

Bei ALE Methoden bildet das Elementnetz ein Referenzgebiet, welches sich grundsätzlich unabhängig vom Material bewegen bzw. verformen kann [18]. Elementverzerrungen können dadurch im Zuge der Berechnung kontinuierlich behoben werden, ohne jedoch die Nachteile eines starren Netzes in Kauf nehmen zu müssen. ALE Methoden vereinen die jeweiligen Stärken der traditionellen Lagrange und Euler Methoden, was sie jedoch erheblich komplexer macht. Beispielsweise müssen eine geeignete Bewegung des Netzes bestimmt und der Materialfluss durch das Netz infolge der Relativbewegung berücksichtigt werden. Hinsichtlich der Vorgehensweise zur Beschreibung von Materialrändern unterscheidet man zwei verschiedene ALE Verfahrensweisen.

3.1 SALE Methoden

Vereinfachte bzw. Simplified ALE (SALE) Methoden lösen Materialränder explizit durch Elementränder auf. In jedem Element befindet sich zu jedem Zeitpunkt also nur ein Material (Abb. 3). Mit SALE Methoden können nur solche Problemstellungen adäquat simuliert werden, bei denen sich die Gestalt der unterschiedlichen Materialzonen im Laufe der Berechnung nicht allzu stark ändert. Anderenfalls treten auch hier starke Elementverzerrungen auf, die eventuell ein Neuvernetzen des Gebiets erforderlich machen.

Während der letzten drei Jahrzehnte sind die SALE Methoden zu einem leistungsfähigen Werkzeug für Problemstellungen mit großen Materialverformungen entwickelt worden. In jüngster Zeit werden SALE Methoden auch in der Geotechnik z.B. für die Untersuchung von Penetrationsprozessen [35] und Dämmen unter seismischer Erregung [14] eingesetzt. In den genannten Beiträgen werden jedoch vergleichsweise einfache Materialmodelle einbezogen, um das nichtlineare mechanische Verhalten des Bodens abzubilden. Am Fachgebiet der Autoren wurde eine SALE Methode entwickelt und mit dem leistungsfähigen hypoplastischen Modell nach [37, 27] kombiniert, um die Eindringung von Pfählen und Fundamenten in Sand numerisch zu untersuchen [31, 4, 2, 5]. Einige Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Abb. 4 und Abb. 5 dargestellt.

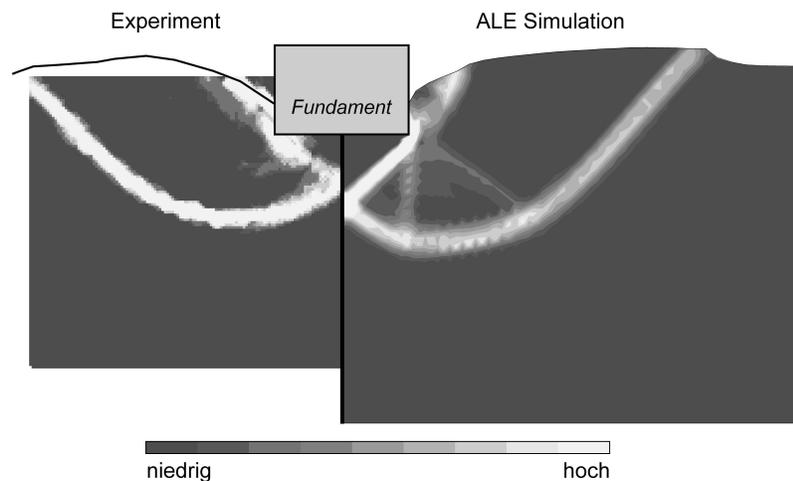


Abb. 4 Verteilung der maximalen Scherdehnungsrate in einem anfangs dicht gelagerten Sand ($I_{D0} = 0.78$) unter einem Streifenfundament bei einer bezogenen Eindringtiefe $z/B = 0.31$. Bildauswertung eines Modellversuchs (links) und ALE Simulation des Modellversuchs (rechts).

