



Método de Aproximación Catenaria en el diseño de estructuras antifuniculares

Catenary Approximation Method in the antifunicular structures design

M. Cañete-Güeto (*), M. A. Fernández-Ruiz (**), E. Hernández-Montes (**)

RESUMEN

Este artículo describe una nueva metodología para resolver un problema típico del diseño de estructuras antifuniculares: cómo obtener una configuración de equilibrio partiendo de condicionantes geométricos iniciales.

En los años 70 se introdujo el Método de Densidad de Fuerzas –MDF– para la búsqueda de la configuración de equilibrio, método que hoy en día sigue utilizándose con éxito tanto en estructuras tensadas como en estructuras antifuniculares. Sin embargo, en las segundas, el problema de equilibrio se vuelve no-lineal y debe resolverse de una manera iterativa, mediante pruebas sucesivas.

A través del que hemos denominado *Método de Aproximación Catenaria –MAC–*, concebido como herramienta de ayuda en la aplicación del MDF a estructuras antifuniculares, es posible obtener de manera sencilla una forma de equilibrio con unas características geométricas previamente establecidas.

Palabras clave: Densidad Fuerza; estructuras antifuniculares; estructuras tensadas; aproximación catenaria; MAC.

ABSTRACT

This paper describes a new methodology for solving a typical problem in the design of antifunicular structures: how a equilibrium configuration can be obtained with initial geometrical constraints.

In the seventies the Force Density Method -FDM- was introduced for the research of an equilibrium position. This method is nowadays being used successfully for both tension structures and antifunicular structures. However, in the second ones, the problem of balance turns non-linear and must be solved in an iterative manner through successive tests.

By means of the so-called Catenary Approximation Method -CAM, conceived as an assistance tool in the application of the FDM to antifuniculars structures, it is possible to obtain in a simple way a equilibrium configuration with some geometric characteristics previously established.

Keywords: Force Density; Antifunicular structures; Tension structures; Catenary approximation; CAM.

(*) Ayuntamiento de Granada - Servicio de Infraestructura. Granada (España).

(**) Universidad de Granada, (España).

Persona de contacto/Corresponding author: cms@gmx.es (M. Cañete-Güeto)

Cómo citar este artículo/Citation: Cañete-Güeto, M., Fernández-Ruiz, M. A., Hernández-Montes, E. (2014). Método de Aproximación Catenaria en el diseño de estructuras antifuniculares. *Informes de la Construcción*, 66(EXTRA-1): m008, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.13.115>.

Licencia / License: Salvo indicación contraria, todos los contenidos de la edición electrónica de *Informes de la Construcción* se distribuyen bajo una licencia de uso y distribución Creative Commons Reconocimiento no Comercial 3.0. España (cc-by-nc).

1. INTRODUCCIÓN

A diferencia de las obras de ingeniería y arquitectura tradicionales, en las estructuras a compresión o antifuniculares (1) (2) (3), del mismo modo que en las estructuras tensadas, la forma geométrica no resulta conocida inicialmente sino que es otra incógnita más del problema. La solución geométrica o forma de equilibrio coincidirá con la que presente ausencia de flexiones en todos los puntos.

El Método de Densidad de Fuerzas –MDF– (4) (5) es uno de los más utilizados en el diseño de este tipo de estructuras. Permite obtener la forma de equilibrio de una tensoestructura o de una estructura antifunicular a través de la resolución de un sistema de ecuaciones. El procedimiento puede resumirse en cuatro sencillos pasos:

1. Definición de la estructura de nodos-conexiones:

Es posible representar la estructura como una malla de nodos conectados entre sí a través de un número determinado de ramas dispuestas a criterio del calculista. Esta estructura de nodos-conexiones podrá adoptar múltiples formas en función del valor que adquieran los VECTORES DE COORDENADAS, formados por las coordenadas x_i, y_i, z_i de todos los nodos.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad [1]$$

El método permite la imposición de unas condiciones de contorno en una serie de nodos (nodos fijos) mientras que el resto (nodos libres) serán incógnitas del sistema de ecuaciones.

Las conexiones entre los distintos nodos se representan a través de la MATRIZ DE CONECTIVIDAD «C», matriz fundamental dentro del MDF. Cada fila de esta matriz define una rama de la malla mientras que cada columna equivale a un nodo de la estructura. En cada fila «i» sólo existirán dos valores distintos de cero, con valor 1 o -1, que indicarán los nodos conectados por la rama i. Con el signo se define la dirección de la rama o conexión. De esta forma la matriz

C tendrá tantas filas como ramas posea la malla y tantas columnas como nodos existan (Figura 1).

2. Obtención de las fuerzas externas:

Las fuerzas externas se introducen como fuerzas puntuales aplicadas en cada nodo y se representan a través de los VECTORES DE FUERZA, formados por las componentes f_{xi}, f_{yi}, f_{zi} de las fuerza aplicadas a cada nodo:

$$f_x = \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{x2} \\ \vdots \\ f_{xn} \end{pmatrix}; f_y = \begin{pmatrix} f_{y1} \\ f_{y2} \\ \vdots \\ f_{yn} \end{pmatrix}; f_z = \begin{pmatrix} f_{z1} \\ f_{z2} \\ \vdots \\ f_{zn} \end{pmatrix} \quad [2]$$

Uno de los mayores inconvenientes del método consiste en la necesidad de transformar a fuerzas nodales todas las fuerzas superficiales o de volumen que afectan a la estructura.

3. Determinación de las densidades de fuerza:

Estas se definen como la relación entre la fuerza de tracción o compresión «s» y la longitud «l» de cada conexión o rama.

Es decir, para cada rama i:

$$q_i = \frac{s_i}{l_i} \quad [3]$$

Así es posible definir la MATRIZ DE DENSIDAD DE FUERZAS Q como la matriz diagonal, de dimensión \mathbf{rxr} , formada por las densidades de fuerzas de todas las ramas:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_r \end{pmatrix} \quad [4]$$

4. Resolución del sistema de ecuaciones del MDF

Finalmente, planteando el equilibrio de fuerzas en los nodos, se obtienen las ecuaciones del Método de Densidad de Fuerzas:

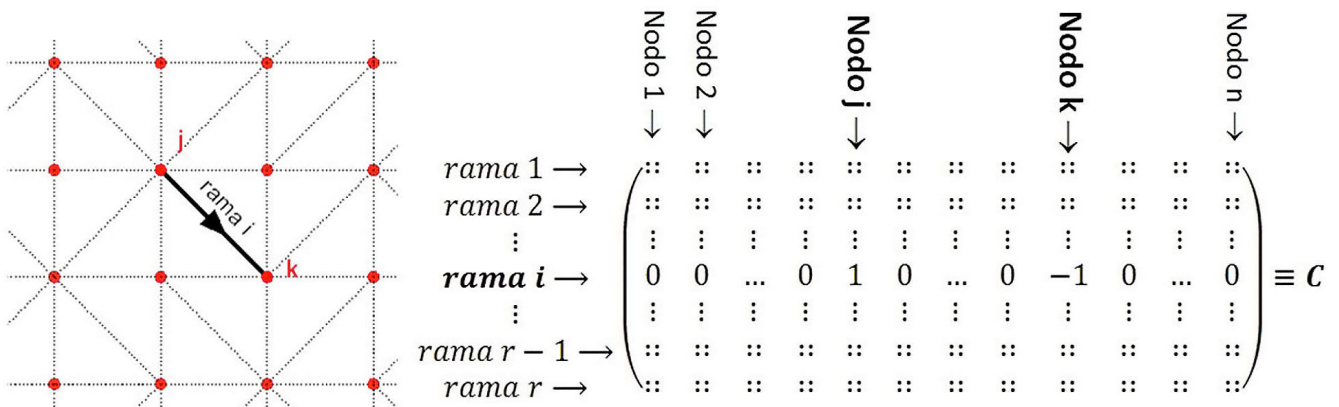


Figura 1. Obtención de la Matriz de Conectividad «C». Siendo n el número total de nodos y r el número total de ramas.



