ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 36.3 (2018): 59-78
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional

Functional relationships and strategies of first graders in a functional context

Rodolfo Morales
María C. Cañadas
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, Granada, España
alefut7@hotmail.com
mconsu@ugr.es

Bárbara María Brizuela
Tufts University, Departamento de Educación, Medford, MA, EE. UU.
barbara.brizuela@tufts.edu

Pedro Gómez
Facultad de Educación, Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia
argeifontes@gmail.com

RESUMEN • *early algebra* es un enfoque funcional del álgebra escolar, en este trabajo indagamos sobre el pensamiento funcional de alumnos de primero de Educación Primaria (6 años) en el contexto español. Particularmente, nos centramos en las relaciones funcionales y las estrategias que emplean estos alumnos en la resolución de problemas que involucran funciones. Analizamos parte de la información recogida en un experimento de enseñanza con un grupo de treinta alumnos y entrevistas individuales a cuatro de estos alumnos. Encontramos que la relación funcional más frecuentemente identificada es la correspondencia. Algunos alumnos también identifican la relación de covariación. Además, se evidencia un vínculo entre ambas relaciones funcionales y las estrategias de operatoria y/o conteo.

PALABRAS CLAVE: *Early algebra*; Educación Primaria; Estrategias; Pensamiento algebraico; Pensamiento funcional.

ABSTRACT • From a functional approach to school algebra, in this work we go in depth in first graders' (6 years old) functional thinking within the Spanish context. Particularly, we focus on the functional relationships and the strategies that students use when solving problems, which involve linear functions. We analyse part of the data collected in a design experiment with a group of 30 students and individual interviews to four of those students. We find that the most frequent functional relationship was the correspondence one. Some students also identified the covariation relationship. Moreover, there is evidence of the connection between both functional relationships and the operational and counting strategies.

KEYWORDS: Early algebra; Elementary Education; Strategies; Algebraic thinking; Functional thinking.

Recepción: octubre 2017 • Aceptación: junio 2018 • Publicación: noviembre 2018

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78.

INTRODUCCIÓN

El enfoque funcional, como una de las aproximaciones del *early algebra*, ha cobrado especial relevancia a nivel internacional en la última década. Este enfoque busca promover contenidos clave del pensamiento algebraico como el concepto de función, las relaciones entre cantidades y la variación conjunta entre cantidades (Rico, 2006; Smith, 2008). Además, se relaciona con capacidades relativas a la identificación de patrones, representación, establecimiento de relaciones y procesos de generalización (Cañadas, Brizuela & Blanton, 2016).

Diferentes razones justifican el interés por el pensamiento funcional desde los primeros cursos de Educación Primaria. En primer lugar, ayuda a superar las dificultades existentes en la comprensión del concepto de función en Educación Secundaria (Doorman & Drijvers, 2011) y contribuye a la construcción de una base sólida de aprendizaje para un trabajo más sofisticado en el álgebra en niveles educativos superiores (Common Core State Standards Initiative, 2010). En segundo lugar, fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (Blanton, Levi, Crites & Dougherty, 2011). En tercer lugar, puede ser empleado como herramienta útil en la resolución de problemas (Warren & Cooper, 2005). En cuarto lugar, es una meta disciplinar en la enseñanza de las matemáticas (Rico, 2006).

Las bondades atribuidas al pensamiento funcional han hecho que diferentes países incluyan elementos de este tipo de pensamiento en sus documentos curriculares para Educación Primaria. Australia, Canadá, China, Chile, Corea, Estados Unidos, Japón y Portugal son algunos de ellos (Merino, Cañadas & Molina, 2013; Ministerio de Educación de Chile, 2012). Este trabajo es parte de una investigación más amplia desarrollada en España, donde esta inclusión es reciente. El currículo español recoge que, al finalizar la Educación Primaria, los alumnos deben ser capaces de «describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014: 19387).

En la actualidad, en las aulas y en los libros de texto, estas ideas quedan relegadas al trabajo con patrones y los contextos funcionales no han calado entre el profesorado de Educación Primaria. En el contexto español, el pensamiento funcional se puede considerar un tema pendiente desde la perspectiva docente y, desde el punto de vista investigador, es innovador y relevante (Cañadas & Molina, 2016*a*).

En este artículo, indagamos sobre *a*) las relaciones funcionales que alumnos de 6 años son capaces de identificar, cuando abordan un problema que puede hacer emerger el pensamiento funcional, *b*) las estrategias que ellos emplean y *c*) los vínculos entre esas relaciones funcionales y esas estrategias.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

Pensamiento funcional y relaciones funcionales en Educación Primaria

La función es el foco de contenido matemático del pensamiento funcional. Una función es una relación entre dos variables, de modo que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente (Larson & Hostetler, 2008). Dado que trabajamos con alumnos de 6 años y siguiendo los antecedentes (por ejemplo, Cañadas *et al.*, 2016), utilizamos la función lineal de dos variables cuyo dominio son los números naturales.

En las funciones lineales, se pueden establecer tres tipos de relaciones que involucran valores de las variables: *a*) recurrencia, *b*) correspondencia y *c*) covariación (Blanton, 2008; Smith, 2008). Con estas relaciones es posible describir la actuación de los individuos cuando abordan una situación que implica el pensamiento funcional. La recurrencia es la relación que se define con base en los valores de un mismo conjunto de valores (Johsonbaugh, 2005). Esta relación es la más elemental y describe una variación entre las cantidades de una secuencia de valores e implica obtener una cantidad en una secuencia a partir del número o números previos. Un ejemplo de este tipo de relación se aprecia en un problema en el que una niña (Carmen) tiene cinco años más que otro niño (Álvaro) (función $y = x + 5$). Al proponer al alumno completar una tabla de funciones donde debe encontrar la edad de Carmen, la completa observando hacia abajo los valores de la variable dependiente (edad de Carmen), en este caso sumando uno a la cantidad anterior, como se observa en la figura 1. Además, cuando se le pregunta cómo obtuvo la edad de Carmen, el alumno responde «sumando de uno en uno».

Edad de Álvaro	Edad de Carmen	
1	6	+ 1
2	7	+ 1
3	8	+ 1
4	9	

Fig. 1. Patrón recursivo.

La correspondencia es una regla que asocia a cada valor de la variable independiente un único valor de la variable dependiente (Clapham, 1998). Identificar la correspondencia implica hallar la regla que permite determinar un valor de la variable dependiente dado un valor de la variable independiente (Blanton *et al.*, 2011). Un ejemplo lo observamos en el mismo problema presentado anteriormente. Al preguntar por los años de Carmen cuando Álvaro tenga 30, un niño de 6 años dice: «Si tiene 30, Carmen tendría más […] 5 […] como tiene 30, tiene 35».