Abb. 4 links zeigt Ergebnisse der Bildauswertung eines im Glaskasten durchgeführten Modellversuchs mit einem kleinmaßstäblichen Streifenfundament ($B = 15\text{ cm}$). Das Fundamentmodell lagert im Ausgangszustand ohne Einbettung auf der horizontalen Bodenoberfläche und wird dann in den anfangs dicht gelagerten

($I_{D0} = 0.78$), trockenen und gewaschenen Grobsand eingedrückt. Die bezogene Penetrationstiefe im dargestellten Zustand beträgt $z/B = 0.31$. Aus der in Abb. 4 links gezeigten Verteilung der maximalen Scherdehnungsrate lassen sich die typischen Scherfugen im Bruchzustand deutlich erkennen. In Abb. 4 rechts sind die Ergebnisse der Nachrechnung desselben Modellversuchs mit der SALE Methode dargestellt. Für die Nachrechnung wurden die hypoplastischen Materialkonstanten des verwendeten Sandes nach Angaben aus der Literatur abgeschätzt. Wie bei den Ergebnissen des Modellversuchs lassen sich die Bruchfugen deutlich erkennen. Ebenso gut stimmen die Hebungen der Geländeoberfläche überein.

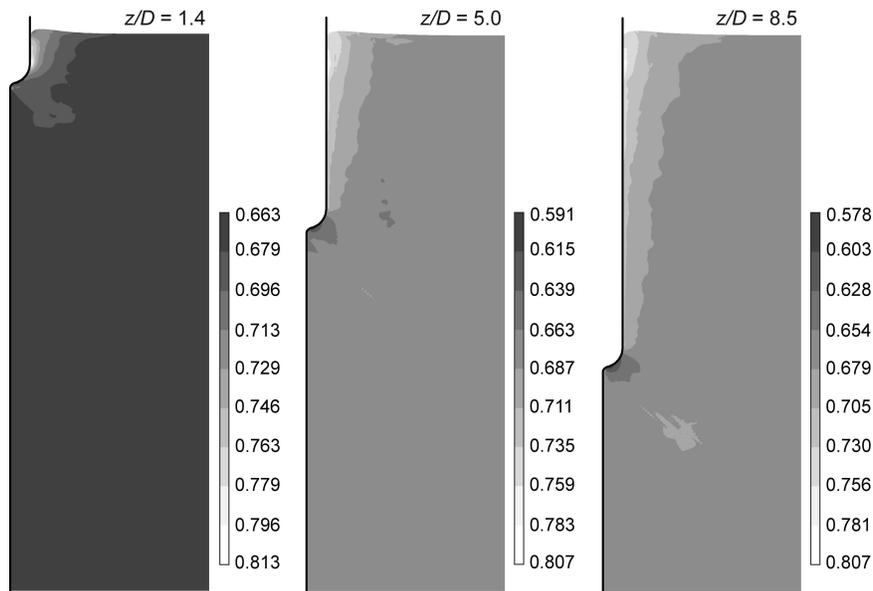


Abb. 5 ALE Simulation der quasi-statischen Penetration eines starren glatten Pfahls in anfangs locker gelagerten Sand ($e_0 = 0.678$, $I_{D0} = 0.34$). Verteilung der Porenzahl bei verschiedenen bezogenen Eindringtiefen z/D .

Ergebnisse der SALE Simulation einer quasi-statischen Pfahleindringung in Sand zeigt Abb. 5. Der Pfahl mit Durchmesser D wird als starr und glatt modelliert und die Porenzahl des Sandes im Anfangszustand beträgt $e_0 = 0.678$ ($I_{D0} = 0.34$). Die Anfangskonfiguration besitzt eine sehr einfache Geometrie, weil die Penetration an der Geländeoberfläche beginnt. Wie im vorangegangenen Beispiel sind der Eindringkörper und die Bodenoberfläche im FE Modell mit Kontaktelementen überzogen. Das axialsymmetrische Modell besitzt ca. 65000 Freiheitsgrade. Aus Abb. 5 ist ersichtlich, dass während der Pfahleindringung der anfangs locker gelagerte Sand entlang des Pfahlschaftes weiter auflockert, während er sich unterhalb des Pfahlfußes verdichtet. Im Endzustand ist das Volumen der Aufwölbungen an der Boden-

berfläche etwas kleiner als das des eingedrungenen Pfahls, was insgesamt auf eine Verdichtung des Bodens in der Umgebung des Pfahls schließen lässt.

