



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Fakultät Maschinenwesen Institut für Naturstofftechnik

Professur Verarbeitungsmaschinen/Verarbeitungstechnik

MODELLIERUNG DES FLEXIBLEN GESTELLS EINES PERIODISCH BEWEGTEN MECHANISMUS

Richard Zschech

Studiengang: Maschinenbau

Studienrichtung: Verarbeitungsmaschinen- und Textilmaschinenbau

Matrikelnummer: 4050388

Immatrikulationsjahr: 2014

FORSCHUNGSPRAKTIKUM *MODUL MB-24 - FORSCHUNGSPRAKTIKUM*

Betreuer

Dipl.-Ing. Christian Gollee, TU Dresden

Betreuender Hochschullehrer

Prof. Dr.-Ing. Jens-Peter Majschak

Eingereicht am: 26.04.2019



AUFGABENSTELLUNG FÜR DEN BELEG FORSCHUNGSPRAKTIKUM

MODUL MB-24 - FORSCHUNGSPRAKTIKUM

im Studiengang Maschinenbau

Studienrichtung Verarbeitungsmaschinen- und Textilmaschinenbau

Name Student*in Richard Zschech

Thema: Modellierung des flexiblen Gestells eines periodisch bewegten Mechanismus

Modeling of the flexible frame of a periodically moving mechanism

Kurzthema: Elastisches Maschinengestell

Zielsetzung:

Mechanismen in Verarbeitungsmaschinen bedürfen stets eines Hüll- und Stützsyste-
ms – dem Maschinengestell. Die Erfüllung der Genauigkeitsanforderung an einen
Mechanismus während einer Bewegungsaufgabe wird durch unvermeidliche Elas-
tizitäten, sowohl des Gestells als auch der Glieder des Mechanismus, erschwert.
Zusätzlich sind die Gestelle, aus Gründen der Schwingungsisolierung der Umge-
bung, häufig auf elastischen Maschinenfüßen gelagert. Diese Elastizitäten führen
allein durch nicht zu vermeidende statische Verformungen zu unerwünschten Be-
wegungsabweichungen. Größeren negativen Einfluss üben allerdings ungewollt
angeregte Schwingungen des Systems aus. Bei Kenntnis des dynamischen Verhal-
tens des Systems ist es möglich Bewegungen zu generieren, die das Schwingungs-
verhalten des Systems positiv beeinflussen. Voraussetzung hierfür ist die Erstel-
lung eines verifizierten und validierten mechanischen Modells des Systems, beste-
hend aus Gestell und Mechanismus.

Das Ziel der Arbeit besteht darin einen möglichen analytischen Modellierungsan-
satz der Elastostatik für das flexible zweidimensionale Gestell mit ebenem Mecha-
nismus zu recherchieren, zu untersuchen und umzusetzen. Die Vorzugslösung soll
in Form eines ausführbaren Skriptes in einer geeigneten Programmiersprachen-
implementiert werden. Alle Ergebnisse sind innerhalb der Arbeit nachvollziehbar
zu dokumentieren.

Ansprechpartner TU: Dipl.-Ing. Christian Gollee

Ausgehändigt am: 01.12.2018

Einzureichen am: 01.05.2019

Zu beachten ist die „Richtlinie zur Anfertigung und Gestaltung von Studienarbeiten ab IJ12“.

INHALTSVERZEICHNIS

Abkürzungsverzeichnis	V
Formelzeichen	VI
1 Einleitung	1
2 Stand der Technik	3
2.1 Vorbemerkungen	3
2.2 Biegung gerader Balken	4
2.3 Energiemethode	5
2.4 Finites Biegeelement	7
2.4.1 Vorbemerkungen	7
2.4.2 Elementsteifigkeitsmatrix	7
2.4.3 Elementmassenmatrix	10
2.4.4 Dämpfungsmatrix	11
2.4.5 Ergänzungen	12
2.5 Substrukturtechnik	14
2.5.1 Vorbemerkungen	14
2.5.2 Beispiel	14
2.6 Kinematik/Kinetik zwangläufiger Mechanismen	22
2.6.1 Vorbemerkungen	22
2.6.2 Kinematik	23
2.6.3 Kinetik	27
2.6.4 Beispiel	29
3 Präzisierte Aufgabenstellung	35
4 Aufbau Gesamtsystem und Verifizierung	36
4.1 Vorbemerkungen	36
4.2 Substrukturaufbau Gestell und Mechanismus	36
4.3 Bewegungsgleichungen von Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden	39
4.4 Überlagerung Gestell und Mechanismus	42
5 Zusammenfassung und Ausblick	48
Literatur	51

Abbildungsverzeichnis	52
Tabellenverzeichnis	53

ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS

BWG	Bewegungsgleichung
DGL	Differentialgleichung
LZI	Linear Zeit Invariant

FORMELZEICHEN

Sofern nicht anders angegeben, bedeuten **fett** gedruckte Symbole Matrizen bzw. vektorielle Größen. Bei Abweichungen dieser Auflistung werden die Formelzeichen und Indizes im Textteil beschrieben.

Symbol	Definition	Einheit
Griechische Symbole		
α	Rayleigh-Faktor Winkel	rad
β	Rayleigh-Faktor	
η	Achse Gliedkoordinatensystem	
ξ	Achse Gliedkoordinatensystem	
ρ	Dichte	kg/m ³
	Krümmungsradius	m
Φ	Vektor der Lagekoordinaten $\Phi = [\phi_i]$	
ϕ_i	i -te Lagekoordinate	
φ	Winkel	rad
	Lokale Koordinate	rad
Ω	Anregungsfrequenz	Hz
ω	Kreisfrequenz	1/s
ω_i	i -te ungedämpfte Eigenkreisfrequenz	1/s
Lateinische Symbole		
\mathbf{A}	Jacobimatrix $\mathbf{A} = [f_{i,l}]$	
A	Fläche	m ²
\mathbf{B}	Dämpfungsmatrix $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ Matrix der zweiten Ableitungen von \mathbf{A}	
\mathbf{C}	Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C} = [c_{jk}]$	
c	Federsteifigkeit	N/m
D	Lehrsches Dämpfungsmaß	
E	E-Modul	N/m ²
F	Antriebsfreiheitsgrad Kraft	N
\mathbf{F}	Vektor der Erregerkräfte	

Symbol	Definition	Einheit
\mathbf{f}	Vektor der Zwangsbedingungen	
f	Frequenz	Hz
	Zwangsbedingung	
f_i	i -te ungedämpfte Eigenfrequenz	Hz
	i -te Zwangsbedingung	
\mathbf{g}	Vektor der Ansatzfunktionen	
\mathbf{h}	Transformierter Vektor der Erregerkräfte	
J	rotatorisches Trägheitsmoment	kg m ²
L	Anzahl der Lagekoordinaten	
l	Länge	m
\mathbf{M}	Massenmatrix $\mathbf{M} = [m_{jk}]$	
M	Moment	N m
m	Masse	kg
	generalisierte Masse	
n, N	Elastischer Freiheitsgrade	
P	Elastischer Freiheitsgrade	
\mathbf{Q}	Vektor der verallgemeinerten Kraftgrößen	
Q	verallgemeinerte Kraft/Moment	N/N m
\mathbf{q}	Lagevektor	
q	verallgemeinerte Koordinate (Weg)	m
$\dot{\mathbf{q}}$	erste zeitliche Ableitung des Lagevektors	
\dot{q}	Geschwindigkeit	m/s
$\ddot{\mathbf{q}}$	zweite zeitliche Ableitung des Lagevektors	
\ddot{q}	Beschleunigung	m/s ²
\mathbf{r}_{Si}	i -te Vektor der Schwerpunktkoordinaten des Gliedes i	
R	Anzahl Substrukturen	
S	Schwerpunkt	
s	Weg	m
\mathbf{T}	Transformationsmatrix	
T	Flächenträgheitsmoment	m ⁴
t	Zeit	s
u	Längsverschiebung Balken	m
v	Querverschiebung Balken	m
\mathbf{W}	Vektor der Parameter $\mathbf{W} = [w_p]$	
w	geometrischer Parameter	
x	Lokale Koordinate	m
y	Lokale Koordinate	m
y'	erste partielle Ableitung der lokalen Koordinate	

Symbol	Definition	Einheit
y''	zweite partielle Ableitung der lokalen Koordinate	
z	Lokale Koordinate	m

Indizes

f	Nummer einer Antriebskoordinate ($f = 1, 2, \dots, F$)
i	Nummer eines Getriebegliedes ($i = 1, 2, \dots, I$) Nummer einer Eigenfrequenz Nummer eines Körpers
j	Nummer einer elastischen Koordinate ($j = 1, 2, \dots, N$) Zählindex
l	Nummer einer Lagekoordinate ($l = 1, 2, \dots, L$) Zählindex
p	Nummer eines Parameters ($p = 1, 2, \dots, P$) Zählindex
r	Nummer einer Substruktur
S_i	Nummer eines Schwerpunktes
k, z	Nummer einer elastischen Koordinate ($z = F + 1, F + 2, \dots, N$)

1 EINLEITUNG

Im Verarbeitungsmaschinenbau finden sich häufig ungleichmäßig übersetzende Mechanismen, welche Handhabungsvorgänge realisieren. Die sich meistens periodisch ändernden Massenkräfte spielen vor allem bei schnell laufenden Mechanismen eine wichtige Rolle. Eine einfache Methode zur Steigerung der Ausbringung einer Maschine stellt die Erhöhung der Antriebsgeschwindigkeit dar, welche allerdings quadratisch in die Bewegungsgleichungen (BWGn) von Mechanismen eingeht. Je nach Mechanismus entstehen dabei hohe dynamische Kräfte, welche ein Vielfaches der eigentlich benötigten Prozesskraft betragen. Sind solche Mechanismen in vergleichsweise elastischen Gestellen gelagert, können somit Schwingungen entstehen, welche eine exakte Ansteuerung einer Position im Raum nicht mehr möglich macht.

Neben der erhöhten Wirkung der Antriebsgeschwindigkeit auf die resultierenden Massenkräfte kann auch das zugrundeliegende Bewegungsgesetz eine wichtige Rolle für die Schwingungsanregung des Gestells spielen. Vor allem ruckbehaftete Bewegungsgesetze regen ein breites Spektrum des Maschinengestells an, da sie, ähnlich wie ein Hammerschlag, einen kurzen Impuls in das Gestell eintragen.

Die Theorie der Mechanismendynamik ist schon seit längerem bekannt, so weist [DV89] auf die Anfänge der Theorie der starren Maschine durch L. Euler (1707-1783) und J. L. Lagrange (1736-1813) hin. Der vor allem für die Mechanismendynamik wichtige Begriff der „verallgemeinerten Masse“ bzw. der „reduzierten Masse“ wurde bereits durch F. Grashof (1826-1893) im Jahre 1883 eingeführt [Gra83]. Grashof hatte damals, unter Anderem wichtige Zusammenhänge zum Ungleichförmigkeitsgrad und erste Ansätze zum Massenausgleich von Mechanismen beschrieben und sprach in diesem Zusammenhang von der „lebendigen Kraft“, also der dynamischen Kraft von bewegten Massen. Er stellte bereits fest, dass durch die besonderen Übertragungsfunktionen von Mechanismen, sich die Massenwirkungen ändern und zeigte Wege auf, diese Änderungen zu beschreiben und evtl. auszugleichen.

Trotz der langen Zeit die seitdem verstrichen ist, behalten die analytischen Behandlungen von kinetostatischen und dynamischen Zusammenhängen von Mechanismen bis heute Relevanz. Die numerische Behandlung von Mechanismen hat sich zwar wesentlich verbessert und immer schnellere Rechenleistungen lassen ebenfalls immer kompliziertere Berechnungen zu. Jedoch bieten sie nach wie vor keine Antworten auf das „Innenleben“ eines dynamischen Systems. Ohne zugrundeliegende BWGn lassen sich die dynamischen Eigenschaften nur abschätzen und auch dann sind, durch die komplizierten Zusammenhänge innerhalb eines Mechanismus, Gesetzmäßigkeiten schwierig

zu finden.

Wie bereits angedeutet sind die Grenzen der Theorie der starren Maschine relativ schnell erreicht und auftretende Verformungen der Mechanismenlagerung haben einen zu großen Einfluss, als dass diese vernachlässigt werden könnten. Eine Betrachtung des elastischen Gestells ist damit ein erster Ansatzpunkt zur exakten Beschreibung der Bewegung von Mechanismen. Nicht betrachtet werden in dieser Arbeit Gelenk- bzw. Gliedelastizitäten sowie die analytischen Lösungen der Gleichungssysteme der Differentialgleichungen (DGLn). Die Überlagerung von bereits einem starren Mechanismus und elastischen Gestells ist in seiner Gesamtheit kein Linear Zeit Invariantes (LZIs) System mehr. Die sich ändernden Trägheitseigenschaften des Mechanismus ergeben veränderliche Systemmatrizen, deren Lösung gesondert untersucht werden muss. Bevor jedoch das Gleichungssystem der DGLn gelöst werden kann, muss ein Weg gefunden werden, den Mechanismus und das Gestell in Abhängigkeit zueinander zu bringen. Diese Arbeit möchte die vorhandenen Grundlagen der Maschinen- und Mechanismendynamik nutzen, um dieses Zusammenspiel zu beschreiben.

Die Erkenntnisse dieser Arbeit sollen in einer weiteren Arbeit genutzt werden, um einen Optimierungsalgorithmus zu beschreiben, welcher die Bewegungsplanung des Mechanismus, unter Berücksichtigung des elastischen Gestells, hinsichtlich der Bewegungsgüte optimiert. Die Professur des Verarbeitungsmaschinenbaus besitzt einen vergleichbaren Versuchsstand. Dieser besteht aus einem Rahmengerüst in welchem ein zweidimensionaler Mechanismus gelagert wird. Je nach gewähltem Bewegungsgesetz wird das Gestell mehr oder weniger angeregt, was die Annahme der Rückwirkungsfreiheit widerlegt.

2 STAND DER TECHNIK

2.1 VORBEMERKUNGEN

Die Überführung des starren in ein elastisches Gestell erfordert vor allem die Auseinandersetzung mit finiten Biegeträgern. Das Ziel dieser Arbeit ist ein Matlabskript, mit welchem die Durchbiegung, infolge von periodischen Bewegungen eines Mechanismus, numerisch berechenbar ist. Der Ansatz der gewählt wird, ist die Diskretisierung des Gestells mit finiten Biegeelementen. Der Vorteil dieser Methode ist, dass nur das Verhalten eines einzelnen Biegeträgers bekannt sein muss, welcher anschließend aneinandergereiht den Rahmen ergibt, in welchem der Mechanismus gelagert ist.

Die Aneinanderreihung erfordert die Anwendung der Substrukturtechnik, welche sich als äußerst zielführend erwiesen hat. Komplizierte dynamische Systeme können mittels der Substrukturtechnik zu großen Gleichungssystemen aufgebaut werden, welche anschließend numerisch ausgewertet werden können. Ein Vorteil der sich bei der Anwendung dieser Methode ergibt, sind die sich ergebenden Bandmatrizen. Diese entstehen automatisch aufgrund der Substrukturtechnik und bieten in der Numerik den Vorteil der schnellen Berechenbarkeit. Damit das finale dynamische System korrekt ist, ist es erforderlich den korrekten Energieinhalt einer Substruktur zu bestimmen. Die Beschreibung der Verformung eines finiten Biegeelementes wird daher mittels der Biegelinie bzw. dem Satz von Castigliano erfolgen. Somit ist die gesamte elastische Verformungsenergie des Trägers erfasst.

Zum Verständnis der Gesamtmaterie soll in diesem Kapitel der Aufbau eines einzelnen Biegeelementes unter kurzer Erläuterung der oben genannten Grundlagen beschrieben werden. Die Substrukturtechnik wird ebenfalls eingeführt da sie für das Verständnis dieser Arbeit essentiell ist.

Für die Biegetheorie wurde vor allem [Bal14] verwendet, ebenso für die Theorie des Satzes von Castigliano. Bei der Überführung der Biegetheorie von Kontinua in finite Biegeelemente wurden die Werke [DD13] und [DH16] verwendet. Vor allem [DD13] ist bei der Bearbeitung von computergestützten Biegeproblemen zu nennen. Dieses Buch enthält umfangreiches Wissen, welches von einem breiten Onlineangebot wie interaktiven Berechnungsmodulen, unterstützt wird. Bei dem Aufbau des Matlabskriptes während dieser Arbeit wurde auf diese Onlinetools* zurückgegriffen. Bei der Beschreibung maschinendynamischer Probleme ist das Standardwerk [DH16] zu empfehlen. Zur Bearbeitung der Mechanismendynamik wurde vor allem [DV89] genutzt. [DV89] enthält ei-

*<http://www.tm-interaktiv.de/>

ne sehr detaillierte Beschreibung der dynamischen Charakteristika von Mechanismen. [DV89] hat vor allem zum Verständnis der Bewegungsgleichungen in Mechanismen beigetragen.

Neben diesen Grundlagen wurde weiterhin die Dissertation [Ngu86] verwendet. In ihr befinden sich Ausführungen zur Lagerung von Mechanismen in Gestellen. Dabei werden verschiedene Aspekte der dynamischen Stabilität von Mechanismen behandelt. Vor allem das Kapitel zur Lagerung von starren Mechanismen in elastischen Gestellen war für die Bearbeitung dieses Beleges von großer Bedeutung.

Die genannten Quellen wurden hauptsächlich verwendet. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden andere Quellen gesondert vermerkt.

2.2 BIEGUNG GERADER BALKEN

Das Gestell, in welchem der Mechanismus des Versuchsstandes gelagert ist, kann als Rahmentragwerk betrachtet werden. Die Beschreibung eines einzelnen Rahmenabschnittes erfolgt durch Biegebalken. Die Theorie der Biegebalken ist hinlänglich bekannt und soll hier nicht erläutert werden. Jedoch soll der Übergang zur Beschreibung einzelner finiter Biegeelemente gezeigt werden, weshalb einzelne Betrachtungen der Biegetheorie nützlich sind.

Über die Betrachtung der Differenzialgleichung der elastischen Linie gelangt man zur Beschreibung der Verformungen eines Balkens. Elastische Verformungen sind für die dynamische Betrachtung unabdingbar, denn in ihnen sind potentielle Energien gespeichert. Diese werden im Weiteren, durch die Ableitung äquivalenter Steifigkeiten, ein Schwingungssystem beschreiben mit den beteiligten Massen.