Figura 2. Esquema de INPUTS - OUTPUTS en el MDF.

$$\begin{cases} (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot x + f_x = 0 \\ (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot y + f_y = 0 \\ (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot z + f_z = 0 \end{cases} \quad [5]$$

Para que la ecuación [5] se convierta en un sistema de ecuaciones lineales es preciso determinar previamente las coordenadas de los nodos fijos, las fuerzas que afectan a cada nodo y las densidades de fuerza de cada rama (*inputs*). Resolviendo este sistema de «3n» ecuaciones se obtienen las «3n» incógnitas (*outputs*) que corresponden a las coordenadas de los nodos libres y a las reacciones en los apoyos (Figura 2).

El mayor inconveniente de este método consiste en que uno de sus *INPUTS*, las densidades de fuerza, no tienen un valor claro conocido por el proyectista a priori. Es decir, el sistema de ecuaciones que plantea el MDF tiene múltiples soluciones, obteniéndose una configuración de equilibrio diferente por cada matriz de densidades de fuerza elegida. Esto obliga a realizar tanteos sucesivos, adoptando valores de densidades de fuerza diferentes hasta conseguir la forma geométrica deseada.

La generación de la estructura de nodos-conexiones puede realizarse de forma automática utilizando técnicas de automallado como el Mallado Topológico -MT- (6) (7) (8) (9). Las topologías de las mallas generadas a través de esta técnica, empleada con éxito en el diseño de estructuras tensadas, resultan también muy útiles en el diseño de cúpulas y bóvedas a compresión. En este artículo se utilizarán diversos términos relacionados con el MT como redes abiertas, redes cerradas, pasos o anillos y conexiones anillo y radiales.

Llegado a este punto es importante advertir que para cada hipótesis de carga, con la aplicación de MDF-MT, se obtendría

una forma de equilibrio diferente. Por eso se suelen considerar únicamente las cargas permanentes, distinguiendo así dos etapas en el cálculo: una primera fase de diseño o búsqueda de la configuración de equilibrio a través del MDF-MT y una fase posterior de análisis estructural, donde son tenidas en consideración todas las hipótesis de carga.

En las estructuras tensadas, debido a la ligereza de los materiales empleados, el peso propio tiene una influencia muy reducida en el resultado. Por este motivo se suele prescindir de su valor y de esta forma la utilización del MDF-MT resulta muy sencilla.

En cambio, en las estructuras antifuniculares la consideración del peso propio resulta indispensable. Al tratarse de una fuerza superficial, su valor depende de la geometría de la estructura. De esta forma, el sistema de ecuaciones que plantea el MDF pierde su linealidad, por lo que para ciertos valores de las densidades de fuerza no existirá una solución.

Analizando el problema bi-nodal se puede comprender de manera sencilla por qué no es siempre posible obtener una solución. Se tiene una estructura compuesta por una única barra vertical con un extremo fijo, sometida a una fuerza constante f_z en sentido longitudinal (Figura 3). La forma de equilibrio se determinará simplemente calculando la longitud z que debe tener la barra para que la densidad de fuerza tenga un valor q determinado. Los sistemas de ecuaciones del MDF quedan reducidos a una única ecuación lineal que establece el equilibrio de fuerzas [6].

$$q \cdot z - f_z = 0 \rightarrow z = \frac{f_z}{q} \quad [6]$$

El problema siempre tendría solución para cualquier valor de densidad de fuerza q adoptado.

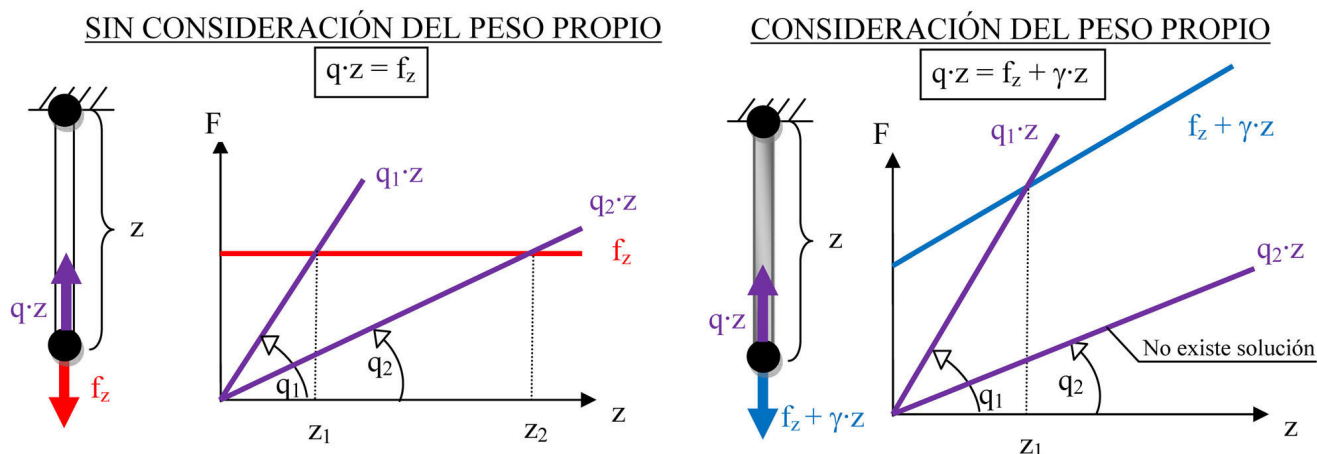


Figura 3. Análisis de la solucionabilidad del problema bi-nodal y unidimensional sin y con la consideración del peso propio.

En cambio, si se tiene en consideración el peso propio de la barra y su peso específico γ fuese conocido, el equilibrio de fuerzas quedaría representado a través de la expresión [7].

$$q \cdot z - f_z - \gamma \cdot z = 0 \rightarrow z = \frac{f_z}{q - \gamma} \quad [7]$$

De esta forma el problema no alcanzaría solución para valores $q < \gamma$.

En definitiva, la aplicación del método adaptado a las estructuras antifuniculares, considerando el peso propio (MDF-MT-PP) (10), se convierte en un procedimiento complejo que hay que resolver de forma iterativa y con el inconveniente añadido de no tener solución en determinados casos. El esquema de *INPUTS-OUTPUTS* se representa en la Figura 4.