La covariación se centra en la variación de forma simultánea y coordinada de ambas variables (Blanton *et al.*, 2011). Identificar la covariación implica centrarse en cómo los cambios en valores de la variable independiente influyen en los cambios de los valores de la variable dependiente. Un ejemplo lo observamos si, en el mismo problema anterior, se pregunta por los años que tendrá Carmen cuando Álvaro tenga 29 años y un alumno de 6 años dice: «Serían 34 […] Porque… uno más que 28 entonces también uno más que 33». Este alumno responde de acuerdo con la variación de la variable independiente (anteriormente había resuelto el problema siendo 28 los años de Carmen y ahora pasamos a 29) y esa variación (un año) se la suma a la última cantidad de la variable dependiente (33), resultando 33 + 1 = 34.

Smith (2008) destaca la implicación que tiene el trabajo con las relaciones funcionales para avanzar en la construcción de ideas clave sobre la noción de función. Dado que la correspondencia y la covariación implican valores de ambas variables, consideramos que son las relaciones funcionales clave y nos centramos en ellas dos.

Diversos investigadores han indagado en las relaciones funcionales de covariación y correspondencia que identifican alumnos de Educación Primaria (por ejemplo, Stephens, Isler, Marum, Blanton, Knuth & Gardiner, 2012) para dar evidencia de pensamiento funcional en estos alumnos. Sin embargo, la investigación con alumnos de primero de Educación Primaria es escasa, por lo que se hace necesario profundizar en ella.

Stephens *et al.* (2012) mostraron que alumnos de tercero, cuarto y quinto de Primaria (8-10 años, respectivamente) fueron capaces de transitar desde la recurrencia y covariación hasta la correspondencia, a medida que avanzan las sesiones de un experimento de enseñanza. Tanışlı (2011) también encontró que alumnos de quinto de Primaria (9-10 años) transitaron de una relación de recurrencia a una relación de covariación y correspondencia. Pinto, Cañadas, Moreno & Castro (2016) establecieron que la relación funcional identificada con mayor frecuencia por alumnos de 9 años es la correspondencia. Warren & Cooper (2006) encontraron que alumnos de 9-10 años de edad identificaron la recurrencia y correspondencia en una tarea de pensamiento funcional y alcanzaron la generalización. En alumnos de primero de Educación Primaria (5-6 años), Morales, Cañadas, Brizuela & Gómez (2016) hallaron indicios de que alumnos de este curso educativo fueron capaces de establecer relaciones funcionales como la correspondencia y la covariación. Según la literatura consultada, no hemos encontrado estudios previos diferentes de estos últimos que aborden las relaciones funcionales con alumnos de primero de Educación Primaria. Abordamos esta cuestión en este estudio.

Estrategias que emplean alumnos de Primaria en tareas de relaciones funcionales

Rico (1997) considera las estrategias como las formas de actuación de los alumnos sobre tareas matemáticas. Las estrategias son secuencias de procedimientos que se realizan sobre conceptos y relaciones.

Diferentes autores (por ejemplo, Amit & Neria, 2008; Merino *et al.*, 2013) destacan la necesidad de indagar en las estrategias que emplean los alumnos en la resolución de problemas en el contexto funcional. Moss & Beatty (2006) concluyeron que una de las dificultades que manifestaron los alumnos para resolver problemas en el contexto funcional es dar con una estrategia adecuada, ratificando el interés de profundizar en estrategias en el contexto investigador.

Diversos trabajos abordan las estrategias en contextos funcionales con alumnos de Primaria. Blanton & Kaput (2004) encontraron que alumnos de primero de Educación Primaria (5-6 años) emplearon estrategias aditivas, como el conteo de tres en tres, y estrategias multiplicativas, como el doble y el triple, en una tarea que implica funciones lineales de los tipos $f(x) = 2x$ y $f(x) = 3x$. Cañadas & Fuentes (2015) plantearon varios problemas a alumnos de 6 años que implican funciones del tipo $f(x) = mx$. Los resultados evidenciaron estrategias de conteo sobre dibujos dados en el problema, respuestas directas (solo dan el resultado, sin ninguna aclaración adicional) y creación de grupos de un número determinado de elementos. Por ejemplo, para la función $f(x) = 5x$, hay alumnos que hicieron grupos de cinco para hallar el resultado. Las autoras suponen que esta estrategia es un avance de los alumnos porque evidencia su percepción de la multiplicación como suma repetida y ha surgido de forma espontánea.

Otros estudios han indagado en la relación entre las estrategias que emplean los alumnos y el tipo de número involucrado en la pregunta que se les plantea. Amit & Neria (2008) trabajaron con alumnos de 11-13 años en la resolución de problemas de generalización de funciones lineales y no lineales. Esos alumnos, cuando los números son pequeños, emplearon estrategias recursivas con las que extendieron la secuencia de cantidades por medio de la cantidad anterior. En cambio, cuando los números son grandes o las preguntas que se plantearon aludieron a la generalización, ellos emplearon estrategias funcionales que se basan en el reconocimiento de las variables y constantes, su conexión y la dependencia entre ellas. Además, los alumnos fueron capaces de generalizar de manera verbal y por medio del simbolismo algebraico. Merino *et al.* (2013) mostraron que alumnos de 9-10 años, en una tarea de generalización que involucraba la función $f(x) = 2x + 6$, emplearon estrategias de conteo sobre dibujos y respuestas directas cuando los números en las preguntas que se les plantearon son pequeños. En cambio, cuando los números son mayores, recurrieron a estrategias de operatoria y al uso de patrones (no siempre adecuados). Cañadas *et al.* (2016) evidenciaron que alumnos de segundo de primaria (6-7 años) establecieron una relación funcional en un problema que involucra la función $f(x) = 2x$. Los alumnos emplearon dos enfoques: uno basado en una estrategia recursiva (contar de dos en dos) y otro basado en estrategias funcionales (duplicación). Se destaca que, cuando los números son pequeños (1 al 20), los niños emplearon ambos enfoques. En cambio, cuando los números son grandes, emplearon el enfoque funcional. Los autores de los estudios mencionados destacan el interés de indagar en la relación entre las estrategias y el caso (particular o general) por el que se pregunta.

Objetivos de investigación

En el contexto de un problema que involucra una función lineal de estructura aditiva que fue resuelto por alumnos de primero de Primaria, en este estudio buscamos:

– describir los tipos de relaciones funcionales que identifican,
– describir las estrategias que emplean, y
– establecer vínculos entre esas relaciones funcionales y esas estrategias.

MÉTODO

Participantes

Trabajamos con los treinta alumnos de primero de Primaria (6 años) de un centro escolar de Granada (España). La selección del centro escolar fue intencional, de acuerdo con los objetivos de investigación y la disponibilidad del centro y de los docentes. Antes de la recolección de datos, los alumnos sabían nombrar y contar hasta cien de uno en uno, de dos en dos, de cinco en cinco y de diez en diez; y sumar y restar números de una y dos cifras (incluidas llevadas). Adicionalmente, ellos estaban familiarizados con el cálculo mental, las puestas en común y la justificación de respuestas. No tenían experiencia previa con situaciones que implicaran relaciones funcionales aditivas. En cambio, sí habían trabajado la función identidad en una sesión previa del experimento de enseñanza.