Der Krümmungsradius ρ einer Kurve kann durch den Zusammenhang

$$ds = \rho d\varphi \quad (2.1)$$

beschrieben werden, worin ds die differentielle Änderung der Bogenlänge und $d\varphi$ die differentielle Änderung des Winkel darstellen. Abbildung 2.1 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Beim fortschreiten auf der X-Achse mit dx wird der nächste Punkt auf der Kurve durch $y(x_2) = y(x_1) + dy$ beschrieben. Mit diesen beiden Längenänderungen kann ein Dreieck beschrieben werden, auf welchem die Hypotenuse die Bogenlängenänderung darstellt, siehe Abbildung 2.1 rechts. Mit $\varphi = \arctan(\frac{dy}{dx})$ und dem Zusammenhang $\frac{d \arctan(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, kann (2.1) geschrieben werden zu

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.2)$$

Es ist y die Verschiebung des Balkens, y' der Anstieg und y'' die Änderung des Anstie-

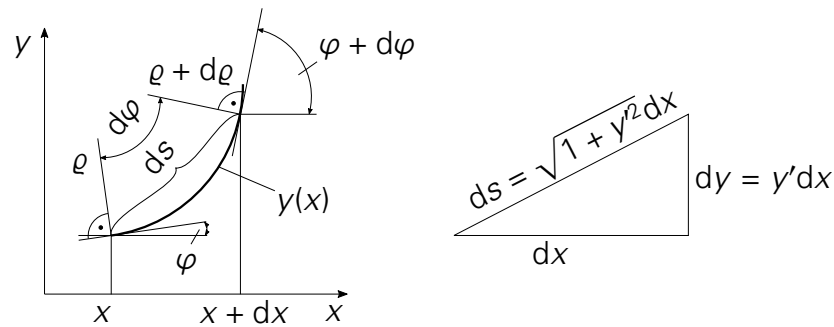


Abbildung 2.1 Grafische Darstellung zur Berechnung des Krümmungsradius nach [Bal14]

ges der Verschiebung. Die rechte Seite von (2.2) beschreibt die Krümmung der Kurve $y(x)$. Für elastische Materialien, welche eine große Verformung zulassen, muss mit (2.2) gerechnet werden. Im Falle eines Stahlträgers können jedoch kleine Verformungen und Verdrehungen angenommen werden, weshalb gilt $\varphi \ll 1$ und $y' \ll 1$. Mit der Forderung nach einem immer positiven Krümmungsradius muss bei Öffnungen der Kurve entgegengesetzt zur y -Achse ein Minus eingefügt werden. Mit dem Zusammenhang zwischen dem Biegemoment M_b , der Biegesteifigkeit ET und dem Krümmungsradius ρ , ergibt sich mit den genannten Forderungen und (2.2) die DGL der elastischen Biegelinie

$$\frac{M_b}{ET} = \frac{1}{\rho} = -y'' \quad (2.3)$$

Nach zweimaliger Integration ergibt sich die lokale Verschiebung $y(x)$ für das zugehörige Biegemoment $M_b(x)$.

2.3 ENERGIEMETHODE

Die elastischen Verformungen von Balken, wie sie durch Integration von (2.3) ermittelt werden können, ist vergleichbar mit dem Spannen einer Feder. Jede elastische Verformung einer Struktur speichert potentielle Energie. Das gilt für Verschiebungen und Verdrehungen. Um später den korrekten Energieinhalt eines finiten Elementes bestimmen zu können, muss daher neben der Verschiebung auch die Verdrehung berücksichtigt werden. Bezeichnet man die Verschiebungen eines Balkens an einer beliebigen Stelle i mit v_i und die zugehörige Verdrehung mit φ_i , so ergibt sich die gesamte Verzerungsenergie U eines durch n Kräfte belasteten Balkens zu

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (F_i v_i + M_i \varphi_i) \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Somit setzt sich die gesamte gespeicherte Energie des Balkens linear aus allen angreifenden Belastungsgrößen zusammen. (2.4) setzt lineares Hooksches Material voraus, was für diese Arbeit gegeben ist. Dieser lineare Zusammenhang setzt sich auch in der weiteren dynamischen Betrachtung fort. Demnach kann an Stellen der Lasteinleitung eine äquivalente Steifigkeit und Masse diskretisiert und ein Feder-Masse-Element angenommen werden. Wird anschließend eine Krafteinleitung an einem der Schwinger angenommen, teilt sich der gesamte Energieinhalt des verformten Balkens auf alle Schwinger auf. Damit kann ein Mehrfreiheitsgradsystem beschrieben werden, welches mit seinen Eigenfrequenzen schwingt. Durch die Linearität von (2.4) sind alle Schwinger miteinander gekoppelt und die Auslenkung eines einzelnen Schwingers hat eine Rückwirkung auf alle anderen Schwinger.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden für ein Tragwerk Stellen zur Diskretisierung, also Freiheitsgrade in der Ebene, festgelegt. Dabei handelt es sich um Verschiebungen in X,Y und einer Verdrehung um die Z-Achse. An diesen Stellen werden Auslenkungen und Verdrehungen für gegebene Belastungen gesucht. Durch die Beschreibung des dynamischen Verhaltens über Feder-Masse-Schwinger wird für jede Bewegung eines Freiheitsgrades eine Steifigkeitsbeziehung gesucht. Aufgrund des linearen Verhaltens, kann (2.4) partiell nach den Belastungen abgeleitet werden, was die jeweiligen Verformungen ergibt. Bei Auftreten einer Querkraftbiegung um die X- Achse ergibt sich mit dem Satz von Castigliano eine Verschiebung v_k durch eine Kraft F_k durch folgenden Zusammenhang

$$v_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} = \int_l \left\{ \frac{M_{bx}}{ET_{xx}} \frac{\partial M_{bx}}{\partial F_k} \right\} dz. \quad (2.5)$$

Die Vereinfachung auf nur eine Beanspruchungsrichtung ist gerechtfertigt, da kompliziertere Rahmenstrukturen im späteren Verlauf aus einem einfachen finiten Biegeelement beliebig zusammengesetzt werden können. Spezielle Belastungen infolge von Torsion oder Querkraftschub werden hier vernachlässigt. Bei dreidimensionalen Strukturen müssen mindestens noch die Biegebeanspruchungen um die Y- bzw. Z-Achse berücksichtigt werden. Das Vorgehen für Verschiebungen in weitere Raumrichtungen ist äquivalent. Die Verdrehung φ_k infolge eines Biegemomentes um die X-Achse ergibt sich durch

$$\varphi_k = \frac{\partial U}{\partial M_k} = \int_l \left\{ \frac{M_{bx}}{ET_{xx}} \frac{\partial M_{bx}}{\partial M_k} \right\} dz. \quad (2.6)$$

2.4 FINITES BIEGEELEMENT

2.4.1 VORBEMERKUNGEN

In diesem Kapitel sollen die Elementsteifigkeits- und Massenmatrix hergeleitet werden. Das belastete finite Biegeelement ist in Abbildung 2.2 dargestellt, wobei die Kraft- und Deformationsgrößen angetragen wurden, welche in dieser Arbeit berücksichtigt werden. Bei dem Aufbau des gesamten Gestells im späteren Verlauf der Arbeit wird vorausgesetzt, dass die Längen der finiten Elemente konstant sind. Auch der Querschnitt wird als konstant über der Länge angenommen. Dadurch vereinfacht sich die theoretische Betrachtung, da bei der Diskretisierung des Gestells lediglich eine Steifigkeits- und eine Massenmatrix benötigt werden. Da die sich ergebenden Systemmatrizen des finiten Biegeelementes längenabhängig sind, müssen bei einer Diskretisierung mit variablen Elementlängen entsprechende Anpassungen der Systemmatrizen vorgenommen werden, um längere oder kürzere Abschnitte umsetzen zu können.

Bei Bildung der Elementsystemmatrizen wird die Superposition genutzt, um die Gleichungen einfacher aufstellen zu können. Das sich die Gesamtdeformation aus der linearen Addition verschiedener Lastfälle zusammensetzt, wurde im Kapitel Energiemethode erläutert.

2.4.2 ELEMENTSTEIFIGKEITSMATRIX

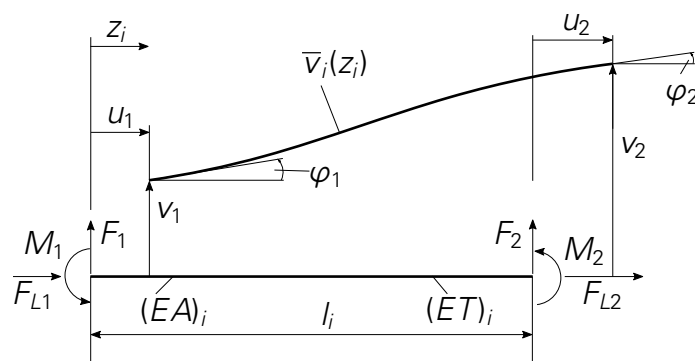


Abbildung 2.2 Darstellung der Verformung eines freien Biegebalkens mit eingetragenen Kraft- und Deformationsgrößen

Für das Biegeelement in Abbildung 2.2 wird zuerst das linke Schnittufer als feste Einspannung angenommen. Dabei werden die Kraftgrößen des linken Schnittufers F_1 , M_1 und F_{L1} zu Reaktionsgrößen. Das Reaktionsmoment M_{b1} ergibt sich somit zu

$$M_{b1} = -\bar{F}_2 z - \bar{M}_2. \quad (2.7)$$

Hierbei wurden die Kraftgrößen umbenannt, damit erkenntlich ist, dass sich bei dieser

Herangehensweise immer nur ein Teil der Gesamtlösung ergibt. Am Ende müssen die Kraftgrößen nach dem Superpositionsprinzip noch addiert werden, damit sich die korrekten Verschiebungsgrößen, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, ergeben. Setzt man (2.7) in (2.5) ein, ergibt sich die Verschiebung v_2 zu

$$v_2 = \frac{1}{ET} \int_l \left[-\bar{F}_2 z - \bar{M}_2 \right] \frac{\partial M_{b1}}{\partial \bar{F}_2} dz, \quad (2.8)$$

wobei die partielle Ableitung $\frac{\partial M_{b1}}{\partial \bar{F}_2} = -z$ ist. Das Ergebnis der partiellen Ableitung in (2.8) eingesetzt und integriert ergibt

$$v_2 = \frac{1}{ET} \left[\frac{1}{3} \bar{F}_2 l^3 + \frac{1}{2} \bar{M}_2 l^2 \right]. \quad (2.9)$$

Die Verdrehung φ_2 ergibt sich durch Einsetzen von (2.7) in (2.6)

$$\varphi_2 = \frac{1}{ET} \int_l \left[-\bar{F}_2 z - \bar{M}_2 \right] \frac{\partial M_{b1}}{\partial \bar{M}_2} dz, \quad (2.10)$$

der Ausdruck der partiellen Ableitung ergibt $\frac{\partial M_{b1}}{\partial \bar{M}_2} = -1$. Diesen Ausdruck in (2.10) eingesetzt und (2.10) integriert, ergibt die Verdrehung φ_2

$$\varphi_2 = \frac{1}{ET} \left[\frac{1}{2} \bar{F}_2 l^2 + \bar{M}_2 l \right]. \quad (2.11)$$

Die Umstellung nach den Kraftgrößen des Gleichungssystems aus (2.9) und (2.11) ergibt die Ausdrücke

$$\bar{F}_2 = \frac{ET}{l^3} (12v_2 - 6l\varphi_2), \quad \bar{M}_2 = \frac{ET}{l^2} (-6v_2 + 4l\varphi_2). \quad (2.12)$$

Für den zweiten Lastfall wird das rechte Schnittufer als Einspannung angenommen. Damit ergibt sich das Reaktionsmoment M_{b2} zu

$$M_{b2} = \hat{F}_1 z - \hat{M}_1. \quad (2.13)$$

Die Deformationsgrößen v_1 und φ_1 ergeben sich wieder mit (2.5) und (2.6)

$$v_1 = \frac{1}{ET} \left[\frac{1}{3} \hat{F}_1 l^3 - \frac{1}{2} \hat{M}_1 l^2 \right], \quad \varphi_1 = \frac{1}{ET} \left[-\frac{1}{2} \hat{F}_1 l^2 + \hat{M}_1 l \right], \quad (2.14)$$

und nach den Kraftgrößen umgestellt ergibt sich

$$\hat{F}_1 = \frac{ET}{l^3} (12v_1 + 6l\varphi_1), \quad \hat{M}_1 = \frac{ET}{l^2} (6v_1 + 4l\varphi_1). \quad (2.15)$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich die jeweiligen Kraftgrößen in den

gedachten Einspannungen, also durch einsetzen der Kraftgrößen (2.15) in (2.13) und (2.12) in (2.7)

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 = -\bar{F}_2 &= \frac{ET}{\beta^3} (-12v_2 + 6l\varphi_2), & \bar{M}_1 = -\bar{F}_2l - \bar{M}_2 &= \frac{ET}{\beta^2} (-6v_2 + 2l\varphi_2) \\ \hat{F}_2 = -\hat{F}_1 &= \frac{ET}{\beta^3} (-12v_1 - 6l\varphi_1), & \hat{M}_2 = \hat{F}_1l - \hat{M}_1 &= \frac{ET}{\beta^2} (6v_1 + 2l\varphi_1).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Durch Addition aller Lastfälle ergeben sich die finalen Kraftgrößen am finiten Biegeelement

$$\begin{aligned}F_1 &= \hat{F}_1 + \bar{F}_1, & M_1 &= \hat{M}_1 + \bar{M}_1 \\ F_2 &= \hat{F}_2 + \bar{F}_2, & M_2 &= \hat{M}_2 + \bar{M}_2.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Die Längskraft F_{L2} ergibt sich nach

$$F_{L2} = \frac{EA}{l}(u_2 - u_1) \quad (2.18)$$

und steht mit F_{L1} im Gleichgewicht

$$F_{L1} + F_{L2} = 0. \quad (2.19)$$

Aus (2.17), (2.18) und (2.19) kann die Elementsteifigkeitsmatrix C_i generiert werden,

$$\begin{bmatrix} F_{L1} \\ F_1 \\ M_1 \\ F_{L2} \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{ET}{\beta^3} \begin{bmatrix} \frac{A l^2}{T} & 0 & 0 & -\frac{A l^2}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -\frac{A l^2}{T} & 0 & 0 & \frac{A l^2}{T} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = C_i \mathbf{q}. \quad (2.20)$$

Durch das wiederholte Einsetzen der Lösungen in die Ansätze der gedachten Einspannungen ist die Elementsteifigkeitsmatrix **singulär**. Damit existiert keine Inverse dieser Matrix und es ist wichtig zu erwähnen, dass, wenn Rahmenstrukturen mit dieser Matrix aufgebaut werden, weitere Randbedingungen für die Lagerungen notwendig sind. Durch ergänzende Randbedingungen für die Lagerungen, wird die finale Steifigkeitsmatrix des Gestells wieder **regulär**. Eine genauere Erläuterung folgt in den weiteren Kapiteln.

2.4.3 ELEMENTMASSENMATRIX

Mit dem Verfahren von Ritz kann der Verschiebungsverlauf $\bar{v}_i(z_i)$ des Biegeelementes in Abbildung 2.2 über

$$\bar{v}_i(z_i) = \mathbf{g}(z_i)\mathbf{v}_i \quad (2.21)$$

beschrieben werden[†]. $\bar{v}_i(z_i)$ ist das Verschiebungsfeld und beinhaltet alle beliebigen Verschiebungen $\bar{v}_i(z_i) = [\bar{v}_i(z_i)]$. $\mathbf{g}(z_i)$ ist der Vektor der Ansatzfunktionen, welcher gesucht wird, um Verschiebungen an einem beliebigen Punkt des Elementes beschreiben zu können. (2.21) wird im Elementkoordinatensystem angeschrieben. Die Deformation $\bar{v}_i(z_i)$ an einer beliebigen Stelle z_i , wird damit über den Zusammenhang

$$\bar{v}_i(z_i) = g_1(z_i)v_1 + g_2(z_i)\varphi_1 + g_3(z_i)v_2 + g_4(z_i)\varphi_2 \quad (2.22)$$

gebildet. Es ist ersichtlich, dass die Deformation an einer Stelle die lineare Überlagerung aller Deformationen ist. Als Näherungslösung wird der Geschwindigkeitsverlauf $\dot{\bar{v}}_i(z_i)$ mit dem gleichen Verschiebungsfeld beschrieben [Lin14]

$$\dot{\bar{v}}_i(z_i) = \mathbf{g}(z_i)\dot{\mathbf{v}}_i. \quad (2.23)$$

(2.23) stellt den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten der Knotenpunkte i und j , mit dem Geschwindigkeitsfeld des finiten Elementes dar.

Bei der Diskretisierung einer Struktur darf der kinetische Energieinhalt und der Gesamtschwerpunkt nicht verändert werden. Daraus ergibt sich die Forderung für die kinetische Energie T_i eines finiten Elementes zu

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho \dot{\bar{v}}_i^T \dot{\bar{v}}_i dV_i. \quad (2.24)$$

Setzt man nun (2.23) in (2.24) ein, erhält man den Ausdruck der kinetischen Energie des Elementes, ausgedrückt in den Knotengeschwindigkeiten. Es ergibt sich

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}_i^T \int_{V_i} \rho \mathbf{g}^T \mathbf{g} dV_i \dot{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{v}}_i, \quad (2.25)$$

und die Elementmassenmatrix ist

$$\mathbf{M}_i = \rho \int_{V_i} \mathbf{g}^T \mathbf{g} dV_i. \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{M}_i = A\rho \int_{l_i} \mathbf{g}^T \mathbf{g} dz_i. \quad (2.26)$$

Bei diesen Ausführungen wird von einer konstanten Dichteverteilung $\rho(z_i) = \rho = \text{konst.}$ und konstanter Querschnittsfläche A im finiten Element ausgegangen. Die Matrix der

[†]http://www.juergendankert.de/WWW/ErgVert/html/grundgleichungen_der_finite-el4.html

Ansatzfunktionen \mathbf{g} lautet

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z_i}{l_i} & 0 & 0 & \frac{z_i}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\left(\frac{z_i}{l_i}\right)^2 + 2\left(\frac{z_i}{l_i}\right)^3 & z_i - 2\frac{z_i^2}{l_i} + \frac{z_i^3}{l_i^2} & 0 & 3\left(\frac{z_i}{l_i}\right)^2 - 2\left(\frac{z_i}{l_i}\right)^3 & -\frac{z_i^2}{l_i} + \frac{z_i^3}{l_i^2} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

und die Anordnung der Knotenkoordinaten ist

$$\dot{\mathbf{v}}_i^T = [u_1 \quad v_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \varphi_2]$$

Die Lösung des Integrals in (2.26) ergibt die Massenmatrix, welche bereits 1965 durch Archer [ARC65] hergeleitet wurde,

$$\mathbf{M}_i = \frac{\rho A l_i}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l_i & 0 & 54 & -13l_i \\ 0 & 22l_i & 4l_i^2 & 0 & 13l_i & -3l_i^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l_i^2 & 0 & 156 & -22l_i \\ 0 & -13l_i^2 & -3l_i^2 & 0 & -22l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

2.4.4 DÄMPFUNGMATRIX

Nachdem die Systemmatrizen der Gesamtstruktur aufgebaut sind, vgl. den Abschnitt zur Substrukturtechnik, kann mit der Bequemlichkeitshypothese die Dämpfungsmatrix definiert werden. Es gilt der Ansatz der Rayleigh-Dämpfung

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{C}, \quad (2.29)$$

welcher besagt, dass die Dämpfungsmatrix linear von der Massen- und Steifigkeitsmatrix abhängig ist. Dabei werden α und β auch als Rayleigh-Faktoren bezeichnet. Wenn die Gültigkeit dieses Ansatzes unterstellt wird, lässt sich die Dämpfungsmatrix ebenso wie die Massen- und Steifigkeitsmatrix diagonalisieren und modal entkoppeln. Wird die Modalmatrix mit $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = [v_{kj}]$ bezeichnet, welche sich aus der Lösung des Eigenwertproblems mit \mathbf{M} und \mathbf{C} ergibt, kann für die modale Transformation der Dämpfungsmatrix geschrieben werden

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V} = \text{diag}[k_{k,l}]. \quad (2.30)$$

Dabei bedeutet \mathbf{K} die modale Dämpfungsmatrix mit der Dimension $(n \times n)$, mit den Freiheitsgraden n der elastischen Koordinaten. Für die Elemente der modalen Dämpfungsmatrix

fungsmatrix kann man schreiben

$$k_{kl} = 2\omega_0\mu_i D_i \quad (2.31)$$

mit D_i als dem Dämpfungsgrad oder auch Lehrsches Dämpfungsmaß, ω_{0i} für die i -te Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und μ_i für die i -te modale Masse. Die Indizes i geben an, dass alle Werte, auch der Dämpfungsgrad, von der Eigenkreisfrequenz f_i abhängen vgl. [Ewi95] und [Lin14]. Durch die Annahme der Rayleigh-Dämpfung (2.29) wird unterstellt, dass die modalen Dämpfungsgrade ausschließlich von den Koeffizienten α und β abhängen sowie von den Eigenfrequenzen. [Lin14] schreibt, dass es dafür aber selten eine experimentelle Bestätigung gibt. Faktisch existieren für jede Eigenfrequenz unterschiedliche Dämpfungsgrade, welche streng genommen alle einzeln gemessen werden müssen. Die Annahme der Rayleigh-Dämpfung vereinfacht die Handhabung der Gleichungen, da so auch keine Unterschiede in den Eigenformen zwischen dem ungedämpften und gedämpften System auftreten. Das resultiert daraus, dass sich die Dämpfungsmatrix aus der Massen- und Steifigkeitsmatrix zusammensetzt und somit die Eigenformen der Lösung des Eigenwertproblems nicht verändert. Diese Näherung ist in der Praxis meistens ausreichend genau.