El concepto de Densidad de Fuerza, adquiere así un papel fundamental en la forma de equilibrio obtenida. Partiendo de unas condiciones de contorno definidas y conocidas por el proyectista, este parámetro se convierte en la única variable del sistema para modificar la forma geométrica. El resto de variables o bien resultan conocidas, como las coordenadas de los puntos de apoyo o el peso específico del material, o bien tienen una menor influencia en la forma de equilibrio obtenida, como la densidad de nodos empleada o la tipología de malla escogida. Para cada matriz de densidades de fuerza podrá existir una solución al problema y, en el caso de que esta exista, la forma de equilibrio alcanzada diferirá considerablemente de otra obtenida con una matriz de densidades de fuerza diferente. Ello obliga de nuevo a realizar un cálculo iterativo en el que una vez obtenida la primera solución o forma de equilibrio, es necesario modificar el valor de las densidades de fuerza empleadas hasta conseguir la geometría deseada. Este proceso no es sencillo, ya que no resulta fácil relacionar el valor de las densidades de fuerza con la forma geométrica que se persigue. Para el diseñador se convierte en un procedimiento largo y complejo al tener que modificar multitud de valores hasta obtener una forma de equilibrio que se aproxime al modelo inicial diseñado.

En este artículo se propone un método para obtener las densidades de fuerza en las estructuras clásicas de compresión, bóvedas y cúpulas, a partir de parámetros geométricos del diseño original. Previamente se ayudará a adquirir una mejor comprensión práctica de estos parámetros y su relación con la forma de equilibrio alcanzada.

2. LA DENSIDAD DE FUERZA EN ESTRUCTURAS ANTIFUNICULARES

Para comprender el significado práctico de la densidad de fuerza y su relación con la geometría alcanzada, resulta útil



Figura 4. Esquema de *inputs - outputs* en el MDF-MT-PP.

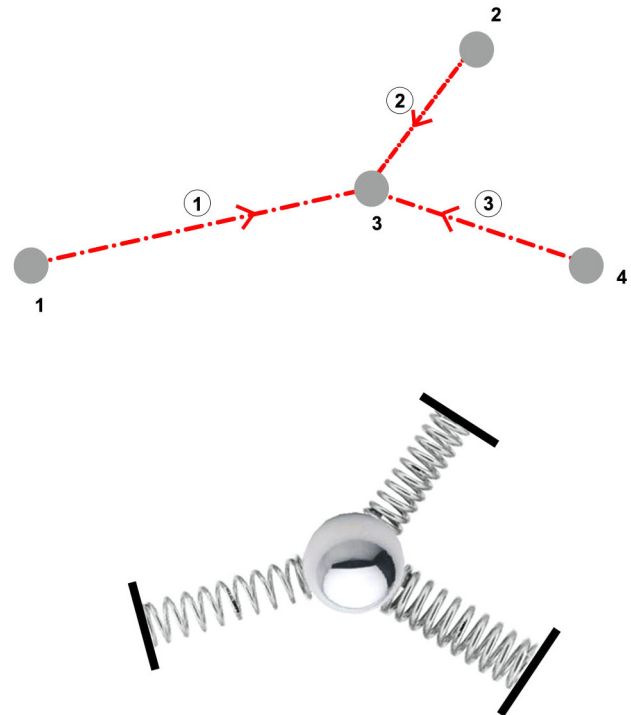


Figura 5. Símil de una estructura simple de cuatro nodos, un nodo central libre y tres fijos, con un sistema de muelles y bolas.

establecer un símil entre dicho parámetro y la constante elástica de un muelle (Figura 5).

Al aumentar la densidad de fuerza de una barra en una estructura en equilibrio, se conseguirá acortar la longitud de dicha barra, pero al mismo tiempo se modificará la posición del resto de nodos de la estructura y cambiará sustancialmente la forma de equilibrio.

Una técnica para obtener estructuras simétricas con la forma deseada consiste en agrupar estas densidades de fuerza según pertenezcan a un anillo o a una conexión radial o de unión (7).

En las estructuras antifuniculares abiertas, tipo bóveda, el paralelismo de los anillos se consigue utilizando las mismas densidades de fuerza en todas las ramas radiales y adoptando un valor cercano a cero para minimizar las tensiones en las mismas. Por otra parte, alterando las densidades de fuerza de las ramas que componen los anillos se puede modificar la altura de la bóveda (Figura 6).

Intuitivamente estos cambios pueden predecirse mediante el símil de bolas-muelles. No obstante, en este caso hay que tener presente que las modificaciones en la geometría no son proporcionales a las variaciones de estos parámetros. Además pueden observarse otras pequeñas diferencias, más

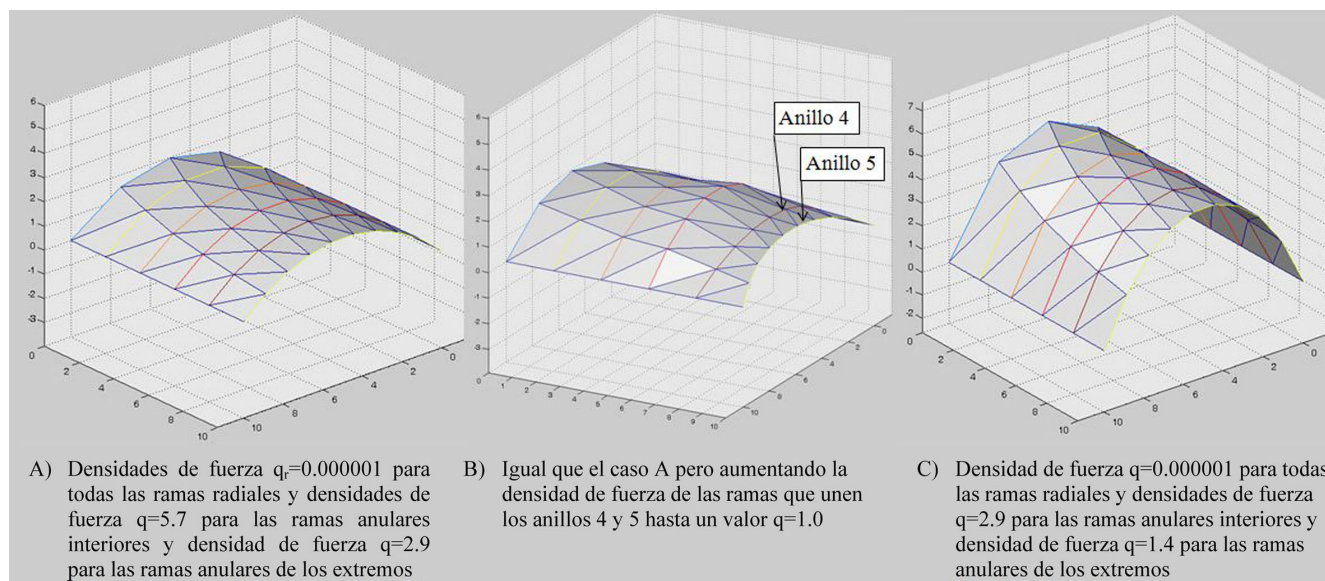


Figura 6. Pérdida del paralelismo y variación de altura de los arcos con la modificación de las densidades de fuerza.

difíciles de comprender, que están relacionadas con la morfología del mallado utilizado.

