

Neue Verfahren zur Effizienten Simulation Thermischer Systeme mit Translatorischen Strukturvariabilitäten

Dissertation

Zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Technische Universität Dresden
Fakultät Maschinenwesen

Gutachter

Prof. Dr.-Ing. Michael Beitelschmidt
Prof. Dr.-Ing. Steffen Ihlenfeldt

Vorsitzender der Promotionskommission

Prof. Dr.-Ing. Michael Beckmann

Dipl.-Ing. Marian Partzsch

geboren am 21. Mai 1986 in Freiberg

Tag der Einreichung: 18.07.2017

Tag der Verteidigung: 22.06.2018

Vorwort

Kurzfassung

Aktuelle technologische Herausforderungen, z.B. in der Werkzeugmaschinenentwicklung, erfordern aufgrund der steigenden Genauigkeitsanforderungen an die thermische Simulation eines zu betrachtenden Systems, dass ebenfalls die Auswirkungen relevanter, translatorischer Relativbewegungen zwischen unterschiedlichen Teilen des Systems berücksichtigt werden. Das Vorgehen, diese Bewegung in den Simulationen durch diskrete Verschiebungen zwischen den Lastschritten einer transienten Analyse umzusetzen, führt bei der Verwendung einer infinit kleinen Zeitschrittweite auf die Abbildung einer kontinuierlichen Bewegung, bringt aber gleichzeitig eine problematische Steigerung des notwendigen Rechenaufwands mit sich.

Die Anwendung einer langen Zeitschrittweite bei gleichzeitiger Konservierung der Ergebnisgenauigkeit stellt nun einen Ansatz dar, die Effizienz solcher Analysen über den eingesparten Aufwand der nicht auszuwertenden Lastschritte zu steigern. In dieser Arbeit wurden durch eine gezielte Partitionierung der aus einer Ortsdiskretisierung resultierenden Systemmatrizen zunächst vier qualitativ unterscheidbare Fehlerquellen identifiziert, welche die Verwendung einer groben Zeitdiskretisierung potentiell nach sich ziehen kann. Konkret gehören dazu die Leistungsfähigkeit des zur transienten Auswertung verwendeten Integrationsverfahrens, die diskrete Umsetzung der Bewegung sowie die seltene Aktualisierung der beiden Arten von Kontaktlasten. Für die einzelnen Fehler werden die möglichen Auswirkungen jeweils allgemein quantifiziert. Für zwei, dabei als relevant identifizierte Fehlerquellen werden mit der BD- und der RUMHI-Korrektur zugehörige Verfahren entwickelt, mit denen die Ergebnisgenauigkeit trotz grober Zeitdiskretisierung aufwandsarm bewahrt werden kann. Dass ein strukturvariables, thermisches Problem durch die kombinierte dieser Korrekturverfahren deutlich effizienter berechnet werden kann, wird in der Arbeit abschließend an zwei stellvertretenden Problemen beispielhaft gezeigt.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörpermechanik der Technischen Universität Dresden. Ich war involviert im *Teilprojekt A05: Prozessaktuelle Gesamtsimulation des SFB/Transregio 96 – Thermo-energetische Gestaltung von Werkzeugmaschinen*, für dessen Förderung ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) ausdrücklich danke.

Die Jahre am Lehrstuhl für Dynamik und Mechanismentechnik – welche für mich bereits während der Endphase meines Studiums begannen – waren stets geprägt von einem angenehmen Klima der gegenseitigen Unterstützung. Neben der fordernden und spannenden, wissenschaftlichen Arbeit wird mir die Zeit auch durch zahlreiche, interessante und zum Teil ungewöhnliche Erlebnisse verschiedenster Art in sehr schöner Erinnerung bleiben. Für die Möglichkeit an seinem Lehrstuhl zu promovieren und die anregende und ermutigende, wissenschaftliche Betreuung gilt daher Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Beitelschmidt mein besonderer Dank.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Steffen Ihlenfeldt bedanke ich mich vielmals für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Ein ganz großes Dankeschön gebührt allen meinen Kollegen am Lehrstuhl, mit denen ich über die Jahre zusammen arbeiten durfte. Stellvertretend für Alle möchte ich hier meinen Bürokollegen Herrn Dr.-Ing. Christian Telke erwähnen, der sich jederzeit vorbehaltlos für eine Besprechung des Projekts oder das gemeinsame Durchgehen von Unterlagen Zeit genommen hat. Zusätzlich möchte ich mich vielmals bei Frau Dipl.-Ing. Anja Jablonski und Herrn Dipl.-Ing. Falko Berger für die Unterstützung bei administrativen und technischen Problemen bedanken.

Durch die Mitgliedschaft in einem SFB/TR durfte ich zudem mit zahlreichen Wissenschaftlern anderer Institute kooperieren, von denen ich hier stellvertretend Herrn Dipl.-Math. Andreas Naumann vom Institut für Wissenschaftliches Rechnen der TU Dresden für die angenehme Zusammenarbeit sowie die Unterstützung in einigen Fragen mathematischer Details danken will.

Ich hatte ebenfalls das Glück, einen Teil meiner Forschung im Rahmen eines achtmonatigen Aufenthalts an der Louisiana State University im Südosten der USA durchführen zu können. Beim Direktor des CeRoM, Herrn Prof. Michael M. Khonsari, PhD. bedanke ich mich für die Möglichkeit zum Erlangen dieser internationalen Erfahrungen sowie für die wissenschaftliche Betreuung von einem weiteren Standpunkt.

Ein spezieller Dank gebührt zudem Frau Maria Wolowski (M.Ed.) für die Durchsicht des Manuskripts hinsichtlich orthographischer Mängel.

Da mit dieser Arbeit meine Ausbildung zum vorläufigen Ende gekommen ist, will ich abschließend noch einmal meinen Eltern – Ines und Matthias Partzsch – für die geleistete Unterstützung auf den größten Teil des Weges danken.

Dresden, den 19.07.2018

Marian Partzsch

*In Erinnerung an meinen Opa, Dipl.-Ing. Werner Nestler.
Für mich ein Vorbild. Als Ingenieur – und vor Allem als Mensch.*

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	iv
Abbildungsverzeichnis	vii
1 Strukturvariabilität in thermischen Analysen	1
1.1 Das Forschungsgebiet im Überblick	4
1.2 Zielsetzung und Inhalt	9
2 Grundlegendes	14
2.1 Das thermische Feldproblem	14
2.1.1 Grundlegendes zu Größen und Physik	14
2.1.2 Mathematische Beschreibung	18
2.2 Theorie der thermisch-transienten Analyse	21
2.2.1 Ortsdiskretisierung mittels Finiter-Elemente-Methode	23
2.2.2 Aspekte der Zeitdiskretisierung	26
3 Methodik der Bewegungseinbindung	28
3.1 Gegebenes Problem und dessen analytische Beschreibung	28
3.1.1 Thermisches System mit strukturellen Bewegungen	29
3.1.2 Analytische Beschreibung	34
3.2 Numerische Umsetzung der strukturvariablen Systeme	37
3.2.1 Einbindung der Bewegung in thermisch-transiente Analysen	38
3.2.2 Steuerung und Charakterisierung der Zeitdiskretisierung	41
3.3 Aspekte effizienter Simulationsverfahren	42
3.3.1 Einfluss der Bewegung auf das diskretisierte Problem	43
3.3.2 Bewegungsbedingte Fehler bei langen Zeitschrittweiten	48
3.3.3 Richtlinien zur Entwicklung effizienter Simulationsverfahren	50

4	Leistungsfähigkeit der transienten Integration	52
4.1	Traditionelle Fehlerabschätzung	53
4.2	Fehlerabschätzung bei strukturvariablen Problemen	56
4.2.1	Entwicklung und Beschreibung eines Ersatzsystems	56
4.2.2	Fehler der numerischen Berechnung	59
4.3	Vergleichende Analysen zum PTI-Einfluss	62
4.3.1	Das verwendete FE-Modell	62
4.3.2	Vergleichende Analysen	65
5	Fehleinträge aufgrund der diskreten Kinematik	72
5.1	Diskrete Umsetzung einer realen Bewegung	73
5.2	Korrektur der kinematisch bedingten Fehleinträge	78
5.2.1	Herleitung der Korrekturformeln	78
5.2.2	Anwendung der BD-Korrektur	81
6	Korrektur des diskret aktualisierten Wärmeeintrags	89
6.1	Standard-Korrektur	90
6.2	Endbereich-Korrektur	99
6.3	Umkehrpunkte und Performance	110
6.3.1	Umkehrpunkt-Korrektur	110
6.3.2	Auswirkungen der gesamtheitlichen RUMHI-Korrektur	116
7	Diskrete Aktualisierung der Kontaktwärmeleitung	121
7.1	Ersatzmodell	121
7.2	Fehlerverhalten und Korrekturverzicht	125
8	Abschließende Betrachtungen	130
8.1	Zusammenfassung	130
8.2	Anwendung der Korrekturverfahren	134
8.2.1	Fräsmaschinenständer	134
8.2.2	Translationen in Polarkoordinaten	138
8.3	Ausblick	143
Literaturverzeichnis		146