Die Anwendungsbeispiele verdeutlichen die Leistungsfähigkeit der SALE Methode gegenüber herkömmlichen Lagrange Methoden bei der Simulation großer Bodendeformationen. Bei stumpfer Pfahlspitze oder noch größeren Eindringtiefen stößt jedoch auch diese an ihre Grenzen, weil aufgrund der vereinfachten Berücksichtigung von Materialrändern starke Elementverzerrungen nicht ausgeschlossen werden können. In solchen Fällen sind MMALE und CEL Methoden erfolgversprechender.

3.2 MMALE Methoden

Bei Multi-Materiellen ALE (MMALE) Methoden können sich im Gegensatz zu SALE Methoden die Materialränder durch das Netz hindurch bewegen. Dadurch können sog. multi-materielle Elemente auftreten, die zwei oder mehr Materialien sowie deren Kontaktflächen (Interfaces) enthalten [24, 30, 15]; siehe auch Abb. 3. Während sich das Netz bei MMALE Methoden unabhängig bewegen kann, verwenden (multi-materielle) Euler Methoden ein ortsfestes Netz [38, 26, 9]; sie bilden daher einen Spezialfall der MMALE Methoden. Leerer Raum wird ebenfalls als Material aufgefasst.

MMALE und Euler Methoden wurden ursprünglich zur Lösung von kurzzeitdynamischen physikalischen Problemstellungen entwickelt, bei denen sehr große Dehnungsraten auftreten und neue Oberflächen entstehen. Hingegen wird mit der Entwicklung und Anwendung einer MMALE Finite Elemente Methode für wassergesättigten Sand im Bereich niedriger und mittlerer Anregungsgeschwindigkeiten in einem vom ersten Autor geleiteten Forschungsprojekt der DFG Forschergruppe FOR 1136 GeoTech auf nationaler und internationaler Ebene völliges Neuland betreten. Die Ziele des Teilprojekts 5 dieser Forschergruppe sind die MMALE Modellierung der Herstellung von Rüttelinjektionspfählen (RI-Pfählen) in wassergesättigtem Sand und die Validierung der Rechenmodelle anhand von eigens durchgeführten kleinmaßstäblichen Modellversuchen. Die Rechenmethode und die Modellversuche bauen auf den Erfahrungen der Autoren im Zusammenhang mit der SALE Methode auf (siehe vorangegangener Abschnitt) und werden in [6, 7] ausführlich beschrieben.

Die besonderen Herausforderungen bei MMALE Methoden ergeben sich aus der Behandlung der multi-materiellen Elemente und der Bereitstellung eines diskreten Interface-Modells. Weil die Interfaces i.A. nicht mit Elementrändern übereinstimmen, müssen sie im Zuge der Berechnung entweder direkt verfolgt oder auf der Grundlage vorhandener Informationen rekonstruiert werden. Zu den bekanntesten Verfahren zählen Level-Set [34] und Volume-of-Fluid [17, 38] Methoden. Letztere verfolgen die partiellen Materialvolumina jedes Elements und sind daher massenerhaltend (konservativ).

Die Beziehungen zwischen den Zuständen der Einzelmaterialien in multi-materiellen Elementen und den makroskopischen Variablen auf der Elementebene werden mit Ansätzen aus der Mischungstheorie formuliert, die auch bei der Beschreibung von Mehrphasenströmungen und porösen Medien zur Anwendung kommen. In der speziellen, von den Autoren entwickelten MMALE Methode enthält jedes Element grundsätzlich ein Gemisch bestehend aus einem fluidgesättigten porösen Material (P: porous material), einem reinen Feststoff (S: bulk solid) und einem reinen Fluid (F: bulk fluid), wobei die jeweiligen Volumenfraktionen $f^k = V^k/V_{\text{elem}}$ zwischen Null und Eins liegen, mit $k \in \{P, S, F\}$. Das poröse Material ist wiederum ein Gemisch aus einer Feststoffphase (s: solid phase) und einer Fluidphase (f: fluid phase). Die totale Spannung in einem Element berechnet sich dann aus [6]

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_k f^k \boldsymbol{\sigma}^k = f^P (\boldsymbol{\sigma}^{P'} - p^f \mathbf{I}) + f^S \boldsymbol{\sigma}^S + f^F \boldsymbol{\sigma}^F, \quad (11)$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}^k$ die totale Spannung im Material $k \in \{P, S, F\}$ und $\boldsymbol{\sigma}^{P'} = \boldsymbol{\sigma}^P + p^f \mathbf{I}$ die effektive Spannung im porösen Material darstellen.