Análogamente para las mallas cerradas, tipo cúpula, las ramas radiales son las que modifican la altura de la bóveda mientras que las ramas anilladas controlan la forma más o menos abierta de la cúpula sin afectar en gran medida su altura (Figura 7).

3. MÉTODO DE APROXIMACIÓN CATENARIA

Si se analizan diferentes estructuras de compresión tridimensionales, se pueden distinguir formas antifuniculares como partes integrantes de todas ellas. Incluso en muchos casos es posible generar las figuras espaciales con la simple traslación o giro de estas formas poligonales (Figura 8).

El Método de Aproximación Catenaria –MAC– permite obtener las densidades de fuerza de estas formas antifuniculares mediante su aproximación a una curva catenaria de igual altura o longitud (Figura 9).

La ventaja de esta aproximación radica en que la ecuación matemática de la curva catenaria es conocida y puede obtenerse directamente a partir de valores geométricos como la flecha en su punto medio. Estas ecuaciones, obtenidas en base al equilibrio de fuerzas horizontales y verticales, son las siguientes:

$$y(x) = \frac{1}{2g} \cdot \{ \cosh[g \cdot (2 \cdot x - a)] - \cosh[g \cdot a] \} \quad [8]$$

$$h = \frac{1}{2g} \cosh[g \cdot a] - \frac{1}{2g} \quad [9]$$

$$g = \frac{\lambda}{2T_0} \quad [10]$$

siendo:

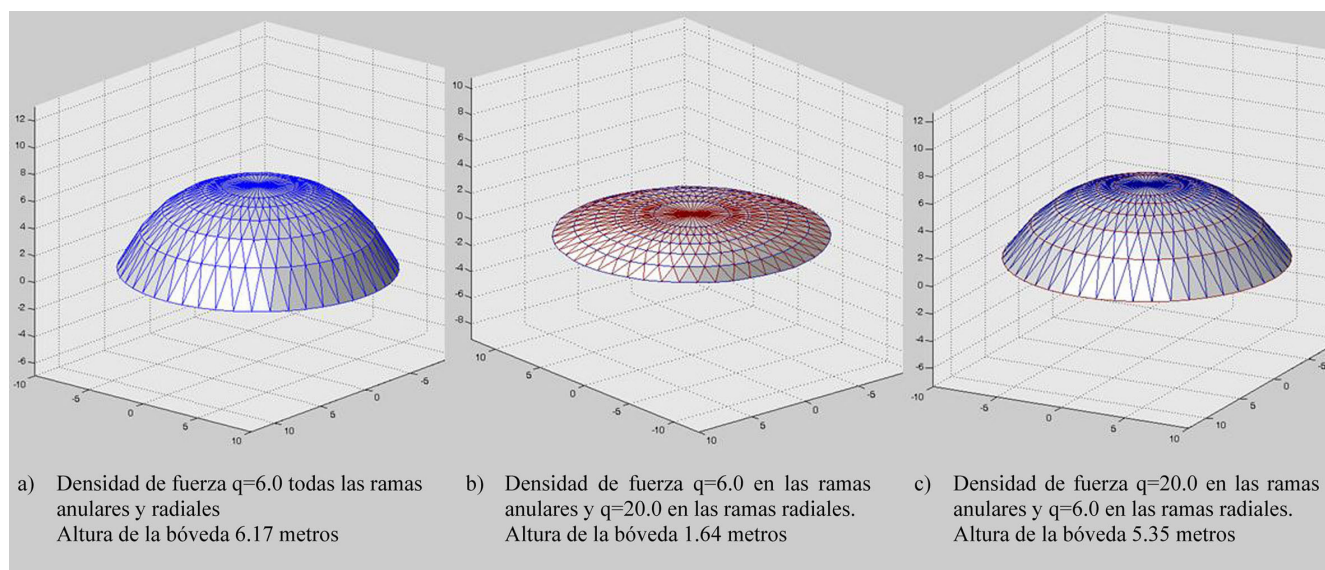


Figura 7. Cambio de altura de la cúpula con la modificación de las densidades de fuerza.

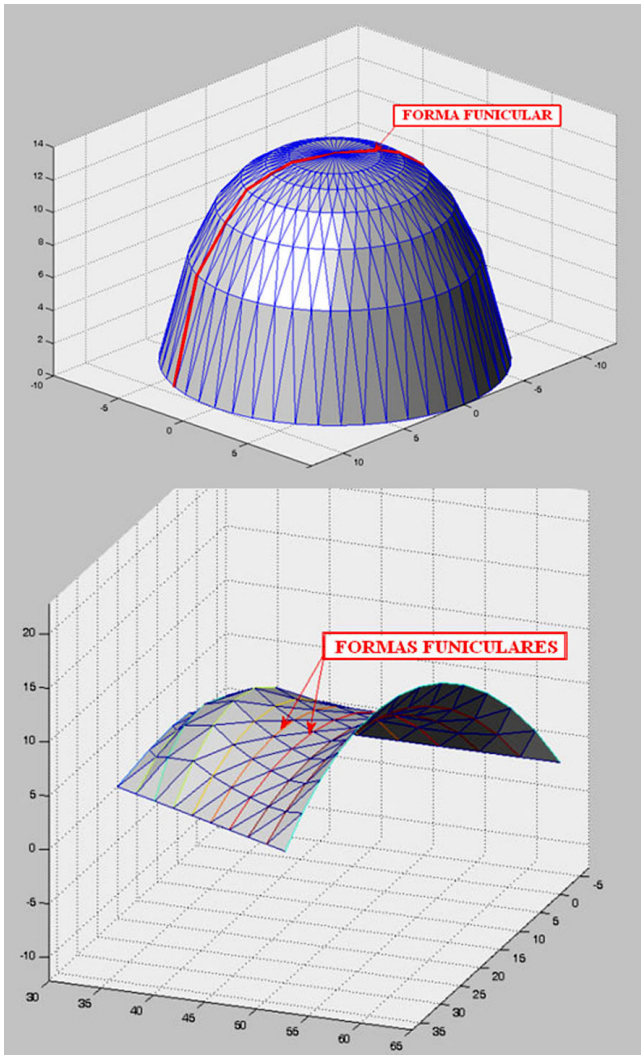


Figura 8. Identificación de curvas funiculares en cúpulas y bóvedas (mallas cerradas y abiertas).

- $y(x)$ flecha de la catenaria en el punto x
- h altura máxima de la catenaria (flecha en el punto medio).
- g constante de la catenaria que se define según la ecuación [10]
- T_0 tensión horizontal de la catenaria (igual en todos sus puntos)
- λ peso específico
- a distancia entre los dos extremos fijos de la catenaria.

La parte esencial del método consiste en calcular lo que se denomina densidad de fuerza equivalente de la catenaria « q_e » [11], que es el valor a adoptar para todas las barras incluidas en la sección funicular de la bóveda o cúpula. Posteriormente, utilizando el MDF y aplicando estas densidades de fuerza equivalentes, se obtendrá una forma de equilibrio con la altura o perímetro deseado.