Experimento de enseñanza y entrevistas

Diseñamos e implementamos un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina & Castro, 2011). Tres investigadores entraron al aula: *a*) la profesora-investigadora que implementó las sesiones (segundo autor), *b*) la investigadora de apoyo a la primera para resolver dudas a los alumnos y *c*) el investigador encargado de las grabaciones en vídeo y del registro de notas (primer autor). El experimento de enseñanza estuvo conformado por cinco sesiones de noventa minutos cada una. Presentamos una descripción general de estas sesiones en la siguiente tabla.

Tabla 1.
Sesiones del experimento de enseñanza

Sesión	*Problema: contexto y función*	*Descripción de cada sesión*
1	Perros y collares $y = x$	Los alumnos respondieron de manera verbal y escrita (cuestionario) sobre temas de casos particulares y el caso general de un problema que relaciona número de collares y número de perros.
2 y 3	Perros y platos $y = x + 5$	Los alumnos respondieron de forma verbal y escrita (cuestionario) sobre temas de casos particulares, un problema que relaciona la cantidad de platos totales (5 platos de agua a compartir por todos y un plato de comida para cada uno) y número de perros. Trabajaron la organización de casos particulares en la representación tabular.
4 y 5	Edades de dos personas $y = x + 5$	Los alumnos respondieron verbalmente a cuestiones de casos particulares y completaron una tabla de funciones en un problema que relaciona el número de años de Carmen y el número de años de Álvaro, con Carmen cinco años mayor que Álvaro. También trabajaron el caso general.

Cada una de las sesiones constó de cuatro partes. En la primera parte, la profesora-investigadora introdujo la situación sobre la que los alumnos iban a trabajar. En la segunda parte, los alumnos respondieron y debatieron con la profesora-investigadora sobre diferentes ítems planteados por esta última sobre casos particulares (tabla 2) del problema. En la tercera parte, los alumnos trabajaron de forma individual por escrito en un cuestionario sobre algunos ítems relacionados con la parte anterior de la sesión y otros diferentes, que incluían la generalización de la relación. Los miembros del equipo de investigación resolvimos dudas sobre la realización del trabajo y ayudamos a los alumnos cuando ellos no supieron cómo escribir algo que estaban pensando. En la cuarta parte, organizamos una puesta en común sobre el trabajo realizado por los alumnos en los cuestionarios.

Como complemento al experimento de enseñanza, realizamos cuatro entrevistas a cuatro alumnos al finalizar las cinco sesiones del experimento. La intención de las entrevistas fue profundizar en la información relativa a los objetivos de investigación. Seleccionamos a los cuatro alumnos con la colaboración de la tutora del grupo. Tres de los alumnos fueron seleccionados por el modo en que podían verbalizar sus respuestas durante las sesiones y de modo que tuvieran diferentes rendimientos académicos (entendidos como resultados de la evaluación continua de la tutora) en matemáticas (alto-medio-bajo). Seleccionamos al cuarto alumno porque no respondió a algunos de los ítems planteados durante la puesta en común y nos interesaba complementar la información. Cada entrevista duró unos 25 minutos. Formulamos preguntas a cada alumno con base en sus respuestas en los cuestionarios. Les preguntamos sobre sus respuestas dadas a estos problemas trabajados durante las sesiones previas.

Recogida de datos: instrumentos y procedimiento

Nos centramos en las sesiones 2 y 3, en las que los alumnos abordaron por primera vez un problema que implica una función lineal aditiva $y = x + 5$. El problema se enmarcó en una situación de perritos y platos de comida y agua: dada una cantidad de perros, se debe encontrar una cantidad de platos necesarios para esos perros. El enunciado del problema fue el siguiente: *Una cuidadora de animales debe comprar platos de comida y agua para los perros, de modo que cada perro debe tener su plato de comida, y cinco platos con agua en un sitio donde los perros puedan beber*.

Tras presentar verbalmente el enunciado del problema al gran grupo, propusimos diversos tipos de ítems que siguen el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas & Castro (2007). Partimos de casos particulares pequeños y, pasando por otros grandes, pretendíamos llegar a la generalización. En la tabla 2, mostramos las características de los ítems y algunos ejemplos de preguntas planteadas para cada tipo de ítem, tanto en la puesta en común, como en cuestionarios y entrevistas. Cada ítem involucra diferentes tipos de preguntas. Por ejemplo, en los ítems sobre casos particulares, para que el cálculo no fuese una dificultad añadida, planteamos preguntas con números familiares para ellos y/o terminados en cinco, porque los alumnos estaban habituados a contar de cinco en cinco.

Tabla 2.
Tipo de ítems y ejemplos

Tipos de ítems	*Ejemplos de preguntas*
Casos particulares	Si hay cinco perros, ¿cuántos platos necesitamos en total?
	Si hay ocho perros, ¿cuántos platos necesitamos en total?
	Si hay quince perros, ¿cuántos platos necesitamos en total?
	Si hay cien perros, ¿cuántos platos necesitamos en total?
Recordatorio	¿Quién me puede decir qué se trabajó en la sesión anterior?
Generalización*	¿Cómo encuentras la cantidad de platos totales para una cierta cantidad de perros?

Para una mejor comprensión del problema por parte de los alumnos, utilizamos material manipulativo que pegamos en una ventana de la clase (figura 2). Los cinco platos de la parte superior representan los platos de agua (constante de la función) y los platos que están junto a los perros son los platos de comida.

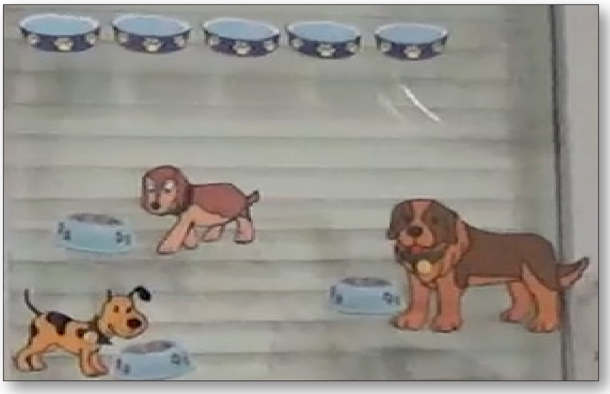

Fig. 2. Material utilizado en las sesiones 2 y 3.

Los datos escritos de los cuestionarios contribuyeron a la puesta en común posterior. Los investigadores presentes en el aula revisaron las respuestas escritas mientras los alumnos trabajaban, justo antes de la puesta en común. Esto permitió tener información del trabajo individual de los alumnos y, con base en esta información, guiar la puesta en común.

Para las dos partes de la sesión que se desarrollaron en gran grupo (puesta en común) teníamos dos cámaras en el aula. Una cámara se centró en grabar la generalidad del aula y la otra se focalizaba en algunos alumnos particulares, en caso de que hubiera solapamientos con otros al hablar. Los alumnos estaban acostumbrados a intervenir en debates, por lo que no fueron frecuentes los solapamientos. En los casos en los que un compañero repetía la respuesta de otro, les pedíamos explicaciones, para detectar si la respuesta se basaba en su propio razonamiento.