A	Zusätzliche Informationen	156
A.1	Relevante Formfunktion	156
A.2	Weglassen der Mittelknoten	158
A.3	PreL1-Manipulation	160
A.4	Endbereich-Korrektur bei doppelter Beeinträchtigung	162

Symbolverzeichnis

Formelzeichen	Einheit	Beschreibung
a	m/s^2	Beschleunigung
A	–	Abschnitt
c	J/kgK	Spezifische Wärmekapazität
E	%	Fehler
l, h, w	m	Geometrische Ausdehnungen
L	–	Lastschritt
n	–	Anzahl
Q	J	Wärme
q	W/m^2	Wärmestromdichte
r, ϕ, z	m bzw. °	Polarkoordinaten
T	K	Temperatur
s	m	Bewegung
t	s	Zeit
v	m/s	Geschwindigkeit
x, y, z	m	Kartesische Koordinaten
α	$\text{W/m}^2\text{K}$	Wärmeübergangskoeffizient
Γ	–	Rand / Systemgrenze
η	1	Fahrteilzahl
η_{-}	1	Floor-Wert der Fahrteilzahl
κ	m^2/s	Temperaturleitfähigkeit
λ	W/mK	Wärmeleitfähigkeit
ρ	kg/m^3	Volumetrische Massendichte
Ω	–	Körper / Gebiet / System

Index/Akzent	Beschreibung
$(\cdot)_A$	Anfang eines Bewegungsabschnitts
$(\cdot)_B$	BD-Korrektur bzw. Beulenbereich
$(\cdot)_b$	Bewegter Körper
$(\cdot)_D$	Dellenbereich
$(\cdot)_E$	Ende eines Bewegungsabschnitts und Endbereich-Korrektur
$(\cdot)_e$	Element / Elementgrenze
$(\cdot)_{eb}$	Endbereich
$(\cdot)_G$	Grob diskretisierte Analyse
$(\cdot)_i, (\cdot)_j, (\cdot)_k$	Laufender Zählindex
$(\cdot)_K$	Konstanter Wert
$(\cdot)_l$	Last
$(\cdot)_n$	Fester Zählindex
$(\cdot)_N$	Korrekturfrei und NEUMANN-Kontaktlastanteil
$(\cdot)_R$	Referenz
$(\cdot)_S$	Standard-Korrektur
$(\cdot)_s$	Stehender Körper
$(\cdot)_{sm}$	Gesamter Bereich
$(\cdot)_U$	Umkehrpunkt-Korrektur
$(\cdot)_W$	Konduktiver Kontaktlastanteil
$\vec{()}$	Ortsvektor
$\bar{()}$	Vektor gleichartiger Größen
M	Matrix
$\dot{()}$	Zeitableitung 1. Ordnung
$\tilde{()}$	Inhaltliche Variante einer Größe

Abkürzung	Bedeutung
BD	Bump-Dent (Fehler F2)
DGL	Differentialgleichung
FDM	Finite Differenzen Methode
FEM	Finite Elemente Methode
iEV	Implizites EULER-Verfahren
PDGL	Partielle Differentialgleichung
PTI	Performance of Transient Integration (Fehler F1)
RUCC	Rarely Updated Contact Conduction (Fehler F3b)
RUMHI	Rarely Updated Moving Heat Input (Fehler F3a)
WZM	Werkzeugmaschine

Abbildungsverzeichnis

2.1	Prinzipieller Ablauf einer numerischen, thermisch-transienten Analyse	22
3.1	Beispielproblem eines thermischen Systems mit Strukturvariabilität	29
3.2	Prinzip der Bewegungseinbindung	38
3.3	Anteilige Bedeckung der Randelementschichten	40
3.4	Einfluss der Zeitdiskretisierung	43
4.1	Ersatzsystem zur PTI-Abschätzung	57
4.2	Fehler bei der numerischen Auswertung des Ersatzsystem	60
4.3	Illustration des verwendeten FE-Modells	63
4.4	Abschätzung der maximalen Zeitschrittweiten	65
4.5	Profil des bewegten Testlastfalls	67
4.6	PTI-Verhalten bei unterschiedlich feiner Ortsdiskretisierung	68
4.7	Einfluss des PTI-Fehlers in längeren Simulationen	70
5.1	Bilderserie einer diskreten Bewegung mit $\eta = 1,5$	72
5.2	Diskrete Bewegungen mit unterschiedlichen Fahrteilzahlen η	74
5.3	Ansätze zur Zeitschrittweitensteuerung bei realen Bewegungen	76
5.4	Verfahrsschaubilder zu beispielhaften, diskreten Bewegungen	78
5.5	BD-Bereiche auf einem ortsdiskreten System	81
5.6	Bewegtes Lastprofil innerhalb der Analyse der BD-Korrektur	84
5.7	Auswirkung der BD-Korrektur bei $\eta_G = 1,5$	85
5.8	Längerfristige Temperaturentwicklung im Beulen-/Dellenbereich	86
5.9	Auswirkung der BD-Korrektur bei unterschiedlichen η_G	88
6.1	Wärmeeintrag in diskreten Bewegungen	90
6.2	Prinzipieller Ablauf der RUMHI-Standardkorrektur	92
6.3	Ein- und Austrittsphase während der Überfahrt von $\Gamma_l(t)$	93
6.4	Wärmeeintrag bei bewegten Lastprofil mit nichtkonstanten Verläufen	96

6.5	Nomenklatur relevanter Bereiche auf Ω_S	97
6.6	Wärmeeintrag in den Endbereichen bei konstantem Lastprofil	98
6.7	Auswertung der Korrekturwärmestromdichte im Bewegungsende	101
6.8	Schema der Einfahrt in einen Endpunkt	102
6.9	Auswirkungen der Endbereich-Korrektur	106
6.10	Endbereich-Korrektur bei Simulationen mit $\eta \notin \mathbb{N}$	108
6.11	Wärmeeintrag in diskreten Bewegungen	111
6.12	Wärmeeintrag in diskreten Bewegungen	112
6.13	Umkehrpunkt-Korrektur für parabel- und sinusförmige Bewegungen	115
6.14	Elemente des zur Analyse verwendeten, bewegten Lastprofils	117
6.15	Ergebnisse der Simulation unter Anwendung der RUMHI-Korrektur	118
6.16	Weitere Aspekte der RUMHI-Korrektur	119
7.1	Diskret abgebildete Kontaktwärmeleitung und Ersatzmodell	122
7.2	Ersatzmodell zur Analyse des RUCC-Verhaltens	123
7.3	Fehlerverhalten des Ersatzproblems bzgl. relevanter Einflussgrößen	126
7.4	Verallgemeinertes Fehlerverhalten am Ersatzproblem	127
8.1	FE-Modell des Fräsmaschinenständers	135
8.2	Bewegtes Lastprofil bei Simulation des Maschinenständers	136
8.3	Temperaturerhöhung auf Pfad in den unterschiedliche Korrekturstufen	137
8.4	Resultierende Temperaturfelder im Schienenbereich	138
8.5	Mögliche strukturvariable Probleme in Polarkoordinaten	139
8.6	Beispiel-Modell	139
8.7	Bewegtes Lastprofil bei Simulation des Scheibenbremsensystems	140
8.8	Pfadtemperaturen bei unterschiedlichen Korrekturen	141
8.9	Resultierende Temperaturfelder der Scheibe	142
A.1	Hexaederelement mit quadratischen Ansatzfunktionen	156
A.2	Ergebnisse von Vergleichsanalysen zum Einfluss der Mittelknoten	158
A.3	Verschaubilder zu Beginn einer Analyse	160
A.4	Auswirkung der PreL1-Mainpulation auf die Wärmeeintragsfelder	161
A.5	Position der Lastzone bei doppelter Beeinträchtigung	162

1 Strukturvariabilität in thermischen Analysen

Die theoretische Untersuchung eines gegebenen Problems hinsichtlich der darin vorliegenden Temperaturverhältnisse – also dessen *thermische Analyse* – stellt neben den struktur- und strömungsmechanischen Untersuchungen eine der Hauptaufgaben von Berechnungsingenieuren während maschinenbaulicher Entwicklungsprozesse dar (SKOLAUT [89]). Der Frage danach, welche Temperaturen an einem Bauteil im Betrieb oder während eines speziellen Fertigungsprozesses zu erwarten sind, kann hinsichtlich Sicherheit (z. B. Verbrennungen an aufgeheizten Oberflächen) oder die angestrebte Funktion bzw. das angestrebte Ergebnis direkt eine entscheidende Bedeutung zukommen (NEUGEBAUER [71]). Daneben ist das thermische Verhalten eines Problems über entsprechende Kopplungseffekte auch oft indirekt für dessen Verhalten in anderen physikalischen Domänen relevant. Für den Maschinenbau ist dabei speziell der Effekt der *Wärmeausdehnung* hervorzuheben, dessen Auswirkungen auf die Struktur und deren Beanspruchungszustand in der Auslegung zahlreicher Klassen von Maschinenelementen zu beachten sind (DUBBEL [26]).