Si se divide la proyección horizontal de la catenaria en N partes iguales (Figura 10), siendo N el número de tramos de la forma funicular, se puede calcular el valor de la densidad de fuerza equivalente de la catenaria mediante la siguiente expresión:

$$q_e = \frac{T}{L_1} = \frac{T_0}{L_1 \cdot \cos \theta} = \frac{T_0 \cdot L_1}{L_1 \cdot x_1} = \frac{T_0}{x_1} \quad [11]$$

$$x_1 = \frac{a}{N} \quad [12]$$

Por otra parte, el valor de T_0 se puede calcular conociendo el peso por unidad de longitud de la catenaria λ a través de las siguientes expresiones:

$$T_0 = \left[\frac{\lambda \cdot L}{2 \cdot \tan \theta} \right] \quad [13]$$

$$\tan \theta = \frac{y_1}{x_1} \quad [14]$$

$$L = \frac{1}{g} \sinh[g \cdot a] \quad [15]$$

El valor y_1 se obtiene aplicando la ecuación de la catenaria [8].

El método se estructura en los siguientes pasos:

1. Definición de los parámetros iniciales y obtención de una primera forma de equilibrio:

Es el paso 1 del método y consiste en obtener una primera forma de equilibrio a partir de unos parámetros iniciales compatibles con una primera configuración de equilibrio.

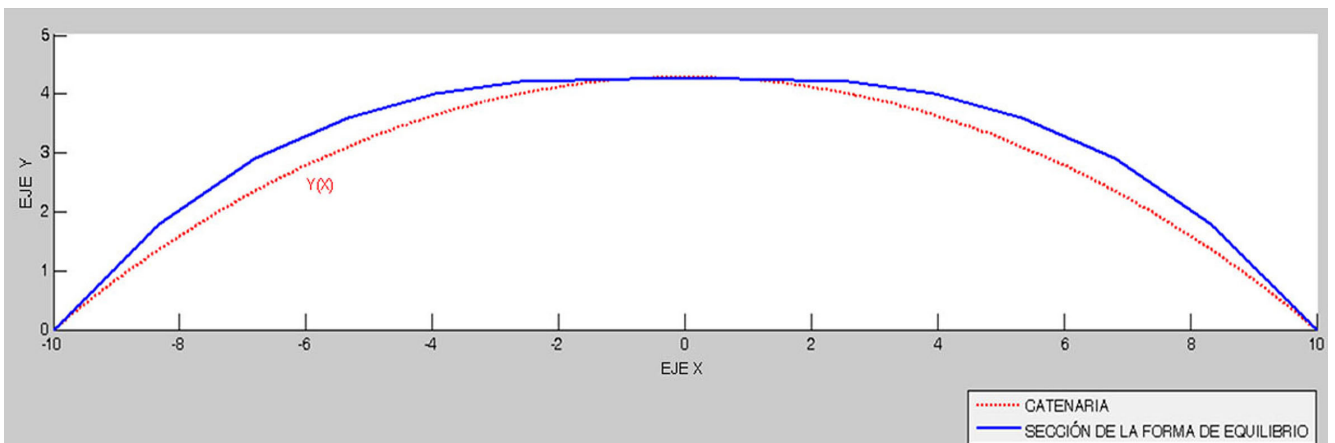


Figura 9. Comparación de la sección radial de una cúpula antifunicular con la curva catenaria de igual altura.

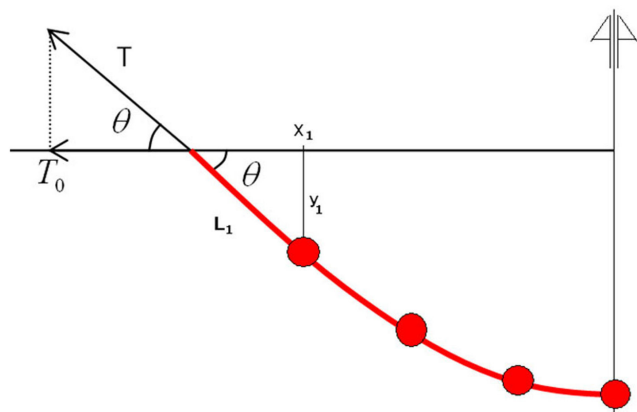


Figura 10. Representación de las tensiones en el extremo de la catenaria.

Se analizará el diseño y se adoptarán todos los parámetros necesarios para establecer una primera forma de equilibrio. Para ello será necesario:

1. Determinar las coordenadas de los nodos fijos.
2. Establecer un mallado topológico apropiado.
3. Analizar los materiales utilizados determinando su peso específico.
4. Aplicar el MDF-MT-PP con unas densidades de fuerza iniciales compatibles con una configuración de equilibrio. Es decir, se adoptarán densidades de fuerza tales que el problema tenga solución aunque la forma de equilibrio difiera notablemente del diseño inicial.

2. Calibración del método:

En este paso se identificarán las formas funiculares contenidas en la configuración de equilibrio para calcular los parámetros de las catenarias que la aproximan y que se denominarán catenarias iniciales. En algunos casos (cúpula de base circular) bastará con aproximar una única sección funicular, mientras que en otros (cúpula de base poligonal o bóvedas de altura variable) será necesario aproximar varias secciones (Figura 8).

De cada forma funicular inicial se tomarán los siguientes valores que se utilizarán para definir su correspondiente catenaria inicial:

- Altura de la forma funicular inicial h_i
- Distancia entre los apoyos a

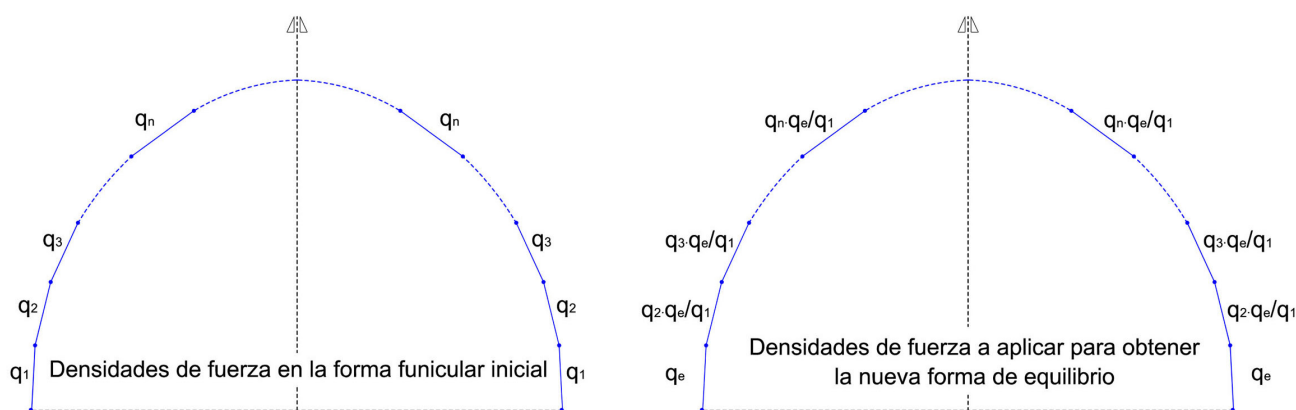


Figura 11. Adopción de densidades de fuerza para la obtención de la nueva forma de equilibrio.

- Número de nodos N
- Densidad de fuerza de la primera rama q_1 (véase la Figura 11)

A través de la ecuación [9] se puede calcular el parámetro g de la catenaria inicial.