En las entrevistas nos centramos en la parte en que preguntamos a los alumnos por el problema que estamos considerando (sesiones 2 y 3) de la puesta en común. Las entrevistas, al igual que las sesiones del experimento de enseñanza, las grabamos en videocámaras.

Análisis de datos

En primer lugar, transcribimos las sesiones y las entrevistas. En segundo lugar, consideramos como unidad de análisis las respuestas verbales de los alumnos a los distintos ítems planteados (véanse algunos ejemplos en la tabla 1). En tercer lugar, categorizamos el tipo de relación funcional (covariación o correspondencia) y la estrategia empleada por los alumnos en las respuestas a los diferentes ítems planteados, tanto en la puesta en común como en la entrevista. Además, comparamos las respuestas a los diferentes ítems planteados en la puesta en común y en la entrevista de los cuatro alumnos entrevistados de manera individual. Adicionalmente, comparamos las respuestas de estos alumnos en ambos instrumentos de recogida de información. Finalmente, vinculamos las relaciones funcionales identificadas y las estrategias empleadas por los alumnos. Consideramos que un alumno puede identificar una relación funcional empleando una o varias estrategias.

En la tabla 3 mostramos las categorías y subcategorías empleadas para el análisis de datos.

Tabla 3.
Categorías de análisis de datos

Categoría	*Subcategoría*	*Descripción*
Relación funcional		
Sin evidencia de relación funcional		No identifica relación funcional.
Correspondencia		Agrega la cantidad constante de la función a la cantidad de la variable independiente.
Covariación		Agrega la cantidad de variación de la variable independiente a la cantidad de la variable dependiente.
Estrategias		
Respuesta directa (E.1)		Presenta el resultado, sin dar explicación alguna.
Conteo (E.2)	Conteo total (E.2.1)	Cuenta todos los objetos.
	Contar desde el mayor sumando (E.2.2)	Cuenta a partir del sumando mayor.
Operatoria (E.3)	Hechos numéricos recordados (E.3.1)	Realiza sumas cuyos resultados conocen.
	Descomposición de números (E.3.2)	Descompone uno de los números (sumandos) para realizar la suma.
	Modificación de los datos iniciales y compensación (E.3.3)	Modifica algunos números al tener en cuenta esa modificación para compensar finalmente.
Generaliza (E.4)		Expresa la regla general.

Consideramos que hay evidencia de relación funcional cuando se observan en las respuestas de los alumnos las relaciones de correspondencia o covariación descritas en el marco conceptual. Incluimos la categoría «no evidencia relación funcional» para aquellas respuestas de alumnos en las que es posible evidenciar un empleo de estrategia sin identificación de relación funcional. Las categorías estrategias de conteo, operatoria y generaliza surgen de investigaciones previas como las de Blanton & Kaput (2004), Cañadas *et al.* (2016) y Merino *et al.* (2013). Las subcategorías de estas últimas categorías surgieron del análisis de los datos de las sesiones 2 y 3, y para denominarlas asumimos terminología de Cañadas & Molina (2016*b*). Por tanto, estas subcategorías son específicas al problema planteado en las sesiones en las que se centra este artículo.

RESULTADOS

En este apartado presentamos resultados de la puesta en común y entrevistas. Primero mostramos resultados de la puesta en común, distinguiendo las respuestas que evidencian una relación funcional (correspondencia y/o covariación) de las que no. También identificamos las estrategias. A continuación, comparamos las respuestas de la puesta en común con las de las entrevistas de cada uno de los cuatro alumnos entrevistados de acuerdo con las relaciones funcionales identificadas y estrategias empleadas y las respuestas dadas en ambos momentos entre sí. Finalmente, establecemos el vínculo entre la relación funcional y la estrategia.

Resultados de la puesta en común

En la tabla 4, recogemos los alumnos que evidencian o no relaciones funcionales y las estrategias empleadas en la puesta en común. Cada alumno fue designado con la letra S y un número entre el 1 y el 30 para distinguir a cada uno de ellos de manera confidencial. En los fragmentos de sesión denotamos con «I» a los investigadores participantes en la recogida de datos, usando de 1 a 3 para cada uno de ellos.

Tabla 4.
Relaciones funcionales identificadas y estrategias empleadas por los alumnos

	Estrategias						
Relación funcional	E.1	E.2		E.3			E.4
		E.2.1	E.2.2	E.3.1	E.3.2	E.3.3	
Sin evidencia relación funcional	S23- S15	S4-S6	S1	S12-S27			
Correspondencia			S28	S5-S9-S12-S13- S14-S15-S16-S17-S18-S20-S24-S26-S28-S29-S30	S5	S9	S19
Covariación			S25				
Correspondencia y covariación				S7-S19-S21			

Nota: E.1 = Respuesta directa; E.2 = Conteo; E.2.1 = Conteo total; E.2.2 = Contar desde el mayor sumando; E.3 = Operatoria; E.3.1 = Hechos numéricos recordados; E.3.2 = Descomposición de números; E.3.3 = Modificación de los datos iniciales y compensando; E.4 = Generaliza.

Hubo alumnos que, en sus respuestas, no mostraron evidencia de ninguna relación funcional, otros que identificaron una relación de correspondencia, otro que hizo lo propio con una relación de covariación y otros que identificaron tanto relación de correspondencia como de covariación. A continuación, describimos a los alumnos en cuyas respuestas no se evidenció una relación funcional, solamente el empleo de alguna estrategia.

Alumnos que no evidencian relación funcional

En la tabla 4 observamos que, durante la puesta en común, siete alumnos emplearon estrategias sin identificación de relación funcional. Las estrategias empleadas por estos alumnos fueron la respuesta directa (E.1), el conteo total (E.2.1), el conteo desde el mayor sumando (E.2.2) y la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1).

Dos de los siete alumnos anteriores emplearon la estrategia respuesta directa (E.1). Estos alumnos respondieron al ítem planteado refiriéndose a un número concreto, sin dar explicación de dónde surgió dicho número. En consecuencia no fue posible establecer si, por medio de esta estrategia, los alumnos identificaban una relación funcional. Un ejemplo de estrategia respuesta directa (E.1) es la respuesta de S15, que responde «Diez» cuando se le pregunta por la cantidad de platos totales para cinco perros.