Neben der Physik wird das Verhalten eines Systems von dessen Struktur bestimmt. Liegen mehrere Teilsysteme vor, welche sich relativ zueinander bewegen, so ist die Struktur des Gesamtsystems nicht statisch sondern über der Zeit variabel. Für maschinenbauliche Erzeugnisse ist diese Eigenschaft definierend¹, wobei sich noch qualitativ unterscheiden lässt, ob es sich – wie bei einer translatorischen Verschiebung – um eine echte, objektiv zu beobachtende *Strukturvariabilität* handelt oder ob – wie im Fall eines Rotors – trotz ausgeführter Bewegung die Struktur des Gesamtsystems unverändert bleibt. Da mit Blick auf die Prozesssicherheit die technologische Umsetzung der echten Strukturvariabilitäten einer Maschine üblicherweise geführt erfolgt, lassen sich

¹Z. B. wird der Ausdruck *Maschine* in der europäischen Richtlinie über Maschinen (siehe [1]) u. a. als „[...] *Gesamtheit miteinander verbundener Teile oder Vorrichtungen, von denen mindestens eines bzw. eine beweglich ist* [...]“ definiert.

diese Bewegungen bzgl. eines geeigneten Referenzrahmens oft als reine Translationen betrachten. Die Berücksichtigung dieser *translatorischen* Strukturvariabilitäten in einer rechnerischen Analyse wird notwendig, wenn diese für den interessierenden Zustand des betrachteten Systems entsprechend relevant sind. Im Folgenden wird eine derartige Problemstellung der gegenwärtigen Forschung – aus der sich auch die Motivation für diese Arbeit ergeben hat – etwas detaillierter erläutert.

Aktuelle Herausforderungen in der Berechnung von Werkzeugmaschinen

Eine Erhöhung der Fertigungsgenauigkeit spanender Werkzeugmaschinen (kurz: WZM) bei gleichbleibender Produktivität wurde in der Vergangenheit vor allem über eine fortschreitende Verringerung der statisch und dynamisch bedingten Fehlereinflüsse erreicht. Als Folge macht der thermische Anteil am verbleibenden Fehler mittlerweile bis zu 80% aus (NESTMANN [70]). Wird nun aus wirtschaftlichen Gründen eine weitere Verkürzung der Produktionsintervalle innerhalb neuer WZM angestrebt, so führen die dann resultierenden, erhöhten Wärmeverluste (z. B. in den Führungselementen) über die thermo-elastische Wirkungskette zu einer größeren Verlagerung der Wirkstelle am Werkstück. Der damit verstärkt produzierte Ausschuss vernichtet wiederum den ökonomischen Nutzen der erhöhten Durchsatzraten. Das thermische Verhalten einer WZM begrenzt also deren Produktivität nach oben (GROSSMANN [33]).

Ein weiteres Hinausschieben der Produktivitätsgrenze kann nun nur erfolgen, indem zusätzliche Maßnahmen zur Beherrschung der thermo-elastischen Verformungen ergriffen werden. Derzeitig werden dafür Strategien wie z. B. die Verwendung faserverstärkter Kunststoffe (RAMESH [82]), der Einsatz umfangreicher Kühlung oder der Warmlauf in einen Verharrungszustand vor Fertigungsbeginn (GROSSMANN [33]) verfolgt. Allerdings sind diese vergleichsweise kosten- bzw. energieintensiv und stehen damit den Entwicklungszielen der Wirtschaftlichkeit und Nachhaltigkeit gegenüber. Alternative Ansätze haben daher zum Ziel, die thermisch bedingten Fehler über konstruktive Maßnahmen zu kompensieren (z. B. DROSSEL [25]) oder vergleichsweise aufwandsarm während des Betriebs zu korrigieren (z. B. THIEM [94]). Für deren Erfolg ist es allerdings erforderlich, die auftretenden thermisch-elastische Verformungen rechnerisch abzubilden, was mit Blick auf den aktuellen Stand der geforderten Fertigungsgenauigkeiten zudem relativ exakt erfolgen muss.

Erwartungsgemäß wird sich die Berechnung einer Werkzeugmaschine aufgrund deren Komplexität sehr aufwändig gestalten. Von Vorteil ist allerdings, dass die eigentlich

interessierenden, thermisch bedingten Strukturveränderungen nicht unbedingt mittels einer vollständig gekoppelten Mehrfeldanalyse² (starke Kopplung) bestimmt werden müssen. Der Grund dafür ist, dass das thermische Feld üblicher WZM-Fragestellungen aufgrund der verwendeten Materialien einen vergleichsweise trägen Charakter aufweist und der *piezokalorische Effekt* – also der Einfluss, den strukturelle Deformationen auf das thermische Feld haben – nicht von der Dehnung selbst, sondern von deren Rate (erste Ableitung) abhängt. Der deshalb auch als thermische Dämpfung bezeichnete Kopplungsmechanismus kann also in den meisten Fällen vernachlässigt werden, da das träge Herausbilden der thermischen Verformungen irrelevante Dehnungsraten nach sich zieht. Es ist daher möglich, in einer sequentiellen Analyse (schwache Kopplung) zunächst isoliert den Temperaturzustand der WZM zu berechnen und mit diesem dann mittels einer statischen, die Wärmeausdehnung berücksichtigenden Strukturberechnung die interessierende Verformung zu ermitteln (WILLNER [98]).

Die angestrebte, genaue Quantifizierung der thermo-elastischen Verformung ist also prinzipiell auf Basis einer entsprechend detaillierten Modellierung des vorliegenden, thermischen Verhaltens möglich. Dieses unterliegt für solch komplexe Systeme wie Werkzeugmaschinen unterschiedlichsten Einflüssen aus der Maschine (z. B. Motoren, Kühlung, Bearbeitungsprozess, etc..) und den Umgebungsbedingungen (z. B. Konvektion, Sonneneinstrahlung, Aufstellung der Maschine, etc..) (NEUGEBAUER [72]). Ein relevanter, interner Faktor sind dabei jene Baugruppen, mit denen die Bewegungen zur Ausführung der Bearbeitungs kinematik technologisch umgesetzt sind (RAMESH [82]). Dazu werden in WZM's oft Maschinenelemente wie Kugelgewindetriebe oder Profilschienenführungen verwendet, welche für sich betrachtet ausschließlich translatorische Bewegungen ausführen³. Neben deren Einfluss auf die Wärmeleitung zwischen den beiden Teilen der Maschine, welche sich relativ zueinander bewegen, kommt diesen Baugruppen durch die auftretende Reibung vor allem auch die bedeutende Rolle einer Wärmequelle für das thermische Feld zu (NEUGEBAUER [72]).

Mit den Werkzeugmaschinen ist also ein Problem gegeben, in dem relevante, translatorische Strukturvariabilitäten in einer thermischen Analyse zu berücksichtigen sind. Im

²Eine derartige Analyse berechnet die beteiligten Feldprobleme unter Einbezug der physikalischen Kopplungen simultan, was im Fall einer Ortsdiskretisierung des Problems zu größeren sowie asymmetrischen Systemmatrizen führt. Dadurch wird zur Auswertung der Systeme überproportional mehr Aufwand benötigt als zur Berechnung der separaten Einfeldprobleme (KUHLE [61]).

³Mehrere dieser translatorischen Bewegungen werden über serielle oder parallelkinematische Anordnungs-konzepte (NEUGEBAUER [71], PUTZ [81]) zu komplexeren Bewegungsprofilen superponiert.

Folgenden werden dafür kurz die Ergebnisse einer Recherche zum möglichen Vorgehen in solchen Berechnungen vorgestellt.