Por otra parte adoptando $T_0 = q_1 \cdot x_1$ se puede obtener el peso unitario λ de la catenaria inicial a través de las ecuaciones [13], [14] y [15]. El valor de x_1 puede obtenerse directamente de la configuración de equilibrio obtenida o de forma aproximada mediante la ecuación [12].

3. Obtención de las densidades de fuerza:

Es ahora cuando se obtiene la densidad de fuerza equivalente q_e de la catenaria con la altura de diseño h_d y con el peso unitario λ calculado en el apartado anterior. A esta catenaria se le denominará en lo sucesivo catenaria final.

Se adoptarán los siguientes parámetros ya conocidos:

- Altura de la catenaria final o altura de diseño h_d
- Distancia entre los apoyos a
- Número de nodos N
- Peso unitario de la catenaria inicial obtenido en el paso anterior λ .

A través de la ecuación [9] se puede obtener el valor g de la catenaria final.

Utilizando este valor y empleando de nuevo las ecuaciones [11], [13], [14] y [15] se calculará el valor de la densidad de fuerza equivalente de la catenaria final.

4. Obtención de la forma de equilibrio con los condicionantes geométricos iniciales:

El último paso del MAC consiste en calcular una nueva forma de equilibrio utilizando de nuevo el MDF-MT-PP pero empleando ahora la densidad de fuerza equivalente obtenida.

En el caso de que la forma funicular inicial tuviese la misma densidad de fuerza en todas sus ramas se adoptaría la densidad de fuerza equivalente en todas estas conexiones para obtener la nueva forma de equilibrio. En cambio si estas densidades de fuerza no coinciden, para mejorar la convergencia del método, se podrán aplicar valores ponderados de acuerdo con el esquema de la Figura 11.

ALTURA DE LA CÚPULA DISEÑADA	DENSIDAD DE FUERZAS (q') OBTENIDA CON EL MAC PARA ESTA ALTURA	ALTURA DE LA CÚPULA OBTENIDA CON EL PROGRAMA GAUDI PARA $q=q'$
2	16.31	1.95
4	8.53	3.97
6	6.06	6.09
8	4.88	8.32
10	4.20	10.67
15	3.34	16.81
20	2.91	23.57
30	2.50	37.24
40	2.28	52.14

A través del MAC generalmente se consiguen buenas aproximaciones, si bien pueden darse diferencias considerables para valores de densidad de fuerza muy alejados al de la calibración realizada. El éxito de la aproximación también depende de la influencia del resto de densidades de fuerza no alteradas por el método, es decir, del efecto de las conexiones que no están incluidas en la forma funicular a la que se aplica el MAC y que mantienen su densidad de fuerza inicial. En estos casos, se puede aplicar nuevamente el método hasta obtener resultados óptimos. La ventaja del procedimiento iterativo del MAC frente al procedimiento de tanteo tradicional, radica en que se converge rápidamente hacia la solución buscada y además es posible su programación en un mismo algoritmo informático junto con el MDF-MT-PP (10).

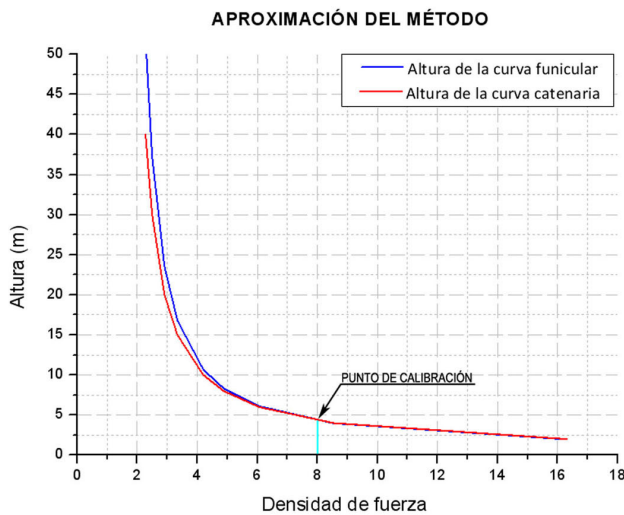
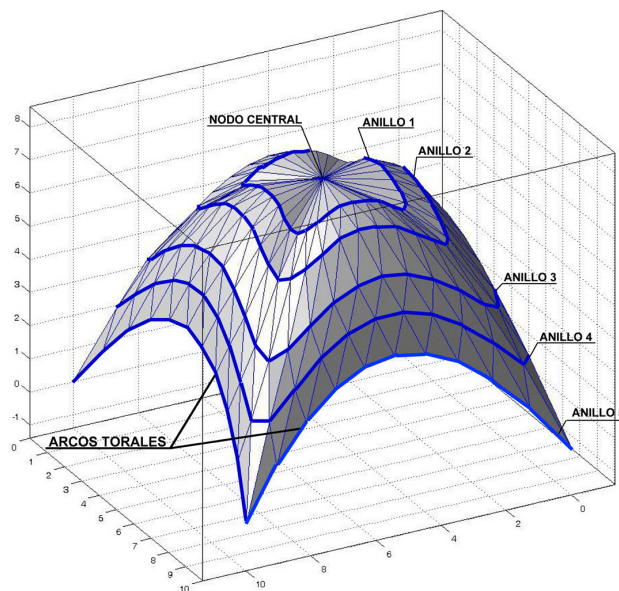


Figura 12. Aproximación del método en la primera iteración para una cúpula de 20 metros de diámetro.

La aplicación del MAC a cúpulas de base circular resulta muy sencilla, obteniéndose muy buenas aproximaciones. En este caso se emplea el método en una única forma funicular (véase la cúpula de la Figura 8), aplicando la densidad de fuerza equivalente obtenida a todas las ramas radiales de la cúpula.

La Figura 12 muestra la aproximación conseguida con el MAC aplicado a una cúpula de 20 metros de diámetro de base para diferentes alturas de diseño. La calibración se ha realizado en este ejemplo a partir de una primera configuración de equilibrio de $q = 8$ y $h = 4,29$ metros.

Resulta también muy interesante la aplicación del MAC a cúpulas de base poligonal. Se tiene como ejemplo una cúpula



VALORES DE LAS DENSIDADES DE FUERZA INICIALES

q anulares	Anillo 1: 1	q radiales	Entre Nodo central y Anillo 1: 2
	Anillo 2: 1		Entre Anillos 1 y 2: 2
	Anillo 3: 1		Entre Anillos 2 y 3: 2
	Anillo 4: 1		Entre Anillos 3 y 4: 4
	Anillo 5: 50		Entre Anillos 4 y 5: 5

VALORES GEOMÉTRICOS DE LA CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO INICIAL

Altura de la bóveda (h):	7,14 metros
Altura de los arcos torales (h_t):	3,56 metros