Otros dos alumnos emplearon la estrategia conteo total (E.2.1). Estos alumnos respondieron contando de uno en uno los objetos (material concreto: platos de agua y comida) propuestos por la maestra-investigadora. Un alumno empleó la estrategia E.2.2. Inicialmente este alumno consideró una cantidad mayor y, a partir de esa cantidad, contó otra cantidad de uno en uno, llegando así a una respuesta adecuada al ítem. Por último, observamos que dos alumnos emplearon la estrategia E.3.1. Estos alumnos respondieron de forma inmediata al ítem planteado sumando las cantidades de la variable independiente y la cantidad fija, pero sin dar evidencia de una relación funcional, tal como mostramos en el siguiente fragmento, que corresponde a la respuesta del alumno S27 durante la puesta en común:

1. I1: S27 […] quédate solo con uno… ¿con un perro cuántos platos necesitamos?
2. S27: Uno.
3. I1: ¿Uno de…?
4. S27: Uno de comida.
5. I1: ¿Y los de agua? ¿Cuántos tenemos de agua?
6. S27: Cinco.
7. I1: Entonces, en total, ¿cuántos platos son?
8. S27: Seis.

Inicialmente, S27 no da la respuesta a los platos necesarios para un perro, solo establece la relación un perro-un plato de comida. A continuación, con la orientación de la profesora-investigadora considera los cinco platos de agua, y suma ambas cantidades, obteniendo seis.

Alumnos que identifican la relación de correspondencia

En la tabla 4 observamos que la relación de correspondencia fue la más identificada por los alumnos. Hubo 19 alumnos que la evidenciaron durante la puesta en común. Estos alumnos identificaron la cantidad constante de la función (cinco platos de agua) y la sumaron a la cantidad de la variable independiente (cantidad de platos de comida), que también identificaron, y llegaron de esta manera a la cantidad de la variable dependiente (cantidad de platos totales).

Los 19 alumnos que identificaron la correspondencia emplearon diferentes estrategias. Un alumno empleó la estrategia contar desde el mayor sumando (E.2.2), 15 alumnos emplearon la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1), un alumno utilizó la descomposición de números (E.3.2), otro alumno empleó la estrategia modificación de los datos iniciales y compensando (E.3.3), y solo un alumno generalizó la relación funcional de correspondencia (E.4).

A continuación, mostramos la respuesta de S19, donde se aprecia la identificación de la relación de correspondencia con el empleo de la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1). Esta fue la estrategia más empleada por los alumnos.

9. I1: […] si tenemos un perro ¿cuántos platos necesitamos? Tenéis que pensarlo. […]
10. S19: Seis.
11. I1: Seis, ¿por qué?
12. S19: Porque cinco de agua y uno de comida.

En la respuesta de S19 observamos el empleo de la estrategia E.3.1, dado que conoce la suma de 1 más 5 y menciona el resultado inmediatamente. En otra de las respuestas de este alumno evidenciamos la estrategia generaliza vinculada a la relación de correspondencia, siendo la única en que se evidenció esta estrategia durante la puesta en común. En el siguiente fragmento mostramos la generalización verbal de S19.

13. I1: Bien. ¿Os acordáis de la actividad del otro día? ¿Alguien me lo puede recordar por favor? […]
14. S19: […] tenemos quince platos de comida, pero los de comida uno para cada uno, de agua son siempre cinco, hay que irle sumando cinco.

A continuación mostramos la respuesta de S5, que es el único alumno cuya actuación evidencia la relación funcional de correspondencia y la estrategia de descomposición de número (E.3.2).

15. I1: […] Hay ocho perros y ¿platos?... ¿Cuántos necesitamos para ocho perros?
16. S5: Que si hay cinco platos de agua y ocho platos de comida, a los ocho le quito cinco y esos cinco se los sumo a los platos de agua y quedan diez y tres más diez son trece.

En la respuesta de S5 observamos que este alumno, para hallar la cantidad total de platos, sumó cinco a la cantidad de perros (ocho). Por lo tanto, encontró el valor variable de la variable dependiente sumando cinco a la variable independiente. Además observamos que la estrategia de operatoria empleada consistió en la descomposición de número (E.3.2). Inicialmente S5 descompuso el sumando ocho (platos de comida) en dos valores: cinco y tres. Posteriormente consideró el cinco de la descomposición del ocho, para sumarlo con los cinco platos de agua, con lo que obtuvo diez. Finalmente, a los diez le suma tres (cantidad restante de la disposición del ocho), lo que le da 13 como respuesta final.

Alumnos que identifican la relación de covariación

En la tabla 4 observamos que S25 fue el único alumno que identificó la relación de covariación (y no la correspondencia). Este alumno respondió 13 cuando se le preguntó por la cantidad total de platos para ocho perros. En la figura 3, mostramos un esquema de la respuesta de este alumno, en la que organizamos las variables involucradas en la tarea en una representación tabular.

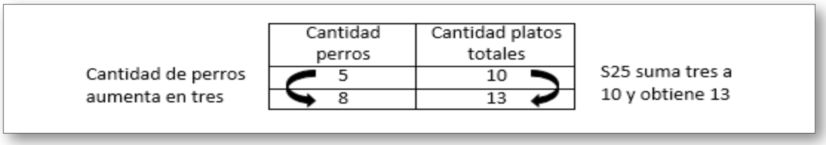

Fig. 3. Representación de la respuesta de S25.

En la figura 3 observamos que cuando la cantidad de perros aumentó en tres (de cinco a ocho), S25 determinó esa cantidad de variación que a continuación sumó a la cantidad anterior de la variable dependiente (10 platos totales), con lo que obtuvo 13 como cantidad total de platos para ocho perros. S25 determinó la variación de los valores de la variable independiente para establecer uno de los valores de la variable dependiente. Además, empleó la estrategia contar desde el mayor sumando (E.2.2), dado que contó tres de uno en uno a partir de diez para obtener 13 como respuesta.

Alumnos que identifican las relaciones de correspondencia y covariación

En la tabla 4 observamos que tres alumnos identificaron los dos tipos de relaciones funcionales. Estos alumnos emplearon la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1) a la vez que identificaron las dos relaciones en dos preguntas diferentes del ítem casos particulares. A continuación mostramos el caso de S7, quien identificó una relación de correspondencia empleando la estrategia E.3.1. Destacamos este ejemplo porque involucra un número elevado (mil millones). S7 entiende que a los mil millones de platos de comida se le debe sumar cinco, que son los platos de agua, por tanto de esta manera identifica una correspondencia. Empleó la estrategia E.3.1 porque señala inmediatamente la cantidad total de la suma: mil millones más cinco.

17. I1: […] S7 nos quiere contar algo, ¿tú cómo los has hecho S7?
18. S7: Yo sumando […] hasta llegar a los mil millones.
19. I1: ¿Y eso que son?
20. S7: Platos de comida y le pongo cinco pues, mil millones cinco.
21. I1: Ah, ¿al final le sumas cinco porque son los de agua?

(S7 asiente)

Estudio de casos

En la tabla 5 recogemos el resumen de resultados de los cuatro alumnos que entrevistamos, con base en su trabajo en la puesta en común y en la entrevista.

