Eğitim ve Bilim
2011, Cilt 36, Sayı 159

Education and Science
2011, Vol. 36, No 159

Öğretmenlerin Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Yapılarıyla İlgili Bilgileri

Teachers' Knowledge about Ninth Grade Students' Ways of Algebraic Thinking

Sinem BAŞ* Ayhan Kürşat ERBAŞ** Bülent ÇETİNKAYA***
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Öz

Bu çalışmanın amacı, lise matematik öğretmenlerinin, öğrencilerinin cebirsel düşünme yapıları hakkındaki bilgi ve düşüncelerini ortaya çıkarmak ve bu bilginin gerçekte öğrencilerin düşünme yapılarını ne ölçüde yansıttığını belirlemektir. Araştırmanın katılımcıları, 49 dokuzuncu sınıf öğrencisi ve 3 matematik öğretmenidir. Çalışmada ilk olarak öğrencilerin, bir genelleme etkinliği üzerinden cebirsel düşünme yapıları belirlenmiş, daha sonra öğretmenlerin bu düşünme yapısı üzerine bilgileri ve beklentileri araştırılmıştır. Veriler, öğretmenlerle yapılan görüşmeler ve öğrencilerin çözüm kâğıtlarından oluşmaktadır. Verilerin nitel analizi sonucunda, öğretmenlerin öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarına ilişkin beklentileri ile öğrencilerin gerçek performansları arasında önemli farklar olduğu, ancak çözüm kâğıtlarını sistemli bir şekilde incelediklerinde, öğretmenlerin öğrencilerin düşünme yapılarını daha iyi anladıkları bulunmuştur.

Anahtar Sözcükler: Pedagojik alan bilgisi, fonksiyonel düşünme, öğretmen eğitimi, matematik eğitimi

Abstract

The purpose of this study is to describe teachers' knowledge about their students' algebraic thinking and to determine to what extent this knowledge essentially reflects students' ways of thinking. Three mathematics teachers and their 49 ninth grade students were selected as participants. In this study, students' algebraic thinking was determined through a generalization activity and then the teachers' knowledge and expectations were investigated. The data were comprised of students' worksheets and the interviews with the teachers. The results indicated that there was a considerable difference between students' actual ways of algebraic thinking and the teacher's expectations. However, it was also revealed that the teachers were able to better understand students' ways of thinking after examining their students' worksheets carefully.

Keywords: Pedagogical content knowledge, functional thinking, teacher education, mathematics education

Summary

Purpose

The purpose of this study was to investigate high school mathematics teachers' knowledge about their students' algebraic thinking in the context of a pattern generalization activity. The following research questions guided the study: (a) What is the ninth grade students' algebraic

* Sinem BAŞ, Doktora Öğrencisi, ODTÜ Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, bashsinem@gmail.com
** Doç. Dr. Ayhan Kürşat ERBAŞ, ODTÜ Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, erbas@metu.edu.tr
*** Yrd. Doç. Dr. Bülent ÇETİNKAYA, ODTÜ Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, bcetinka@metu.edu.tr

thinking in a figural pattern generalization activity?; (b) What is high school mathematics teachers' pre-knowledge about their students' algebraic thinking in a linear generalization activity?; and (c) How do teachers' interpretations of their students' algebraic thinking change when they carefully examine students' worksheets?

Participants of the study were three high school mathematics teachers and their 49 ninth-grade students. In the first part of the study, interviews were conducted with each teacher to reveal their predictions and expectations about their students' ways of thinking in a figural pattern generalization activity. In the second part, the teachers implemented the generalization activity with their students. In the last stage, post-interviews were conducted with the teachers whom were asked the same set of questions in the first interviews while they were systematically and carefully examining their students' worksheets.

Results

The analysis of the results indicated that most of the students (88%) in all three classes (9A, 9B, and 9C) were able to solve the generalization problem. The students applied 7 different solution strategies to generalize the figural algebraic pattern. These strategies were coded as: listing, numerical functional, direct proportion, arithmetic sequence, grouping, odd number, and visual functional strategies.

In the first question, which required near generalization, students widely used the listing strategy based on single variational thinking (38% of the students in 9A; 56% of the students in 9B; 33% of the students in 9C). In the second question, which required far generalization, numerical functional strategy (25% in 9A; 19% in 9B; 33% in 9C) was used. Moreover, in this question, the most widely used strategy by the students in 9B (38%) was visual functional strategy. Both of these two strategies were based on co-variational thinking and those who apply them were able to use variables in the functional context. Another widely used strategy for the second question that was newly revealed in the study was arithmetic sequence strategy (54% in 9A; 6% in 9B; 44% in 9C) with single variational thinking. Very few students used direct proportion, grouping and odd number strategies.

The results also revealed that the teacher of 9A class could not predict any specific strategy that would be used by his students, the teachers of the classes 9B and 9C were able to predict several strategies. With respect to algebraic thinking, while the teacher of class 9B expected that students would deal with this activity with single variational thinking, teachers of the classes 9A and 9C expressed their expectations that their students' would base their solutions on co-variational thinking. Furthermore, the teachers of the classes 9B and 9C expressed that their students tended to use variable as unknown in problem solving context rather than variable in the functional context, whereas the teacher of the class 9A expected that his students would be able to use variable in functional context.

When the teachers examined students' worksheets, some of their observations matched with students' actual performance and they were able to better understand their students' ways of thinking. On the other hand, the teachers of 9A and 9C could not recognize the arithmetic sequence strategy, which had been the most widely used by their students. Also, the teacher of 9A could not notice the arithmetical thinking underlying this strategy. Additionally, he incorrectly identified that students using this strategy use the variable in the context of function. These results may be attributed to both their lack of subject matter knowledge of functions and their tendency to interpret students' ways of thinking from their own aspects.

Discussion and Conclusion

There are two important conclusions in terms of mathematics education. Firstly, students may have very different ways of thinking and these differences are not always predicted and/ or recognized by their teachers. Secondly, when the teachers carefully focus their attention on their students' solutions by having a solid subject matter knowledge, they could better interpret and understand their students' ways of thinking. The importance of this capability of teachers in terms of their students' achievements was evidenced by many research studies (e.g., Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang, & Loef, 1989; Fennema, Franke, Carpenter, & Carey, 1993). Therefore, it is recommended that this type of training should be an integral part of any mathematics teacher education programs and professional development efforts in Turkey.

Giriş

Cebir, matematik dersi öğretim programlarında geniş yer tutan matematiğin en önemli konu alanlarından biridir. Son 30 yılda, okulda öğretilen cebirin anlamı/içeriği, cebir öğrenimi ve teknolojinin cebir öğrenimine etkileri gibi konularda çok sayıda araştırma yapılmış, bu araştırmaların sonuçları birçok ülkede cebir öğretim programlarının yeniden düzenlenmesine ışık tutmuştur. Ancak cebir öğretiminin iyileştirilmesine yönelik çabalara ve öğretim programlarında yapılan düzenlemelere rağmen, TIMSS ve PISA gibi uluslararası değerlendirme programlarında ortaya çıkan sonuçlar, öğrencilerin cebir konusundaki zorluklarının devam ettiğini gözler önüne sermektedir (Kieran, 2007). Ülkemizde yapılan çalışmalar da benzer sonuçlara işaret etmektedir (örneğin, Dede & Argün, 2003; Erbaş, Çetinkaya, & Ersoy, 2009; Ersoy & Erbaş, 2002). Öğrencilerin yaşadıkları zorlukların farklı nedenleri ve buna göre de bu zorlukların üstesinden gelmek için farklı çözüm stratejileri olabilir. Ancak birçok ülkede olduğu gibi ülkemizde de cebir konusunda öğrenci başarısını belirleyen en önemli unsur, yenilenen öğretim programlarını hayata geçiren öğretmenlerdir (Dede & Argün, 2003; Erbaş & Ulubay, 2008).