3.3 CEL Methoden

Im Gegensatz zu ALE Methoden werden bei den Gekoppelten Euler-Lagrange (engl.: Coupled Eulerian-Lagrange, kurz: CEL) Methoden überlappende aber sonst unabhängige Lagrange und Euler Netze verknüpft (Abb. 3). Sie wurden bereits in den 1960er Jahren entwickelt [28]. Das Lagrange Netz diskretisiert üblicherweise die Struktur und verformt sich mit dieser, während das raumfeste Euler Netz diejenigen Gebiete abdeckt, in denen große Materialverformungen auftreten. Der Rand des Lagrange Netzes definiert die Kontaktfläche, über die das Lagrange Netz und das Euler Netz gekoppelt werden. Typische Kopplungsmodelle verwenden die Geschwindigkeit auf dem Rand des Lagrange Netzes als kinematische Zwangsbedingung für das Euler Netz, und die Spannung in den Euler Elementen als Krastrandbedingung für das Lagrange Netz [8].

Das kommerzielle FE Programmsystem ABAQUS stellt eine CEL Methode zur Verfügung, die auch tangentialen Kontakt mit Reibung berücksichtigen kann. Erste Anwendungen in der Bodenmechanik liegen vor und bringen das große Potential dieser Methode zum Ausdruck. Henke und Qiu [16] sowie Tho et al. [36] setzen CEL für die numerische Simulation der Eindringung der Spudcan-Füße von Offshore Jack-Up Plattformen ein. In beiden Arbeiten wird der Eindringvorgang nicht nur in homogenem Boden, sondern auch in geschichtetem Boden numerisch simuliert, bei dem eine Sandschicht oder eine steife bindige Bodenschicht auf einer mächtigen Weichschicht lagert. Eine solche Baugrundsituation kann zu einem Durchstanzversagen des Spudcans führen.

Abb. 6 zeigt die in [16] verwendeten CEL Finite Elemente Modelle. Die als void gekennzeichnete Zone ist im Modell erforderlich, weil Euler Netze ebenso wie

MMALE Netze den gesamten Raum abdecken müssen, der im Zuge der Simulation von Material eingenommen werden könnte. In den CEL Modellen wird der Boden mit Euler Elementen und der Spudcan mit Lagrange Elementen modelliert. Das Euler Netz bleibt ortsfest und das Lagrange Netz bewegt sich mit dem Spudcan. Während der Eindringung wird der Boden verdrängt und strömt durch das Euler Netz.

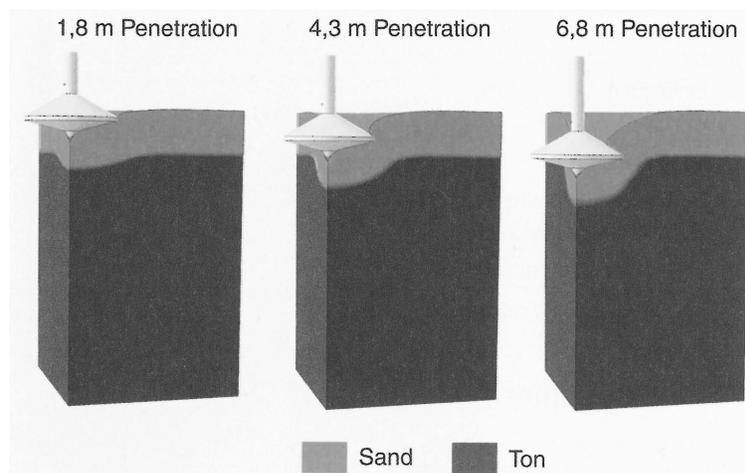


Abb. 6 Eindringvorgang eines Spudcans in geschichteten Boden (dicht gelagerter Sand über mächtiger Tonschicht). Ergebnisse einer CEL Simulation [16]