Tabla 5.
Respuestas de los alumnos en la puesta en común y entrevistas

	Estrategias			
	E.2	E.3		E.4
Contexto	E.2.2	E.3.1	E.3.2	
	Sin evidencia relación funcional			
Puesta en común				
Entrevista		S22		
	Correspondencia			
Puesta en común		S18-S19-S29		S19
Entrevista	S18-S22	S18-S19-S22-S29	S29	S18-S19-S29

Nota: E.2 = Conteo; E.2.2 = Contar desde el mayor sumando; E.3 = Operatoria; E.3.1 = Hechos numéricos recordados; E.3.2 = Descomposición de números; E.4 = Generaliza.

En general, en la tabla 5 observamos que tanto en la puesta en común como en las entrevistas los alumnos identificaron la relación de correspondencia. Tres alumnos (S18, S19 y S29), en la puesta en común y en las entrevistas, identificaron la relación de correspondencia empleando la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1). Esto hace que los consideremos consistentes en sus respuestas. Además, S19 generalizó la relación funcional de correspondencia tanto en la puesta en común como en la entrevista.

En la tabla 5 observamos que fueron más los alumnos que evidenciaron una relación funcional de correspondencia durante la entrevista que en la puesta en común (cuatro y tres alumnos, respectivamente). Así mismo, observamos que durante la entrevista hubo alumnos que identificaron la relación de correspondencia empleando estrategias variadas y diferentes a las empleadas en la puesta en común (E.3.1): S18 en la entrevista empleó las estrategias contar desde el mayor sumando (E.2.2) y generaliza (E.4); S29 empleó las estrategias descomposición de números (E.3.2) y generaliza (E.4). Un caso extraordinario fue S22, quien durante la puesta en común no respondió, pero sí lo hizo en la entrevista, donde identificó la relación de correspondencia empleando dos estrategias diferentes: E.2.2 y E.3.1.

En lo relativo a la generalización, hubo más alumnos que generalizaron la relación de correspondencia en la entrevista que en la puesta en común. En la puesta en común S19 generalizó la relación de correspondencia, mientras que en las entrevistas S18, S29 y el propio S19 generalizaron esta relación funcional.

En particular, en la puesta en común, S18 identificó la correspondencia empleando la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1). Posteriormente, en la entrevista, este alumno también identificó la relación de correspondencia pero empleó diferentes estrategias: contar desde el mayor sumando (E.2.2), hechos numéricos recordados (E.3.1) y generaliza (E.4). S18 generalizó la relación de correspondencia.

El alumno S19 identificó la relación de correspondencia en la puesta en común empleando la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1) y generaliza (E.4). En la entrevista este alumno también identificó la relación de correspondencia y usó las mismas estrategias. Este es el único alumno que generalizó la relación de correspondencia, tanto en la puesta en común como en la entrevista.

El alumno S22 no respondió a ningún ítem en la puesta en común. Inicialmente en la entrevista no identificó una relación funcional, solo aplicó la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1). Sin embargo, a medida que avanzó la entrevista, S22 identificó la correspondencia empleando la estrategia E.3.1. Además, evidenció esta misma relación funcional utilizando una estrategia diferente: contar desde el mayor sumando (E.2.2). Finalmente, cuando se le propuso generalizar la relación funcional, no lo logró.

El alumno S29, en la puesta en común, identificó una relación de correspondencia empleando la estrategia hechos numéricos recordados (E.3.1). Posteriormente, en la entrevista percibimos que identificó la misma relación funcional empleando las estrategias hechos numéricos recordados (E.3.1), descomposición de números (E.3.2) y generaliza (E.4). Destacamos que este alumno generalizó la relación de correspondencia identificada. En el siguiente fragmento evidenciamos la identificación de la relación de correspondencia, la estrategia E.3.1 y la generalización.

22. I1: Si tenemos veinte perros ¿cuántos platos necesitamos?
23. S29: Veinticinco platos.
24. I1: ¿Si tenemos treinta perros?
25. S29: Treinta y cinco platos.
26. I1: ¡Que rápido lo estás haciendo! […] ¿Qué has hecho siempre?
27. S29: Si tienes treinta […] siempre debe haber cinco platos, treinta, treinta y cinco, veinte, veinticinco.
28. I1: ¿Si tienes cincuenta?
29. S29: Cincuenta y cinco.

Adicionalmente a lo mostrado en el fragmento anterior, cuando preguntamos a S29 por el caso general, respondió «Siempre debe haber cinco platos más», lo que evidencia la generalización de la relación de correspondencia.

Vínculos entre relación funcional y estrategias

A partir de las tablas 4 y 5, presentamos la tabla 6, que vincula las relaciones funcionales y las estrategias empleadas por los alumnos. Incluimos en la tabla 6 aquellas estrategias que emplearon los alumnos cuando identificaron ambas relaciones funcionales por separado en ítems diferentes. En ningún caso hubo alumnos que identificaran ambas relaciones en un mismo ítem.

Tabla 6.
Vínculos entre relación funcional y estrategias empleadas

	Estrategias						
Relación funcional identificada	E.1	E.2		E.3			E.4
		E.2.1	E.2.2	E.3.1	E.3.2	E.3.3	
Correspondencia			X	X	X	X	X
Covariación			X	X			

Nota: E.1 = Respuesta directa; E.2 = Conteo; E.2.1 = Conteo total; E.2.2 = Contar desde el mayor sumando; E.3 = Operatoria; E.3.1 = Hechos numéricos recordados; E.3.2 = Descomposición de números; E.3.3 = Modificación de los datos iniciales y compensando E.4 = Generaliza.

En la tabla 6, observamos que la relación funcional de correspondencia estuvo vinculada a diferentes estrategias, tales como contar desde el mayor sumando (E.2.2), hechos numéricos recordados (E.3.1), descomposición de números (E.3.2), modificación de los datos iniciales y compensando (E.3.3) y generaliza (E.4). Sin embargo, de todas estas estrategias empleadas por los alumnos, observamos que hubo un vínculo considerable entre la relación de correspondencia y la estrategia de operatoria hechos numéricos recordados (E.3.1), dado que fueron más los alumnos que identificaron esta relación funcional empleando este tipo de estrategia (tablas 4 y 5). Cuando los alumnos emplearon la estrategia (E.3.1), observamos que fueron capaces de sumar inmediatamente la cantidad constante de la función y la cantidad correspondiente a la variable independiente para hallar la cantidad de la variable dependiente solicitada. A su vez, la estrategia generaliza (E.4) solo se vinculó con la relación de correspondencia, dado que los alumnos que generalizaron lo hicieron con esta relación funcional (tablas 4 y 5). Por lo tanto, a los alumnos que emplearon la estrategia (E.4) les resultó más accesible generar la regla general de la relación correspondencia.