Cebir öğrenimi ile ilgili çok sayıda araştırma olmasına rağmen, öğretmenlerin cebir öğretme bilgileri üzerine yapılan çalışmalar çok az sayıdadır. Bu durumun okullarda cebir öğretiminin geleneksel yöntemlere bağlı kalınarak sürdürülmesine neden olduğu düşünülmektedir (Doerr, 2004). Öğretmen bilgisi üzerine yapılan çalışmalarda Shulman (1986) tarafından ortaya konulan *pedagojik alan bilgisi* kavramı, önemli bir teorik çerçeve olarak kabul edilmektedir. Pedagojik alan bilgisinin en önemli boyutlarından biri de öğretmenlerin öğrencilerin düşünme yapıları ile ilgili bilgileridir ve bu bilgi son yıllarda öğretmen eğitimi ile ilgili yapılan çalışmalarda üzerinde en fazla durulan konulardan birisidir (Kieran, 2007; Sowder, 2007). Özellikle cebir gibi öğrencilerin anlamakta güçlük çektikleri konularda, öğretmenlerin öğrencilerin düşünme yapıları (farklı yaklaşımları, karşılaştıkları zorluklar, kavram yanılgıları, vs.) hakkında bilgi sahibi olmaları ve kendi öğretim yaklaşımlarını bu bilgi doğrultusunda şekillendirmeleri ayrı bir önem kazanmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel örüntülerin genellenmesi ile ilgili düşünme yapılarını anlamak ve bu öğrencilerin derslerine giren matematik öğretmenlerinin, öğrencilerinin düşünme yapıları ile ilgili bilgilerini ortaya çıkartmaktır. Çalışmada öğretmen bilgileri üç farklı boyutta incelenmiştir: (a) Öğrencilerin genelleme yaparken kullanacakları çözüm stratejileri, (b) bu çözüm stratejilerinin altında yatan tek varyasyonel ya da kovaryasyonel düşünme yapısı ve (c) öğrencilerin değişken kavramını algılama şekilleri. Bu amaç doğrultusunda, çalışmaya yön veren araştırma soruları şunlardır:

1. Örüntülerin cebirsel olarak genellenmesi konusunda öğrencilerin düşünme yapıları nasıldır?

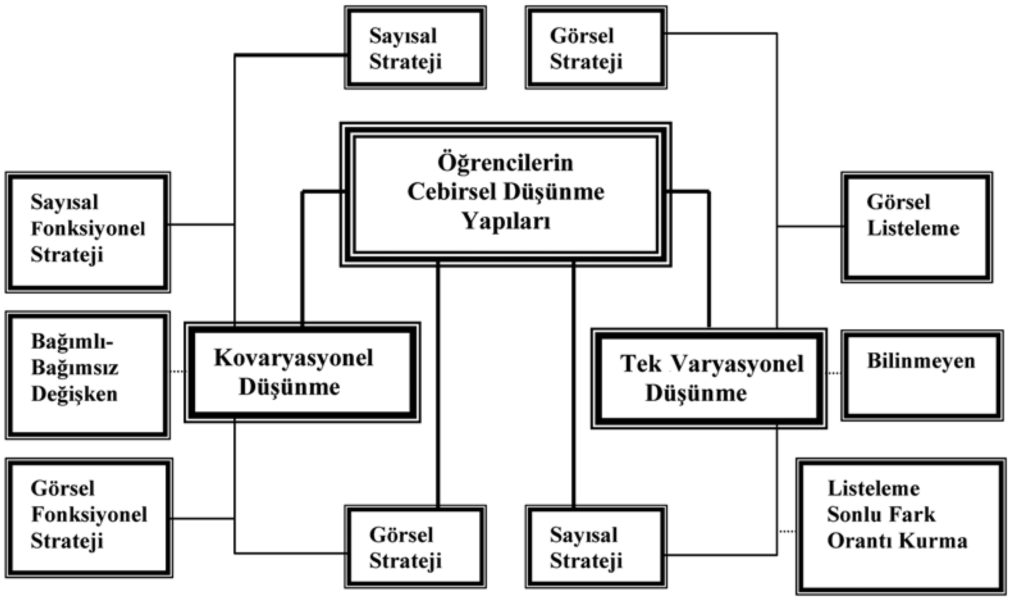
2. Öğretmenlerin örüntülerin genellenmesi konusunda öğrencilerin düşünme yapıları ile ilgili önbilgileri nelerdir?

3. Örüntülerin genellenmesi ile ilgili öğrenci cevap kâğıtlarının incelenmesi sonrasında öğretmenlerin öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları ile ilgili yorumlamaları nasıl değişmiştir?

Öğretmenlerin, öğrencilerin düşünme yapıları ile ilgili var olan bilgilerini anlamaya yönelik bu tür çalışmalar, öğretmenleri ve öğretmen eğitimcilerini bu yönde bilinçlendirmek ve böylelikle öğretmen eğitimine farklı bir pencere açmak açısından önem taşımaktadır.

Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Yapıları

Öğrencilerin genelleme stratejilerini inceleyen çalışmaların kapsamlı analizi, öğrencilerin düşünme yapıları ile ilgili Şekil 1'de özetlenen tabloyu ortaya çıkarmıştır. Buna göre öğrencilerin, cebirsel örüntüleri genellemede kullandıkları çözüm stratejileri genel olarak iki farklı düşünme yapısına dayanmaktadır. Bunlar *kovaryasyonel düşünme* ve *tek varyasyonel düşünme* olarak adlandırılmıştır (Waren, 2005). Kovaryasyonel düşünme, biri diğerine bağlı olarak değişen iki ya da daha fazla nicelik arasındaki fonksiyonel ilişkiyi görebilme olarak tanımlanabilir (Chazan, 1996). Bu düşünme yapısı ile genelleme yapan öğrenciler, bir örüntüdeki bağımlı ve bağımsız değişkeni belirleyip örüntünün tanımladığı genel kurala ulaşırlar. Bunun için ya şeklin numarası ile şekilden elde ettikleri sayısal veriler arasındaki ilişkiden (sayısal fonksiyonel strateji) ya da şeklin numarası ile şeklin görsel özelliği arasındaki ilişkiden (görsel fonksiyonel strateji) yola çıkarak bir genellemeye varırlar. Rivera'ya (2007) göre genelleme yaparken daha çok görsel stratejilerden faydalanan öğrenciler, cebirsel örüntülerdeki fonksiyonel ilişkileri daha kolay görebilmekte ve dolayısıyla daha iyi genelleme yapabilmektedirler. Fakat bu tür etkinliklerde öğrencilerin ağırlıklı olarak sayısal stratejilere başvurdukları söylenebilir (Amit & Neria, 2007; Becker & Rivera, 2005; Rivera, 2007; Rivera & Becker, 2007). Kovaryasyonel düşünme yapısına dayalı olarak genelleme yapan öğrenciler, değişken kavramını da belirli bir bilinmeyen değer yerine kullanmanın ötesinde, bir fonksiyonel ilişki kapsamında yorumlayabilmektedir (Becker & Rivera, 2005; Usiskin, 1988).



Şekil 1. Öğrencilerin Genelleme Stratejileri ve Bu Stratejilerin Altında Yatan Düşünme Yapıları

Tek varyasyonel düşünme yapısında ise öğrenciler, biri diğerine bağlı olarak değişen iki nicelik arasında (şekil ile şeklin pozisyonu) ilişki kurmak yerine, yalnızca örüntü içindeki sabit artıştan ya da azalıştan faydalanarak bir genellemeye varmaya çalışırlar (Waren, 2005). Bu düşünme yapısına dayalı bazı stratejileri kullanarak öğrenciler yakın pozisyondaki şekle ulaşabilirler; ancak istenilen uzak pozisyondaki herhangi bir şekli tahmin etmekte zorlanırlar (Rivera & Becker, 2007). Bu öğrenciler için değişken kavramı da fonksiyonel ilişkideki bağımlı-bağımsız değişkenden çok, problem çözmede kullanılan bilinmeyen kavramı gibidir (Usiskin, 1988). Becker ve Rivera' ya (2006) göre, bu durum daha çok sayısal stratejiler kullanmayı tercih eden öğrenciler için geçerlidir. Bunun nedeni ise, sayısal veriler üzerinden aritmetik mantığıyla genel bir ifadeye ulaşmaya çalışan öğrencilerin, şeklin yapısında gizli fonksiyonel ilişkiden uzaklaşmalarıdır. Yapılan bazı araştırmaların sonuçları da bu düşünceyi destekleyecek şekilde, tek varyasyonel düşünme yapısına dayalı stratejilerin genelde sayısal stratejiler olduğunu göstermektedir (Lannin, Barker, & Townsend, 2006; Rivera & Becker, 2007; Stacey, 1989). Bu stratejiler arasında, listeleme, sonlu fark, orantı kurma stratejileri sayılabilir.