Sind bspw. zwei Dämpfungsgrade mit den zugehörigen Eigenfrequenzen ermittelt worden, so können die Koeffizienten α und β wie folgt berechnet werden

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{2}{\omega_2 - \omega_1} \begin{bmatrix} \omega_2 & -\omega_1 \\ -\frac{1}{\omega_2} & \frac{1}{\omega_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Da in dieser Arbeit keine Messwerte vorliegen, werden für die Dämpfungsgrade D_1 und D_2 jeweils ein konstanter Wert von 0,002 angenommen und die Koeffizienten mit (2.32) berechnet.

2.4.5 ERGÄNZUNGEN

Der Ansatz der Verbindung des Verschiebungsfeldes mit den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ist eine Näherung. Bei Nutzung des Verschiebungsfeldes ergeben sich Kopplungen zwischen den Massenträgheiten der Bewegungen entlang \vec{v}_i und der Rotationsträgheiten um die Winkel φ_1 und φ_2 . [ARC65] wies bereits auf die Näherungslösungen hin, welche sich aus der Schwingungsanalyse durch \mathbf{C}_i und \mathbf{M}_i ergeben. Bei Verwendung der finiten Elementemethode ergeben sich genaue Ergebnisse immer in den niedrigeren Eigenfrequenzen. Nach der Diskretisierung ergeben sich immer genau so viele Eigenfrequenzen wie das System finale Gesamtfreiheitsgrade besitzt. Interessieren viele Eigenfrequenzen, ist eine höhere Diskretisierung nötig, damit die Genauig-

keit in mehreren niedrigen Eigenfrequenzen akzeptabel ist.

Die Matrizen werden immer im jeweiligen Elementkoordinatensystem gebildet. Sollen Rahmentragwerke mit schrägen Trägern zusammengesetzt werden, ist eine Transformation der Systemmatrizen in die gewünschter Richtung erforderlich, bevor das Gesamtsystem gebildet werden kann. Dabei muss eine Transformationsmatrix gefunden werden, mit der die Belastungen der Elementkoordinaten in das globale Koordinatensystem transformiert werden können:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{Q}}. \quad (2.33)$$

Es ist \mathbf{Q} der Vektor der Kraftgrößen in den globalen Koordinatensystem, \mathbf{T} die Transformationsmatrix und $\bar{\mathbf{Q}}$ der Vektor der Kraftgrößen im Elementkoordinatensystem. Das gedrehte finite Biegeelement mit den angreifenden Kraftgrößen, angetragen im Elementkoordinatensystem, ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

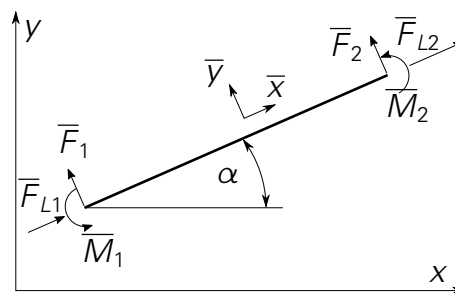


Abbildung 2.3 Darstellung der angreifenden Kraftgrößen im gedrehten Koordinatensystem

Nach dieser Darstellung ergibt sich die Drehmatrix \mathbf{T} wie folgt

$$\begin{bmatrix} F_{L1} \\ F_1 \\ M_1 \\ F_{L2} \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \cdot \begin{bmatrix} \bar{F}_{L1} \\ \bar{F}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{F}_{L2} \\ \bar{F}_2 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Mit der Drehmatrix \mathbf{T} können die Massen- und Steifigkeitsmatrix ins globale Koordinatensystem gedreht werden

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{T}\bar{\mathbf{C}}_i\mathbf{T}^\top, \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{T}\bar{\mathbf{M}}_i\mathbf{T}^\top. \quad (2.35)$$

2.5 SUBSTRUKTURTECHNIK

2.5.1 VORBEMERKUNGEN

In diesem Abschnitt soll die Substrukturtechnik erläutert werden, da sie für das weitere Vorgehen essentiell ist. Die Theorie dazu wurde aus [DH16] entnommen und das gewählte Beispiel ebenso daran angelehnt, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu ermöglichen.

Die Substrukturtechnik ist geeignet um komplizierte Strukturen aufzubauen, da sich diese aus bekannten kleineren Strukturen zusammensetzen lassen, was das Aufstellen von Gleichungen mittels Lagrange oder d'Alembert beherrschbarer macht. Auch für die spätere Überlagerung des Mechanismus mit dem elastischen Gestell wird die Substrukturmethode angewendet.

Voraussetzung für diese Technik ist, dass das dynamische Verhalten einer Substruktur bekannt sein muss. Anschließend kann durch entsprechende Positionierung der Substruktur, Rand- und Übergangsbedingungen, zwischen den Substrukturkoordinaten $\mathbf{q}^{(r)} = [q_i^{(r)}]$ und den globalen Koordinaten $\mathbf{q} = [q_i]$, definiert werden. Die Übergangsbedingungen werden in Transformationmatrizen \mathbf{T}_r zusammengefasst.

Nimmt man eine beliebige Substruktur mit dem Koordinatenvektor

$$\mathbf{q}^{(r)} = \begin{bmatrix} q_1^{(r)} & q_2^{(r)} & \dots & q_n^{(r)} \end{bmatrix}^T \quad (2.36)$$

an, so ergibt sich die Transformation zwischen den globalen und lokalen Koordinaten nach

$$\mathbf{q}^{(r)} = \mathbf{T}_r \mathbf{q}, \quad r = 1, 2, \dots, R. \quad (2.37)$$

Die Systemmatrizen der Gesamtstruktur ergibt sich als Summe, aller transformierten Submatrizen

$$\mathbf{C} = \sum_{r=1}^R \mathbf{T}_r^T \mathbf{C}_r \mathbf{T}_r, \quad \mathbf{M} = \sum_{r=1}^R \mathbf{T}_r^T \mathbf{M}_r \mathbf{T}_r. \quad (2.38)$$

Mit dieser Technik ist es relativ einfach möglich, komplizierte Rahmentragwerke mit vielen Freiheitsgraden und hoher Diskretisierung aufzubauen. Das dynamische Verhalten lässt sich somit, im Vergleich zur Handrechnung, schnell berechnen.

2.5.2 BEISPIEL

GRUNDAUFBAU GALGENTRAGWERK

Als Beispiel für die Substrukturtechnik soll ein galgenförmiges Tragwerk, wie in Abbildung 2.4 dargestellt, aus den finiten Biegeelementen aus Abbildung 2.2 zusammengesetzt werden. Um das Verständnis für die Substrukturtechnik zu vertiefen, wird dieses

Tragwerk verschiedenen Randbedingungen ausgesetzt. Dazu wird zunächst der Unterschied zwischen einer Versteifung innerhalb der Struktur durch eine masselose Feder und der Versteifung der Struktur mit der Umgebung durch ein elastisches Lager erläutert. Anschließend wird der Einfluss von Zusatzmassen im System erläutert. Vor allem aus der Betrachtung der unterschiedlichen Versteifungen ergibt sich das Verständnis für die Substrukturtechnik und wie die Matrizen zu „lesen“ sind.

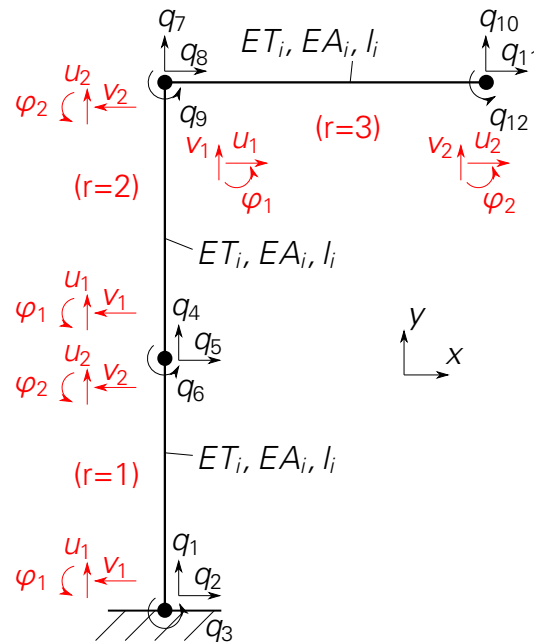


Abbildung 2.4 Gesamtsystem eines galgenförmigen Tragwerkes, bestehend aus drei Substrukturen $R = 3$, 12 globalen Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_{12} und mit $l_i = 1 \text{ m}$

Das Tragwerk in Abbildung 2.4 besteht aus drei Substrukturen $R = 3$. Jede Struktur besitzt die gleiche Dichteverteilung ρA und die gleiche Länge l_i . Die exakten Werte, welche in dieser Arbeit verwendet wurden, mit abweichendem l_i , sind,

$$\begin{aligned}
 ET_i &= 1,093.75 \cdot 10^5 \text{ N m}^2, & EA_i &= 5,25 \cdot 10^8 \text{ N}, & \rho A &= 19,625 \frac{\text{N}}{\text{m}} \\
 l_i &= 0,5 \text{ m}, & A_i &= 0,0025 \text{ m}^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

Entsprechend der Benennung der globalen Koordinaten aus Abbildung 2.4 ergeben sich die Zwangsbedingungen für die erste Substruktur $r = 1$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 u_1^{(1)} &= q_1 = 0, & v_1^{(1)} &= -q_2 = 0, & \varphi_1^{(1)} &= q_3 = 0 \\
 u_2^{(1)} &= q_4, & v_2^{(1)} &= -q_5, & \varphi_2^{(1)} &= q_6.
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

Daraus folgt die erste Transformationsmatrix der Dimension (6×12) , vgl. mit (2.37)

$$\mathbf{T}_1 = \begin{matrix} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & q_9 & q_{10} & q_{11} & q_{12} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \end{matrix} \quad (2.41)$$

Bei der Bildung der Zwangsbedingungen wird in diesem Schritt noch von einer festen Einspannung ausgegangen. In diesen Fällen erfahren die betreffenden Koordinaten keine Auslenkung und gehen in die Transformationsmatrix mit einer 0 ein. Für die zweite Substruktur $r = 2$ lauten die Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} &= q_4, & v_1^{(2)} &= -q_5, & \varphi_1^{(2)} &= q_6 \\ u_2^{(2)} &= q_7, & v_2^{(2)} &= -q_8, & \varphi_2^{(2)} &= q_9 \end{aligned} \quad (2.42)$$

und die Transformationsmatrix \mathbf{T}_2

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Man erkennt bereits die Überdeckung der beiden Substrukturen $r = 1$ und $r = 2$, an den Freiheitsgraden q_4, q_5, q_6 . Durch die Berücksichtigung dieser Überdeckung, mit den entsprechenden Einträgen in den Transformationsmatrizen, ergibt sich eine gekoppelte Struktur.

Die letzte Substruktur $r = 3$ besitzt die Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} u_1^{(3)} &= q_8, & v_1^{(3)} &= q_7, & \varphi_1^{(3)} &= q_9 \\ u_2^{(3)} &= q_{11}, & v_2^{(3)} &= q_{10}, & \varphi_2^{(3)} &= q_{12} \end{aligned} \quad (2.44)$$

und die Transformationsmatrix \mathbf{T}_3

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Unter Benutzung von (2.38) lässt sich die Gesamtsteifigkeitsmatrix C bilden

$$\frac{C}{1 \cdot 10^7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 105 & 0 & 0 & -52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2625 & 0 & 0 & -0.1313 & -0.0656 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0875 & 0 & 0.0656 & 0.0219 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -52.5 & 0 & 0 & 52.6313 & 0 & 0.0656 & -0.1313 & 0 & 0.0656 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1313 & 0.0656 & 0 & 52.6313 & 0.0656 & 0 & -52.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0656 & 0.0219 & 0.0656 & 0.0656 & 0.0875 & -0.0656 & 0 & 0.0219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1313 & 0 & -0.0656 & 0.1313 & 0 & -0.0656 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -52.5 & 0 & 0 & 0 & 52.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0656 & 0 & 0.0219 & -0.0656 & 0 & 0 & 0.0438 \end{bmatrix} \cdot \quad (2.46)$$

Man kann in dieser Matrix die Bandstruktur erkennen, welche sich aus der Nummerierung der globalen Koordinaten ergibt. Die ersten drei Zeilen und Spalten sind aufgrund der festen Einspannung gleich Null und können aus der Gesamtmatrix gestrichen werden. Bei komplizierteren Strukturen können auch weit entfernte Elemente auf den Nebendiagonalen erscheinen. Das kann zum Beispiel bei der Kopplung von Freiheitsgraden durch zusätzliche Federn oder andere finite Elemente, quer durch die Struktur hindurch, auftreten.

Bei genauer Analyse von (2.46) fällt das wiederholte Auftreten vieler Einträge auf. Vor allem die Nebendiagonalelemente treten in transponierter Form auf und drücken die wechselseitigen Beziehungen zwischen den einzelnen Koordinaten aus.

Die Darstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix dient der Veranschaulichung der Bandstruktur und der Symmetrie. Das Prinzip ist bei der Massenmatrix ähnlich, weshalb diese hier nicht dargestellt werden soll.

Mit der Steifigkeits- und Massenmatrix kann das System aus BWGn

$$M\ddot{q} + Cq = 0 \quad (2.47)$$

geschrieben und das Eigenwertproblem berechnet werden. Es kann in Abbildung 2.5 die ersten vier Moden des Tragwerkes aus Abbildung 2.4 betrachtet werden. Für eine bessere Darstellungsgenauigkeit, wurde mit einer höheren Diskretisierung gerechnet.

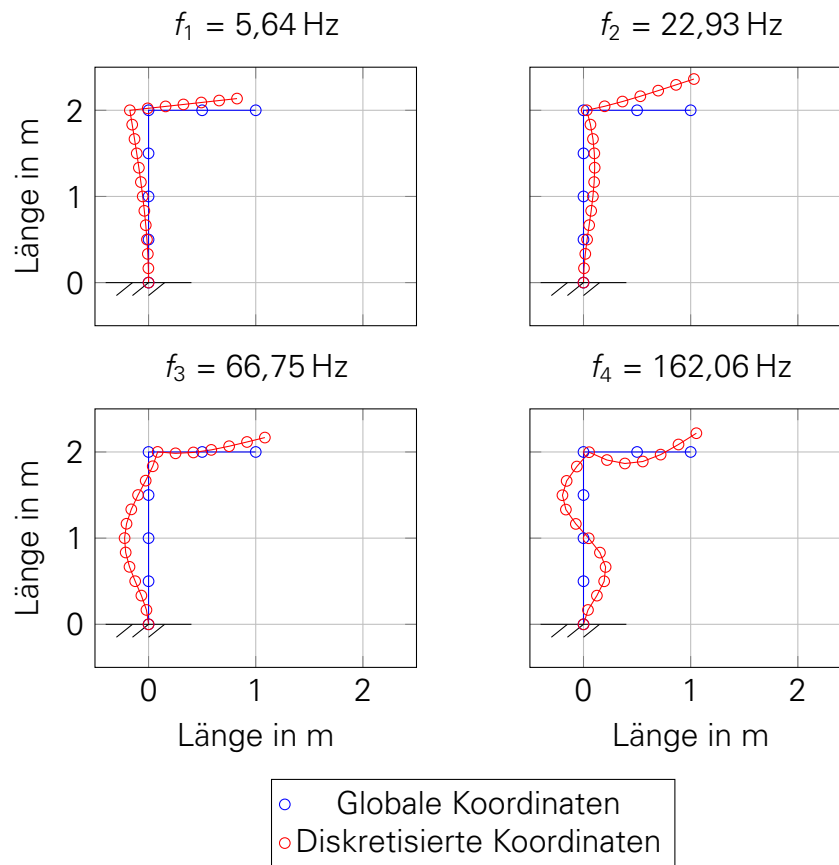


Abbildung 2.5 Darstellung der ersten vier Eigenmoden des Galgentragwerkes mit fester Einspannung

Die Ergebnisse der Eigenfrequenzen in Abbildung 2.5 wurde mit dem Onlinetool[‡] von Dankert/Dankert abgeglichen.

EINFLUSS VON ZUSATZMASSEPUNKTEN

Da sich die Massenmatrix ausschließlich aus den Massenmatrizen (2.28) des finiten Biegeelementes zusammensetzt, ist die finale Massenmatrix \mathbf{M} keine Diagonalmatrix. In [DH16] wurde ein Galgentragwerk aus Massepunkten zusammengebaut, welche zum Beispiel für Maschinenteile oder andere Anbauteile stehen können. Dieser Massenansatz wird dann gemacht, wenn die konzentrierten Massen auf einem Tragwerk die verteilten Massen der Balken übersteigen und das dynamische Verhalten dominieren. In diesem Falle ergibt sich eine diagonale Massenmatrix, da die Massepunkte nicht in Wechselwirkung miteinander stehen. Wie aber im Kapitel zur Elementmassenmatrix dargestellt, ergibt sich durch die dort erläuterte Herleitung eine Massenmatrix mit Elementen auf der Nebendiagonalen. Das entspricht einer Kopplung und die Gesamtmassenmatrix \mathbf{M} besitzt zwar immer noch eine Bandstruktur, ist aber keine Diagonalmatrix mehr wie in [DH16].

[‡]<http://www.tm-interaktiv.de/Rahmenschwingungen/RS.html>

Möchte man weitere Massepunkte berücksichtigen, muss dem jeweiligen Freiheitsgrad eine einzelne Masse hinzu addiert werden. Nimmt man bspw. eine hohe Massekonzentration am letzten Knotenpunkt des Galgentragwerkes in Abbildung 2.4 an, also an den Freiheitsgraden q_{10} , q_{11} , q_{12} , so muss die extra Masse m den Freiheitsgraden q_{10} und q_{11} hinzu addiert werden. In Matrixschreibweise bedeutet dies

$$\mathbf{M}_{ges} = \mathbf{M}_{FEM} + \text{diag}[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m, m, 0]. \quad (2.48)$$

Als Beispiel ist in Abbildung 2.6 der Einfluss verschiedener Massen auf die Form der 3. Eigenmode und den Wert der 3. Eigenfrequenz dargestellt, ohne Berücksichtigung der Schwerkraft. Gut zu erkennen ist, dass die Zusatzmasse m , für dieses Tragwerk mit seinen entsprechenden geometrischen und materialspezifischen Eigenschaften ab 100 kg wie eine Einspannung wirkt. Diese Wirkung ist mit der Trägheit der Masse verbunden, welche bei großen Massen entsprechend hoch ist. Bei diesem Beispiel wurde nur die translatorische Trägheit berücksichtigt. Ebenso kann man erkennen, dass die Eigenfrequenzen entsprechend dem Zusammenhang $\omega^2 = \sqrt{c/m}$, bei Erhöhung der Masse m und konstanter Steifigkeit c absinken.