Por su parte, la relación de covariación estuvo vinculada a dos estrategias: contar desde el mayor sumando (E.2.2) y hechos numéricos recordados (E.3.1). Sin embargo, encontramos un cierto vínculo de esta relación funcional con la estrategia (E.3.1), dado que, de los alumnos que identificaron esta relación funcional, fueron más los que emplearon este tipo de estrategias (tabla 4). Los alumnos que emplearon la estrategia E.3.1 calcularon la variación entre las cantidades de la variable independiente que luego sumaron a la última cantidad de la variable dependiente y así dar respuesta a la pregunta planteada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Evidencia de relaciones funcionales en alumnos de primero de Primaria

Los resultados presentados en este trabajo confirman que, desde muy tempranas edades, hay alumnos que son capaces de involucrarse con tareas que promueven el pensamiento funcional. Esto complementa resultados obtenidos en otros estudios en pensamiento funcional con alumnos de primero de Primaria (por ejemplo, Blanton & Kaput, 2004; Cañadas *et. al.*, 2016; Cañadas & Fuentes, 2015; Morales *et al.*, 2016), particularmente en el contexto español, en el que la investigación en pensamiento funcional se encuentra en un estado incipiente (Cañadas & Molina, 2016*a*).

Los alumnos que manifestaron pensamiento funcional lograron dar respuesta a las preguntas planteadas por medio de la relación de correspondencia, que fue la más empleada, y en ocasiones mediante la relación de covariación. Destacamos el hecho de que tres alumnos identificaron las relaciones de correspondencia y covariación, lo cual indica que la covariación es abordable para algunos estudiantes. El resultado anterior es similar a los que presentan Morales *et al.* (2016), en los que los autores analizan los resultados de las sesiones 4 y 5 de esta investigación (tabla 1), donde los mismos alumnos trabajaron un problema en otro contexto pero con la misma relación funcional involucrada. Destacamos que no hubo estudiantes que utilizaran la recurrencia, como sí hacen alumnos de cursos diferentes en otros estudios (por ejemplo, Stephens *et al.*, 2012; Tanışlı, 2011). La manera en que se propuso el problema en este estudio podría incidir en que los alumnos se centraran en la identificación de la relación de correspondencia y covariación en lugar de la recurrencia. En este sentido, tratamos de evitar los casos consecutivos una vez comprendieron el contexto del problema y no solo se los presentamos de forma creciente.

Aunque no es el foco de este artículo, también identificamos respuestas inadecuadas en los alumnos en el comienzo del trabajo con casos particulares. Una de ellas fue no considerar la cantidad constante involucrada en la función, teniendo en cuenta que había tantos platos como perros ($y = x$). Esta respuesta se dio en el trabajo con casos particulares y pudo deberse a que en la sesión previa habían trabajado con la función identidad. Otra respuesta inadecuada fue considerar la constante de la función como cantidad variable. Hubo alumnos que interpretaron que a más cantidad de perros, más platos de comida y más platos de agua. Por ejemplo, S19 respondió que para cien perros necesitaba «Cien de comida y cien de agua», y asociaron el problema trabajado en este estudio con dicha relación funcional. Consideramos que el análisis de las respuestas inadecuadas de los alumnos puede dar información relevante que contribuya a la investigación sobre pensamiento funcional, principalmente para profundizar en el conocimiento de los alumnos.

Estrategias empleadas por los alumnos

Con respecto a las estrategias, observamos que por lo general los alumnos emplearon estrategias de operatoria y no tanto de conteo, independientemente del tamaño de los casos particulares involucrados en las preguntas planteadas. Una explicación a lo anterior puede ser que los alumnos ya tenían conocimientos previos para operar con cantidades en las que el número de los sumandos es de más de una cifra. Es destacable que cuando los números de las preguntas planteadas eran elevados y terminados en cero (por ejemplo, 100 perros), los alumnos respondieron adecuadamente a la suma: cantidad de perros (variable independiente) más cinco (constante de la función), a pesar de que ellos no estaban familiarizados con este tipo de números. Por tanto, los números elevados de las preguntas no fueron un impedimento para que los alumnos pudieran operar con ellos. Este hecho se puede deber a que los ítems se plantearon de manera verbal y supieron cómo nombrar los números resultados de las operaciones que realizaban. Por ejemplo, cuando tenían que sumar un número elevado terminado en cero, recurrían a la yuxtaposición de palabras, tal como se manifestó en el ejemplo del alumno S17 (líneas 17 a la 21).

Uno de los alumnos (S19) generalizó (E.4) en una pregunta en la que no se le preguntaba explícitamente por el caso general. Es un caso extraordinario que además coincide con que este alumno es de los considerados de rendimiento alto. La actuación de los alumnos con capacidades superiores a la media es un aspecto sobre el que habría que profundizar, pero ya hay autores que apuntan a que la generalización en este tipo de problemas puede ser un indicador que contribuya a identificar a alumnos con talento matemático (Ramírez & Cañadas, 2018).

Comparación entre el trabajo de los cuatro alumnos en puesta en común y entrevista

Destacamos que tres de los cuatro alumnos lograron mantener en la entrevista la relación de correspondencia identificada en la puesta en común junto con la estrategia empleada (hechos numéricos recordados). Además, estos mismos tres alumnos, durante la entrevista, identificaron esta misma relación funcional empleando más de una estrategia. Lo anterior muestra que un alumno puede identificar una relación de correspondencia empleando más de una estrategia.

En la puesta en común, un alumno (S19) identificó la correspondencia y generalizó esta relación, mientras que en la entrevista tres de los cuatro alumnos, incluido el alumno S19, generalizaron verbalmente la relación de correspondencia. Estos alumnos describieron de modo general la regla que permite encontrar la cantidad de platos totales, dada una cantidad de perros, tal como mostramos en el siguiente fragmento de entrevista de S19.

30. I1: […] ¿Cómo lo haces, S19? Cuando yo te digo el número de perros, ¿cómo calculas el número de platos siempre?
31. S19: Como hay un número siempre hay que sumarle a ese número, que es el número de platos, otros cinco.

El hecho de que tres de cuatro alumnos generalizaran en la entrevista se puede deber al planteamiento de una mayor cantidad de ítems a cada alumno, los cuales estaban orientados a que los alumnos generalizaran, dado que los números de los ítems involucrados iban de menor a mayor en la mayoría de los ítems. Otra explicación puede ser que como los alumnos ya habían trabajado durante cinco sesiones con problemas relativos al pensamiento funcional, fueron generando un aprendizaje sobre los tipos de relaciones funcionales, por lo que se les hizo más fácil llegar a la generalización. Adicionalmente, pudieron interferir las intervenciones de la entrevistadora en las entrevistas o del profesor-investigador en el caso de las sesiones del experimento de enseñanza. Destacamos al alumno S22, quien, considerado de rendimiento bajo, identificó una relación funcional durante la entrevista. Las conjeturas anteriores deberían ser exploradas en mayor profundidad en investigaciones futuras. Conocer las respuestas inadecuadas de los estudiantes, así como la intervención posterior del docente, profesor-investigador o entrevistador, y cómo esta puede dar lugar a diferentes respuestas por parte de los estudiantes es una línea de investigación abierta que permitiría enriquecer la investigación sobre pensamiento funcional en los primeros cursos.