"Görsel listeleme" ya da "sayısal listeleme" stratejisinde öğrenciler, şekli ya da şekilden elde ettikleri sayısal verileri istenen pozisyona ulaşana kadar sıralarlar. Bu stratejide şekil numaralarını göz önüne almaksızın, yalnızca şekiller arasındaki ilişkiden faydalanarak çözüme ulaşmaya çalıştıklarından, tek varyasyonel düşünme yapısı göze çarpmaktadır (Warren, 2005). Bir diğer sayısal strateji de "orantı kurma" stratejisidir. Bu stratejide öğrenciler, örüntüde yakın pozisyondaki şekil için elde ettikleri değerin katını alarak uzak pozisyondaki şekle karşılık gelen değeri bulmaya çalışırlar (Lannin ve diğerleri, 2006; Stacey, 1989). Fakat şekillerin büyüme oranı ile pozisyonları arasında doğru bir orantı bulunmadığından ve gerekli ekleme ya da çıkarmaları gözden kaçırdıklarından genellikle hatalı sonuçlara ulaşmaktadırlar. "Sonlu fark" (Becker & Rivera, 2006; Stacey, 1989) stratejisi de yine tek varyasyonel düşünme yapısına dayalı bir sayısal stratejidir. Diğer iki sayısal stratejidekine benzer bir düşünceyle, öğrenciler şekil ve şeklin pozisyonu arasındaki ilişkiye odaklanmak yerine, şekillere karşılık gelen sayı değerleri arasındaki sabit artıştan yola çıkarak genel bir kural bulmaya çalışırlar.

Öğretmenlerin Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Yapıları Hakkındaki Bilgileri

Etkili bir eğitim ve öğretim için bir öğretmenin sahip olması gereken bilgi ve becerilerin neler olduğu ve bunların öğretime olan etkileri yıllar boyu birçok araştırmaya konu olmuştur. İçerik bilgisinin önemine vurgu yapan çalışmalarla başlayan tarihsel süreçte Shulman'ın (1986) *pedagojik alan bilgisi* yaklaşımı, bir öğretmenin içerik bilgisini öğrencilerinin anlamlı öğrenebilmesi için şekillendirmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Özel olarak cebir öğretimi ile ilgili araştırmalara kavramsal çerçeve oluşturmak amacıyla, benzer bir çalışma da Artigue, Assude, Grugeon ve Lenfant (2001) tarafından ortaya konulmuştur. Bu çalışmada Shulman'ın öğretmen bilgisi tanımlamasına benzer olarak öğretmenlerin iyi bir cebir öğretimi için sahip olması gereken yeterlilikler 3 farklı boyutta ele alınmıştır: *Epistemolojik* boyut, *bilişsel* boyut ve *didaktik* boyut. Bunlardan bilişsel boyut, Shulman'ın pedagojik alan bilgisi tanımlamasına benzemekle birlikte özel olarak cebir öğretmenlerinin yeterliliklerinin değerlendirilmesinde kullanılabilecek boyuttur.

Shulman (1986), pedagojik alan bilgisi çerçevesinde, öğrencilerin herhangi bir konu alanında sahip oldukları önkavramalar ve kavram yanılgıları gibi daha çok düşünme yapıları ile ilgili bilgilerin, öğretmenlerin sahip olması gereken bilgiler açısından önemine vurgu yapmaktadır. Benzer şekilde, Artigue ve arkadaşları'nın (2001) tanımlamasında, öğretmenlerin öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarının gelişimi, cebirsel kavramları ve sembolleri yorumlama şekilleri, çözüm yaklaşımları, cebiri anlamadaki zorlukları ve kavram yanılgıları ile ilgili bilgileri, bilişsel boyutun alt boyutlarını oluşturmaktadır. Kieran (2007) ve Sowder (2007) da öğretmenlerin öğrencilerin düşünme yapıları ile ilgili bilgilerinin ve bu bilginin öğretim şekillerine yansımalarının, son zamanlarda öğretmen eğitimi ve mesleki gelişimi ile ilgili yapılan çalışmalarda üzerinde en çok durulan konulardan biri olduğunu vurgulamaktadır.

Yapılan araştırmalar, öğrencilerin düşünme yapıları, güçlük çektikleri konular, önkavramaları ya da kavram yanılgıları ile öğretmenlerin bu konudaki tahmin ve beklentileri arasında farklılıklar olduğunu göstermektedir. Örneğin, Nathan ve Koedinger'in (2000a, 2000b) öğrencilerin cebir konusundaki güçlükleri ile öğretmenlerin bunlar üzerine tahmin ve beklentilerini araştırdıkları çalışmada, bu ikisi arasında farklılıklar ortaya çıkmıştır. Buna göre öğrenciler gerçekte sembolik olarak ifade edilmiş cebir sorularını çözmede, sözel olarak ifade edilmiş cebir sorularına nazaran daha çok zorlanırken, öğretmenlerin bu konudaki tahmin ve beklentileri tam tersi yöndedir. Hadjidemetriou ve Williams (2002) tarafından yapılan çalışmada da öğrencilerin fonksiyonların grafiği ile ilgili sahip oldukları güçlükler ile öğretmenlerin bu konudaki beklentileri arasındaki farklılıklara işaret edilmiştir. Benzer şekilde, Bergqvist'in (2005) çalışması da öğretmenlerin öğrencilerin cebirle ilgili matematiksel bir hipotezin doğruluğunu ya da yanlışlığını gösterme konusundaki beklentileri ile öğrencilerin gerçek performansları arasındaki farklılıkları göstermektedir. Öğretmenlerin öğrencilerin kovaryasyonel düşünme becerilerine yönelik tahminlerini inceleyen Zeytun, Çetinkaya ve Erbaş (2010) ise, öğretmenlerin tahminlerinin kendi sınırlı kovaryasyonel düşünmeleri ile kısıtlı kaldığını göstermektedir.

Bu araştırma sonuçlarının yanı sıra, öğrencilerinin düşünme yapıları ile ilgili bilgi sahibi olan öğretmenlerin, bu bilgiyi öğrencilerin başarısına katkı sağlayacak bir sınıf ortamı yaratmak için kullanabileceğine işaret eden araştırma sonuçları da bulunmaktadır. Örneğin, Bilişsel Yönlendirmeli Öğretim (*Cognitively Guided Instruction*) yaklaşımı çerçevesinde yapılan araştırmalar, hizmetiçi eğitimlerle öğrencilerin düşünme yapıları hakkında bilgilendirilen ve bu bilgi üzerine kendi öğretim planlarını tasarlamaları için yönlendirilen öğretmenlerin etkili bir öğrenme ortamı yaratmadaki başarısını göstermektedir (Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang, & Loef, 1989; Fennema, Franke, Carpenter, & Carey, 1993). Doerr ve Lesh'in (2003) öğretmen eğitiminde model ve modelleme yaklaşımı, öğretmenlerin bir hizmetiçi eğitim sürecinde öğrencilerin düşünme yapılarını ortaya çıkaran araştırmaların sonuçları üzerinden bilgilendirildiği bilişsel yönlendirmeli öğretim yaklaşımına alternatif bir yaklaşımdır. Bu yaklaşım çerçevesinde yapılan çalışmalar, öğretmenlerin kendi sınıf ortamında öğrencilerinin düşünme yapılarına odaklanarak öğretim yöntemlerini bu yönde şekillendirmelerinin öğrenci başarısı yönünden olumlu sonuçlarına vurgu yapmaktadır (Doerr, 2006).