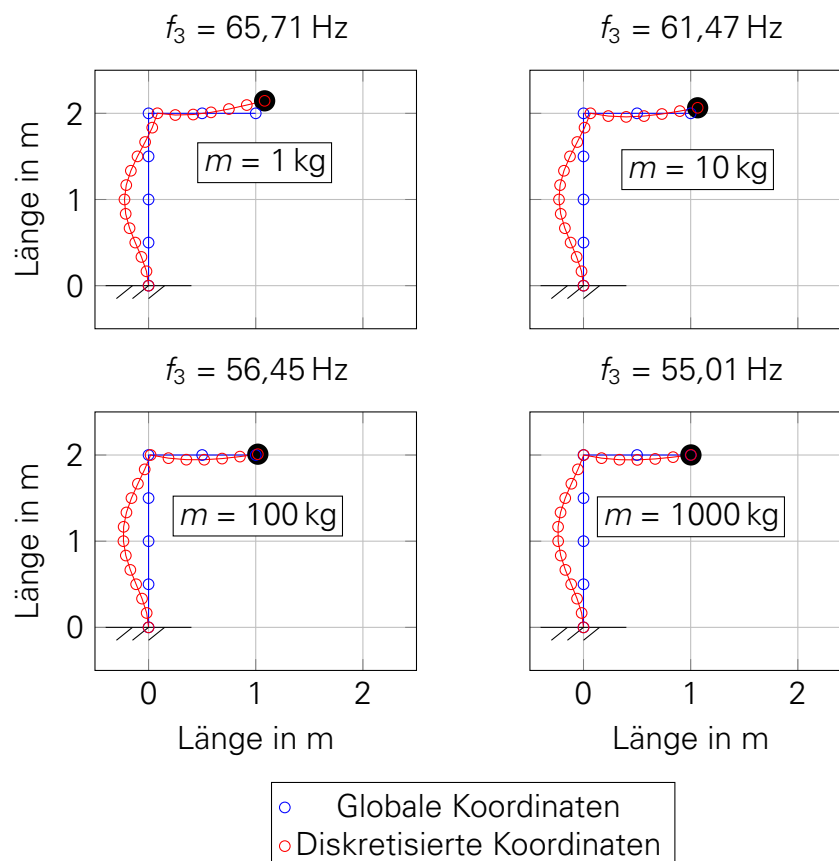


Abbildung 2.6 Einfluss von verschiedenen Zusatzmassen m , auf die 3. Eigenfrequenz

EINFLUSS VON ZUSATZFEDERN

Nachfolgend soll der Effekt von zusätzlichen Versteifungen innerhalb der Struktur aufgezeigt werden. Spannt man zusätzliche Elemente quer durch die Struktur, entstehen zusätzliche Zwangsbedingungen aber anders als bei einer Anbindung gegen eine starre Umgebung, verbleibt die Steifigkeit im „Inneren“ der Struktur. Als Beispiel wird eine schräg angeordnete Feder, wie in Abbildung 2.7 dargestellt, in das Galgentragwerk eingesetzt.

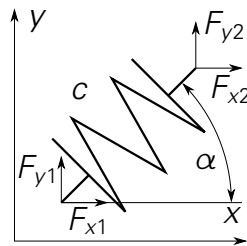


Abbildung 2.7 Kraftgrößen einer Feder schräg im globalen Koordinatensystem

Als Erstes ist die Elementsteifigkeitsmatrix $\bar{\mathbf{C}}_{Feder}$ erforderlich, welche mit den Verschiebungen der jeweiligen Enden der Feder y_1, x_1, y_2, x_2 die Federkräfte im globalen Koordinatensystem ergeben

$$\begin{bmatrix} F_{y1} \\ F_{x1} \\ F_{y2} \\ F_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yx} & -c_{yy} & -c_{yx} \\ c_{xy} & c_{xx} & -c_{xy} & -c_{xx} \\ -c_{yy} & -c_{yx} & c_{yy} & c_{yx} \\ -c_{xy} & -c_{xx} & c_{xy} & c_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{C}}_{Feder} \mathbf{q}. \quad (2.49)$$

In (2.49) bedeuten

$$c_{yy} = \sin^2(\alpha)c, \quad c_{xx} = \cos^2(\alpha)c, \quad c_{xy} = c_{yx} = \sin(\alpha)\cos(\alpha)c \quad (2.50)$$

und $\bar{\mathbf{C}}_{Feder}$ ist somit bereits in das globale Koordinatensystem gedreht. Im Weiteren wird von dem höher diskretisierten Tragwerk aus Abbildung 2.5 und Abbildung 2.6 ausgegangen. Es soll eine Feder zwischen dem ersten Knoten nach der Einspannung und dem letzten Knoten des Tragwerkes gespannt werden, also zwischen den Punkten $(0, 0.5)$ und $(1, 2)$. Es werden die Koordinaten $y_1 = q_1, x_1 = q_2$ mit $y_2 = q_{16}, x_2 = q_{17}$ gekoppelt. Dabei beginnt die Zählung der Koordinaten ab dem zweiten Knoten, da die Knoten der Einspannung Nullen in den Systemmatrizen erzeugen, wie bereits gezeigt wurde. Die Steifigkeitsmatrix der Feder muss als Nächstes auf die entsprechenden

Koordinaten transformiert werden, die Transformationsmatrix lautet

$$\mathbf{T}_{Feder} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

und mit

$$\mathbf{C}_{Feder} = \mathbf{T}_{Feder}^T \bar{\mathbf{C}}_{Feder} \mathbf{T}_{Feder}$$

ergibt sich die transformierte Steifigkeitsmatrix der Feder

$$\mathbf{C}_{Feder} = \begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yx} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -c_{yy} & -c_{yx} & 0 \\ c_{xy} & c_{xx} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -c_{xy} & -c_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{yy} & -c_{yx} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & c_{yy} & c_{yx} & 0 \\ -c_{xy} & -c_{xx} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & c_{xy} & c_{xx} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Die Struktur in (2.52) zeigt eindeutig, wie Versteifungen innerhalb der Struktur in Matrizenform aussehen. Charakteristisch für eine innere Versteifung sind die Nebendiagonalelemente der Steifigkeitsmatrizen, welche die Kopplung der beteiligten Koordinaten ausdrücken. Anders als die innere Versteifung einer Struktur geschieht die Versteifung gegen die starre Umgebung, bspw. mittels eines elastischen Lagers, durch Addition von Steifigkeiten entlang der Hauptdiagonalen. Das entspricht der Beeinflussung eines einzelnen Freiheitsgrades, da andere Freiheitsgrade mit diesem elastischen Lager nicht direkt in Wechselwirkung stehen. Somit lassen sich an beliebigen Punkten elastische Lager realisieren.

(2.52) kann anschließend auf die Steifigkeitsmatrix des Tragwerkes hinzu addiert werden. In Abbildung 2.8 ist der Einfluss einer inneren Versteifung auf die 3. Eigenfrequenz dargestellt.

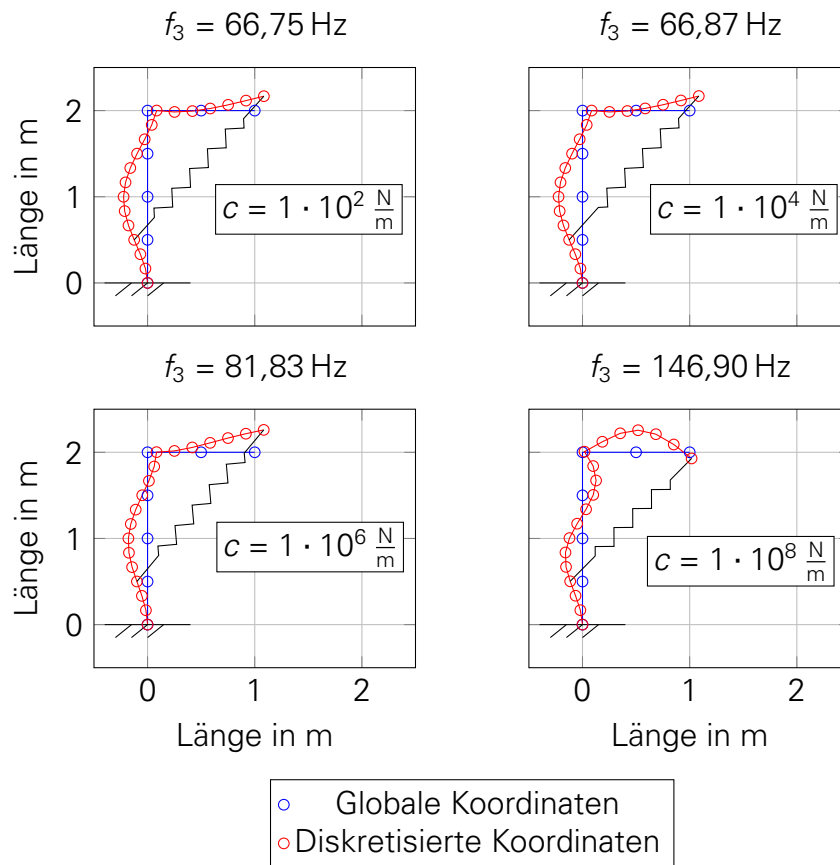


Abbildung 2.8 Einfluss einer masselosen Feder, auf die 3. Eigenfrequenz

2.6 KINEMATIK/KINETIK ZWANGLÄUFIGER MECHANISMEN

2.6.1 VORBEMERKUNGEN

Ein zwangläufiger Mechanismus mit einem Antrieb unterscheidet sich in seiner mathematischen Grundstruktur nur wenig im Vergleich zu einem Schwingungssystem eines Einmassenschwingers. Es kann ebenso eine BWG formuliert werden, welche von Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängt und entsprechende Reaktionskraftgrößen hervorruft. Der wesentliche Unterschied besteht in den Koeffizienten der Gleichung. Viele Mechanismen besitzen ein ungleichförmiges Übertragungsverhalten und die Massenwirkungen der Mechanismen sind oft zeitabhängig und nichtlinear. Für einen einzigen Antrieb und einen vergleichsweise einfachen Mechanismus sind die Gleichungen zwar noch beherrschbar, jedoch bei mehr als einem Antrieb erweitern sich die Abhängigkeiten der Masseparameter und es kann schnell passieren, dass der Überblick verloren geht. Berücksichtigt man evtl. noch elastische Freiheitsgrade, also Elastizitäten von Getriebegliedern oder elastische Lagerungen des Mechanismus, erhält man eine

nichtlineare DGL, mit nichtlinearen und zeitlich variablen Koeffizienten. In dieser Arbeit soll das kombinierte System aus zweidimensionalem elastischen Gestell und starrem Mechanismus erstellt werden. Dazu muss das Gleichungssystem des starren Mechanismus mit elastischer Lagerung aufgebaut werden, was damit eine nichtlineare DGL ergibt. Das Schwingungssystem des elastischen Gestells ist eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, welche nicht direkt mit den nichtlinearen DGLn des Mechanismus berechnet werden kann. [DV89] und [Ngu86] haben einen Weg aufgezeigt, wie mit solchen komplizierten Gleichungen umzugehen ist. Dieser Formalismus bringt die Abhandlungen zur Berechnung von Mechanismen in eine geordnete Form und bedarf einiger Einführungen. In diesem Kapitel sollen daher die grundlegenden Zusammenhänge starrer und zwangläufiger Mechanismen aufgezeigt werden. Mit diesen Grundlagen kann anschließend der Übergang zum starren Mechanismus mit elastischer Lagerung vollzogen werden.

2.6.2 KINEMATIK

Als Beispiel für ungleichmäßig übersetzende Mechanismen wird ein Viereck gewählt. Das Viereck ist in Abbildung 2.9 mit allen geometrischen Parametern dargestellt.

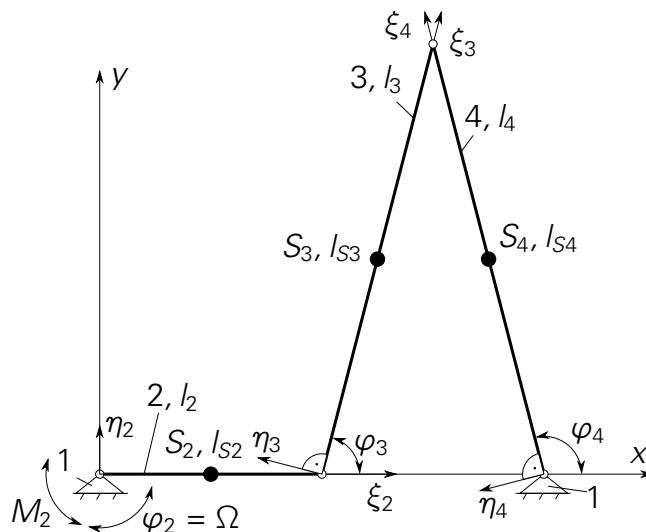


Abbildung 2.9 Geometrische Parameter des Viereckmechanismus in seiner Anfangsstellung

Die Gliedlängen werden mit l_i , die Schwerpunktabstände mit l_{S_i} bezeichnet. Jedes Glied besitzt ein Gliedkoordinatensystem η_i, ξ_i , einen Gliedschwerpunkt S_i und die translatorische Trägheit m_i sowie die rotatorische Trägheit J_{S_i} . Zur weiteren Bearbeitung werden diese Größen in entsprechende Vektoren unterteilt. Es werden alle F unabhängige Antriebe, ähnlich der Benennung von unabhängigen Freiheitsgraden in den Schwingungsgleichungen zum Kapitel der Substrukturtechnik, in dem Vektor \mathbf{q} zusammengefasst. Wie man aus Abbildung 2.9 erkennen kann, sind die Winkel φ_3 und φ_4 von

der Stellung des Gliedes 2 abhängig und demnach mit jeder Stellung anders. Diese L Größen werden in dem Vektor der Lagekoordinaten Φ zusammengefasst. Alle bekannten geometrischen Größen P , werden in dem Parametervektor \mathbf{W} festgehalten. Der Zwanglauf wird mit den Zwangsbedingungen ausgedrückt und diese werden im Vektor \mathbf{f} eingetragen. Mit diesen Vorbemerkungen kann die Abhängigkeit der Zwangsbedingungen wie folgt ausgedrückt werden

$$\mathbf{f}_i(\Phi, \mathbf{W}) = 0, \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, L. \quad (2.53)$$

Dabei existieren immer so viele Zwangsbedingungen wie Lagekoordinaten vorhanden sind

$$\Phi^T = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_L]. \quad (2.54)$$

Der Parametervektor \mathbf{W} enthält neben den geometrischen Größen auch die Antriebsgrößen, da von einer gegebenen Sollbewegung ausgegangen wird. Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T &= [w_1, w_2, \dots, w_F, w_{F+1}, \dots, w_{F+P}] \\ &= [q_1, q_2, \dots, q_F, w_{F+1}, \dots, w_{F+P}]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

In (2.55) bedeuten F der Laufgrad des Mechanismus, also die Anzahl an unabhängigen Antrieben und P die Anzahl der Lageparameter.

Somit sind die Lagekoordinaten Φ eindeutig durch die Antriebskoordinaten bestimmt. Jedoch ergibt sich bei der Umstellung der Zwangsbedingungen zu den Lagekoordinaten meistens komplizierte Ausdrücke welche nichtlinear sind. Daher bietet es sich an, die Zwangsbedingungen in eine Taylorreihe zu entwickeln und nach dem linearen Glied die Reihenentwicklung abzubrechen. Entwickelt wird in einer beliebigen Anfangsstellung Φ_0 . Somit wird für jede Stellung der Antriebskoordinaten die Zwangsbedingungen nach dem Schema

$$f_i = f_i(\Phi_0, \mathbf{W}) + \sum_{l=1}^L \left. \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_l} \right|_0 \Delta \Phi_l \quad (2.56)$$

entwickelt. Der Vorteil dieser Methode liegt in dem einfacheren linearen Zusammenhang und in der Möglichkeit, die Näherung in iterativer Reihenfolge solange zu optimieren, bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht wurde. In dieser Arbeit wurde mit dem Newton-Raphson-Verfahren gerechnet und die Lagekoordinaten Φ_l für alle Winkelstellungen des Antriebes φ_2 berechnet. Man erhält mit (2.56) ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \Delta \Phi = -\mathbf{f}, \quad (2.57)$$

wobei \mathbf{A} die Jacobimatrix ist, mit der Dimension $(L \times L)$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Phi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_L}{\partial \Phi_L} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

$\Delta\Phi = [\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \dots, \Delta\Phi_L]$ enthält die Änderungen der Koordinaten, welche im iterativen Verfahren immer wieder den Rechenwert der vorigen Rechenoperation beinhalten. Da (2.57) nur eine Näherung darstellt, beinhaltet $\mathbf{f}_i^T = [f_1, f_2, \dots, f_L]$, beim Einsetzen einer beliebigen Getriebestellung, einen Restwert. Für diesen Restwert wird in der numerischen Näherung ein beliebiges Abbruchkriterium angegeben, wodurch die Ergebnisse sich immer weiter 0 annähern und damit hinreichend genau sind.

In dieser Arbeit wurde mit einem Abbruchkriterium von $1 \cdot 10^{-8}$ für beide Winkel φ_3 und φ_4 gerechnet. Dabei wurden pro Winkelstellung φ_2 , nicht mehr als fünf Iterationsschritte benötigt. Die Winkelstellungen wurden mit dem Programm *GeoGebra* verifiziert. Somit liegen nach der Rechnung mit (2.57) alle Stellungen der Lagekoordinaten numerisch vor. Analytische Ausdrücke sind allerdings nicht vorhanden, was später bei der Ableitung der Lagekoordinaten nach Parametern oder Antriebskoordinaten eine ähnliche Herangehensweise wie in (2.57) erfordert.

Bei der späteren kinetischen Betrachtung zur Berechnung der Gelenkkräfte werden immer wieder die partiellen Ableitungen der Lagekoordinaten nach den Parametern $\frac{\partial \Phi_i}{\partial w_p}$ benötigt. Es werden teilweise die vierten partiellen Ableitung benötigt, weshalb die Kommaschreibweise übersichtlicher ist

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial w_p} = \Phi_{i,p}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial w_p \partial w_q} = \Phi_{i,pq}, \quad \text{mit} \quad (2.59)$$

$$p, q = 1, 2, \dots, F, F+1, F+2, \dots, F+P.$$

Die strikte Trennung beim Zählen der Indizes wird sich im späteren Verlauf der Berechnungen der Kinetik als nützlich erweisen. Aufgrund der Abhängigkeit der Lagekoordinaten von den Antriebskoordinaten $\Phi_i = \Phi_i(\mathbf{q})$, ergibt sich für die zeitlichen Ableitungen der Lagekoordinaten

$$\dot{\Phi}_i = \sum_{p=1}^N \Phi_{i,p} \dot{q}_p, \quad \ddot{\Phi}_i = \sum_{p=1}^N \Phi_{i,p} \ddot{q}_p + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \Phi_{i,pq} \dot{q}_p \dot{q}_q. \quad (2.60)$$

(2.60) zeigt bereits eine wesentliche Charakteristik für Mechanismen auf. Selbst bei konstant umlaufenden Antrieben $\dot{q}_p = \Omega_p = \text{konst.}$, verschwinden die Beschleunigungen der Lagekoordinaten nicht. Sie hängen quadratisch von den Geschwindigkeiten der Antriebe ab, was sich ebenso auf die Masseneffekte der Glieder niederschlägt.