1.1 Das Forschungsgebiet im Überblick

Im Rahmen dieser Arbeit wird die rechnerische Abbildung des thermischen Verhaltens mehrerer, sich relativ zueinander bewegender Festkörper betrachtet. Nachfolgend werden dazu einige der Arbeiten aus der natur- und ingenieurwissenschaftlichen Forschung vorgestellt, in welchen die Analyse derartiger Probleme, bzw. verschiedener Teilaspekte davon, methodologisch entwickelt bzw. verwendet wird.

Behandlung allgemeiner Probleme der Wärmeleitung Als Ausgangspunkt der modernen, theoretischen Beschreibung des Temperaturfelds in Festkörpern kann sicherlich die Formulierung des FOURIERSchen Gesetz durch seinen Namensgeber in [30] angesehen werden. In seinem wissenschafts-historischen Review stellt NARASIMHAN (siehe [68]) heraus, dass dadurch der Übergang auf eine Bilanzierung im Infinitesimalen und damit auch die Formulierung der bekannten Wärmeleitungs-PDGL möglich wurde. Die zentrale Voraussetzung für FOURIER war dabei, dass die Abhängigkeit des Wärmeflusses von der Temperaturdifferenz (z. B. NEWTON's Abkühlungsgesetz) sowie das Phänomen des thermisch-kapazitiven Verhaltens von festen Materialien bereits bekannt und experimentell abgesichert sowie quantifiziert waren⁴. Ebenfalls stellt FOURIER in [30] erste Verfahren zur analytischen Lösung derartig beschriebener Probleme vor, welche auf jenem Konzept beruhen, das heutzutage als FOURIER-Analyse bekannt ist.

In den darauf folgenden Jahren wurden mehrere Versuche unternommen, die Methoden FOURIER's per Analogie in die Beschreibung anderer Feldprobleme zu übertragen ([68]). Speziell wurde von FICK empirisch erkannt, dass der physikalische Prozess der Diffusion den exakt gleichen Gesetzmäßigkeiten wie die Wärmeleitung unterworfen ist (siehe [29]), was in einer identischen, mathematischen Beschreibung des Sachverhalts⁵ resultiert. Außerdem wurde begonnen, die PDGL als Bestandteil unterschiedlichster, einfach handhabbarer Randwertaufgaben zu lösen sowie weitere dafür geeignete Verfahren

⁴Weiterhin benennt NARASIMHAN ebenfalls die Entwicklung einer verlässlichen Temperaturskala durch FAHRENHEIT sowie die Einführung des LAPLACE-Operators als relevante Voraussetzungen.

⁵Interessant ist, dass diese Identität Dekaden später durch EINSTEIN in einer Arbeit über die sogenannten BROWNSchen Bewegungen (siehe [27]) von mikroskopisch kleinen Teilchen auf Basis der Gesetze der Thermodynamik physikalisch begründet wurde.

zu entwickeln. Viele der Ergebnisse dieser Arbeiten lassen sich heutzutage in verschiedensten Quellen finden. Hier sollen stellvertretend die Bücher von CARLSLAW ([20]) und CRANK ([23]) erwähnt werden, da diesen das Prädikat eines Standardwerks auf den jeweiligen Gebieten der mathematischen Modellierung elementarer Wärmeleitungs- bzw. Diffusions-Probleme zugestanden wird.

Analytische Behandlung des Problems der bewegten Wärmequelle Mehr als ein Jahrhundert nach FOURIER präsentiert BLOK 1937 als erster eine Lösung zu den Auswirkungen von Bewegungen in thermischen Fragestellungen (siehe [14]). Als Tribologe fokussiert sich BLOK darin zunächst auf die Oberflächentemperaturen in kreis- bzw. rechteckförmigen Mikrokontakten zwischen den Bewegungspartnern zu berechnen. Zur Lösung bedient er sich dabei der Prämisse, dass sich trotz der Bewegung in der Kontaktzone eine einheitliche Temperatur quasi unmittelbar auf beiden beteiligten Rändern einstellt. Eine etwas andere Herangehensweise wählt JAEGER⁶ in seiner kurz darauf erschienenen Arbeit [44], in der statt eines zweiten Festkörpers lediglich eine bewegte, thermische Last betrachtet wird. Beiden Arbeiten ist gemein, dass ein entsprechend der Bewegung mitgeführter Beobachter den damit quasi-statischen Temperaturzustand um ihn herum beschreibt. Dabei wird sich jeweils der additiven Überlagerung der Temperaturfelder von Punktwärmequellen bedient, welche zu vergangenen Zeitpunkten aufgrund der Bewegung entsprechend verschoben waren. Dieser bemerkenswerten Vorgehensweise ist es wahrscheinlich zu verdanken, dass heutzutage beide Arbeiten in den meisten der themenbezogenen Publikationen als Ausgangspunkte des Forschungsgebiets erwähnt werden.

In den nachfolgenden Jahren (siehe das Review von KENNEDY [49]) wurde primär das für die Tribologie relevante Problem des *Dry-Slidings*, also die relative Bewegung zweier Festkörper entlang einer definierten Kontaktfläche untersucht. Neben der Erarbeitung angemessener Methoden zur Konvertierung der vorliegenden Kontakt- bzw. Reibungsverhältnisse in eine der Analyse zugänglich formulierte Last, wurde vor allem auch die Methodik derartiger Analysen sukzessive weiterentwickelt. Um speziell den komplexeren Anforderungen weiterer technologisch-wissenschaftlich interessanter Fragestellungen gerecht zu werden, wurden z. B. neue Integraltransformationstechniken als Lösungsverfahren entwickelt (siehe MIKHAILOV [67]), um Probleme mit mehreren

⁶JAEGER war Student bei dem zuvor erwähnten CARLSLAW und später verantwortlicher Autor der neueren Auflagen von dessen Standardwerk [20].

Kontaktflächen oder finiten Dimensionen der beteiligten Körper⁷ zu lösen (z. B. VICK [96]). Eine etwas aktuellere Zusammenfassung der heutzutage verfügbaren Verfahren findet sich in dem Buch von LING (siehe [63]).

Derzeitig erfolgt in der analytischen Behandlung der *Dry-Sliding*-Problematik eher wenig methodologischer Fortschritt. Hauptsächlich werden Arbeiten veröffentlicht, welche z. B. die Modellbildung mit Blick auf neuerer Erkenntnisse der Tribologie verfeinern (LIU [64]) oder die Auswirkungen alternativer Geometrien und Verteilungen der bewegten Last untersuchen (AKBARI [3], HAMRAOUI [38]). Gesondert soll außerdem auf die Publikationen von KOMANDURI und HOU hingewiesen werden, in welchen die Verfahren von BLOK und JAEGER nochmals direkt hinsichtlich über den Kontaktbereich variierende Oberflächentemperaturen (siehe [58]) bzw. beliebiger Formen und Verteilungen der bewegten Thermo-Last (siehe [42]) weiterentwickelt werden.

Im Großteil der themenbezogenen Publikation wird sich mittlerweile eher auf die Anwendung der Methodik in passenden, auch fachfremden Fragestellungen konzentriert. Besonders intensiv wird dabei das thermischen Verhalten im Werkzeug-Werkstück-Kontakt im Bereich der spanenden Bearbeitung untersucht. Speziell von den soeben erwähnten KOMANDURI und HOU wurde dazu in der Publikations-Serie um [59] ein Modell entwickelt, welches aus einer Kombination des JAEGER-Verfahrens mit einer geeigneten Wärmequelle sowie weiterer, spanungs-spezifischer Modellierungs-Erkenntnisse hervorgeht. Das Modell gilt derzeit als das aktuellste zur thermischen Beschreibung des Spanabzugs (siehe BROCKMANN [18]). Eine umfangreiche Anwendung findet das Konzept der bewegten Wärmequelle außerdem in der analytischen Beschreibung des Schweißprozesses. Auf Basis der oben erwähnten, methodologischen Weiterentwicklungen der Methodik kann hier besonders auf die aus dem Lichtbogen resultierende, ellipsoid-ähnliche Form der Wärmequelle eingegangen werden kann (siehe NGUYEN [73]). Auch hier werden die Erkenntnisse im Weiteren auf unterschiedlichste, technisch relevante Spezialfälle, wie z. B. dem Verschweißen unterschiedlicher Werkstoffe (siehe SALIMI [86]) angewendet. Ebenfalls stellvertretend zu erwähnen ist z. B die Arbeit von ROWE ([84]), der mit den BLOCK/JAEGER-artigen Berechnungsverfahren eine neuartige Experiment-Anordnung zur thermischen Vermessung von bewegten Systemen validiert oder das Paper von KOLONITS ([57]), in dem die Anwendung der Verfahren im Bereich der Schienenfahrzeugtechnik untersucht wird. Als fachfremdes Beispiel wird die Arbeit von KIM ([53]) genannt, welcher in seinen materialwissenschaftlichen Unter-

⁷Hier ist zu erwähnen, dass die Arbeiten von BLOK ([14]) und JAEGER ([44]) semi-infinite Festkörper (bezogen auf die zur Kontaktfläche orthogonale Ausdehnung) voraussetzen.

suchungen die analytischen Methoden nutzt, um zu begründen, dass der bewegungs-, d.h. reibungsbedingte Temperaturanstieg in seiner Analyse von Kristallisationseffekten in metallischen Gläsern vernachlässigbar ist.