Yöntem

Veri Toplama

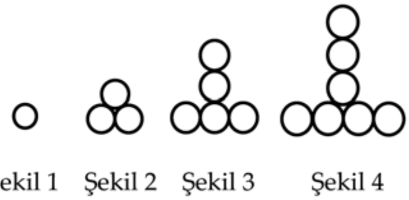
Bu çalışma, öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarını ve öğretmenlerin bu düşünme yapıları ile ilgili bilgilerini ortaya çıkarmayı amaçlayan bir özel durum çalışmasıdır. Çalışmaya, Ankara'daki bir Anadolu lisesinde görev yapmakta olan 3 matematik öğretmeni ve bu öğretmenlerin üç farklı şubeden toplam 49 öğrencisi katılmıştır. Öğrencilerden 24'ü 9-A, 16'sı 9-B ve 9'u 9-C sınıfındadır. 2007–2008 bahar döneminde gerçekleştirilen ve yaklaşık 3 hafta süren veri toplama sürecinde, ilkönce öğrencilerin düşünme yapıları ile ilgili, öğretmenlerin mevcut bilgilerini ortaya çıkarmak amacıyla birer saatlik yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Toplanan verilerin geçerliliğini ve güvenirliğini sağlamak için görüşmelerin öncesinde bir görüşme formu hazırlanmıştır (Yıldırım & Şimşek, 2008). Bu formda yer alan sorular, model ve modelleme teorisi çerçevesinde öğretmenlerin öğrencilerinin düşünme yapıları üzerine düşüncelerini ortaya çıkarmada kullanılan "düşünme şekilleri" formundan (Lesh & Clarke, 2000) esinlenerek geliştirilmiştir. Bu görüşmelerde, ilkönce öğretmenlere cebirsel örüntülerle ilgili bir genelleme etkinliği (Şekil 2) verilip incelemeleri istenmiştir. Daha sonra ise görüşme formunda yer alan sorular (örn: *Bu soruları çözerken öğrencilerin yararlanacakları sayısal veya görsel ipuçları hakkında neler düşünüyorsunuz*?) temel alınarak öğretmenlerle birebir görüşmeler yapılmıştır. Daha sonra, bu genelleme etkinliği öğretmenlerce sınıflarında uygulanmıştır. Uygulamanın ardından öğretmenlerle yine yaklaşık birer saatlik yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde de ilk görüşmedekine benzer sorular yöneltilmiştir; ancak bu defa öğretmenlerin tahminlerinden ya da beklentilerinden yola çıkarak değil de öğrencilerinin çözüm kâğıtlarını dikkatli bir şekilde inceleyerek soruları cevaplandırmaları istenmiştir. Uygulama öncesi ve sonrası yapılan görüşmelerde, öğretmenlerden izin alınarak cevapları ses kayıt cihazıyla kayda alınmıştır.

A. 10. şekilde kaç tane çember olmalıdır? Açıklayınız

B. 100. şekilde kaç tane çember olmalıdır? Açıklayınız?

C. Hayali bir 6. sınıf öğrencisine, yukarıdaki şekiller dizisinde herhangi bir şekildeki çember sayılarını nasıl bulması gerektiğini açıklayan bir mesaj yazınız.

D. "n." şekildeki çember sayısını bulmak için bir formül bulunuz.



Şekil 2. Genelleme Etkinliği (Becker & Rivera, 2006)

Cebirsel örüntülerin genellenmesi ile ilgili etkinlikler, özellikle cebire yeni giriş yapan öğrencilerin düşünme yapılarını, eğilimlerini, bunları etkileyen faktörleri incelemek isteyen araştırmacılar için önemli bir araç olmuştur (Amit & Neria, 2007; Becker & Rivera, 2006; Stacey, 1989; Waren, 2005). Bunun en önemli nedenlerinden biri, bu tür etkinliklerin, tek tip çözüm yolu olan ya da sadece sonuç odaklı rutin problemlerin aksine, öğrencilerin farklı çözüm yaklaşımlarına izin vermeleridir. Bu çalışmada kullanılan genelleme etkinliği de çalışmanın amacına uygun olarak, öğrencilerin farklı çözüm yaklaşımları, bu yaklaşımların altında yatan düşünme yapısı ve değişken kavramını algılama biçimleri ile ilgili önemli göstergeler sunacağına inanılarak seçilmiştir (Şekil 2). Genelleme etkinliğindeki ilk soru, öğrencilerin örüntüyü incelemeleri amacıyla konulmuş bir ısınma sorusudur. İkinci soru, öğrencilerin fonksiyonel düşünme yapısıyla, genelleme yapabilme becerilerini ölçerken, üçüncü soru yaptıkları bu genellemeyi sözel olarak ifade etme becerisini ölçen bir sorudur. Son soru ise, yapılan genellemelerin sembolik olarak yani değişken kavramı kullanarak ifadesini gerektirmektedir.

Becker ve Rivera (2006) tarafından geliştirilen bu etkinlik, yazarlar tarafından Türkçeye çevrilmiştir. Etkinliğin uyarlanması sürecinde, orijinal haline mümkün olduğunca bağlı kalabilmek ve anlaşılabilirliğinden emin olmak için bir matematik eğitimcisinden etkinliğin incelenmesi istenmiştir. Ayrıca etkinliğin pilot uygulaması, bir matematik eğitimi doktora öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir.

Verilerin Analizi

Bu çalışmanın verileri, öğrencilerin çözüm kâğıtları ve öğretmenlerle uygulama öncesi ve sonrası yapılan görüşmelerden oluşmaktadır. Elde edilen nitel veriler, içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Öğrencilerin çözüm kâğıtları iki aşamada analiz edilmiştir. İlk olarak öğrencilerin düşünme yapıları, bu konuda daha önce yapılmış çalışmaların sonuçlarından derlenerek hazırlanmış teorik çerçeve (Şekil 1) kapsamında analiz edilip sınıflandırılmıştır. Teorik çerçevede olmayan ve verilerde ortaya çıkan stratejiler de göz önünde bulundurularak öğrenci çözümleri ikinci kez analiz edilmiş ve tespit edilen stratejiler kullanılma yüzdeleriyle birlikte sunulmuştur. Öğretmen bilgileri ise, yapılan görüşmeler üzerinden, 3 temel kategoride analiz edilmiştir: Öğrencilerin çözüm stratejileri, bu stratejilerin altında yatan düşünme yapıları ve öğrencilerin değişken kavramını anlama ve kullanma biçimleri.