Aus (2.57) ergibt sich der Vektor der Lagekoordinaten Φ . Bei der Berechnung der Massenwirkungen werden die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Lageko-

ordinaten benötigt, welche aus (2.60) berechnet werden können. Dafür wird die erste partielle Ableitung des Lagevektors $\Phi_{,p}$ benötigt. Die partiellen Ableitungen ergeben sich aus der totalen Differenziation aller Zwangsbedingungen (2.53) nach w_p , unter Berücksichtigung der Kettenregel

$$\frac{\partial f_i}{\partial \Phi_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial w_p} + \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w_p} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_N} \frac{\partial \Phi_N}{\partial w_p} = -\frac{\partial f_i}{\partial w_p}, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (2.61)$$

(2.61) kann in ein Gleichungssystem überführt werden

$$\mathbf{A}\Phi_{,p} = -\mathbf{f}_{,p}, \quad (2.62)$$

aus welchem dann nach den partiellen Ableitungen $\Phi_{,p}$ umgestellt werden kann. Somit müssen die Lagekoordinaten Φ nicht analytisch vorliegen, weshalb weiterhin die numerische Lösung aus (2.57) verwendet werden kann.

Die zweiten partiellen Ableitungen $\Phi_{,pq}$ folgen aus der Differenziation von (2.61) nach w_q zu

$$\sum_{j=1}^L \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_j} \Phi_{j,pq} = -f_{i,pq} - \sum_{j=1}^L \left(\frac{\partial f_{i,p}}{\partial \Phi_j} \Phi_{j,q} + \frac{\partial f_{i,q}}{\partial \Phi_j} \Phi_{j,p} \right) - \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^L \frac{\partial^2 f_i}{\partial \Phi_j \partial \Phi_k} \Phi_{j,p} \Phi_{k,q}. \quad (2.63)$$

(2.63) kann wieder in Matrizenform umgeschrieben werden zu

$$\mathbf{A}\Phi_{,pq} = -\mathbf{f}_{,pq} - \mathbf{A}_{,p}\Phi_{,q} - \mathbf{A}_{,q}\Phi_{,p} - \mathbf{B} \left[\sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^L \Phi_{j,p} \Phi_{k,q} \right]^T. \quad (2.64)$$

In (2.64) ist \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{,j}\mathbf{A}_{,k}] \quad (2.65)$$

und enthält damit die zweiten partiellen Ableitungen der f_i nach Φ_j und Φ_k . \mathbf{B} ist eine Rechteckmatrix von der Dimension $(L \times 2L)$.

Die Massenparameter der Glieder m_{kl} und m_{klp} erfordern neben den partiellen Ableitungen der Lagekoordinaten noch die Schwerpunktlagen \mathbf{r}_{S_i} aller Glieder i und deren Ableitungen. Die Schwerpunktlagen der Glieder sind von den Stellungen der N unabhängigen Bewegungskoodinaten abhängig

$$\mathbf{r}_{S_i} = \mathbf{r}_{S_i}(\mathbf{q}) = [x_{S_i}(\mathbf{q}), y_{S_i}(\mathbf{q})]^T, \quad (2.66)$$

wobei hier nur von ebenen Mechanismen ausgegangen wird. Bei dreidimensionalen Mechanismen würde noch die Lagen in Z-Richtung $z_{S_i}(\mathbf{q})$ hinzukommen. Wie auch bei den Lagekoordinaten ergeben sich die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}_{S_i}(\mathbf{q})$ unter Berücksichtigung

der Kettenregel:

$$\dot{x}_{Si} = \sum_{j=1}^N x_{Si,j} \dot{q}_j, \quad \dot{y}_{Si} = \sum_{j=1}^N y_{Si,j} \dot{q}_j. \quad (2.67)$$

Analog ergeben sich die Beschleunigungen der Schwerpunkte $\ddot{\mathbf{r}}_{Si}(\mathbf{q})$ zu:

$$\ddot{x}_{Si} = \sum_{j=1}^N x_{Si,j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N x_{Si,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (2.68)$$

Die hier getroffene Vorschrift zur Summierung über unabhängige Koordinaten ist bereits ein Vorgriff auf die spätere kinetische Betrachtung. In einem zwangläufigen Mechanismus mit F Antriebskoordinaten und keinen weiteren unabhängigen Koordinaten, gilt $F = N$. Werden allerdings n elastische Freiheitsgrade eingeführt, so muss über $F + n = N$ summiert werden. Genauere Ausführungen folgen in den nächsten Kapiteln.

Die Gleichungen der Schwerpunktkoordinaten lassen sich leicht analytisch aus dem Getriebeschema in Abbildung 2.9 aufstellen. Für den Schwerpunkt des dritten Gliedes ergibt sich bspw.

$$\begin{aligned} x_{S3} &= \cos(\varphi_2)l_2 + \cos(\varphi_3)l_{S3} \\ y_{S3} &= \sin(\varphi_2)l_2 + \sin(\varphi_3)l_{S3}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Und wie in (2.55) eingeführt, ergibt sich für die erste Antriebskoordinate $\varphi_2 = q_1 = w_1$ und mit (2.54) gilt für die Lagekoordinate $\varphi_3 = \Phi_1$. Die Lagekoordinaten sind von den unabhängigen Koordinaten abhängig $\Phi_i = \Phi_i(\mathbf{q})$. Damit kann für die erste partielle Ableitung der Schwerpunktkoordinaten $x_{S3,1} = \frac{\partial x_{S3}}{\partial w_1}$, $y_{S3,1} = \frac{\partial y_{S3}}{\partial w_1}$ folgender Zusammenhang geschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_{S3,1} &= -\sin(q_1)l_2 - \sin(\Phi_1)l_{S3}\Phi_{1,1} \\ y_{S3,1} &= \cos(q_1)l_2 + \cos(\Phi_1)l_{S3}\Phi_{1,1}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Es treten die partiellen Ableitungen $\Phi_{i,p}$ auf, welche für N unabhängige Koordinaten mit (2.62) berechnet werden können.

2.6.3 KINETIK

Die BWG des starren Mechanismus drückt das Gleichgewicht zwischen dem eingepprägten Antriebsmoment und den resultierenden Massenkräften der $l - 1$ Glieder aus. Sie kann mittels *Lagrange* oder der *virtuellen Arbeit* ermittelt werden. Man kann die BWG aber auch nutzen, um Gelenkkräfte zu ermitteln. Dabei wird eine virtuelle Koordinate eingeführt und bei *Lagrange* die Energien nach dieser abgeleitet oder mit der *virtuellen Arbeit* eine virtuelle Verrückung in dieser Richtung angenommen. Für beide Methoden

werden die Koordinaten und die Gleichungen im gliedfesten Koordinatensystem angetragen. Sind die Kraftgrößen in Richtung des globalen Koordinatensystems relevant, dann müssen sie am Ende der Berechnung noch transformiert werden. Zu jeder generalisierten Koordinate q kann dann eine generalisierte Kraftgröße Q ermittelt werden. Dabei ist Q von der Dimension eine Kraft wenn q ein Weg darstellt. Ist q ein Winkel, dann ist die generalisierte Kraftgröße Q ein Moment. Die Methode wird äquivalent für Antriebsfreiheitsgrade und elastische Freiheitsgrade angewendet.

Ausgehend von der *Lagrangeschen Gleichung 2. Art* kann das Gleichgewicht über

$$\sum_{l=1}^N m_{pl} \ddot{q}_l + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (m_{lp,k} + m_{pk,l} - m_{kl,p}) \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_p \quad \text{mit } (p = 1, \dots, N) \quad (2.71)$$

ausgedrückt werden. Es wird über alle Antriebe F bzw. alle unabhängige Koordinaten N summiert. Es sind die m_{pl} die generalisierten Massen, welche die Trägheiten der Mechanismenglieder erfassen. Für die generalisierten Massen eines zweidimensionalen Mechanismus gilt

$$m_{pl}(\mathbf{q}) = m_{lp}(\mathbf{q}) = \sum_{i=2}^l [m_i (x_{Si,p} x_{Si,l} + y_{Si,p} y_{Si,l}) + J_{Si} \varphi_{i,p} \varphi_{i,l}]. \quad (2.72)$$

Die generalisierten Massen folgen aus der Summe der kinetischen Energie, welche bei der Herleitung der BWG mit *Lagrange* aufgestellt werden muss. Man kann für die generalisierten Massen die Abkürzung

$$m_{klp} = m_{lp,k} + m_{pk,l} - m_{kl,p}, \quad (2.73)$$

einführen, für die sich dann

$$m_{klp}(\mathbf{q}) = 2 \sum_{i=2}^l [m_i (x_{Si,kl} x_{Si,p} + y_{Si,kl} y_{Si,p}) + J_{Si} \varphi_{i,kl} \varphi_{i,p}] \quad (2.74)$$

ergibt. Damit vereinfacht sich (2.71) zu

$$\sum_{l=1}^N m_{pl} \ddot{q}_l + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N m_{klp} \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_p \quad \text{mit } (p = 1, \dots, N). \quad (2.75)$$

Die partiellen Ableitungen der generalisierten Massen werden hier ebenfalls mit Komma abgekürzt. Die partiellen Ableitungen der x_{Si} , y_{Si} und φ_i werden, wie im Abschnitt zur Kinematik erläutert, berechnet. Im Allgemeinen ist mit der Kenntnis der Verläufe der Lagefunktionen, durch Vorgabe von Antriebsbewegungen (q_k mit $k = 1, \dots, F$), der Verlauf der generalisierten Kräfte Q_p bekannt. Die für Gelenkkräfte eingeführten virtuel-

len Koordinaten q_p , haben die Geschwindigkeit und Beschleunigung $\dot{q}_p = 0$ und $\ddot{q}_p = 0$. Somit entsteht aus der Antriebskraft Q_p eine Kraftgröße in Richtung der angetragenen virtuellen Koordinate, eine Reaktionskraft. Fällt eine virtuelle Koordinate mit einer Antriebskoordinate zusammen, z.B. $q_p = \varphi_2$, entsteht der Sonderfall dass $Q_p = M_{an}$. Das Antriebsmoment ist damit die verallgemeinerte Kraftgröße in Richtung der Antriebskoordinate φ_2 . Im späteren Verlauf überlagern sich virtuelle Koordinaten des Mechanismus mit denen des elastischen Gestells.

2.6.4 BEISPIEL

LAGERKRAFT AM 4-GELENK

An dieser Stelle soll der grundsätzliche Weg zur Ermittlung der Lagerkräfte mittels der BWG aus (2.75) skizziert werden. Da die auftretenden Ableitungen sehr groß sind, werden nicht alle Gleichungen ausgeschrieben. Die partiellen Ableitungen werden dann in Kommaschreibweise geschrieben. Das Getriebe für dieses Beispiel, welches auch später mit dem Gestell in Überlagerung gebracht wird, ist in Abbildung 2.10 dargestellt.

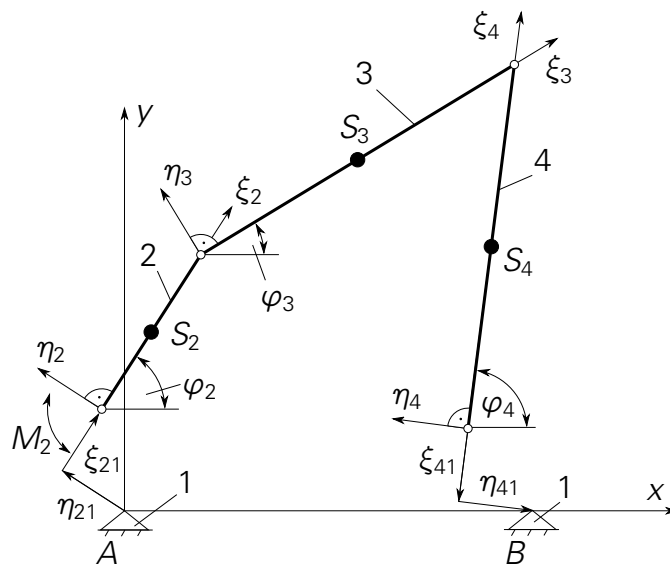


Abbildung 2.10 Viergelenk mit virtuellen Koordinaten

Die Gliedlängen lauten

$$l_1(\text{Lagerabstand}) = 0,5 \text{ m}, \quad l_2 = 0,2 \text{ m}, \quad l_3 = l_4 = 0,5 \text{ m} \quad (2.76)$$

und die Trägheiten sind

$$m_2 = 0,5 \text{ kg}, \quad m_3 = m_4 = 1 \text{ kg} \quad (2.77)$$

$$J_2 = 3,737.69 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2, \quad J_3 = J_4 = 20,695.70 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (2.78)$$

Die virtuellen Koordinaten lauten ξ_{21}, η_{21} und ξ_{41}, η_{41} und besitzen die Länge 0. Sie sind nur eingeführt worden für das Aufstellen der Zwangsbedingungen und für die partiellen Ableitungen in diese Richtungen. Daher ist der Laufgrad in dieser Berechnung $F = 1$. Für das gewählte Getriebe ergeben sich nach (2.55) die Parameter w_p und Lagekoordinaten ϕ_i zu:

$$w_1 = q_1 = \varphi_2, \quad w_2 = \xi_{21}, \quad w_3 = \eta_{21}, \quad w_4 = \xi_{41}, \quad w_5 = \eta_{41} \quad (2.79)$$

$$\phi_1 = \varphi_3, \quad \phi_2 = \varphi_4. \quad (2.80)$$

Die Zwangsbedingungen können für das Viergelenk wie folgt aufgestellt werden:

$$f_1 = \cos(q_1)(\xi_{21} + l_2) - \sin(q_1)\eta_{21} + \cos(\varphi_3)l_3 - \cos(\varphi_4)(\xi_{41} + l_4) + \sin(\varphi_4)\eta_{41} - l_1 \quad (2.81)$$

$$f_2 = \sin(q_1)(\xi_{21} + l_2) + \cos(q_1)\eta_{21} + \sin(\varphi_3)l_3 - \sin(\varphi_4)(\xi_{41} + l_4) - \cos(\varphi_4)\eta_{41}. \quad (2.82)$$

Die Verläufe der Lagekoordinaten sind bereits numerisch ermittelt worden. Die Jacobi-matrix ergibt sich aus den Ableitungen der Zwangsbedingungen nach den Lagekoordinaten, vgl. (2.58),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_3 \sin(\varphi_3) & l_4 \sin(\varphi_4) \\ l_3 \cos(\varphi_3) & -l_4 \cos(\varphi_4) \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Dabei sind die Anteile der virtuellen Koordinaten gleich 0 und entfallen somit. Die partiellen Ableitungen der Zwangsbedingungen nach den Parametern w_p sind die rechten Seiten von (2.62) und ergeben sich durch

$$\mathbf{f}_{,p}^T = \left(\frac{\partial f_1}{\partial w_p}, \frac{\partial f_2}{\partial w_p}, \dots, \frac{\partial f_N}{\partial w_p} \right) \quad (2.84)$$

zu

$$\mathbf{f}_{,1} = \begin{pmatrix} -l_2 \sin(q_1) \\ l_2 \cos(q_1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_{,2} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_{,3} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_3) \\ \cos(\varphi_3) \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{f}_{,4} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi_4) \\ -\sin(\varphi_4) \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_{,5} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi_4) \\ -\cos(\varphi_4) \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Mit (2.83) und (2.86) kann nach (2.62) die ersten partiellen Ableitungen der Lagekoordinaten berechnet werden. Für die BWG werden noch die zweiten partiellen Ableitungen benötigt und die Beschreibung der Schwerpunktkoordinaten. Aus Abbildung 2.10 fol-

gen:

$$x_{S2} = -\sin(q_1)\eta_{21} + \cos(q_1)\xi_{21} + \cos(q_1)l_{S2} \quad (2.87)$$

$$x_{S3} = -\sin(q_1)\eta_{21} + \cos(q_1)\xi_{21} + \cos(q_1)l_2 + \cos(\varphi_3)l_{S3} \quad (2.88)$$

$$x_{S4} = l_1 + \cos(\varphi_4)l_{S4} - \sin(\varphi_4)\eta_{41} + \cos(\varphi_4)\xi_{41} \quad (2.89)$$

$$y_{S2} = \cos(q_1)\eta_{21} + \sin(q_1)\xi_{21} + \sin(q_1)l_{S2} \quad (2.90)$$

$$y_{S3} = \cos(q_1)\eta_{21} + \sin(q_1)\xi_{21} + \sin(q_1)l_2 + \sin(\varphi_3)l_{S3} \quad (2.91)$$

$$y_{S4} = \sin(\varphi_4)l_{S4} + \cos(\varphi_4)\eta_{41} + \sin(\varphi_4)\xi_{41}. \quad (2.92)$$

Um die generalisierten Massen für (2.75) bilden zu können, werden als Nächstes die partiellen Ableitungen benötigt. In Tabelle 2.1 sind alle partiellen Ableitungen der Lage- und Schwerpunktkoordinaten eingetragen.