Numerische Analyse thermischer Systeme mit Strukturvariabilität Die Anwendbarkeit der erwähnten, analytischen Methoden zur Beschreibung strukturvariabler Probleme ist spätestens dann nicht mehr gegeben, wenn die Geometrie der beteiligten Körper komplexer wird, d.h. aufgrund der Ziele der Analyse nicht mehr zu einer semi-infiniten Ausdehnung vereinfacht werden kann (KENNEDY [48]). Es wird notwendig auf numerische Verfahren zurückzugreifen, mit denen die Lösung per iterativer Approximation zwar nicht exakt, dafür aber beliebig genau bestimmt werden kann (MEISSNER [66]).

Da in Problemen mit relevanten Starrkörperbewegungen meistens die Kinematik und Kinetik des Systems im Fokus einer Analyse steht, wird zu deren numerischer Abbildung traditionell eher auf das Verfahren der Mehrkörpersimulation zurückgegriffen. In den hier behandelten Problemstellungen wird sich allerdings vorrangig dafür interessiert, welche Auswirkung die Bewegung auf die Zustände der beteiligten Körper und hier im speziellen auf deren Temperaturfeld hat. Daher kommen Verfahren zum Einsatz, welche zunächst primär für die Berechnung von Feldproblemen entworfen wurden und in die das Abbildungsvermögen von Bewegungen erst anschließend integriert wurde. Populäre, numerische Werkzeuge zur Abbildung der durch die Wärmeleitung bestimmten Temperaturfelder innerhalb von Festkörpern sind vor allem die Finite Differenzen Methoden (kurz FDM, siehe z. B. CRANK [23]) – speziell das sogenannte CRANK-NICOLSON-Verfahren⁸ – sowie die Finite Elemente Methode (kurz FEM, siehe z. B. WILLNER [98]).

In zwei der Pionierarbeiten zum Thema, wählen PADOVAN in [75] und KENNEDY in [48] die FEM⁹ zur Berechnung. Interessant ist dabei, dass PADOVAN ([75]) durch eine geeignete Koordinatenwahl sogar die Abbildung einer Bewegung mit variabler Ge-

⁸Die Vorschrift des 1947 durch CRANK in [24] vorgestellten Verfahrens zeichnet sich besonders durch eine vorteilhafte Verrechnung der zustandsrelevanten Differenzen aus, wodurch eine signifikante Steigerung der Konvergenzgeschwindigkeit verglichen mit ähnlich aufwändigen Methoden erzielt wird.

⁹KENNEDY begründet seine Entscheidung damit, dass bei der FEM eine Verfeinerung der Netzweite in Richtung der Kontaktzone und damit die Erfassung der dort zu erwartenden, hohen Temperaturgradienten vergleichsweise aufwandsarm möglich ist. Der Vollständigkeit halber soll hier erwähnt werden, dass in der FDM Gitter mit variablen Ortsschrittweiten ebenfalls umsetzbar sind (Stichwort SHISHKIN-Gitter o. Ä.).

schwindigkeit im Rahmen einer transienten Analyse erreicht und dass KENNEDY ([48]) feststellt, dass es numerisch vorteilhaft ist, die Reibungswärme als eine, die Kontaktfläche belastende Wärmestromdichte zu modellieren, anstatt die tribologisch näherliegende Alternative einer inneren Wärmeproduktion in den Elementen nahe des Kontakts zu verwenden. Die Problematik selbst wird in beiden Arbeiten analog zu den ersten analytischen Betrachtungen als quasi-statischer Zustand um die Kontaktfläche herum beschrieben (sogenannte EULERSchen Betrachtungsweise, vgl. REDDY [83]), wobei die Bewegung berücksichtigt wird, indem die zugrundeliegende PDGL um einen konvektiven Term erweitert wird. Das eigentliche, bewegungsbeinhaltende Wärmeleitungs-Problem wird also in ein äquivalentes, unbewegtes Advektions-Diffusions-Problem¹⁰ überführt, für welches letztendlich der entsprechende FEM-Code abgeleitet wird. Damit wird eine Herangehensweise angeboten, die zwar bzgl. des erforderlichen Aufwands durch die damals verfügbare Rechentechnik handhabbar war, von der aber bekannt ist, dass bei hohen PÉCLET-Zahlen¹¹ numerisch bedingte Oszillationen in der Lösung auftreten, das Verfahren also ein Stabilitätsproblem aufweist. Erste Ansätze die eine gesicherte Handhabung bzw. vorteilhafte Umgehung dieses nachteiligen Effekts erlauben, wurden von KENNEDY in [50] zusammengefasst. Der Ansatz, die Strukturvariabilität eines Systems aus der EULER-Betrachtung heraus zu beschreiben wird bis heute in der numerischen Analyse zahlreicher Fragestellungen angewendet, wobei dem erneut Themen wie Tribologie (z. B. AGHDAM [2]) oder Schweißen (z. B. SONG [90]) besonders zugänglich sind.

Besteht bei einer bewegten Problemstellung allerdings vorrangig Interesse am Zustand der beteiligten Körper abseits der Kontaktfläche oder sollen Systeme mit mehreren Strukturvariabilitäten untersucht werden, so wird es erforderlich, das gesamte System von einem raumfesten Beobachter, d.h. aus der sogenannten LAGRANGESchen Betrachtungsweise heraus abzubilden. Im Allgemeinen ist dafür eine, verglichen mit Analysen aus der EULER-Betrachtung aufwändigere Ortsdiskretisierung notwendig, weshalb sich dieser Ansatz für die Einbindung von Bewegungen prinzipbedingt eher weniger eignet (siehe REDDY [83]). Trotz dessen existieren verschiedenste Ansätze, wie die bewegten Strukturen, bzw. die aus der Bewegung resultierenden Interaktionen

¹⁰Die Behandlung derartiger Probleme ist zum damaligen Zeitpunkt bereits aus der Fluidmechanik, genauer aus der Analyse konvektionsdominierter Strömungen, bekannt (siehe GRESHO [32], STYNES [93]).

¹¹Hier ist genauer die Element- oder Gitter-PÉCLET-Zahl gemeint, welche das für die Analyse charakteristische Verhältnis zwischen Wärmeleitung, Bewegung und Ortsdiskretisierung beschreibt (siehe ZIENKIEWICZ [103]).

zwischen den beteiligten Körpern umgesetzt werden. Z. B. schlägt KUANG in [60] die *Moving-Mesh*-Methode vor, welche auf der ganzheitlichen Verschiebung einer fein vernetzten Kontaktfläche innerhalb einer grob vernetzten Struktur und einer dadurch erzwungenen, sporadischen Neustrukturierung des gesamten Netzes beruht. Den bzgl. der Theorie vergleichsweise komplexen Ansatz der *Space-Time*-Finiten Elemente¹², nutzt KIM in [52] um die Strukturvariabilität direkt als zeitabhängige Terme in den Feldgleichungen zu berücksichtigen, welche den Elementen zugrundeliegen.

Andere, eher ingenieurmäßige Ansätze beschränken sich demgegenüber auf eine Umsetzung der Bewegung durch Mittel, die in üblichen FE-Programmen standardmäßig verfügbar sind. In [43] erstellt HU beispielsweise ein prinzipiell starres Modell, in dem der bewegte Körper durch thermische Verbindungen (sogenannten *Link*-Elementen) permanent an alle potentiell überfahrenen Bereiche des unbewegten Körpers angeschlossen ist und welche in der anschließenden Analyse entsprechend der momentan abzubildenden Position entweder aktiv oder sperrend geschaltet werden. WRIGGERS betrachtet in [99] zwar bereits ein thermo-elastisches Problem, geht dabei aber prinzipiell analog zu der in dieser Arbeit verwendeten Methode (siehe PARTZSCH [78]) vor und bindet die Bewegung durch stückweise Verschiebungen und unter Zuhilfenahme kontaktmechanischer Mittel ein. Das dazu äquivalente Prinzip einer diskret bewegten Wärmestromdichte wird oft in der LAGRANGE-betrachteten Analyse von Schweißprozessen umgesetzt (z. B. CASALINO [21]). Den drei zuletzt vorgestellten Verfahren ist gemein, dass der benötigte Berechnungsaufwand durch die inkrementelle Umsetzung der Bewegung vergleichsweise hoch ist, sodass deren Anwendbarkeit – wie in den zugeordneten Publikationen zu sehen ist – zunächst auf entsprechend kleine und damit handhabbare Systeme beschränkt bleibt.