Bulgular

Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Yapıları

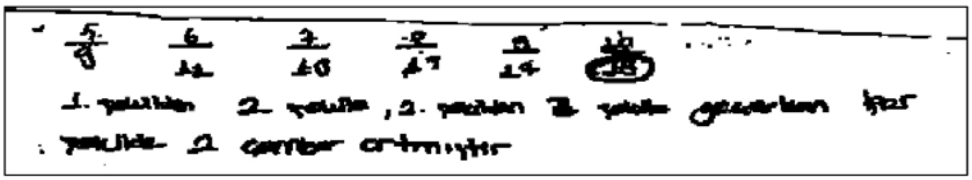
Öğrencilerin büyük bir bölümü (%88) genelleme etkinliğinde, cebirsel örüntüyü doğru bir şekilde genel bir fonksiyon ifadesine dönüştürebilmişlerdir. Ancak beklendiği gibi, bu süreçte farklı yaklaşımlar ve düşünme yapıları ortaya çıkmıştır. Çözüm stratejileri incelendiğinde, öğrencilerin 7 farklı çözüm stratejisi kullandıkları tespit edilmiştir. Görsel listeleme stratejisini hiçbir öğrenci kullanmazken, orantı kurma stratejisini (S3) 9-C sınıfında yalnız 1 öğrenci kullanmış, o da yanlış bir genelleme yapmıştır. 9-A sınıfından bir öğrenci de tek sayıların genel ifadesini yani (2n-1)'i kullanarak, sonuca gitmiştir (S6). Teorik çerçevede yer almayan, ancak, 9-A ve 9-B sınıfından birkaç öğrencinin başvurduğu diğer bir sayısal strateji de gruplama (S5) stratejisidir. Bu stratejide öğrenciler listeleme stratejisini gruplandırma yöntemiyle farklılaştırarak, 100'üncü adımdaki şekli bulmak için kullanmıştır. Diğer bir ifadeyle, öğrenciler listeleme yöntemindeki toplamsal ilişki yerine çarpımsal ilişkiden faydalanarak istenilen adımdaki şekle ulaşmaya çalışmışlardır. Belirlenen bu stratejiler, kullanılma oranları düşük olsa da farklılıkları vurgulamak adına tabloya eklenmiştir (Tablo 1)

Tablo 1.

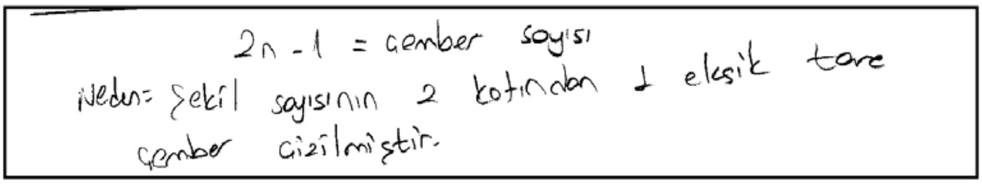
Öğrencilerin Çözüm Stratejilerini Kullanım Dağılımları

	9-A (n = 24)		9-B (n = 16)		9-C (n = 9)	
	Soru A	Soru B	Soru A	Soru B	Soru A	Soru B
S1: Listeleme	9 (%38)	0	9 (%56)	0	3 (%33)	0
S2: Sayısal fonk.	4 (%17)	6 (%25)	1 (%6)	3 (%19)	2 (%22)	3 (%33)
S3: Orantı kurma	0	0	0	0	0	1 (%11)
S4: Aritmetik dizi	6 (%25)	13 (%54)	0	1 (%6)	3 (%33)	4 (%44)
S5: Gruplama	2 (%8)	3 (%13)	0	2 (%13)	0	0
S6: Tek sayı	1 (%4)	1 (%4)	0	0	0	0
S7: Görsel fonk.	1 (%4)	1 (%4)	5 (%31)	6 (%38)	1 (%11)	1 (%11)
Y: Yanlış	1 (%4)	0	0	2 (%13)	0	0
B: Boş	0	0	1 (%6)	2 (%13)	0	0

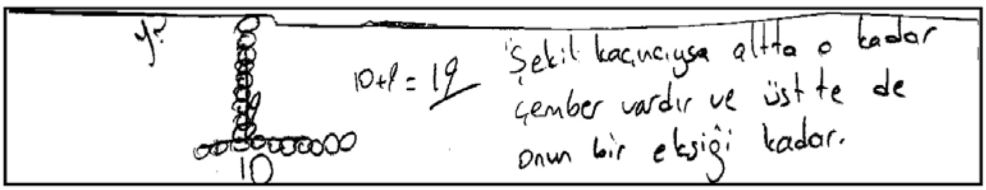
Öğrencilerin çözüm için başvurdukları 3 strateji teorik çerçeve ışığında kolayca gruplandırılabilmiştir. Örneğin, ilk sorunun çözümünde, her üç sınıfta da ağırlıklı olarak (9-A, %38; 9-B, %56; 9-C, % 33) tek varyasyonel düşünmeye dayalı listeleme stratejisi (S1) tercih edilmiştir (çözüm örneği için Şekil 3'e bakınız). İkinci sorunun çözümünde, 9-A (%25), 9-B (%19) ve 9-C (%33) sınıfı öğrencileri tarafından tercih edilen bir diğer strateji, sayısal fonksiyonel stratejidir (S2). Bu stratejide, öğrenciler şekil numarası ile şekildeki toplam çember sayısı arasındaki fonksiyonel ilişkiden yola çıkarak genelleme yapmışlardır (Şekil 4). Yine ikinci sorunun çözümünde, 9-B (%38) sınıfı öğrencilerinin en çok başvurduğu strateji, görsel fonksiyonel stratejidir (S7). Bu stratejide de öğrenciler çemberlerin diziliş şekli gibi görsel ipuçlarını kullanarak şekil ile şekil numarası arasındaki fonksiyonel ilişkiyi genelleyebilmişlerdir (Şekil 5).



Şekil 3. Listeleme Stratejisinin Kullanıldığı Bir Çözüm Örneği

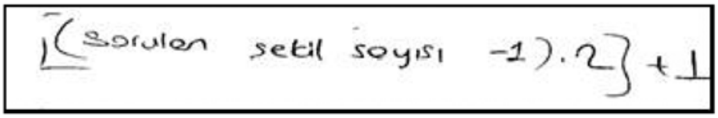


Şekil 4. Sayısal Fonksiyonel Stratejinin Kullanıldığı Bir Çözüm Örneği



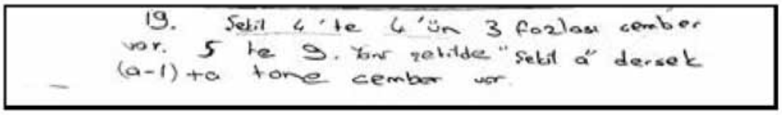
Şekil 5. Görsel Fonksiyonel Stratejinin Kullanıldığı Bir Çözüm Örneği

Bunların dışında, ikinci soruda özelikle 9-A (% 54) ve 9-C (% 44) sınıfı öğrencileri tarafından ağırlıklı olarak tercih edilen bir sayısal strateji daha belirlenmiştir. Bu stratejide öğrenciler, verilen örüntüde her defasında 2 çember artıyor olmasından yola çıkarak, ilk şekildeki 1 adet çembere, aradaki toplam artışı ekleyerek istenen pozisyondaki toplam çember sayısını veren bir formül elde etmişlerdir (Şekil 6). Bu stratejide kullanılan kuralın aritmetik dizinin genel terimi "$a_n = a_1 + (n-1).r$" olduğu anlaşılmaktadır. Bu nedenle, teorik çerçevede yer almayan bu sayısal stratejiye "aritmetik dizi stratejisi" (S4) adı verilmiştir. Bu stratejiyi kullanan öğrenciler, şekilsel örüntüyü, terimleri her bir şekildeki toplam çember sayısına eşlenen ve terimler arasındaki ortak farkı 2 olan bir aritmetik dizi olarak düşünüp, bu aritmetik dizinin genel formülünden de istenen sıradaki şeklin toplam çember sayısını hesaplayabilmişlerdir.



Şekil 6. Aritmetik Dizi Stratejisinin Kullanıldığı Bir Çözüm Örneği

Bulgular incelendiğinde, 9-A ve 9-C sınıfı öğrencilerinin ağırlıklı olarak sayısal, 9-B sınıfı öğrencilerinin görsel ipuçları kullanmayı tercih ettikleri açıktır. Etkinliğin en son sorusu, öğrencilerin cebirsel düşünebilmelerinin yanında düşündüklerini sembolik olarak ifade etme becerilerini ölçmeyi amaçlayan bir sorudur. Öğrencilerin hemen hepsi (%90), örüntüdeki fonksiyonel ilişkiyi veren genel kuralı yazabilmişlerdir. Yazamayanlar ise tek varyasyonel düşünmeye dayalı olan oran orantı ve gruplayarak listeleme stratejileri ile genelleme yapmaya çalışan öğrencileridir. Kovaryasyonel düşünme yapısına dayalı stratejileri kullanan öğrencilerin hepsi, düşündüklerini sembolik olarak da ifade edebilmişlerdir ve öğrencilerin cebirsel düşünme yapılarından, değişken kavramını fonksiyonel ilişki kapsamında yorumladıkları açıkça görülmektedir (Şekil 7).