Tabelle 2.1 Partielle Ableitungen der Lage- und Schwerpunktkoordinaten des Viergelenkes

$\frac{\partial(\)}{\partial\varphi_2} = (\)_{,1}$	$\frac{\partial(\)}{\partial\xi_{21}} = (\)_{,2}$	$\frac{\partial(\)}{\partial\eta_{21}} = (\)_{,3}$
$\varphi_{3,1} = \frac{\sin(\varphi_4 - q_1)l_2}{\sin(\varphi_3 - \varphi_4)l_3}$	$\varphi_{3,2} = \frac{\cos(\varphi_4 - q_1)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_4)l_3}$	$\varphi_{3,3} = \frac{\sin(\varphi_4 - q_1)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_4)l_3}$
$\varphi_{4,1} = \frac{\sin(\varphi_3 - q_1)l_2}{\sin(\varphi_3 - \varphi_4)l_4}$	$\varphi_{4,2} = \frac{\cos(\varphi_3 - q_1)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_4)l_4}$	$\varphi_{4,3} = \frac{\sin(\varphi_3 - q_1)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_4)l_4}$
$x_{S2,1} = -\sin(q_1)l_{S2}$	$x_{S2,2} = \cos(q_1)$	$x_{S2,3} = -\sin(q_1)$
$x_{S3,1} = -\sin(q_1)l_2 - \sin(\varphi_3)l_{S3}\varphi_{3,1}$	$x_{S3,2} = \cos(q_1) - \sin(\varphi_3)l_{S3}\varphi_{3,2}$	$x_{S3,3} = -\sin(q_1) - \sin(\varphi_3)l_{S3}\varphi_{3,3}$
$x_{S4,1} = -\sin(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,1}$	$x_{S4,2} = -\sin(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,2}$	$x_{S4,3} = -\sin(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,3}$
$y_{S2,1} = \cos(q_1)l_{S2}$	$y_{S2,2} = \sin(q_1)$	$y_{S2,3} = \cos(q_1)$
$y_{S3,1} = \cos(q_1)l_2 + \cos(\varphi_3)l_{S3}\varphi_{3,1}$	$y_{S3,2} = \sin(q_1) + \cos(\varphi_3)l_{S3}\varphi_{3,2}$	$y_{S3,3} = \cos(q_1) + \cos(\varphi_3)l_{S3}\varphi_{3,3}$
$y_{S4,1} = \cos(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,1}$	$y_{S4,2} = \cos(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,2}$	$y_{S4,3} = \cos(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,3}$
$\frac{\partial(\)}{\partial\eta_{41}} = (\)_{,4}$	$\frac{\partial(\)}{\partial\eta_{41}} = (\)_{,5}$	$\frac{\partial^2(\)}{\partial\varphi_2^2} = (\)_{,11}$
$\varphi_{3,4} = -\frac{1}{\sin(\varphi_3 - \varphi_4)l_3}$	$\varphi_{3,5} = 0$	$\varphi_{3,11} = \dots$
$\varphi_{4,4} = -\frac{\cos(\varphi_3 - \varphi_4)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_4)l_4}$	$\varphi_{4,5} = -\frac{1}{l_4}$	$\varphi_{4,11} = \dots$
$x_{S2,4} = 0$	$x_{S2,5} = 0$	$x_{S2,11} = -\cos(q_1)l_{S2}$
$x_{S3,4} = 0$	$x_{S3,5} = 0$	$x_{S3,11} = -\cos(q_1)l_2 - \cos(\varphi_3)l_{S3}\varphi_{3,1}^2 - \sin(\varphi_3)l_{S3}\varphi_{3,11}$
$x_{S4,4} = \cos(\varphi_4) - \sin(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,4}$	$x_{S4,5} = -\sin(\varphi_4) - \sin(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,5}$	$x_{S4,11} = -\cos(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,1}^2 - \sin(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,11}$
$y_{S2,4} = 0$	$y_{S2,5} = 0$	$y_{S2,11} = -\sin(q_1)l_{S2}$
$y_{S3,4} = 0$	$y_{S3,5} = 0$	$y_{S3,11} = -\sin(q_1)l_2 - \sin(\varphi_3)l_{S3}\varphi_{3,1}^2 + \cos(\varphi_3)l_{S3}\varphi_{3,11}$
$y_{S4,4} = \sin(\varphi_4) + \cos(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,4}$	$y_{S4,5} = \cos(\varphi_4) + \cos(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,5}$	$y_{S4,11} = -\cos(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,1}^2 + \cos(\varphi_4)l_{S4}\varphi_{4,11}$

Da dieses Getriebe nur den Antriebsfreiheitsgrad besitzt, werden auch nur die zweiten partiellen Ableitung nach diesem benötigt. Diese können mit (2.64) berechnet werden mit $p = q = 1$. Mit der Jacobimatrix (2.83) und ihren Ableitungen ergeben sich die Gleichungen

$$-\sin(\varphi_3)l_3\varphi_{3,11} + \sin(\varphi_4)l_4\varphi_{4,11} = \cos(q_1)l_2 + \cos(\varphi_3)l_3\varphi_{3,1}^2 + \sin(\varphi_4)l_4\varphi_{4,1}^2 \quad (2.93)$$

$$\cos(\varphi_3)l_3\varphi_{3,11} - \cos(\varphi_4)l_4\varphi_{4,11} = \sin(q_1)l_2 + \sin(\varphi_3)l_3\varphi_{3,1}^2 - \sin(\varphi_4)l_4\varphi_{4,1}^2, \quad (2.94)$$

welche anschließend nach $\varphi_{3,11}$ und $\varphi_{4,11}$ umgestellt werden können. Die Ausdrücke sind sehr lang, weshalb an dieser Stelle auf eine vollständige Darstellung verzichtet wird.

Damit sind die Vorarbeiten für die BWGn abgeschlossen und für die Kraftgrößen \bar{Q}_p mit (2.75) ergibt sich für einen Antrieb

$$m_{p1}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}m_{11p}\dot{q}_1^2 = \bar{Q}_p \quad \text{mit } (p = 1, \dots, 5). \quad (2.95)$$

Mit (2.73) und (2.74) ergeben sich die generalisierten Massen. Weiter wird angenommen, dass es sich um einen konstanten Antrieb handelt ($\ddot{q}_1 = 0$) der bei $t = 0$ mit der Bewegung startet. Die Kraftgrößen der virtuellen Koordinaten ergeben sich damit zu

$$\frac{1}{2}m_{11p}\dot{q}_1^2 = \bar{Q}_p \quad \text{mit } (p = 2, \dots, 5). \quad (2.96)$$

Diese liegen in Richtung der jeweiligen Gliedkoordinaten vor und müssen noch in das globale Koordinatensystem gedreht werden. Mit der Drehmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) & 0 & 0 \\ \cos(\varphi_2) & -\sin(\varphi_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\varphi_4) & -\cos(\varphi_4) \\ 0 & 0 & -\cos(\varphi_4) & \sin(\varphi_4) \end{bmatrix}, \quad (2.97)$$

ergeben sich die Kraftgrößen im globalen Koordinatensystem

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{Ay} \\ Q_{Ax} \\ Q_{By} \\ Q_{Bx} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{Q}}. \quad (2.98)$$

Als Beispiel sei eine komplette Umdrehung des Gliedes 2 in 0,5 s, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit angenommen. Die sich ergebenden Kraftverläufe in den Lagerstellen des Mechanismus aus Abbildung 2.10 sind in Abbildung 2.11 dargestellt. Die Verläufe wurden mit dem Programm *WinDAM* gegengeprüft.

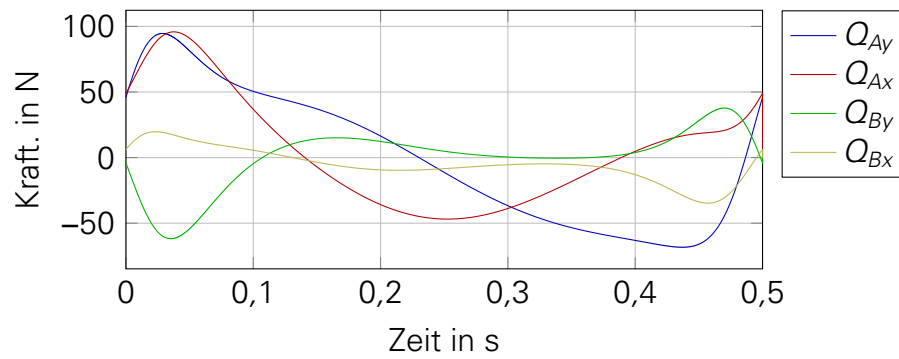


Abbildung 2.11 Verläufe der Lagerreaktionen bei einer konstanten Umdrehungsgeschwindigkeit des Antriebes

In einer ersten Näherung ist es ausreichend, die Kraftverläufe aus Abbildung 2.11 als Gestellanregung zu nutzen. Oft ist diese Näherung ausreichend, da bei Gestellen, welche ein Vielfaches der Masse des Mechanismus haben, die Systemmatrizen des Gestells nur unwesentlich vom Mechanismus beeinflusst werden.

3 PRÄZISIERTE AUFGABENSTELLUNG

In einem Gesamtsystem aus Mechanismus und Gestell ist es nicht immer möglich, Rückwirkungsfreiheit zwischen dem Mechanismus und dem Gestell zu unterstellen. Je nach Ausführung des Gestells sind die Systemmatrizen des Gestells einer zeitlichen Schwankung durch den Mechanismus unterworfen. Dabei haben die ungleichmäßig übersetzenden Getriebe je nach hinterlegten Bewegungsgesetz mehr oder weniger Einfluss auf das Verhalten. In jedem Fall ist es möglich, die Kopplung durch ein analytisches Model zu beschreiben. Somit sind Bahnplanungen möglich, welche das Gesamtsystem mit seinen Eigenschaften berücksichtigt.

In einer vereinfachenden Annahme wird Rückwirkungsfreiheit des Mechanismus auf die Systemmatrizen des Gestells unterstellt. In diesem Falle ist es ausreichend, die Lagerreaktionen des Mechanismus zu ermitteln und diese als Anregung zu nutzen. Über das Anregungsspektrum kann dann das Verhalten des Gestells modelliert werden. In den nachfolgenden Kapiteln sollen die Änderungen der Systemmatrizen des Gestells beschrieben werden, um den Einfluss des Mechanismus bei einem bestimmten Bewegungsgesetz aufzuzeigen.

Mit dem Vorgehen aus dem Stand der Technik ist ein Weg aufgezeigt worden, mit dem das elastische Gestell modelliert werden kann. Dabei wurde auf die Technik der finiten Elemente zurückgegriffen und erläutert, wie die Systemmatrizen entstehen und wie sie zu handhaben sind. Das elastische Gestell ist der erste Schritt zur Modellierung des Gesamtsystems aus Gestell und Mechanismus.

Mit den Erläuterungen zur Kinematik und Kinetik zwangläufiger Mechanismen können Gleichungen aufgestellt werden, welche in den nächsten Schritten äquivalente Systemmatrizen ergeben. Diese können mit denen des Gestells addiert werden. Anschließend ergibt sich ein System von DGLn, welches numerisch gelöst werden kann.

Einige Beispiele für Mechanismenbewegungen schließen diese Arbeit ab. Somit können die variablen Systemmatrizen und deren Einfluss visualisiert werden und es kann dargestellt werden, inwieweit der Mechanismus das Gestell beeinflusst.

4 AUFBAU GESAMTSYSTEM UND VERIFIZIERUNG

4.1 VORBEMERKUNGEN

In diesem Kapitel soll der Weg zu Ermittlung der Systemmatrizen des starren Mechanismus auf elastischen Lagern aufgezeigt werden. Das sich ergebende System von DGLn des Mechanismus ist nichtlinear und somit nicht einfach mit den DGLn des elastischen Gestells verrechenbar. Die DGLn müssen vorher linearisiert werden. Dadurch ergeben sich die benötigten zeitlich veränderlichen Systemmatrizen, welche anschließend transformiert und mit denen des Gestells verrechnet werden können. Zur Linearisierung wird häufig die Taylorreihenentwicklung angewendet. Diese stellt somit eine gängige Methode dar [MSP16]. In [Ngu86] und [DV89] wird das Verfahren häufig angewandt. [Ngu86] stellt auch Vergleiche zwischen den Lösungen nichtlinearer und linearer DGLn an. Die Abweichungen waren im Nichtresonanzfall sehr klein, weshalb die linearisierte Näherungslösung hinreichend genau war.

[Ngu86] und [DV89] haben gezeigt, wie nach der Linearisierung der BWGn die Systemmatrizen zu gewinnen sind und wie diese am Ende mit dem Gestell verrechnet werden können. Es existieren auch analytische Ansätze, wie die zeitlich veränderlichen DGLn gelöst werden können. Dies stellt aber in dieser Arbeit keinen Schwerpunkt dar. Das sich ergebende System von DGLn wird durch Matlab numerisch gelöst.

4.2 SUBSTRUKTURAUFBAU GESTELL UND MECHANISMUS

Die Theorie zur Substrukturtechnik ist bereits erläutert worden und für die Kopplung des elastischen Gestells mit dem starren Mechanismus sind keine Besonderheiten zu beachten. Je nach Diskretisierung des Gestells besitzt das elastische Gestell n Freiheitsgrade. Dieser Freiheitsgrad ändert sich im Weiteren nicht. Der starre Mechanismus allerdings besitzt bei einem Laufgrad von $F = 1$ und mit den elastischen Freiheitsgraden P einen neuen Gesamtfreiheitsgrad $N = F + P$. Es muss die BWG (2.75) um die elastischen Freiheitsgrade der Lager erweitert werden, da sonst keine Kopplungskordinaten für die Verbindung mit dem Gestell existieren. Bei der Berücksichtigung der Elastizitäten der Lager in X und Y-Richtung und bei zwei Lagerstellen, ergibt sich für den

Gesamtfreiheitsgrad des Mechanismus $N = 1 + 2 \cdot 2 = 5$ mit $P = 4$. Diese zusätzlichen Koordinaten sind Deckungsgleich mit den Kopplungskoordinaten des Gestells und erhöhen den Freiheitsgrad des Gesamtsystems N_{ges} nicht. Bei der Kopplung ist darauf zu achten, dass sich mit der gewählten Diskretisierung des Gestells der Lagerabstand des Mechanismus zusammensetzen lässt. Die Antriebskoordinate des Mechanismus bleibt als unabhängige Koordinate erhalten, weshalb für den Gesamtsystemfreiheitsgrad $N_{ges} = n + F$ gilt.

Der Zusammenbau sieht vor, die Systemmatrizen der Schwingungsgleichungen zu addieren. Für das Gestell besteht das System aus DGLn aus

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_0 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \mathbf{q} = \mathbf{Q}. \quad (4.1)$$

wobei der Index 0 für zeitlich unveränderliche Matrizen steht. Das Gesamtsystem setzt sich dann nach

$$(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}(t)) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}(t)) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}(t)) \mathbf{q} = \mathbf{h}(t) \quad (4.2)$$

zusammen. Dabei sind die zeitlich veränderlichen Matrizen an dieser Stelle bereits entsprechend in das globale Koordinatensystem und an die richtigen Kopplungsstellen transformiert.

Abbildung 4.1 illustriert, wie die Substrukturen zusammengesetzt werden und wie mit den Freiheitsgraden umzugehen ist.

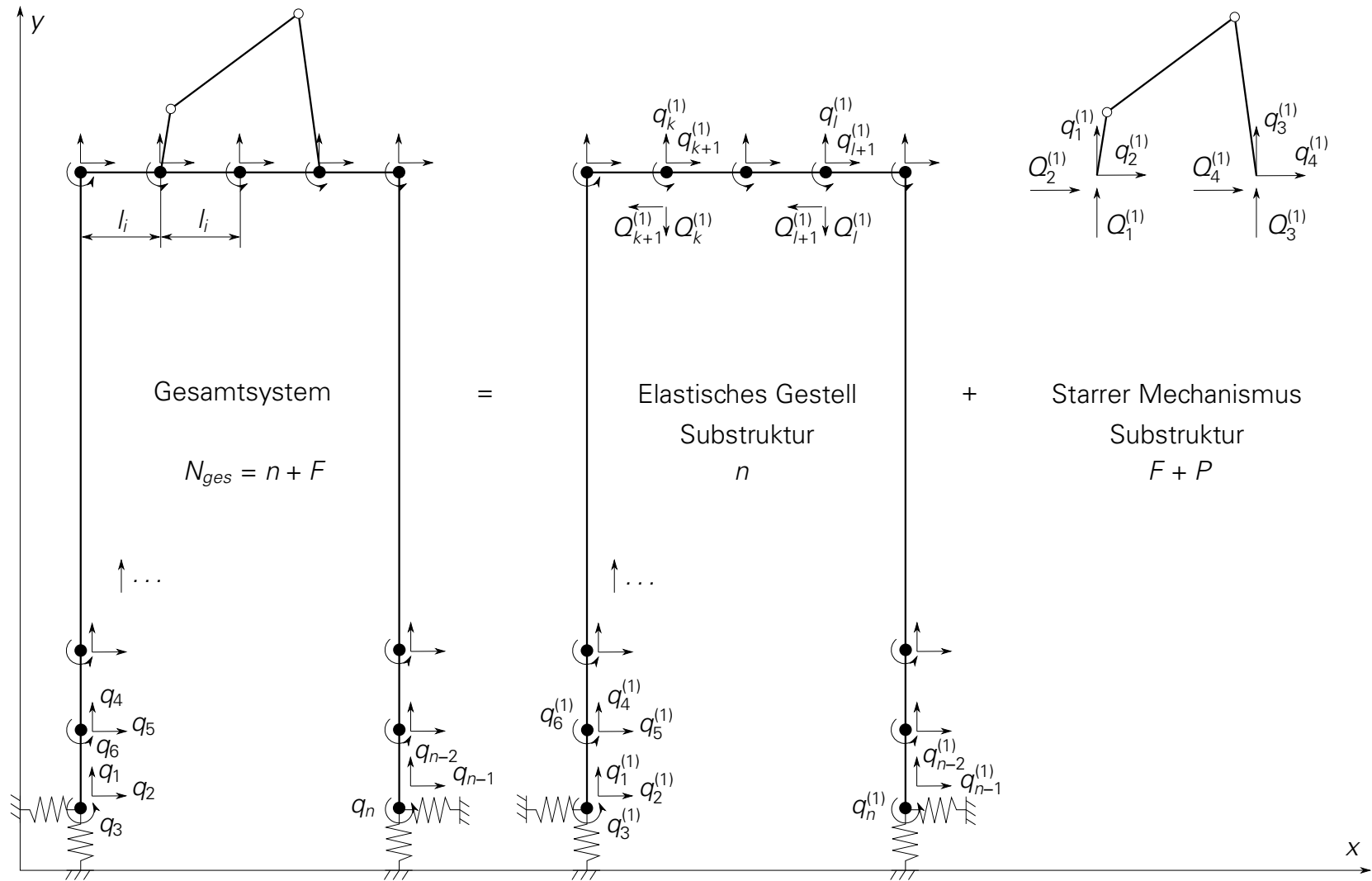


Abbildung 4.1 Aufbau des Gesamtsystems aus den Substrukturen elastisches Gestell und Mechanismus

4.3 BEWEGUNGSGLEICHUNGEN VON MECHANISMEN MIT MEHREREN FREIHEITSGRADEN

Die Bewegungsgleichung eines Mechanismus für mehrere Freiheitsgrade ist durch (2.75) bekannt. Diese Gleichung unterscheidet prinzipiell nicht zwischen einem Antriebsfreiheitsgrad und einem elastischen Freiheitsgrad, und wird hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nochmal dargestellt

$$\sum_{k=1}^N m_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N m_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_j \quad \text{mit } (j = 1, 2, \dots, N). \quad (4.3)$$

Die q_k werden in dieser Gleichung wie unabhängige Antriebe verstanden. Für elastische Mechanismen erweitert sich (4.3) um die Federsteifigkeiten der elastischen Glieder zu

$$\sum_{k=1}^N m_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N m_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^N c_{jk} q_k = Q_j \quad \text{mit } (j = 1, 2, \dots, N). \quad (4.4)$$

Wird beispielsweise ein Mechanismus mit elastischen Lagern in X und Y und einem zusätzlichen elastischen Getriebeglied modelliert, dann ergeben sich $P = 5$, $F = 1$ und damit $N = P + F = 6$. Für die Anbindung an das elastische Gestell existieren dann im zweidimensionalen Fall nur vier Kopplungskordinaten. Der Freiheitsgrad des elastischen Getriebegliedes ist dann implizit in den Bewegungsgleichungen der anderen Freiheitsgrade enthalten. Das ergibt sich, wie bereits angemerkt, durch Anwendung des beschriebenen Formalismus durch [DV89], da die kinetische Energie aller unabhängigen Koordinaten immer erfasst wird. Die Gleichungen enthalten dann alle Rückwirkungen der Freiheitsgrade innerhalb eines Mechanismus auf die Änderung der generalisierten Massen. Es muss also ein besonderes Augenmerk auf die Summen gelegt werden, denn je nach Betrachtungsfall muss zwischen den Freiheitsgraden unterschieden werden.