1.2 Zielsetzung und Inhalt der Arbeit

Als Fazit der Literaturrecherche ist festzustellen, dass speziell jene Berechnungsverfahren eher wenig verbreitet sind bzw. angewandt werden, in denen die Simulation strukturvariabler Systeme – wie z. B. für die Analyse von WZM's erforderlich – aus der LAGRANGE-Perspektive erfolgt. Als Grund lässt sich der dafür benötigte Rechen-

¹²Dieses Verfahren wird von BAJER in [10] als konsistente Erweiterung der FEM auf instationäre Fragestellungen angesehen. Diese werden initiativ als orts- und zeitabhängige Gebiete aufgefasst und unter Anwendung des Standard-Vorgehen der FEM (GALERKIN-Formulierung, Ansatzfunktion, etc...) als entsprechend höherdimensionale Probleme gelöst.

und Speicheraufwand identifizieren, welcher aufgrund der inkrementellen Abbildung der Bewegung im Fall komplexer Systeme schnell zu hoch ausfällt, um mit den aktuell verfügbaren Mitteln der Rechentechnik bewältigt zu werden. Zudem sind für die traditionelle Rechentechnologie bereits erste Anzeichen einer endenden Gültigkeit des MOORE-schen Gesetzes zu erkennen (siehe WALDROP [97]). Damit der Fortschritt einer Maschinen- oder Fertigungstechnologie mit relevanten Strukturvariabilitäten in Zukunft nicht durch eine mangelnde Berechenbarkeit der dafür abzubildenden Probleme begrenzt wird, ist also ebenfalls eine methodologische Weiterentwicklung der anzuwendenden Berechnungsverfahren notwendig.

Ziel der Arbeit Um die Anwendbarkeit der Berechnungsverfahren für die thermische Analyse strukturvariabler Systeme aus der LAGRANGE-Beschreibung zu erhöhen, sollen in dieser Arbeit Methoden entwickelt werden, mit denen die *Effizienz* dieser Berechnungen gesteigert wird. Als Effizienz wird dabei das Verhältnis zwischen der erreichten Ergebnisgüte und dem dafür notwendigen Aufwand begriffen, was dementsprechend durch einen verringerten Aufwand bei gleichbleibenden bzw. wenig beeinträchtigten Ergebnissen gesteigert werden kann. Die Güte der Ergebnisse wird wiederum als Maß dafür verstanden, wie wenig die Ergebnisse von denen einer als korrekt angesehenen Referenz abweichen.

Eine Recherche zeigt nun, dass bisherige Ansätze dieses Ziel verfolgen, indem bewegungsbedingte Lasteinträge über längere Zeiträume einfach gemittelt und als statische Last in eine thermische Analyse des unveränderte Modells aufgebracht werden (z. B. WU [100]). Unter Ausnutzung spezifischer Eigenschaften der Bewegung – z. B. einer oftmals vorliegenden Periodizität – kann die Mittelung dabei auch ausgefeilter erfolgen (z. B. GERISCH [31]), was einen geringeren Abfall in der Ergebnisgüte mit sich bringt. Problematisch an diesen Methoden ist allerdings, dass die eigentliche Bewegung dabei wegfällt und so der Einbezug einer etwaigen Wärmeleitung zwischen den zueinander bewegten Modellelementen nicht möglich ist.

In anderen Ansätzen wird stattdessen eine signifikante Verringerung des Aufwands erreicht, indem durch zielgerichtete Modellordnungsreduktion der Lösungsraum auf die interessierende Ergebnisinformation verkleinert wird. Die Bewegungseinbindung in derartigen Simulationen erfolgt dann zwischen separat reduzierten Modellteilen über ordinäre Methoden wie schaltbare Verbindungen (z. B. BEITELSCHMIDT [13]) oder über einen, während der Reduktion des Gesamtsystems erhaltenen Parameter, der die

Verschiebung reduziert (z. B. LANG [62]). Aufgrund der Komplexität dieser Methoden ist es allerdings wahrscheinlich, dass deren Einbindung in eine thermische Analyse im Fall wenig anpassbarer, proprietärer Simulationssoftware nicht möglich und so eine generelle Anwendbarkeit nicht gegeben ist.

Die in dieser Arbeit zu entwickelnden Verfahren sollen nun die Effizienz der Berechnungen erhöhen, ohne dabei – wie die Alternativansätze – nachteilige oder einschränkende Eigenheiten aufzuweisen. Speziell wird gefordert, dass die abzubildende Bewegung in ihrem zeitlichen Verlauf vollkommen beliebig sein kann und auch in dieser Form in der Simulation verbleibt. Außerdem soll das Modell nicht durch die Maßnahmen zur Effizienzsteigerung beeinflusst werden, um so eine Berücksichtigung von weiteren instationären oder sonstigen, in keinem direkten Zusammenhang zur Bewegung stehenden Modellelementen nicht zu verhindern.

Als grundsätzliche Strategie zur Verringerung des benötigten Berechnungsaufwands soll die stückweise Umsetzung der Bewegung durch gröberer, aber dafür weniger Inkremente zur Anwendung kommen. Eine Korrektur etwaiger, daraus resultierender Ergebnisdefekte soll dann im Weiteren die angestrebte Steigerung der Effizienz der Analysen mit sich bringen. Um zudem die definierten Nebenziele der Bewegungskonservierung sowie der einfachen Umsetzbarkeit der Verfahren zu erreichen, soll die Entwicklung der Korrekturverfahren entlang einiger Richtlinien erfolgen, welche aus Verständnisgründen allerdings erst im Anschluss an die Vorstellung des prinzipiellen Analyseablaufs in Unterabschnitt 3.3.3 eingeführt werden.

In der aktuellen Literatur findet sich nun keine Arbeit, welche die vorliegende Fragestellung einer Umsetzung der Bewegung in groben Inkrementen inklusive Korrektur bereits bearbeitet, sodass eine Untersuchung der Problematik in dieser Arbeit von Grund auf erfolgen muss. Das konkrete Vorgehen dazu wird im nächsten Unterabschnitt grob umrissen.

Inhalt der Arbeit Im folgenden Kapitel 2 werden zunächst die für die Arbeit interessanten, theoretischen Grundlagen vorgestellt. Konkret wird auf die grundlegenden, physikalischen Hintergründe thermischer Fragestellung sowie auf deren mathematische Beschreibung eingegangen. Anschließend wird das prinzipielle Vorgehen beim Lösen derartiger Fragestellungen vorgestellt und es werden mit der FEM und dem impliziten EULER-Verfahren jene Teile der Analyse etwas detaillierter in ihren Hintergründen erläutert, welche im Laufe der Arbeit von gewisser Relevanz sind.

Das anschließende Kapitel 3 widmet sich dann den thermischen Analysen mit Strukturvariabilitäten sowie deren Umsetzung in einer numerischen Simulation. Zunächst wird an einem Beispielproblem definiert, was exakt unter einem strukturvariablen System verstanden wird, wie verschiedene Teilaspekte davon anzusprechen sind und in welcher Form die Bewegung sowie zugehörige Lasten zu berücksichtigen sind. Auf Basis der analytischen Beschreibung des Beispielproblems wird im Weiteren die verwendete Methode der diskreten Verschiebungen zur Einbindung von Bewegungen in thermischen Analysen vorgestellt. Die Untersuchung zu den Auswirkungen einer Bewegungseinbindung auf die Theorie der numerischen Analyse zeigt abschließend, dass die Anwendung einer groben Zeitdiskretisierung in derartigen Simulationen vier qualitativ zu unterscheidende Arten von Fehlern mit sich bringt, deren einzelne Analyse und gegebenenfalls Korrektur daher die Inhalte der nachfolgenden Kapitel darstellt.