Şekil 7. Değişken Kavramını Fonksiyonel İlişki İçinde Kullanan Öğrenci Çözümü

Aritmetik dizi stratejisinde, öğrencilerin değişken kavramını algılama biçimini belirleyebilmek zordur; çünkü yazdıkları genel kuraldaki n sembolünü bir bağımsız değişken olarak alıp almadıkları tam net değildir. Ancak, kovaryasyonel düşünme yapısına dayalı öğrencilerin değişken algısıyla karşılaştırıldıklarında, bu öğrencilerin değişkeni, bilinmeyen olarak algıladıkları söylenebilir.

Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Yapıları ile İlgili Öğretmen Bilgileri

Öğretmenlerin Önbilgileri

Her üç sınıfın öğretmenleriyle etkinlik uygulanmadan önce yapılan ve böyle bir genelleme etkinliğinde öğrencilerin kullanabilecekleri stratejilerin, yararlanabilecekleri ipuçlarının, genel olarak fonksiyonel düşünme yapıları ve değişken kavramını algılama biçimlerinin sorulduğu ön görüşmelerde, her üç öğretmen de bu etkinliğin öğrencilere kolay geleceğini ve birkaç öğrenci dışında sorulara doğru yanıt vereceklerini belirtmişlerdir. Yararlanacakları ipuçları konusunda 9-C sınıfı öğretmeni, öğrencilerinin genellikle görsel ipuçlarından yararlanmalarını beklediğini, diğer iki öğretmen ise öğrencilerin daha çok sayısal ipuçlarına başvuracaklarını öngörmüşlerdir. Öğrencilerin kullanabilecekleri stratejiler konusunda, 9-A sınıfı öğretmeni "tümevarım yöntemi" gibi genel bir cevap vermekle yetinirken, diğer iki öğretmen daha ayrıntılı olarak kullanabilecekleri birkaç stratejiyi tarif etmişlerdir (Tablo 2).

Tablo 2.

Öğrencilerin Çözüm Stratejileri ve Öğretmenlerin Bu Çözüm Stratejileri Hakkındaki Bilgileri

	9-A sınıfı öğretmeni	9-B sınıfı öğretmeni	9-C sınıfı öğretmeni
Ön görüşme	Tümevarım yöntemi	S1, S6, S7	S7, S6
Öğrenci Stratejileri	S1, S2, S4, S5, S6, S7	S1, S2, S4, S5, S7	S1, S2, S3, S4, S7
Son görüşme	S1, S2, S5, S6, S7	S1, S2, S5, S6, S7	S1, S2, S3, S7

Öğretmenlere, öğrencilerin fonksiyonel düşünme yapıları ilgili fikirlerinden önce, fonksiyonel düşünmeden ne anladıkları sorulmuştur. 9-B ve 9-C sınıflarının öğretmenleri, fonksiyonel düşünmeyi birbirine bağlı iki değişken arasındaki ilişkiyi görebilme olarak yanıtlarken, 9-A sınıfı öğretmeninin cevabı fonksiyon konusu ile ilgili alan bilgisi eksikliğine işaret etmektedir: "*Değişken cinsinden bir bağıntı yazıyorsanız, bunu bir fonksiyon olarak ifade edebilirsiniz. Yani tek değişkenli bir bağıntı olduğuna göre kesinlikle bir fonksiyondur şeklinde düşünebilirsiniz*." Bunun üzerine, herhangi bir anlam kargaşasını önlemek amacıyla, önce her üç öğretmene de yapılacak etkinlik çerçevesinde fonksiyonel düşünme ile ne kastedildiği açıklanmış, bu konudaki beklentileri daha sonra sorulmuştur. 9-B sınıfı öğretmeni, bu seviyedeki öğrencilerin aritmetiksel düşünmeye daha yatkın olduğunu ve fonksiyonel düşünmeye alışık olmadıklarını belirtirken, diğer öğretmenler, öğrencilerinin fonksiyonel düşünme yapısıyla soruları çözebilecekleri yönündeki beklentilerini dile getirmişlerdir.

Öğrencilerin değişken kavramını algılama biçimleri ile ilgili öğretmenler arasında yine bir görüş ayrılığı ortaya çıkmıştır. Örneğin, 9-B ve 9-C sınıflarının öğretmenleri, öğrencilerin değişken kavramını daha çok problem çözümünde kullanılan bilinmeyen olarak kullanmaya alışkın olduklarını, ancak fonksiyon kavramı bağlamında anlamakta ve kullanmakta güçlük çektiklerini ifade etmiştirler. 9-A sınıfının öğretmeni ise öğrencilerin değişken kavramı konusunda sorun yaşamadıklarını dile getirmiştir. Fakat aynı öğretmenin, öğrencilerin genelleme yaparken değişken kavramını nasıl kullanacakları ile ilgili yaptığı açıklamada, kendisinin de değişken kavramını yalnızca bilinmeyen olarak değerlendirdiği anlaşılmaktadır: "*Bilinmeyen bir şey yerine ya da daha sonra sonucunu bulmak üzere bilinmeyen dediğiniz sayı üzerine değişken atamayı biliyor öğrenciler*."

Öğretmenlerin Öğrencilerin Gerçek Çözümleri Üzerine Görüşleri

Etkinlik uygulandıktan sonra, öğrencilerin çözüm kâğıtları üzerinden, yukarıda bahsedilen üç boyutta, öğretmenlerin öğrencilerin düşünme yapıları ile ilgili görüşleri alınmıştır. 9-C sınıfı öğretmeni beklediği gibi öğrencilerin görsel ipuçlarından faydalanmadıklarını gözlemlemiştir. Benzer şekilde, 9-B sınıfı öğretmeni de beklediğinin aksine öğrencilerin daha çok görsel ipuçlarından faydalandıklarını tespit etmiştir. Öğretmenlerin uygulamadan önceki bilgileri ve beklentileri ile sonraki görüşleri arasındaki en belirgin fark, öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejileri konusundadır. Öğretmenler, sistemli ve dikkatli bir şekilde öğrenci çözüm kâğıtlarını incelediklerinde, daha önce tahmin edemedikleri çözüm stratejilerini tespit etmiştirler. Örneğin 9-B sınıfı öğretmeni, uygulamadan önce öğrencilerin kullanabilecekleri yalnızca üç farklı strateji beklerken, öğrencilerin çözüm kâğıtlarını incelerken, kullandıkları tüm stratejileri tespit edebilmiştir (Tablo1). Daha da önemlisi, bu stratejilerin altında yatan kovaryasyonel ya da tek varyasyonel düşünme yapısını da doğru bir şekilde belirleyebilmiştir.

Tablo 2'de de görüldüğü gibi diğer iki öğretmenin de öğrencilerin çözüm kâğıtları üzerinden, kullandıkları çoğu stratejiyi tespit edebildikleri görülmektedir. Bu tespitlerinin yanında, belirledikleri stratejileri kovaryasyonel ya da tek varyasyonel düşünme yapısı bakımından sınıflandırabilmişlerdir. Ancak, 9-A ve 9-C sınıflarının öğretmenlerinin, her iki sınıfta da öğrencilerin en çok başvurdukları strateji olan, aritmetik dizi stratejisini tespit edemedikleri görülmektedir. Her iki öğretmen de, 9-B sınıfı öğretmeninin aksine, öğrencilerin bu stratejisini yorumlayamamıştır. Ayrıca 9-A sınıfı öğretmeni, tam olarak tespit edemediği ve öğrencilerin aritmetik mantığıyla ortaya koydukları bu stratejinin fonksiyonel düşünme yapısına dayandığını ifade etmiştir.