Es ist für die weitere Betrachtung hilfreich, (4.3) für unterschiedlichen Freiheitsgraden umzuschreiben. Bei Definition der Antriebsfreiheitsgrade zu q_1, q_2, \dots, q_F und der elastischen Freiheitsgrade zu $q_{F+1}, q_{F+2}, \dots, q_{F+P}$ und $F + P = N$ kann (4.3) wie folgt definiert werden

$$\begin{aligned} \sum_{f=1}^F m_{jf} \ddot{q}_f + \sum_{k=F+1}^N m_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^F \dot{q}_f \left(\sum_{k=F+1}^N m_{fkj} \dot{q}_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=F+1}^N \sum_{l=1}^N m_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l \\ + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^F m_{fij} \dot{q}_f \dot{q}_i = Q_j \quad \text{mit } (j = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Diese Art der Schreibweise ist allgemeingültig für beliebig viele Antriebe und elasti-

sche Koordinaten und kann auch direkt aus (4.3) hergeleitet werden. Nimmt man beispielsweise einen häufig auftretenden Fall an, bei dem der Laufgrad $F = 1$ beträgt, die Antriebskoordinate also q_1 heißt, so entsteht durch (4.5)

$$m_{j1}\ddot{q}_1 + \sum_{k=2}^N m_{jk}\ddot{q}_k + \frac{1}{2}\dot{q}_1 \left(\sum_{k=2}^N m_{1kj}\dot{q}_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \sum_{l=1}^N m_{klj}\dot{q}_k\dot{q}_l + \frac{1}{2}m_{11j}\dot{q}_1^2 = Q_j \quad (4.6)$$

mit $(j = 1, 2, \dots, N)$.

Diese Gleichung hätte man auch aus (4.3) erhalten können, bei nur einer Antriebskoordinate q_1 . (4.5) dient zur verallgemeinerten Schreibweise für beliebig viele Antriebe und generalisierte Koordinaten und wird im Weiteren noch nützlich sein, um die nichtlineare BWGn zu linearisieren und Systemmatrizen zu erhalten. Die Form der Beschreibung der BWG für Mechanismen in (4.5) geht davon aus, dass die Verläufe der Antriebskoordinaten gegeben sind. Somit entstand durch das Einsetzen der Antriebskoordinaten aus der Doppelsumme in (4.3) eine getrennte Summe, bei welcher nur noch die Geschwindigkeitsverläufe der generalisierten Koordinaten unbekannt sind. Da diese Terme geschwindigkeitsproportionale Terme sind, können sie auch als Dämpfungsterme betrachtet werden.

Es kann weiter angenommen werden, dass die Änderungen der generalisierten Massen sich wesentlich durch die Antriebskoordinaten q_F ändern und nur unwesentlich durch die elastischen Koordinaten q_k . Die Gleichungen der generalisierten Massen m_{jk} und m_{klj} , wie auch die DGLn der Q_j , sind in jedem Falle für ungleichmäßig übersetzende Mechanismen nichtlinear. Die Änderungen der generalisierten Massen mit den Bewegungen der Freiheitsgrade ist aufgrund des Übertragungsverhaltens der Mechanismen nichtlinear, was sich in den Gleichungen wiederfindet. Allerdings wird die Gesamtbewegung des Mechanismus, wegen der Tatsache der größten Änderung mit den Antriebskoordinaten, geteilt betrachtet. Die Bewegungen der generalisierten Koordinaten sind klein und werden als „Zusatzbewegung“ bezeichnet. Die Bewegungen der Antriebskoordinaten als „Antriebsbewegung“, welche im Vergleich als groß bezeichnet werden kann. Die generalisierten Massen des Mechanismus ändern sich demnach nur wenig mit den Bewegungen der generalisierten Koordinaten, weshalb es auch zweckmäßig ist, diese Bewegungen gesondert zu betrachten. Aus diesem Grund können diese verhältnismäßig kleinen Nichtlinearitäten durch eine Taylorreihe **linearisiert** werden. Man geht von einer Bewegung um die statische Ruhelage aus, weshalb der Entwicklungsvektor \mathbf{q} der generalisierten Koordinaten der Nullvektor der Dimension $(P \times 1)$ ist, $\mathbf{q} = [q_z]$ mit $(z = F + 1, F + 2, \dots, N)$. Nach der Entwicklung der generalisierten Massen

ergeben sich die Abhängigkeiten wie folgt:

$$m_{jk}(q_0(t), \mathbf{q}) = m_{jk}(q_0(t), [q_z]) = \bar{m}_{jk}(q_0(t)) + \sum_{z=F+1}^N \bar{m}_{jk,z}(q_0(t))q_z, \quad (4.7)$$

wobei die $\bar{m}_{jk}(q_0(t))$, entsprechend der Bildungsvorschrift der Taylorpolynome, die m_{jk} mit eingesetzten Entwicklungspunkten darstellen. Wichtig ist hier anzumerken, dass die Abhängigkeiten der generalisierten Massen kondensiert wurden. Sie sind nach der Linearisierung linear von den generalisierten Koordinaten abhängig, aber weiterhin nichtlinear von den Antriebsbewegungen. Das gleiche gilt für die m_{kij} :

$$m_{kij}(q_0(t), \mathbf{q}) = m_{kij}(q_0(t), [q_z]) = \bar{m}_{kij}(q_0(t)) + \sum_{z=F+1}^N \bar{m}_{kij,z}(q_0(t))q_z. \quad (4.8)$$

Durch die Entwicklung der generalisierten Massen bis zum linearen Glied spricht man bei der Kopplung an das elastische Gestell dann von der „ersten Näherung“. Im Gegensatz dazu steht die vereinfachte „nullte Näherung“, bei welcher nur bis zum nullten Glied der Taylorreihe entwickelt wird. In dem Fall werden die elastischen Freiheitsgrade Null gesetzt bzw. in die generalisierten Massen werden die Entwicklungsstellen eingesetzt, welche gleich Null sind.

Setzt man diese Taylorreihen (4.7) und (4.8) in die Bewegungsgleichung (4.5) ein und vernachlässigt alle nichtlinearen Glieder, ergibt sich ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten, mit Berücksichtigung mehrerer Antriebe:

$$\begin{aligned} \sum_{k=F+1}^N \bar{m}_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{f=1}^F \dot{q}_f \left(\sum_{k=F+1}^N \bar{m}_{fkj} \dot{q}_k \right) + \sum_{k=F+1}^N \left[\frac{1}{2} \sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^F \bar{m}_{fij,k} \dot{q}_f \dot{q}_i + \sum_{f=1}^F \bar{m}_{jf,k} \right] q_k \\ = \bar{Q}_j - \sum_{f=1}^F \bar{m}_{jf} \ddot{q}_f - \frac{1}{2} \sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^F \bar{m}_{fij} \dot{q}_f \dot{q}_i \quad \text{mit } (j = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Zur Vollständigkeit muss auch vermerkt werden, dass die Reaktionskräfte Q_j nach einsetzen der Taylorreihe linearisiert vorliegen \bar{Q}_j . Bei nur einem Antrieb ergibt sich beispielsweise für (4.9)

$$\begin{aligned} \sum_{k=F+1}^N \bar{m}_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=F+1}^N \left[\frac{1}{2} \dot{q}_1 \bar{m}_{1kj} \right] \dot{q}_k + \sum_{k=F+1}^N \left[\frac{1}{2} \bar{m}_{11j,k} \dot{q}_1^2 + \bar{m}_{j1,k} \right] q_k \\ = \bar{Q}_j - \bar{m}_{j1} \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} \bar{m}_{11j} \dot{q}_1^2 \quad \text{mit } (j = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (4.10)$$

[DV89] stellt fest, dass in (4.9) bzw. (4.10) die rechten Seiten der Gleichungen als Erregung der elastischen Struktur durch die Massenkräfte des starren Mechanismus aufge-

fasst werden können.

Nach der Linearisierung, können mittels Koeffizientenvergleich die Systemmatrizen generiert werden, welche anschließend mit den Systemmatrizen des Gestells verrechnet werden. Mit diesen Systemmatrizen kann das dynamische Verhalten in „erster“ Näherung durch das Gleichungssystem in bekannter Schreibweise beschrieben werden

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(t)\mathbf{q} = \mathbf{F}(t). \quad (4.11)$$

Durch die Zeitabhängigkeit der verallgemeinerten Massen sind die Matrizen über die Zeit variabel. Die Elemente der Matrizen ergeben sich aus (4.9) wie folgt:

$$\mathbf{M} = [\bar{m}_{jk}], \quad \mathbf{B} = \left[\frac{1}{2} \sum_{f=1}^F \dot{q}_f \bar{m}_{fkj} \right], \quad \mathbf{C} = \left[\frac{1}{2} \sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^F \bar{m}_{fij,k} \dot{q}_f \dot{q}_i + \sum_{f=1}^F \bar{m}_{jf,k} \right] \quad (4.12)$$

$$\mathbf{F} = \left[\bar{Q}_j - \sum_{f=1}^F \bar{m}_{jf} \ddot{q}_f - \frac{1}{2} \sum_{f=1}^F \sum_{i=1}^F \bar{m}_{fij} \dot{q}_f \dot{q}_i \right].$$

Die Dimension der Matrizen ist (PxP) und erfassen aufgrund der Antriebsbewegung die sich ändernden Trägheits-, Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften. Für dieses Getriebe müssen die Systemmatrizen noch in das globale Koordinatensystem mit der Drehmatrix (2.97) gedreht werden. Nach der Verrechnung mit den Systemmatrizen des Gestells sind die Rückwirkungen zwischen dem Gestell und dem Mechanismus erfasst.

4.4 ÜBERLAGERUNG GESTELL UND MECHANISMUS

In diesem Abschnitt sollen die Auswirkungen von verschiedenen Anregungen des Mechanismus auf das Gestell dargestellt werden. Dazu sind die ersten vier Eigenmoden des Rahmengestells in Abbildung 4.2 dargestellt. Die elastischen Lagersteifigkeiten wurden auf $1 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ bzw. $1 \cdot 10^8 \text{ N m}$ für die Feder- und Torsionssteifigkeiten festgelegt. Es gilt in diesem Beispiel ausschließlich reine Materialdämpfung, wie sie mit (2.32) berechnet wird. Dabei wurden die Koeffizienten α und β für eine konstante Dämpfung von $D = 0.002$ über die ersten drei Eigenkreisfrequenzen ω_1 und ω_3 berechnet. Betrachtet wird die obere linke Ecke des Rahmens. Da die Verschiebungen in X-Richtung am größten sind, wird stellvertretend der Freiheitsgrad q_{26} betrachtet. Angeregt wird in X- und Y-Richtung an den Freiheitsgraden q_{28}, q_{29} , mit den Lagerreaktionen des Viergelenks Q_{Ay}, Q_{Ax} und q_{34}, q_{35} , mit den Lagerreaktionen Q_{By}, Q_{Bx} .

Nach Addition der Systemmatrizen nach (4.2) verbleiben als einzige Erregerkraft die Massenkräfte des starren Mechanismus. Diese sind im Vektor $\mathbf{h}(t)$ zusammengefasst. Für die Anregung wurde ein konstant rotierender Antrieb gewählt, dessen Bewegung bei $t = 0$ startet. Dadurch ergibt sich ein Ruck, welcher die Anregung des Gestells

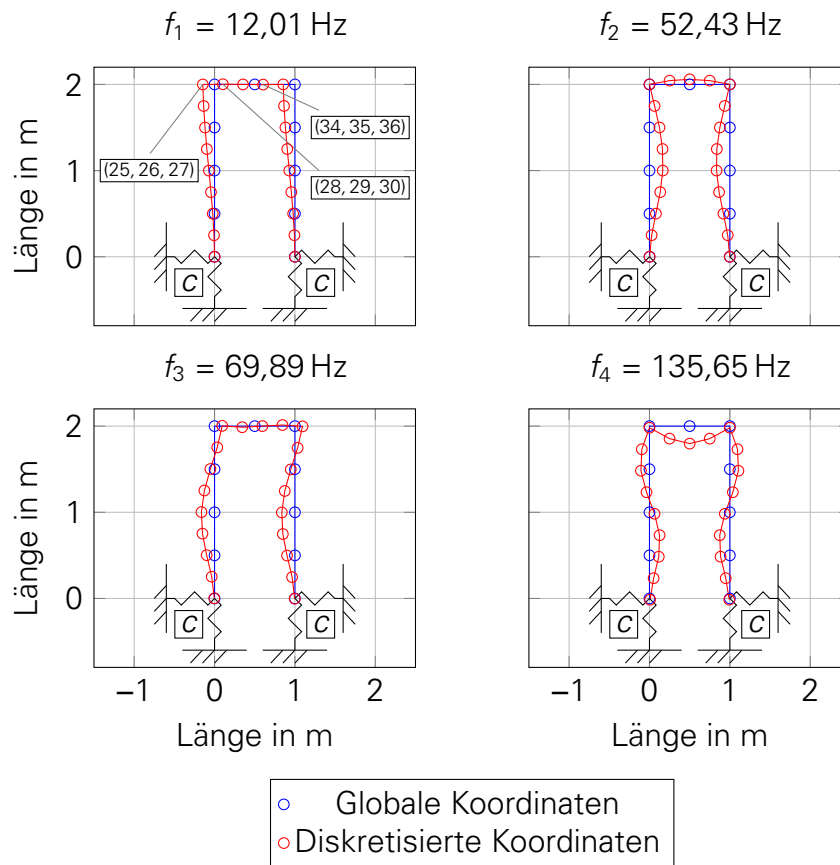


Abbildung 4.2 Darstellung der ersten vier Eigenmoden des elastischen Gestells mit den Lagersteifigkeiten $c = 1 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ bzw. $c = 1 \cdot 10^8 \text{ N m}$ für die elastischen Lager

gut simulieren kann. Es wurden drei Bewegungen mit der jeweiligen Drehfrequenz der Kurbel von 2 Hz, 6 Hz und 10 Hz gewählt.

Die Ergebnisse sollen lediglich das Modell verifizieren und einige prinzipielle Zusammenhänge erläutern. Für den Versuchsstand der TU Dresden, für welchen diese Arbeit eine Vorarbeit leistet, müssen noch die exakten geometrischen Abmessungen der Streben des Gestells dem Modell hinzugefügt werden. Hier gelten die Werte aus (2.39), welche Ähnlichkeit zu dem tatsächlichen Versuchsstand haben. Der reale Versuchsstand ist dreidimensional und steht auf vier Füßen und besitzt weitere Querverstrebungen. Ebenso ist an dem Versuchsstand der TU kein Vier- sondern ein Fünfgelenk mit zwei Antrieben angebracht, womit die Anregung ebenfalls anders ist. Für die Abmessungen und Trägheiten des Viergelenkes gelten (2.76) bis (2.78).

Die Lagerreaktionen des Viergelenkes aus Abbildung 2.10, für die verschiedenen Frequenzen, sind in Abbildung 4.3 dargestellt, wobei sich auf die Kraftverläufe in X-Richtung beschränkt wurde.

Sehr gut ersichtlich ist der Ruck zu Beginn der Bewegung. Die dynamischen Kräfte steigen mit einer vergleichsweise geringen Steigerung der Drehfrequenz des Antriebes stark an. Wenn auch die Bewegung in diesem Beispiel in einer praktischen Anwen-

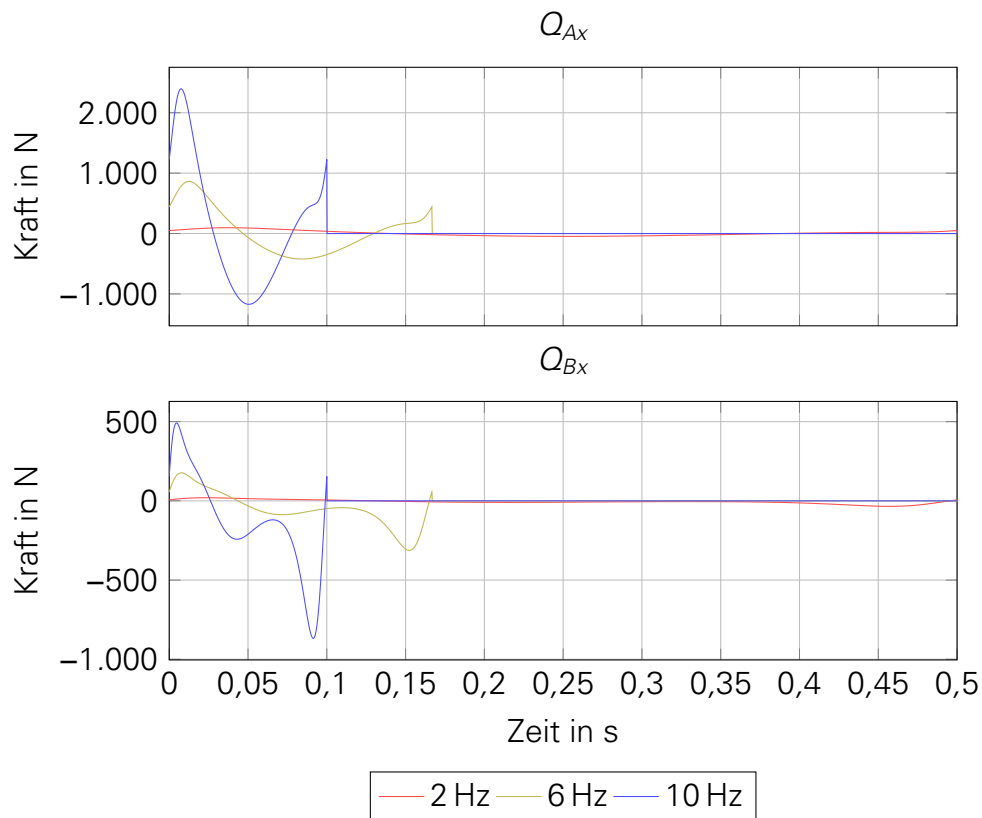


Abbildung 4.3 Lagerreaktionen des Viergelenkes als Anregung des Gestells, für verschiedene Frequenzen

dung so nicht vorzufinden wäre, so ist doch gut zu erkennen, welchen Einfluss eine Steigerung der Drehzahl hat. Für sich genommen sind diese Werte nicht repräsentativ und müssen in Relation zu der entsprechenden Auslenkung des Gestells betrachtet werden. Die Auslenkungen in X-Richtung des Freiheitsgrades q_{26} ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

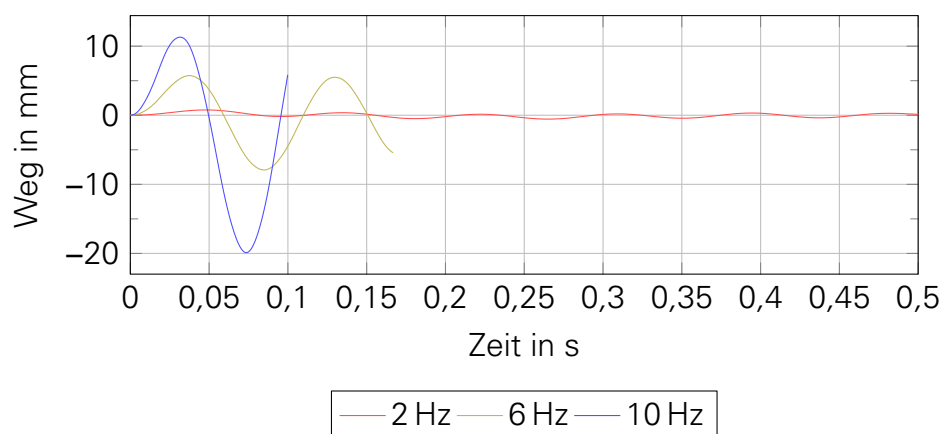


Abbildung 4.4 Auslenkungen des Freiheitsgrades q_{26} für die verschiedenen Anregungen durch das Viergelenk

Die Auslenkungen nehmen bereits bei 6 Hz stark zu und könnten bei einem Handha-

bungsprozess in einer Maschine zu Problemen führen. Dargestellt ist nur eine Periode des Antriebes. Es schließt sich daran die Ausschwingphase an. Neben den zeitlichen Verläufen der Anregungen kann mit dem Frequenzspektrum ein weiterer wesentlicher Zusammenhang für das Schwingverhalten des Gestells abgeleitet werden. Das Anregungsspektrum der X-Kräfte Q_{Ax} und Q_{Bx} ist in Abbildung 4.5 dargestellt.