Vínculos entre relación funcional y estrategias

Cuando identificaron una relación de correspondencia, los alumnos hicieron uso de diferentes estrategias. Estas estrategias incluyeron conteo, operatoria y generalización. Por lo tanto, la relación de correspondencia se vinculó con las estrategias anteriormente mencionadas. Con respecto a las estrategias de conteo y operatoria empleadas por los alumnos, estos las efectuaron de la siguiente manera: identificaron inicialmente la cantidad constante de la función (platos de agua), que luego sumaron (operando o contando) a la cantidad de la variable independiente hasta llegar a la cantidad de la variable dependiente. Un aspecto destacable en el contexto de este estudio es que la relación de correspondencia es más accesible a ser generalizada por los alumnos que la relación de covariación.

Los alumnos que identificaron la relación de covariación generalmente emplearon estrategias de conteo: contar desde el mayor sumando (E.2.2), y la estrategia de operatoria: hechos numéricos recordados (E.3.1). Por lo tanto, este tipo de relación funcional se vincula a estos dos tipos de estrategias. Los alumnos que emplearon las estrategias E.2.2 y E.3.1 calcularon inicialmente la variación entre las cantidades de la variable independiente y luego sumaron (operando o contando) esta variación a la última cantidad de la variable dependiente.

Somos conscientes de que hay que ser muy cautelosos al hablar de vínculos por el tipo de investigación desarrollada, en cuyos intereses no está generalizar los resultados, pero sí dejamos constancia del interés por indagar en esta relación entre relación funcional y estrategias.

Implicaciones para la enseñanza de las relaciones funcionales en primero de Primaria

De acuerdo con los resultados obtenidos en este artículo y considerando las exigencias curriculares que hoy en día buscan promover el álgebra a partir de los primeros niveles educativos, la tarea aquí propuesta podría ser útil para la práctica docente como forma de promover el pensamiento algebraico en alumnos de 6 años de edad. Se podrían considerar el problema, los ítems y la forma en que estos se propusieron, dado que los alumnos identificaron relaciones funcionales poniendo en evidencia pensamiento funcional. Esta propuesta también es apoyada por autores como Warren & Cooper (2005), quienes proponen problemas en que los alumnos se centren en cómo una cantidad varía en relación con la otra, en lugar de aquellos problemas que promueven la recurrencia que limitan la identificación de relaciones funcionales y su generalización.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España y fondos FEDER; y gracias a una beca CONICYT PFCHA 72150072 otorgada por el Gobierno de Chile.

REFERENCIAS

Amit, M., & Neria, D. (2008). «Rising to the challenge»: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, *40*(1), 111-129. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH, Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking, en M. Johnsen y A. Berit (eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Cañadas, M., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87-103. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004.

Cañadas, M. & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M., & Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio, en C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (211-220). Alicante, SEIEM.

Cañadas, M. C., & Molina, M. (2016*a*). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades, en E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, Comares.

Cañadas, M. C., & Molina, M. (2016*b*). Pensamiento numérico, en E. Castro y E. Castro (coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (173-194). Madrid, Pirámide.

Clapham, C. (1998). *Diccionario de matemáticas*. Madrid, Complutense.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for mathematics.* Washingon, DC, National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/Math/.

Doorman, M., & Drijvers, P. (2011). Algebra in function. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (119-135). Rotterdam, Sense Publishers.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas* (6.ª ed.). México DF, Pearson Educación.

Larson, R., & Hostetler, R. (2008). *Precálculo* (7.ª ed.). México DF, Reverté Ediciones.

Merino, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (vol. 52, pp. 19349-19420). Madrid, Autor.

Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Santiago de Chile, Autor.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Morales, R. Cañadas, M. C., Brizuela, B., & Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales, en C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, J. A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (365-375). Málaga, SEIEM.

Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*, 441-465. https://doi.org/10.1007/s11412-006-9003-z.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A., & Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan, en C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, Juan A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (417-426). Málaga, SEIEM.

Ramírez, R., & Cañadas, M. C. (2018). Nominación y atención del talento matemático por parte del docente. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *79*, 23-30.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria, en L. Rico (coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (15-38). Barcelona, Horsori.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum, en J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (eds), *Algebra in the early grades* (133-160). Nueva York, NY, Routledge.

Stephens, A., Isler, I., Marum, T., Blanton, M., Knuth, E., & Gardiner, A. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking, en L. R. Van Zoest, J. J. Lo y J. L. Kratky (eds.), *34th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Kalamazoo, MI*.

Tanişli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(3), 206-223. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150-162.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9-14.

Functional relationships and strategies of first graders in a functional context

Rodolfo Morales
María C. Cañadas
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, Granada, España
alefut7@hotmail.com
mconsu@ugr.es

Bárbara María Brizuela
Tufts University, Departamento de Educación, Medford, MA, EE. UU.
barbara.brizuela@tufts.edu

Pedro Gómez
Facultad de Educación, Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia
argeifontes@gmail.com

Functional thinking is part of algebraic thinking and it is considered to be important in early graders because it allows them to introduce algebraic notions through elements such as linear functions, relationships between variables (functional relationships), regularities, strategies, structures, and generalization and its representation.

In this paper, we focus on functional relationships (correspondence and covariation) and on the strategies for problem solving as a way for describing students' work when solving generalization problems in a functional context. Particularly, we pursue three research objectives with first graders (5-6 years old): *a*) to describe the kind of functional relationships they identify, *b*) to describe the strategies they use, and *c*) to establish links between those functional relationships and those strategies.

We worked with an intentional selected group of 30 first graders (5-6 years old) from a school of Granada, in Spain. We designed and implemented a teaching experiment constituted by five sessions. In this paper, we focus on second and third sessions, where students worked with a generalization problem involving the function f(x)=x+5 for their first time. The statement of the problem was: «An animal carer has to buy food and water plates for the dogs, in a way that each dog has its own food plate, and five water plates to share with all the dogs». Students answered verbally in a whole group discussion and responded to a written questionnaire with items about specific instances and generalization.

When we finished the five sessions, we implemented clinical interviews to four students in order to go in depth information concerning the research objectives. Their teacher, considering that they have different levels, chose three of these students. The fourth student was selected because he had not answered to items in sessions 2 and 3. We based the interviews on the previous students' responses to different items in the questionnaire and we added an additional item concerning generalization.

We analyzed data coming from students' responses of the whole group discussion and from the interviews. We established a categories system about the functional relationships (correspondence and covariation) and types of strategies. We describe the whole group students' answers to the items posed and the work of the four interviewed students' responses in the whole group and in the interviews. Finally, we link the functional relationships and the strategies described.

The results suggest that students were able to identify correspondence and covariation. The correspondence functional relationship was the most frequent. Moreover, the strategies used by the students were related with computation, counting and generalization. The most frequent strategies concern computation, particularly using remembered numerical facts.

Three of the four interviewed students identified the correspondence using the same strategy: computation-remembered numerical facts. In addition, these students evidenced correspondence and used more than one strategy in the interview. Three of the four students generalized correspondence relationship.

We observed that correspondence and covariation relationships were linked with computation and counting strategies. The generalization was linked to correspondence because all of the students who generalized did it through a correspondence relationship.