4 Numerische Implementierung

Die im letzten Abschnitt beschriebenen Simulationen verwenden für ihre numerische Implementierung meistens eine Lagrange-plus-Remap oder Operator-Split Strategie [8]. Für ALE Methoden kann diese konzeptionell als Aufspaltung des Operators (3) geschrieben werden:

$$\dot{q} = y(\dots) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} \circ \Phi^{-1} + \mathbf{c} \cdot \nabla q = 0. \quad (12)$$

Die Größe q repräsentiert hierbei alle Variablen der Lösung, deren zeitliche Entwicklung durch eine Evolutionsgleichung $y(\dots)$ angegeben werden kann. Generell können durch einen Operator-Split einfachere und robustere Algorithmen verwendet werden als für das monolithische Problem. Bei der Lagrange-plus-Remap Strategie besteht die inkrementelle Lösung in der Zeit aus insgesamt drei Schritten.

Im ersten Schritt, dem Lagrange Schritt, wird Gl. (12)₁ auf herkömmliche Weise mit den für Festkörper gängigen Methoden gelöst. Ein wesentlicher Aspekt ist dabei

die Gewährleistung der Objektivität des Integrationsalgorithmus für das Materialmodell (9). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von inkrementeller Objektivität [19] und meint damit, dass bei finiten Starrkörperrotationen die Integration der betrachteten Variablen über einen Zeitschritt exakt sein muss. Für mitrotierende Raten, die in den meisten Codes implementiert sind und zu denen auch die Zaremba-Jaumann Rate gehört, sind inkrementell-objektive Integrationsalgorithmen verfügbar, deren Kerne sich nicht von den herkömmlichen Algorithmen für infinitesimale Verformungen unterscheiden [2].

Nach dem Lagrange Schritt erfolgt der Remap, bei dem die nach dem Lagrange Schritt ermittelten Variablen der Lösung auf ein neues Netz abgebildet werden. Zunächst werden in einem zweiten Schritt die nach dem Lagrange Schritt aufgetretenen Elementverzerrungen reduziert, indem das Netz bei unveränderter Topologie entweder geglättet (ALE) oder in seinen ursprünglichen Zustand zurückgesetzt wird (Euler). In den von der Arbeitsgruppe der Autoren entwickelten SALE und MMALE Methoden (s. Abschnitte 3.1 und 3.2) wird die Netzqualität über beliebig geformte ebene Gebiete iterativ mit Hilfe eines optimierungsbasierten Glättungsalgorithmus aufrecht erhalten. Die zu minimierende Zielfunktion wird darin lokal definiert durch

$$W(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_{\text{el}}} w(\mathbf{x}), \quad \text{mit} \quad w(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R(\mathbf{x})}{R_{\text{ref}}} \left(\frac{R(\mathbf{x})}{r(\mathbf{x})} \right)^3. \quad (13)$$

r und R sind jeweils die Radien des In- und Umkreises eines Dreieckselements, $R_{\text{ref}} = 1.0$ ist ein Referenzradius und n_{el} ist die Anzahl der Elemente in dem Ball bzw. Patch $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \bigcup_{n_{\text{el}}} \Omega(\mathbf{x})$ von Elementen Ω mit gemeinsamen inneren Knoten \mathbf{x} . Im Gegensatz dazu werden Randknoten so verschoben, dass sie im gleichen Abstand zu ihren direkten Nachbarn liegen.

Im dritten Lösungsschritt der Lagrange-plus-Remap Strategie werden schließlich die Lösungsvariablen auf das modifizierte Netz übertragen. Bei ALE Methoden wird hierbei die Transportgleichung (12)₂ mit Hilfe von Algorithmen aus der numerischen Strömungsmechanik gelöst. Um sicher zu stellen, dass das Integral von Erhaltungsgrößen (z.B. Massendichte) während des Transportschritts tatsächlich konstant ist, wird häufig die konservative Integralform von (12)₂,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} q \, dv + \int_{\partial \mathcal{V}} q \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \, da = 0, \quad (14)$$

mit Hilfe einer Finite Volumen Methode gelöst. Der erste Term in (14) berücksichtigt die Zeitabhängigkeit des Kontrollvolumens $\mathcal{V} = \Phi_t(\mathcal{W})$, mit $\mathcal{W} \subset \mathcal{R}$, während der zweite Term den konvektiven Fluss der Variablen q über den Rand des Kontrollvolumens zum Ausdruck bringt.