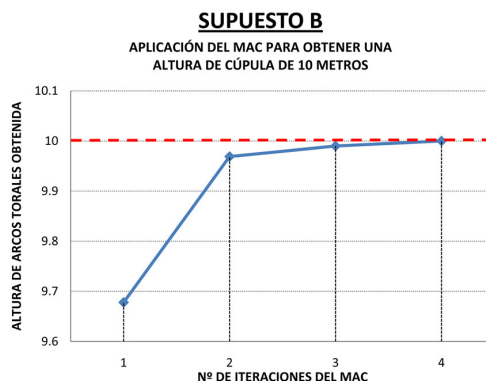
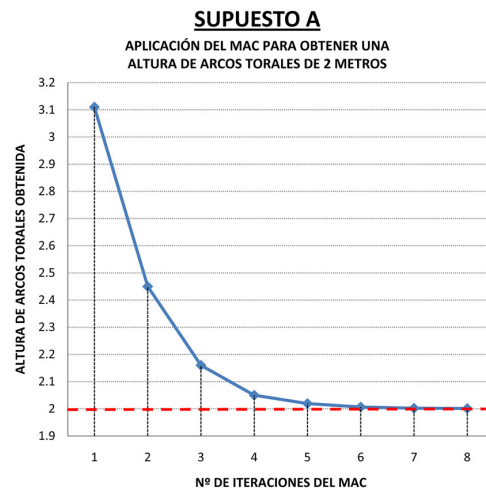
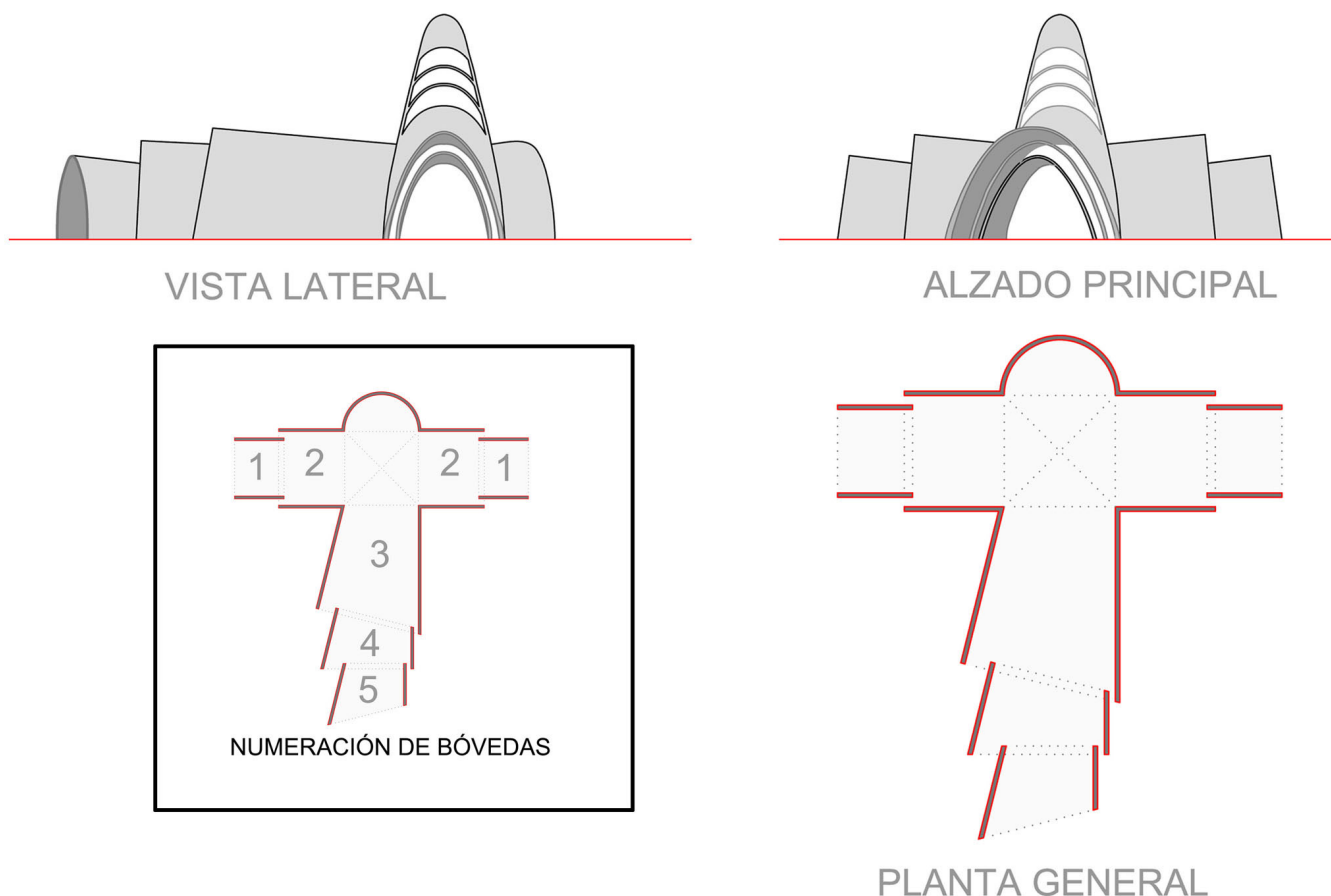


Figura 13. Aplicación del MAC a una cúpula de base cuadrada.



BÓVEDA	DISEÑO		1ª CONF. DE EQUILIBRIO		MAC 1ª ITERACIÓN		ERROR COMETIDO	
	ALTURA DE ARCO INICIAL	ALTURA DE ARCO FINAL	ALTURA DEL ARCO INICIAL	ALTURA DEL ARCO FINAL	ALTURA DE ARCO INICIAL	ALTURA DE ARCO FINAL	ALTURA DE ARCO INICIAL	ALTURA DE ARCO FINAL
1	13.95	14.66	18.34	18.44	13.95	14.60	0.00%	-0.41%
2	17.08	19.00	36.23	36.95	17.84	19.32	4.45%	1.68%
3	17.08	19.77	29.92	29.48	17.43	18.73	2.05%	-5.26%
4	17.03	17.33	7.46	7.59	16.61	17.29	-2.47%	-0.23%
5	13.43	14.66	11.33	11.19	13.68	14.27	1.86%	-2.66%

Figura 14. Aplicación del MAC a un Proyecto de Gran Estructura. Resultados obtenidos en la primera iteración.

de base cuadrada de 10 metros de lado, representada en la Figura 13. En este caso se puede utilizar el MAC tanto para variar la altura de los arcos torales como para modificar la altura total de la cúpula.

Las formas funiculares inscritas en los arcos torales están formadas por las conexiones del anillo 5 por lo que todas sus ramas tendrán una densidad de fuerza inicial de valor $q_i = 50$. Aplicando el MAC se obtienen densidades de fuerza equivalente que habrá que aplicar a todas las ramas del anillo 5. Debido a que la altura de estos arcos se encuentra muy condicionada por las densidades de fuerza del resto de anillos así como por las densidades de fuerza radiales, pueden ser necesarias varias iteraciones para conseguir una buena aproximación. En cualquier caso el método converge rápidamente tal y como muestran los resultados correspondientes al SUPUESTO A que muestra la Figura 13.

Por otra parte, para modificar la altura de la cúpula habría que aplicar el MAC considerando formas funiculares compuestas por conexiones radiales, como en el caso de las cúpulas de base circular. En el ejemplo representado en la Figura 13, SUPUESTO B, las densidades de fuerza tendrán valores diferentes para cada rama y en cada iteración habrá que aplicar una distribución de densidades de fuerza de acuerdo con la Figura 11. Se puede observar en el gráfico que acompaña a la Figura 13 SUPUESTO B que son precisas muy pocas iteraciones para alcanzar la altura deseada puesto que la densidad de fuerza de las conexiones anulares tienen una mínima influencia en la altura total de la *cúpula*.