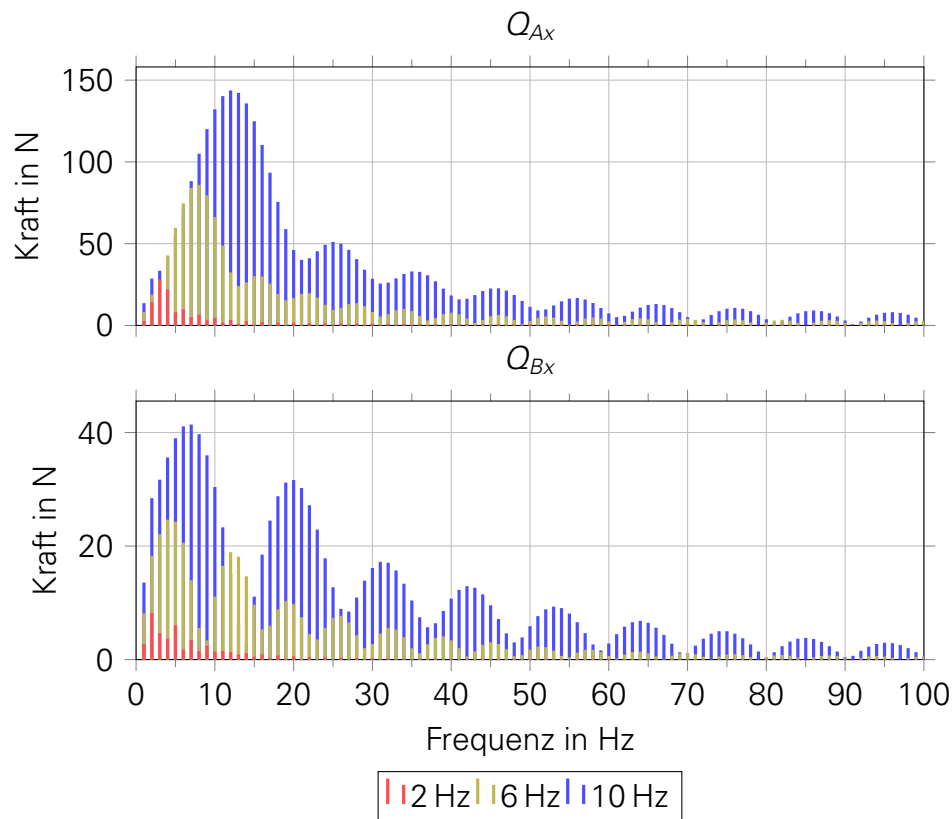


Abbildung 4.5 Anregungsspektren der Lagerreaktionen Q_{Ax} und Q_{Bx}

Die ruckbehaftete Bewegung regt, ähnlich eines Schlages mit Impulshammer, ein breiteres Spektrum an als die Drehfrequenz des Antriebes. Auch das nichtlineare Übertragungsverhalten des Getriebes erregt mehrere Frequenzen. Es werden vor allem die unteren Frequenzen zwischen 0 – 20 Hz angeregt. Die Drehfrequenz des Antriebes ist mit 10 Hz sehr nah an der ersten Eigenfrequenz von $f_1 = 12,01$ Hz gelegen, weshalb auch ein größerer Ausschlag zu erwarten war. Das Amplitudenmaximum der Lagerreaktion Q_{Ax} , liegt jedoch nicht bei 10 Hz sondern bei 12 Hz und damit auf der Eigenfrequenz f_1 . Werden noch die Eigenfrequenzen des Gestells aus Abbildung 4.2 berücksichtigt, ist ersichtlich, dass weitere Eigenfrequenzen nur unwesentlich angeregt werden. Die Form der ersten Mode neigt mehr zum Biegeschwingen entlang der X-Achse, was auch die große Verschiebung des Freiheitsgrades q_{26} erklärt. Neben dem Spektrum sind aber auch die Kraftamplituden um ein Vielfaches höher, weshalb der große Ausschlag des Gestells, in diesem Beispiel, nicht nur mit dem Spektrum erklärt werden kann.

Das Frequenzspektrum muss im jeweiligen Anwendungsfall berücksichtigt werden,

da ein nichtlineares Getriebe und eine evtl. unvorteilhafte Bewegung des Antriebes mehrere Eigenfrequenzen anregen kann. Ein verifiziertes Modell kann daher zur Bahnplanung und auch zur Auslegung von neuen Maschinen zweckmäßig genutzt werden. Es ist auch denkbar das Gestell so zu versteifen, dass die Eigenfrequenzen in höhere Bereiche verschoben werden und Feder-Dämpfer-Elemente an den Ecken des Gestells zur Minimierung der Amplituden beitragen. Solche Untersuchungen sind bereits mit diesem zweidimensionalen Modell durchführbar und lassen qualitative Schlüsse zu, wie die Bewegungsgüte verbessert werden kann.

Die Auslenkungen des Freiheitsgrades q_{26} in Abbildung 4.4 berücksichtigt die Wechselwirkungen des Getriebes mit dem Gestell. Es fehlt noch der Vergleich der Schwingungen des Gestells zwischen nullter und erster Näherung. Also der Anregung ohne und mit Kopplung der Systemmatrizen von Getriebe und Gestell. In Abbildung 4.6 sind die Verläufe der Koordinate q_{26} mit und ohne Kopplung der Systemmatrizen dargestellt.

Man kann erkennen, dass die Amplitudenhöhe der Schwingungen, für dieses Beispiel, nur unwesentlich beeinflusst wird. Lediglich eine zeitliche Verschiebung der Schwingungsmaxima ist zu erkennen. Je nach Mechanismus und Gestell können diese Verschiebungen in der Zeit für Handhabungsprozesse relevant sein. Diese Rückwirkungen zwischen Mechanismus und Gestell müssen je nach Anwendungsfall berücksichtigt werden. Der Einfluss ist nachgewiesen, die Relevanz ist aber situationsabhängig.

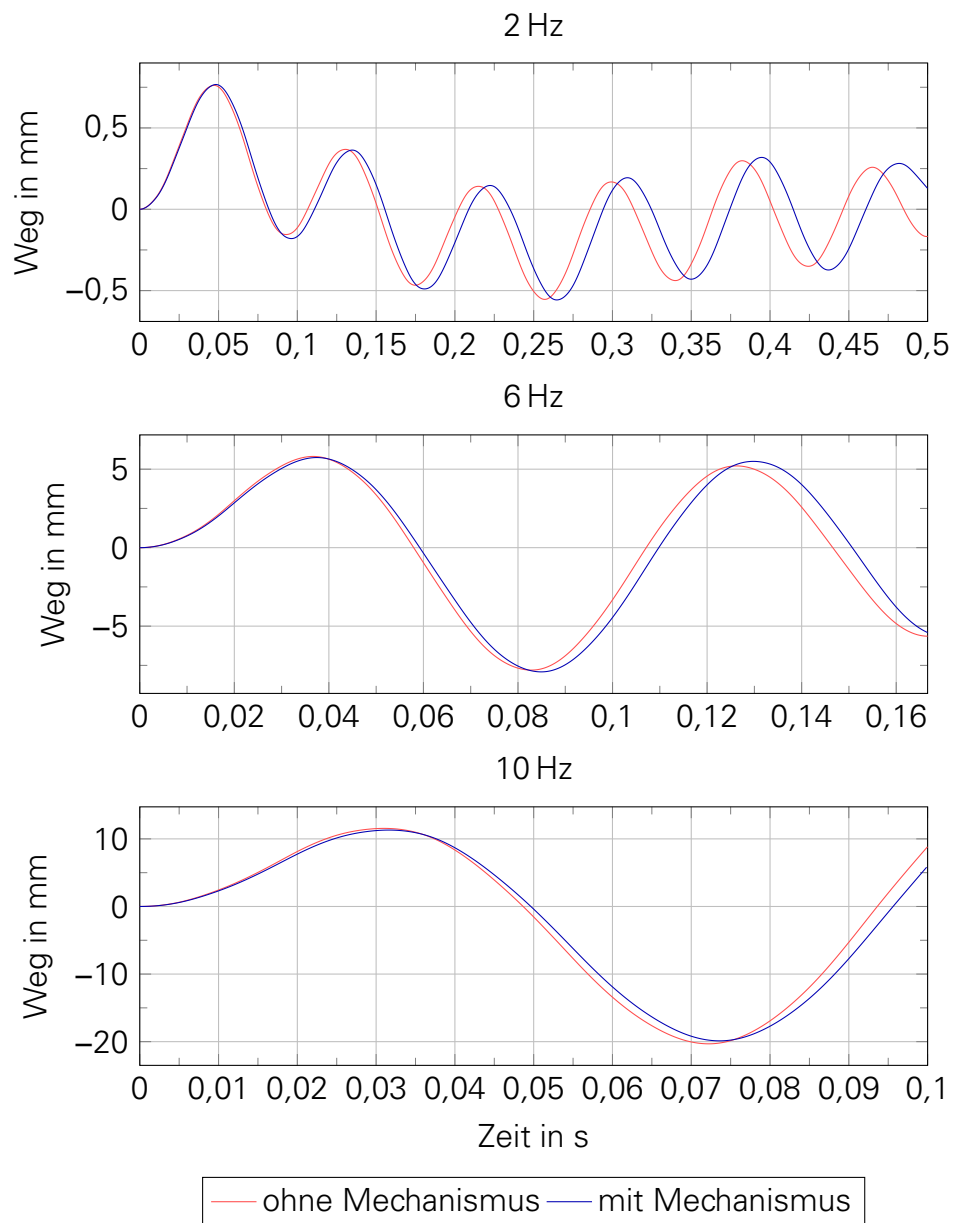


Abbildung 4.6 Einfluss der Systemmatrizen des Mechanismus auf die Schwingungen des Freiheitsgrades q_{26}

5 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Es konnte der Weg aufgezeigt werden, wie durch die Aufschlüsselung des Gesamtsystems in Substrukturen die Überlagerung eines periodisch bewegten Mechanismus mit einem elastischen Gestell vollzogen wird. Dabei ist es wichtig, die korrekten Energieinhalte der jeweiligen Substruktur zu erfassen, damit das finale System sich richtig verhält. In dieser Arbeit wurde ein elastisches Gestell aus finiten Biegeträgern aufgebaut. Die Systemmatrizen eines Biegeelementes wurden hergeleitet und anschließend mit der Substrukturtechnik zu dem gesamten Gestell zusammengebaut. Es wurden elastische Lagerungen umgesetzt, womit im Weiteren verschiedene Lagersituationen simuliert werden können. Für den Versuchsstand der TU Dresden kann nicht von einer festen Einspannung ausgegangen werden, was die Berücksichtigung elastischer Lager obligatorisch macht.

Mit den Bewegungsgleichungen für Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden konnten elastische Lager für den gewählten Mechanismus berücksichtigt werden. Es entstehen nichtlineare DGLn, welche noch linearisiert werden müssen. Dabei ist die Linearisierung der BWGn essentiell, damit die entstehenden Systemmatrizen des Mechanismus mit denen des Gestells addiert werden können. In dieser Arbeit wurde mittels der Taylorentwicklung linearisiert. Nach der Linearisierung entsteht ein lineares System von gewöhnlichen DGLn mit zeitabhängigen Koeffizienten. Der starre Mechanismus auf elastischen Lagern wird als Substruktur mit der Substruktur des elastischen Gestells an ausgewählten Kopplungskordinaten verknüpft. Nach der Addition der Systemmatrizen von Mechanismus und Gestell sind die Systemmatrizen des Gesamtsystems ebenfalls zeitlich variabel und es wurde das DGL-System mittels numerischer Integration gelöst.

Die Integration ergab die Auslenkungen des Gestells. In dieser Arbeit kann mit den gewählten Anregungen und den Abmessungen der Biegeträger des Gestells und geometrischen Größen des Mechanismus, die Wechselwirkung zwischen Mechanismus und Gestell vernachlässigt werden. Es genügt das Ermitteln der Lagerreaktionen des Mechanismus, welche anschließend als Anregung des elastischen Gestells genutzt werden können. Die Unterschiede der Ausschläge wurden für eine Bewegungsperiode des Antriebes betrachtet und es ergab sich eine unwesentliche Beeinflussung der Amplitudenhöhen der Ausschläge. Der größere Effekt durch die Überlagerung war die zeitliche Verschiebung der Amplitudenmaxima, welche durch die höhere Trägheit des Gesamtsystems durch den Mechanismus erklärt werden kann.

Ob die Wechselwirkungen des Mechanismus mit dem Gestell zu vernachlässigen sind, ist vom Anwendungsfall abhängig. Nicht berücksichtigt wurden in dieser Arbeit ein

dreidimensionales Gestell und evtl. Zusatzmassen am Mechanismus oder zusätzlich wirkende Kräfte auf das Gestell. Es ist denkbar, dass unter bestimmten Bedingungen, wie etwa ungünstige Bewegungsgesetze die Eigenfrequenzen des Gestells anregen, die Bewegungsgüte stark beeinflusst wird.

Je nach Anregungsspektrum werden zur Modellvalidierung nur wenige Eigenfrequenzen des Gestells benötigt. Auch auf die Formen der Eigenmoden, welche angeregt werden, ist zu achten, da sie die Abweichungen der Bewegungen des Mechanismus mehr oder weniger beeinflussen. Eine Modalanalyse des Gestells ist wichtig für korrekte Eigenfrequenzen und Dämpfungen. Mit dem validierten Modell können dann komplexe Bewegungsgesetze erstellt werden, welche das Schwingungsverhalten des Gestells berücksichtigen. Die modellgestützte Optimierung bzw. Auslegung einer Maschine lässt einen Einblick in das dynamische Verhalten eines Systems zu und ermöglicht somit fundierte Entscheidungen über Anpassungen der Struktur und Bewegungsgesetze des Mechanismus.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel *Modellierung des flexiblen Gestells eines periodisch bewegten Mechanismus* selbstständig und ohne unzulässige Hilfe Dritter verfasst habe. Es wurden keine anderen als die in der Arbeit angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt. Die wörtlichen und sinngemäß übernommenen Zitate habe ich als solche kenntlich gemacht. Es waren keine weiteren Personen an der geistigen Herstellung der vorliegenden Arbeit beteiligt. Mir ist bekannt, dass die Nichteinhaltung dieser Erklärung zum nachträglichen Entzug des Hochschulabschlusses führen kann.

Dresden, 26.04.2019

Richard Zschech

LITERATUR

- [ARC65] J. S. ARCHER. „Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques.“ In: *AIAA Journal* 3.10 (1. Okt. 1965), S. 1910–1918. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/3.3279. URL: <https://doi.org/10.2514/3.3279> (besucht am 06. 04. 2019).
- [Bal14] Herbert Balke. *Einführung in Die Technische Mechanik Festigkeitslehre*. 3., aktualisierte Aufl. 2014. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2014. ISBN: 978-3-642-40980-6.
- [DD13] Jürgen Dankert und Helga Dankert. *Technische Mechanik Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik*. 7. Aufl. 2013. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013. ISBN: 978-3-8348-1809-6.
- [DH16] Hans Dresig und Franz Holzweißig. *Maschinendynamik*. 12. Aufl. 2016. Berlin, Heidelberg : Springer, 2016. ISBN: 978-3-662-52712-2.
- [DV89] Hans Dresig und Iosif Vul'fson. *Dynamik Der Mechanismen*. Berlin: Dt. Verl. d. Wiss., 1989. 328 S. ISBN: 3-326-00361-7. URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:ch1-201001121>.
- [Ewi95] David J. Ewins. *Modal Testing: Theory and Practice*. Repr., rev. with new notation. Taunton: Research Studies Pr. [u.a.], 1995. ISBN: 0-86380-017-3.
- [Gra83] Franz Grashof. *Theoretische Maschinenlehre: Theorie Der Getriebe Und Der Mechanischen Messinstrumente*. Hamburg: Leopold Voss, 1883. URL: <https://www.dmg-lib.org/dmglib/handler?docum=10009>.
- [Lin14] Michael Link. *Finite Elemente in Der Statik Und Dynamik*. 4., korrigierte Aufl. 2014. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2014. ISBN: 978-3-658-03556-3.
- [MSP16] Kurt Magnus, Walter Sextro und Karl Popp. *Schwingungen Grundlagen – Modelle – Beispiele*. 10. Aufl. 2016. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2016. ISBN: 978-3-658-13820-2.
- [Ngu86] Van Khang Nguyen. „Dynamische Stabilität Und Periodische Schwingungen in Mechanismen“. Dissertation. Chemnitz: Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1986.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

2.1	Grafische Darstellung zur Berechnung des Krümmungsradius nach [Bal14]	5
2.2	Darstellung der Verformung eines freien Biegebalkens mit eingetragenen Kraft- und Deformationsgrößen	7
2.3	Darstellung der angreifenden Kraftgrößen im gedrehten Koordinatensystem	13
2.4	Gesamtsystem eines galgenförmigen Tragwerkes, bestehend aus drei Substrukturen $R = 3$, 12 globalen Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_{12} und mit $l_i = 1 \text{ m}$	15
2.5	Darstellung der ersten vier Eigenmoden des Galgentragwerkes mit fester Einspannung	18
2.6	Einfluss von verschiedenen Zusatzmassen m , auf die 3. Eigenfrequenz	19
2.7	Kraftgrößen einer Feder schräg im globalen Koordinatensystem	20
2.8	Einfluss einer masselosen Feder, auf die 3. Eigenfrequenz	22
2.9	Geometrische Parameter des Viergelenks in seiner Anfangsstellung	23
2.10	Viergelenk mit virtuellen Koordinaten	29
2.11	Verläufe der Lagerreaktionen bei einer konstanten Umdrehungsgeschwindigkeit des Antriebes	34
4.1	Aufbau des Gesamtsystems aus den Substrukturen elastisches Gestell und Mechanismus	38
4.2	Darstellung der ersten vier Eigenmoden des elastischen Gestells mit den Lagersteifigkeiten $c = 1 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ bzw $c = 1 \cdot 10^8 \text{ N m}$ für die elastischen Lager	43
4.3	Lagerreaktionen des Viergelenkes als Anregung des Gestells, für verschiedene Frequenzen	44
4.4	Auslenkungen des Freiheitsgrades q_{26} für die verschiedenen Anregungen durch das Viergelenk	44
4.5	Anregungsspektren der Lagerreaktionen Q_{Ax} und Q_{Bx}	45
4.6	Einfluss der Systemmatrizen des Mechanismus auf die Schwingungen des Freiheitsgrades q_{26}	47

TABELLENVERZEICHNIS

2.1 Partielle Ableitungen der Lage- und Schwerpunktkoordinaten des Vierge- lenkes	32
--	----