Öğrencilerin değişken kavramı algısı konusunda da öğretmenler farklı gözlemlerde bulunmuşlardır. 9-B ve 9-C sınıfı öğretmenleri, öğrencilerin değişken kavramını daha çok bilinmeyen gibi algıladıklarını ifade ederken, 9-A sınıfı öğretmeni öğrencilerin değişkeni fonksiyon kavramı içinde kullanabildiklerini belirtmektedir: "*Son soruda açıklamış onu da zaten hepsi direkt yazmışlar; sayıdan bulmuş dolayısıyla bunu değişkene çevirmiş.*" Bu tespitte öğretmen, aslında değişkenin bilinmeyen olarak kullanıldığını ifade etmektedir.

Tartışma ve Sonuç

Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Yapıları

Öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları ile ilgili bulgular genel olarak incelendiğinde, göze çarpan sonuçlardan bir tanesi, öğrencilerin aynı soruya farklı düşünme yapıları ve çözüm stratejileri ile yaklaşmalarıdır. Burada, çalışmada kullanılan cebirsel bir örüntünün genellenmesi etkinliğinin rolü büyüktür. Yapılan benzer çalışmalarda vurgulandığı gibi, bu çalışmada da genelleme etkinliği cebire yeni giriş yapan 9. sınıf öğrencilerinin farklı düşünme yapılarını ve çözüm stratejilerini ortaya çıkarmıştır (Amit & Neria, 2007; Becker & Rivera, 2006). Hatta aynı öğrencilerin farklı sorulara farklı çözüm stratejileri ile de yaklaşabildiği görülmüştür. Örneğin, yakın pozisyondaki bir şekle ulaşmalarının istendiği birinci soruda öğrenciler genel olarak tek varyasyonel düşünmeye dayalı listeleme stratejisine kullanırken, uzak pozisyondaki bir şekle ulaşmaları istendiği ikinci soruda bir genelleme yapmaları gerektiğini düşünüp farklı bir stratejiyle yaklaşmışlardır. Diğer bir değişle, sorunun içeriği öğrencileri kovaryasyonel düşünmeye zorlamış, buna uygun bir strateji geliştirmelerini sağlamıştır (Waren, 2005).

Öğrencilerin geneli, örüntüyü oluşturan şekillerin yapısal özelliklerinden çok, şekilden elde ettikleri sayısal verileri kullanarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Bu sonuç, benzer çalışmaların sonuçlarını destekler niteliktedir (Amit & Neria, 2007; Becker & Rivera, 2005; Rivera, 2007; Rivera & Becker, 2007). Rivera'nın (2007) çalışması, görsel stratejileri kullanan öğrencilerin cebirsel örüntülerdeki fonksiyonel ilişkileri daha iyi görebildiklerini ve dolayısıyla daha iyi genelleme yapabildiklerini ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmada da benzer sonuçlara ulaşılmıştır. Genel olarak öğrenciler genelleme yapmada başarılı olsalar da boş bırakan ya da yanlış sonuca ulaşan az sayıda öğrencinin çözümleri incelendiğinde hepsinin sayısal stratejileri kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Buradan, genelleme yaparken sayılar arasındaki ilişkileri kullanan öğrencilerin yanlış sonuçlar elde edeceği gibi bir genelleme yapmak doğru olmaz. Ancak, Rivera'ya (2007) göre görsel stratejileri kullanmanın, öğrencilerin cebirsel örüntüleri anlamada olumlu etkileri bulunmaktadır.

Öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları ile ilgili diğer bir önemli sonuç da öğrencilerin aritmetik düşünme eğilimleri ile ilgilidir. Yapılan çalışmalar (örn: Blanton & Kaput, 2004), bu seviyedeki öğrencilerin fonksiyonel düşünme becerilerinin geliştiğine işaret etse de öğrenciler aritmetik mantığını sürdürmekten kolay kolay vazgeçememektedirler (Waren, 2005). Bu çalışmada ortaya çıkan ve öğrencilerin ağırlıklı olarak başvurdukları aritmetik dizi stratejisi de bunun en güzel örneklerinden bir tanesidir. Bu stratejide, diğer yaklaşımların aksine, öğrencilerin düşünme yapılarının kesin çizgilerle sınıflandırılması kolay olmamıştır. İlk bakışta, şekil numaralarını bir değişken olarak almaksızın, yalnızca şekiller arasındaki sabit artıştan faydalanarak aritmetiksel mantıkla genel bir kural bulmuş olmaları, tek varyasyonel düşünme yapısına dayalı bir strateji kullandıklarını düşündürmektedir. Hatta bu strateji, altında yatan düşünme yapısı ve değişken kavramının yorumlanma şekli bakımından sonlu fark (Becker & Rivera, 2006; Stacey, 1989) stratejisine benzer özellikler taşımaktadır.

Diğer yandan öğrencilerin şekil numarasını değişken olarak varsayarak bir kurala $(1+(n-1)\cdot 2)$ ulaşmış olmaları, onların fonksiyon stratejisini de kullanmış olabileceklerini düşündürmektedir.

Bununla birlikte, bu strateji öğrencilerin kovaryasyonel düşünme yapısına dayalı diğer stratejileriyle (S2, S7) karşılaştırıldığında, öğrencilerin bilinçli olarak şekil numarasını bir bağımsız değişken olarak almadıklarını düşündürmektedir. Çünkü S2 ve S7 stratejilerini kullanan öğrenciler, şekiller arasındaki 2 çemberlik artışa bakmaksızın şekil ile şekil numarası arasındaki ilişkiye odaklanırken, aritmetik dizi stratejisinde yalnızca şekiller arasındaki ilişkiyi göz önüne alarak bir kural elde etmişlerdir. Bu sonuç, Rivera ve Becker'ın (2007) öğrencilerin genelleme yaparken sayısal stratejileri tercih etmelerinin, değişkeni fonksiyon kavramı bağlamında yorumlamalarını engelleyen bir durum olduğu sonucuyla örtüşmektedir. Ancak, bu çalışmada olduğu gibi yalnızca öğrencilerin çözüm kâğıtları üzerinden onların değişken kavramını algılama biçimleri üzerine yorum yapmak mümkün değildir. Bu konuyla ilgili kesin bir yargıya varabilmek için, öğrencilerle, çözüm kâğıtları üzerinden, yarı yapılandırılmış birebir görüşmelere ihtiyaç vardır.

Sonuç olarak, bu çalışmanın bulguları özellikle cebirsel örüntülerin genellenmesi konusunda öğrencilerin çok farklı düşünme yapılarına sahip olabileceklerini ortaya koymuştur. Bu çalışmada ortaya çıkan 7 farklı çözüm stratejisi bunun en belirgin göstergesidir. Öğrencilerin farklı düşünme yapılarının ortaya çıkartıldığı ve desteklendiği bir öğrenme ortamı yenilenen eğitim-öğretim anlayışına uygun bireylerin yetişmesinde önemli bir rol oynayacaktır.

Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Yapıları ile İlgili Öğretmen Bilgileri

Bu çalışmanın diğer bir önemli sonucu, öğretmenlerin öğrencilerinin düşünme yapıları ile ilgili bilgi ve düşünceleri ile ilgilidir. Yapılan ön görüşmelerde, öğretmenlerin öğrencilerin çözüm yaklaşımları ile ilgili yanlış ya da eksik tahminlerde bulundukları gözlenmiştir. Örneğin, özellikle öğretmenlerden ikisi öğrencilerinin doğrusal bir örüntünün genellenmesinde kullanabilecekleri farklı çözüm stratejilerini tam olarak belirleyememiş ve öğrencilerin daha çok aritmetiksel düşünmeye yakın (S1, S4) stratejilere başvuracaklarını tahmin edememişlerdir. Öğretmenlerin öğrencilerinin düşünme yapıları ile ilgili öngörüleri ile öğrencilerin gerçek performansları arasındaki farklılıkların olduğu sonucu, bu konu üzerine yapılan benzer çalışmaların sonuçlarını desteklemektedir (Bergqvist, 2005; Hadjidemetriou & Williams, 2002; Nathan & Koedinger, 2000a, 2000b). Öğretmenlerin öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları ile ilgili öngörülerinin eksik olması iki nedene dayandırılabilir. Birincisi, öğretmenlerin, öğrencilerin düşünme yapısı ile ilgili karar verirken kendi düşünme yapılarından sıyrılamamaları ile ilgili olabilir. Öğretmenler, gerek öğrencilik gerekse mesleki deneyimlerinden, öğrenciler ve düşünme yapıları hakkında birtakım bilgi ve inançlara sahiptirler. Bu kalıplaşmış bilgi ve inançlar, onların öğrencileri ve düşünme yapıları ile ilgili değerlendirmelerini sınırlayabilmektedir (Doerr & Lesh, 2003; Zeytun ve diğerleri, 2010).

İkinci neden ise öğretmenlerin alan bilgilerindeki eksiklikler olabilir. Örneğin 9-A ve 9-C sınıfı öğretmenlerinin öğrencilerinin en çok başvurdukları aritmetik dizi stratejisinde ne yaptıklarını anlayamamaları bununla açıklanabilir. Aynı şekilde, 9-A sınıfı öğretmeninin fonksiyon konusundaki alan bilgisi eksikliği, öğrencilerin fonksiyonel düşünme yapısı konusunda doğru değerlendirmeler yapamamasına neden olmuştur. Bu sonuç, öğretmenlerin öğrencilerin düşünme yapıları üzerine bilgileri ile alan bilgileri arasındaki pozitif ilişkiyi destekler niteliktedir (Carpenter, Fennema, & Franke, 1996).

Bununla birlikte, öğretmenler, öğrencilerin çözüm kâğıtlarını eleştirel bir gözle incelediklerinde, öğrencilerin düşünme yapıları ile ilgili daha doğru tespitlerde bulunabilmişlerdir. Bu durum, öğretmenlerin kendi düşünme şekillerinden sıyrılarak öğrencilerin çözümlerine odaklandıklarında onların düşünme yapıları ile ilgili önemli ipuçları elde edebildiklerinin bir işaretidir. Ancak, öğretmenlerin sadece öğrencilerin çözüm kâğıtlarını incelemeleri, onların cebirsel düşünme yapılarını tam olarak anlayabilmeleri için yeterli olamayabilmektedir. Öğretmenlerin, öğrencilerin düşünme yapıları ile ilgili bilgilerinin gelişimi için öğrenci çözüm kâğıtlarını incelemenin yanı sıra, sınıf-içi öğrenci-öğretmen veya öğrenci-öğrenci diyaloglarına odaklanmaları da önemlidir (Doerr, 2006). Burada vurgulanmak istenen, her ne yolla olursa olsun öğretmenler öğrencilerinin kendi düşüncelerini ifade etmelerine izin verdiklerinde ve ortaya çıkan sözlü veya yazılı ürünlere odaklanıp öğrencilerin düşünme yapılarını anlamaya çalıştıklarında, öğrenci düşünme yapıları bağlamında pedagojik alan bilgilerini geliştirebilmektedirler.

Öğretmenlerin, öğrencilerin düşünme yapılarını bilmeleri, öğrencilerin matematik öğrenimlerini destekleyen bir sınıf ortamı oluşturmalarına yardımcı olabilecektir. Öğretmen eğitimi ile ilgili yapılan "Bilişsel Yönlendirmeli Öğretim" (*Cognitively Guided Instruction*) (Carpenter ve diğerleri, 1996) ve "Çok Katmanlı Program Geliştirme" (*Multi-tier Program Development*) (Clark & Lesh, 2003) gibi uluslararası mesleki gelişim programlarında, öğrencilerin düşünme yapıları üzerinden eğitilen öğretmenler, bu bilgileri eğitim-öğretim planlarına entegre edebilmiş ve öğrencilerinin başarılarına katkıda bulunabilmişlerdir (Carpenter ve diğerleri, 1989; Fennema ve diğerleri, 1993). Ülkemizde de öğretmen eğitiminde yapılacak bu tür faaliyetler, nitelikli öğretmenler yetiştirilmesine ve yenilenen öğretim programlarında belirlenen yakın ve uzak hedeflere erişilmesine olanak sağlayacaktır.

Kaynakça

Amit, M., & Neria, D. (2007, July). *Assessing a modeling process of a linear pattern task*. Paper presented at the 13th conference of the International Community of Teachers of Mathematical Modeling and Applications, Bloomington, IN.

Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B., & Lenfant, A. (2001). Teaching and learning algebra: Approaching complexity through complementary perspectives. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The* future *of the teaching and learning of algebra: Proceedings of the ICMI Study Conference* (pp. 21-32). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematic Education*, *Vol. 4* (pp. 121-128). Melbourne: PME.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). In Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., & Méndez, A. (Eds), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 95-101). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Bergqvist, T. (2005). How students verify conjectures: Teachers' expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8,* 171–191.

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Jonsen Høines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 135-142). Oslo: PME.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Franke, M. L. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal, 97*(1), 3-20.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C. P., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in the classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal, 26*(4), 499-531.

Chazan, D. (1996). Algebra for all students. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 455-477.

Clark, K. K., & Lesh, R. (2003). A modeling approach to describe teacher knowledge. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective* (pp. 159-173). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*, 180-18.

Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. In K. Stacey & H. Chick (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 267-290). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Doerr, H. M. (2006). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *62*, 3–24.

Doerr, H. M., & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-140). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Erbaş, A. K., Çetinkaya, B. ve Ersoy, Y. (2009). Öğrencilerin Basit Doğrusal Denklemlerin Çözümünde Karşılaştıkları Güçlükler ve Kavram Yanılgıları [Student difficulties and misconceptions in solving simple linear equations]. *Eğitim ve Bilim*, *34*(152), 44-59.

Erbaş, A. K., & Ulubay, M. (2008). Implementation of the new Turkish primary education mathematics curriculum in the sixth grade: A survey of teachers' views. *The New Educational Review*, *16*(3-4), 51-75.

Erbaş, A. K. ve Ersoy, Y. (2002). Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Eşitliklerin Çözümündeki Başarıları ve Olası Kavram Yanılgıları. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi Bildiri Özetleri Kitabı* (s: 988). Ankara: ODTÜ.

Fennema, E., Franke, M. L., Carpenter, T. P., & Carey, D. A. (1993). Using children's mathematical knowledge in instruction. American *Educational Research Journal, 30*(3), 555-583.

Hadjidemetriou, C., & Williams, J. (2002). Teachers' pedagogical content knowledge: Graphs, from a cognitivist to a situated perspective. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the* International *Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 57-64). Norwich, UK: PME.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of* research *on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3–28.

Lesh, R., & Clarke, D. (2000). Formulating operational definitions of desired outcomes of instruction in mathematics and science education. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education learning* (pp. 113-149). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000a). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction, 18*(2), 209-237.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000b). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(2)*, 168-190.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher, 101*(1), 69–75.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of preservice elementary majors on patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 140–155.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, (Ed.). *The ideas of algebra, K-12*. 1988 Yearbook. Reston, VA; National Council of Teachers of Mathematics.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 4* (pp. 305-312). Melbourne: PME.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (7. baskı). Ankara: Seçkin Yayınevi.

Zeytun, A. Ş., Çetinkaya, B. ve Erbaş, A. K. (2010). Matematik Öğretmenlerinin Kovaryasyonel Düşünme Düzeyleri ve Öğrencilerinin Kovaryasyonel Düşünme Becerilerine İlişkin Tahminleri. [Mathematics teachers' covariational reasoning levels and their predictions about students' covariational reasoning abilities]. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 10*(3), 1573-1612.