5 Schlussfolgerungen und Ausblick

Moderne kontinuumsmechanische Betrachtungsweisen und numerische Simulationsverfahren, zu denen auch die in diesem Beitrag vorgestellten Lagrange-Euler Methoden zählen, haben das Potential zu einem tieferen Verständnis von komplexen bodenmechanischen Vorgängen und deren Auswirkungen beizutragen. Sie eröffnen die Möglichkeit Prozesse und Zustandsänderungen im Boden, die bisher im Verborgenen lagen oder nur schwer quantifizierbar waren, rechnerisch zugänglich zu machen.

Derzeit gibt es keine Methode, mit der sämtliche Phänomene im Zusammenhang mit großen Bodendeformationen zufriedenstellend numerisch simuliert werden können. Jede hat ihre Stärken und Schwächen und für alle besteht weiterhin ein großer Forschungsbedarf, insbesondere auf den Gebieten der Bodenmechanik. Jede Simulationsmethode ist auch nur so gut wie die ihr zugrunde liegenden mathematisch-physikalischen Modelle. Daher erfordert die Entwicklung von Simulationsmethoden und deren Anwendung auf bodenmechanische und geotechnische Problemstellungen gleichermaßen die Weiterentwicklung von Modellen für das mechanische Verhalten des Bodens. Auch hier sind viele Fragen bislang gar nicht oder nur unbefriedigend beantwortet. Die Bodenmechaniker stehen also vor einer Vielzahl neuer und wichtiger Herausforderungen.

Danksagung Die Forschungsarbeiten wurden gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG Sachbeihilfen SA 310/21-1, SA 310/21-2 und SA 310/26-1), unter anderem im Rahmen der DFG Forschergruppe FOR 1136. Hierfür sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Literaturverzeichnis

1. Aubram D (2009) Differential Geometry Applied to Continuum Mechanics. Shaker Verlag, Aachen (Veröffentlichungen des Grundbauinstitutes der Technischen Universität Berlin 44). <http://opus.kobv.de/tuberlin/volltexte/2009/2270/>
2. Aubram D (2013) An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method for Penetration into Sand at Finite Deformation. Shaker Verlag, Aachen (Veröffentlichungen des Grundbauinstitutes der Technischen Universität Berlin 62). <http://opus4.kobv.de/opus4-tuberlin/frontdoor/index/index/docId/4755>
3. Aubram D (2014) Über die Berücksichtigung großer Bodendeformationen in numerischen Modellen. In: Ohde-Kolloquium 2014, Dresden <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-139883>
4. Aubram D, Rackwitz F, Savidis S A (2010) An ALE Finite Element Method for Cohesionless Soil at Large Strains: Computational Aspects and Applications. In: Benz T, Nordal S (eds) Proc 7th Eur Conf Numer Meth Geotech Eng (NUMGE 2010), Taylor & Francis, London
5. Aubram D, Rackwitz F, Wriggers P, Savidis S A (2014) An ALE Method for Penetration into Sand Utilizing Optimization-Based Mesh Motion. Comput Geotech (submitted for publication)
6. Aubram D, Rackwitz F, Savidis S A (2014) Vibro-Injection Pile Installation in Sand: 1. Interpretation as Multi-Material Flow. In: Proc Workshops DFG Research Unit FOR 1136 GeoTech (Tagungsband in Vorbereitung)