Den ersten dieser Fehler stellt die allgemeine Leistungsfähigkeit der verwendeten, transienten Integrationsmethode dar; in dieser Arbeit also die des impliziten EULER-Verfahrens. Zunächst wird in Kapitel 4 gezeigt, dass die Anwendung konventioneller Mittel zur Fehlerabschätzung durch eine der selbst vorgegebenen Entwicklungsrichtlinien, welche die Unabhängigkeit von der örtlichen Diskretisierung fordert, verhindert wird. Daher wird ein Ersatzmodell entwickelt, dessen transiente Auswertung stellvertretend untersucht wird und es wird festgestellt, dass eine Vernachlässigung der Fehlerquelle möglich ist. Die Validität dieser Aussage wird anschließend durch einige vergleichende Simulationen des Beispielproblems überprüft und bestätigt.

In Kapitel 5 wird ein Fehlerverhalten untersucht, welches aus der speziellen, nichtstetigen Kinematik einer diskret umgesetzten Bewegung resultiert. Erste Analysen mit grober Zeitschrittweite zeigen dabei, dass die resultierenden Temperaturfelder immer eine charakteristische Wellenform ausbilden. Anhand von speziellen Schaubildern werden die Ursachen dieser Defekte identifiziert, auf Basis des Energieeintrags beschrieben und letztendlich korrigiert. Nach der erforderlichen Aufbereitung des Korrekturverfahrens zur Anwendung in ortsdiskreten Analysen folgt abschließend dessen Anwendung in einigen Beispielsimulationen sowie die Evaluierung der Leistungsfähigkeit.

Anschließend behandelt Kapitel 6 die Auswirkungen einer im Fall grober Zeitschrittweiten seltenen Aktualisierung des mit der Bewegung assoziierten Wärmeeintrags in den unbewegten Körper, bei dem sowohl die Wärmemenge als auch deren Eintragungsort fehlerhaft erfasst werden. Auf Basis einer detaillierten Beschreibung dieses Fehlermechanismus wird ein auf der Reproduktion des kontinuierlichen Energieeintrags

basierendes Korrekturverfahren entwickelt. Dessen Evaluierung zeigt allerdings einige verbleibende Defizite auf, für welche nachfolgend ebenfalls passende Korrekturmaßnahmen entwickelt werden. Die Nützlichkeit der gesamten Korrektur wird in einer abschließenden Bewertung nachgewiesen.

Als letzte mögliche Fehlerquelle werden in Kapitel 7 die konduktiven Ausgleichsvorgänge zwischen den zueinander bewegten Körpern betrachtet, deren Abbildungsgüte ebenfalls von einer seltenen Aktualisierung betroffen ist. Auf Basis einer detaillierten Untersuchung des Mechanismus zur Berücksichtigung der Wärmeleitung in diskret bewegten Systemen wird ein Ersatzmodell für eine näherungsweise Bestimmung der zu erwartenden Fehlern entwickelt. Damit lässt sich abschätzen, wann die Notwendigkeit einer Berücksichtigung dieser Problematik gegeben ist. Auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse wird abschließend erläutert, warum in dieser Arbeit auf die Entwicklung einer Korrektur der Wärmeleitung verzichtet wird.

Im finalen Kapitel 8 werden zunächst die Erkenntnisse der Arbeit nochmals zusammengefasst. Die entwickelten Korrekturverfahren werden anschließend gemeinsam in zwei weiteren Anwendungsfällen kurz erprobt. Zuletzt werden einige Arbeitspunkte angesprochen, in welchen eine weitere methodologische Erforschung der Verfahren zur effizienten Simulation strukturvariabler Systeme notwendig ist bzw. potentiell erfolgen kann.

2 Grundlegendes

Zu Beginn wird ein Blick auf jenen theoretischen bzw. methodischen Rahmen geworfen, in welchem die angestrebten Verfahren zur Effizienzsteigerung letztendlich eingebettet werden. Nach einer Einführung in die Physik und mathematische Beschreibung des Problems der Wärmeleitung wird anschließend vorgestellt, wie derartige Probleme unter Zuhilfenahme numerischer Verfahren zur örtlichen Diskretisierung – im Speziellen mittels der FEM – gelöst werden. Das Kapitel schließt mit einer Betrachtung der theoretischen Hintergründe einer thermisch transienten Analyse, jener Analyseform, welche zur Berechnung der strukturvariablen Systeme letztendlich herangezogen wird.

2.1 Das thermische Feldproblem

In der Strukturmechanik wird unter dem thermischen Einfeldproblem die Frage nach der Temperaturverteilung innerhalb eines Festkörpers unter dem Einfluss thermischer Randbedingungen verstanden. Eine Einführung in die darin verwendeten Begriffe und Formalitäten ist notwendig, da die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren letztendlich eine effizientere Beantwortung genau dieser Frage für Festkörpersysteme mit Relativbewegungen ermöglichen sollen.

2.1.1 Grundlegendes zu Größen und Physik

Das physikalisch-theoretische Fundament für die in dieser Arbeit betrachteten Temperaturfeldberechnungen bildet der Theorienkomplex der Thermodynamik, ein systematischer Formalismus zur Beschreibung temperaturabhängiger, energetischer Zusammenhänge (DUBBEL [26]). Die zwei grundlegenden Säulen der auch als Wärmelehre bezeichneten Thermodynamik sind dabei das durch seine Grenzen definierte, thermodynamische System sowie dessen Zustand (BAEHR [9]). Die angestammte Verortung der Atome in der chemisch bestimmten Kristallstruktur eines Feststoffes führt dabei dazu, dass eine Sensitivität des Zustands eines Festkörpers gegenüber den Zustandsgrößen

Druck und *Volumen* praktisch nicht gegeben ist (HARTEN [39]). Die dominierende Zustandsgröße ist daher die *Temperatur* T , jene physikalische Größe, die nachfolgend auch als Feldvariable für die strukturmechanische Betrachtung des thermischen Einfeldproblems verwendet wird:

$$\text{Temperatur } T \quad \text{mit} \quad [T] = \text{K} \quad (2.1)$$

Die hier per Einfassung in eckigen Klammern referenzierte, zugehörige Einheit ist das *Kelvin* K , eine der Basiseinheiten des in dieser Arbeit verwendeten SI-Einheitensystems (DUBBEL [26]). Für die exakte Definition eines K , siehe u.a. BAEHR ([9]). Andere übliche Temperaturskalen bzw. -einheiten werden im Nachfolgenden nicht verwendet. Darüber hinaus finden in dieser Arbeit noch die folgenden physikalischen Basisgrößen Anwendung:

- *Zeit* t mit $[t] = \text{s}$
- *Länge* l mit $[l] = \text{m}$
- *Masse* m mit $[m] = \text{kg}$

Eine Betrachtung der Vorgänge innerhalb eines Festkörpers auf atomarer Ebene zeigt, dass die einzelnen Teilchen permanent Bewegungen um ihre Gleichgewichtslage ausführen, wobei deren Geschwindigkeit mit steigender Temperatur zunimmt (HARTEN [39]). In anderer Richtung betrachtet, ist die Temperatur also ein abstrakter Begriff um die von den Teilchen getragene, kinetische Energie mittels einer intensiven Größe in der makroskopischen Ebene auszudrücken. Letzten Endes resultiert daraus, dass zwei individuelle, thermodynamische Systeme $\Omega_{1;2}$ mit verschieden hohen Temperaturen $T_{1;2}$ unterschiedliche Energieniveaus besitzen und daher – sollten sie in Verbindung stehen – per Ausgleich einem gemeinsamen Gleichgewicht zustreben. Die dabei nur aufgrund des Temperaturunterschieds $\Delta T = T_1 - T_2$ über die Systemgrenze Γ_{12} hinweg übertragene Energie wird als *Wärme* Q bezeichnet:

$$\text{Wärme } Q \quad \text{mit} \quad [Q] = \text{J} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \quad (2.2)$$

Gemäß des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik fließt Wärme dabei ausschließlich von Warm nach Kalt und im Gegensatz zum Energietransport per Arbeit kommt es dadurch zu einem Anstieg der Gesamtentropie in den beteiligten Systemen (HERWIG [41]).

Da im Raum die Systemgrenze Γ_{12} naturgemäß ein zweidimensionaler Rand ist, wird die absolute Energietransportgröße Q oftmals für eine vorteilhafte Beschreibung des Übertragungsprozesses in eine flächenbezogene Leistungsdichte überführt. Diese wird als *Wärmestromdichte* q bezeichnet und ergibt sich gemäß der Nomenklatur aus der Fläche der Systemgrenze $A_{\Gamma_{12}}$ sowie der Zeit Δt die Q benötigt, um Γ_{12} zu passieren:

$$\text{Wärmestromdichte } q := \frac{Q}{A_{\Gamma_{12}} \cdot \Delta t} \quad \text{mit} \quad [q] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J/s}}{\text{m}^2} \quad (2.3)$$

Bezüglich der beteiligten Systeme $\Omega_{1,2}$ trägt eine abfließende Wärmestromdichte in der mathematischen Beschreibung dabei ein negatives Vorzeichen und umgekehrt.