Con las bóvedas se procede de forma similar, aunque, como se ha comentado en el apartado II, las densidades de fuerza obtenidas se aplicarán únicamente a las ramas anulares. Las densidades de fuerza de las conexiones radiales deben de in-

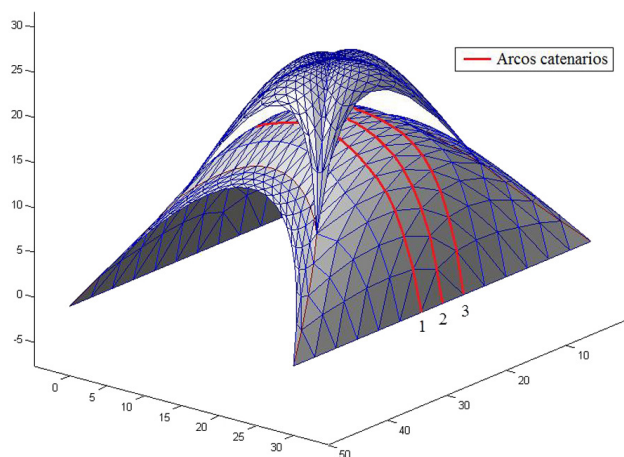


Figura 15. Aplicación del MAC a una estructura a compresión de 2 plantas con una serie de arcos catenarios de control.

troducirse con valores próximos a cero, a menos que no se desee mantener el paralelismo de los arcos.

La Figura 14 muestra la aplicación del MAC al diseño de una Gran Estructura compuesta por múltiples bóvedas de altura variable. Se han escogido los arcos extremos de cada bóveda, arco inicial y arco final, como secciones funiculares representativas. Partiendo de una primera configuración de equilibrio, a través del MAC se han modificado las densidades de fuerza de las ramas anulares que los componen. En la tabla de la Figura 14 se muestran los valores de la altura de diseño de los arcos de cada bóveda y se comparan con las alturas obtenidas tras la aplicación del método. El error máximo cometido tras la primera iteración, es inferior al 5,5%, demostrando una vez más la efectividad del MAC.

Cuando se tiene una estructura más irregular que las mostradas hasta ahora (con arcos pronunciados, contrabóvedas, densidades de fuerza desiguales, etc.) es posible conseguir ciertas dimensiones determinadas a priori (altura máxima y apertura general por ejemplo) controlando la geometría de un conjunto de arcos denominados de control. En estos casos la aplicación del MAC resulta fundamental, ya que es el que permite la obtención de esos parámetros geométricos objetivo en los arcos de control escogidos cuidadosamente dentro de la malla.

REFERENCIAS

- (1) Rabasco, P. (2011). El sistema Ctesiphonte. Evolución de la estructura catenaria. *Informes de la Construcción*, 63(522): 43-52, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.10.009>.
- (2) Bassegoda-Nonell, J. (1990). La construcción tradicional en la arquitectura de Gaudí. *Informes de la Construcción*, 42(408): 9-14, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.1990.v42.i408.1424>.
- (3) Escrig, F., Sánchez, J. (2005). La bóveda de hormigón del Club Táchira en Caracas. *Informes de la Construcción*, 57(499-500): 133-145 doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.2005.v57.i499-500.488>.
- (4) Maurin, B., Motro, R. (1998). The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes. *Engineering Structures*, 20(8): 712-719, doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0141-0296\(97\)00108-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0141-0296(97)00108-9).
- (5) Schek, H. J. (1974). The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1): 115-134, doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90045-0](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(74)90045-0).
- (6) Hernández-Montes, E., Jurado-Piña, R., Bayo, E. (2006). Topological mapping for tension structures. *Journal of Structural Engineering-ASCE*, 132(6): 970-977, doi: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2006\)132:6\(970\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:6(970)).
- (7) Jurado-Piña, R., Gil-Martín, L.M., Hernández-Montes, E. (2009). Topological mesh for shell structures. *Applied Mathematical Modelling*, 33(2): 948-958, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2007.12.018>.

En la Figura 15 se puede observar una estructura de 2 plantas totalmente a compresión a la que ya se le ha aplicado el MAC a los 3 anillos centrales de la malla inferior, que son los que se han identificado como de control. De esta forma en el ejemplo de la figura 15 la altura deseada era de 18 m, en el diseño inicial era de 16,43 m y en el diseño final tras varias iteraciones se ha obtenido una altura final de 17,97 m.

4. CONCLUSIONES

La aplicación del MDF en el diseño de estructuras antifuniculares permite obtener configuraciones de equilibrio a través de la resolución de un sistema de ecuaciones no lineal. El concepto de densidad de fuerza adquiere un papel fundamental permitiendo modificar la forma de equilibrio hasta conseguir la geometría deseada. Sin embargo, no resulta sencillo relacionar el valor de las densidades de fuerzas con la forma geométrica para satisfacer los condicionantes geométricos del diseño. El problema se resuelve de forma iterativa, mediante variaciones de densidades de fuerza sucesivas con un cierto grado de discrecionalidad, lo que lleva a un procedimiento lento y complejo.

En este artículo se expone un método innovador que facilita la obtención directa de una configuración de equilibrio que cumpla unos condicionantes de diseño preestablecidos. Se enumeran a continuación las ventajas más significativas del método:

Es un procedimiento de formulación sencilla, lo que conlleva un bajo coste computacional.

Se elimina la discrecionalidad del procedimiento permitiendo su implementación en el mismo programa informático que desarrolle el MDF-MT-PP para estructuras a compresión.

Aunque se trata de un método aproximado, admite una aplicación iterativa y cada ciclo mejora el resultado anterior. Esto permite con pocas iteraciones obtener la configuración de equilibrio deseada, cumpliendo los condicionantes de diseño.

Finalmente el método propuesto ha sido testado en diferentes proyectos, obteniendo resultados muy satisfactorios en cada uno de ellos. Se trata de una herramienta que puede resultar muy atractiva en el diseño de estructuras a compresión y en algunas tensoestructuras tales como las cubiertas colgantes pesadas (11).

- (8) Carbonell-Marquez, J.F., Gil-Martín, L.M., Jurado-Piña, R, Hernández-Montes, E. (2013). Symmetry preserving in topological mapping for tension structures. *Engineering Structures*, 52: 64-68, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.02.011>.
- (9) Liu, W., Li, D., Jiang, J. (2013). A General Mesh Configuration Design Approach for Large Cable-Network Antenna Reflectors. *Journal of Structural Engineering-ASCE*, 140(2), doi: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000816](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000816).
- (10) Carbonell-Márquez, J.F., Gil-Martín, L.M., Hernández-Montes, E., Jurado-Piña, R. (2012). GAUDI 1.0. - Manual de Usuario. <http://www.ugr.es/~tep190/investigacion/gaudi.html>. Granada.
- (11) Santos-Guerras, J. (1990). El desarrollo de las cubiertas colgantes pesadas. *Informes de la Construcción*, 41(405): 5-18, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.1990.v41.i405.1465>.

* * *