7. Aubram D, Rackwitz F, Savidis S A (2014) Vibro-Injection Pile Installation in Sand: 2. Numerical and Experimental Investigation. In: Proc Workshops DFG Research Unit FOR 1136 GeoTech (Tagungsband in Vorbereitung)
8. Benson D J (1992) Computational Methods in Lagrangian and Eulerian Hydrocodes. *Comp Methods Appl Mech Eng* 99:235–394
9. Benson D J (1995) A Multi-Material Eulerian Formulation for the Efficient Solution of Impact and Penetration Problems. *Comp Mech* 15:558–571
10. Beuth L (2012) Formulation and Application of a Quasi-Static Material Point Method. Dissertation, Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften, Universität Stuttgart
11. Biot M A (1941) General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *J Appl Phys* 12:155–164
12. Bui H H, Fukagawa R, Sako K, Wells J C (2011) Slope Stability Analysis and Discontinuous Slope Failure Simulation by Elasto-Plastic Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). *Géotechnique* 61:565–574
13. de Boer R (2000) *Theory of Porous Media*. Springer, Berlin
14. Di Y, Yang J, Sato T (2007) An Operator-Split ALE Model for Large Deformation Analysis of Geomaterials. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 31:1375–1399
15. Freßmann D, Wriggers P (2007) Advection Approaches for Single- and Multi-Material Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Procedures. *Comp Mech* 39:153–190
16. Henke S, Qiu G (2010) Zum Absetzvorgang von Offshore-Hubplattformen. *Geotechnik* 33:284–292
17. Hirt C W, Nichols B D (1981) Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. *J Comp Phys* 39:201–225
18. Hirt C W, Amsden A A, Cook J L (1974) An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for all Flow Speeds. *J Comp Phys* 14:227–253
19. Hughes T J R, Winget J (1980) Finite Rotation Effects in Numerical Integration of Rate Constitutive Equations Arising in Large-Deformation Analysis. *Int J Numer Meth Eng* 15:1862–1867
20. Jiang M J, Yu H-S, Harris D (2006) Discrete Element Modelling of Deep Penetration in Granular Soils. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 30:335–361
21. Lewis R W, Schrefler B A (1998) *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Chichester
22. Li X S (2002) A Sand Model with State-Dependent Dilatancy. *Géotechnique* 52:173–186
23. Locat J, Lee H J (2002) Submarine Landslides: Advances and Challenges. *Can Geotech J* 39:193–212
24. Luttwak G, Rabie R L (1985) The Multi Material Arbitrary Lagrangian Eulerian Code MMA-LE and Its Application to Some Problems of Penetration and Impact. Report LA-UR-85-2311, Los Alamos National Laboratory
25. Mair H U (1999) Review: Hydrocodes for Structural Response to Underwater Explosions. *Shock Vib* 6:81–96
26. J. M. McGlaun and S. L. Thompson and M. G. Elrick (1990) CTH: A Three-Dimensional Shock Wave Physics Code. *Int J Impact Eng* 10:351–360
27. Niemunis A, Herle I (1997) Hypoplastic Model for Cohesionless Soils with Elastic Strain Range. *Mech Cohes Frict Mat* 2:279–299
28. Noh W F (1964) CEL: A Time-Dependent, Two-Space-Dimensional, Coupled Eulerian-Lagrange Code. In: *Methods in Computational Physics*, Academic Press, London
29. Obermayr M, Vrettos Ch (2014) Anwendung der Diskrete-Elemente-Methode zur Vorhersage von Kräften bei der Bodenbearbeitung. *Geotechnik* 36:231–242
30. Peery J S, Carroll D E (2000) Multi-Material ALE Methods in Unstructured Grids. *Comp Methods Appl Mech Eng* 187:591–619
31. Savidis S A, Aubram D, Rackwitz F (2008) Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for Geotechnical Construction Processes. *J Theor Appl Mech* 38:165–194
32. Savidis S A, Carow C, Aubram D (2014) Zur Modellierung der Verflüssigung von Sandböden. In: Kudla W (ed) *Beiträge 2. Kolloquium Bodenverflüssigung bei Kippen des Lausitzer Braunkohlebergbaus*, Freiberg

33. Seed H B, Lee K L et al (1975) The Slides in the San Fernando Dams During the Earthquake of February 9, 1971. *J Geotech Eng Div* 101:651–688
34. Sethian J A (1996) *Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Material Science*. Cambridge University Press, 1996
35. Sheng D, Nazem M, Carter J P (2009) Some Computational Aspects for Solving Deep Penetration Problems in Geomechanics. *Comput Mech* 44:549–561
36. Tho K K, Leung C F, Chow Y K, Swaddiwudhipong S (2012) Eulerian Finite-Element Technique for Analysis of Jack-Up Spudcan Penetration. *Int J Geomech* 12:64–73
37. von Wolffersdorff P-A (1996) A Hypoplastic Relation for Granular Materials with a Predefined Limit State Surface. *Mech Cohes Frict Mat* 1:251–271
38. Youngs D L (1982) Time-Dependent Multi-Material Flow with Large Fluid Distortion. In: Morton K W, Baines M J (eds) *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Academic Press, London
39. Zienkiewicz O C, Chan A H C et al (1999) *Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering*. John Wiley & Sons, Chichester