Traditionell werden die folgenden drei Arten der Wärmeübertragung zwischen thermodynamischen Systemen unterschieden (DUBBEL [26], HERWIG [41]):

1. Wärmeleitung (auch Konduktion) – Index 'kd':

Zwischen den beteiligten thermodynamischen Systemen erfolgt an der Systemgrenze eine Übertragung kinetischer Energie durch Stoßprozesse und/oder Gitterschwingungen zwischen benachbarten Teilchen.

Die resultierende konduktive Wärmestromdichte q_{kd} hängt linear von der Temperaturdifferenz in erster Ordnung ab und wird außerdem durch das Wärmeleitvermögen der Systemgrenze – ausgedrückt über den konduktiven Übergangskoeffizienten α_{kd} – bestimmt:

$$q_{kd} = -\alpha_{kd} (T_1 - T_2) \quad \text{mit} \quad [\alpha_{kd}] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \quad (2.4)$$

2. Konvektion (auch Wärmeströmung) – Index 'kv':

Wärme, welche per Wärmeleitung an ein strömungsfähiges Fluid übertragen wurde, wird durch einen überlagerten Massenstrom desselben mitgeführt. Die angemessene Quantifizierung konvektiver Prozesse ist ein vergleichsweise komplexes Thema auf das in dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird, da es hier keine Rolle spielt.

Für den Fall freier Konvektion lässt sich die wirkende, konvektive Wärmestromdichte q_{kv} aber ähnlich zur Wärmeleitung unter Zuhilfenahme eines Übergangskoeffizienten α_{kv} ausdrücken. Abweichend wird das strömungsbehaftete System in der treibenden Temperaturdifferenz über eine sogenannten *Bulk*-Temperatur

T_β berücksichtigt, welche trotz fortlaufender Wärmeübertragung konstant bleibt. q_{kv} ergibt sich damit zu:

$$q_{kv} = -\alpha_{kv} (T_1 - T_\beta) \quad \text{mit} \quad [\alpha_{kv}] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \quad (2.5)$$

3. Wärmestrahlung (auch Radiation) – Index 'rd':

Die Übertragung von Energie geschieht dabei auf Basis der universellen Eigenschaft warmer Körper ($T_\Omega > 0 \text{ K}$) elektromagnetische Wellen zu emittieren. Wegen fehlender Relevanz für die Arbeit wird die Beschreibung der Wärmestrahlung ebenfalls nur kurz behandelt.

Strahlen zwei Körper aufeinander ein, so resultiert die effektive radiative Wärmestromdichte q_{rd} direkt aus der Differenz der jeweiligen Strahlungsleistungen. Die Strahlungsleistung eines Körpers steigt dabei proportional zur 4. Potenz seiner Temperatur und hängt außerdem von dessen Emissionsgrad $\epsilon_{rd} \in [0; 1]$ ab. Zusätzlich stehen Leistungsdichte und Temperatur über die STEFAN-BOLTZMANN-Konstante σ_{SB} in Verbindung, womit die effektive q_{rd} prinzipiell in folgender Form vorliegt:

$$q_{rd} = -\sigma_{SB} \cdot f(\epsilon_{rd,1}; \epsilon_{rd,2}) (T_1^4 - T_2^4) \quad \text{mit} \quad \sigma_{SB} \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (2.6)$$

Anhand dieser nur kurz umrissenen, physikalischen Wirkungsprozesse ist der allgemein bekannte Umstand, dass die Temperaturverteilung innerhalb eines Festkörpers lediglich durch die Wärmeleitung bestimmt ist, noch nicht eindeutig erklärt. Zwar ist offensichtlich, dass aufgrund des Fehlens eines Massestroms keine Konvektion auftritt, der Wärmestrahlung kann aber, aufgrund dessen, dass die treibende Temperaturdifferenz von 4. Ordnung ist, prinzipiell eine signifikante Bedeutung zukommen. Da diese allerdings mit der vergleichsweise kleinen STEFAN-BOLTZMANN-Konstante skaliert wird und innerhalb eines kontinuierlichen Festkörpers auch eine kontinuierliche Temperaturverteilung zu erwarten ist, kann verlässlich angenommen werden, dass die innerhalb des Körpers tatsächlich durch Radiation übertragene Wärme vernachlässigbar gering¹ ist.

¹Für spezielle faserige oder poröse Materialien gilt diese vereinfachende Annahme nicht mehr. Die nachfolgend herzuleitende, mathematische Beschreibung des körperinneren Temperaturfelds (Wärmeleitungs-PDGL) ist dann um einen entsprechenden Strahlungs-Term zu erweitern (CARLSLAW [20]).

2.1.2 Mathematische Beschreibung

Die anschließenden Ausführungen erfolgen im EUKLIDISCHEN Raum, wobei Probleme niedrigerer Dimension direkt abgeleitet werden können. Zur Beschreibung von Positionen P werden in dieser Arbeit, sofern nicht explizit abweichend angegeben, stets kartesische Koordinaten $\vec{x}_P = (x_P \ y_P \ z_P)^\top$ verwendet.

Betrachtet wird nun ein beliebiger, kontinuierlicher Körper Ω welcher über seinen Rand Γ gemäß der Definition eines geschlossenen Systems mit seiner Umgebung lediglich Energie, aber keine Masse austauscht (WILLNER [98]). Um das i.A. inhomogene Temperaturfeld von Ω mathematisch zu beschreiben, wird dieser als Verbund infinitesimal kleiner, thermodynamischer Systeme homogener Temperatur aufgefasst. Zwischen diesen fließt konduktive Wärme gemäß Gl. 2.4. Unabhängig von der zur weiteren Herleitung verwendeten Parkettierung des Raums ergibt sich damit beim Grenzübergang ins Infinitesimale, dass die resultierende Wärmestromdichte jeweils in Richtung des treibenden Temperaturgradienten ∇T fließt (CARLSLAW [20]). Gl. 2.4 geht in folgende Form zur Beschreibung der konduktiven Wärmestromdichte innerhalb eines Festkörpers am Punkt $\vec{x} \in \Omega/\Gamma$ über²:

$$\vec{q}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} q_x(\vec{x}) \\ q_y(\vec{x}) \\ q_z(\vec{x}) \end{pmatrix} := -\lambda \nabla T(\vec{x}) = -\lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial x} & \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial y} & \frac{\partial T(\vec{x})}{\partial z} \end{pmatrix}^\top \quad \text{mit} \quad [\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad (2.7)$$

Es wird also jedem Punkt auf Basis des lokale treibenden Gefälles der Feldvariable ein entsprechender Flussdichtenvektor zugeordnet. Dadurch handelt es sich bei dem Zusammenhang in Gl. 2.7 um das konstitutive Gesetz des thermischen Feldproblems (KUHLE [61]), besser bekannt als FOURIER'sches Gesetz. Die verknüpfende, empirisch zu ermittelnde Materialeigenschaft λ wird als *Wärmeleitfähigkeit* bezeichnet. In dieser Arbeit wird durchweg isotropes, temperaturunabhängiges Materialverhalten angenommen, woraus der in Gl. 2.7 präsentierte, skalare sowie konstante Charakter von λ resultiert.

Mithilfe des Vektorfelds der inneren Wärmestromdichten $\vec{q}(\vec{x})$ kann jetzt am infinitesimalen Kontrollvolumen um \vec{x} eine Bilanz hinsichtlich dessen Energiehaushalts aufgestellt werden. Die aus den Gradienten resultierenden zu- und abfließenden Wärmeströme (Divergenz $\nabla \cdot \vec{q}$) bewirken dabei mit der Zeit eine Änderung der im Kontrollvolumen

²Da in Ω ausschließlich Wärmeleitung herrscht, wird der anzeigende Index 'kd' im Folgenden weggelassen.

enthaltenen Energie, formuliert als zugehörige volumetrische Energiedichte w . Es ergibt sich zunächst (für Details siehe CARLSLAW [20]):

$$\frac{\partial w(t, \vec{x})}{\partial t} + \frac{\partial q_x(t, \vec{x})}{\partial x} + \frac{\partial q_y(t, \vec{x})}{\partial y} + \frac{\partial q_z(t, \vec{x})}{\partial z} = \hat{q} \quad \text{mit} \quad [w] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \quad [\hat{q}] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \quad (2.8)$$

Darin findet sich zusätzlich die in der Literatur oft berücksichtigte, volumetrische Wärmequellendichte \hat{q} (KNOTHE [54]), über die eine eventuelle Wärmeproduktion im inneren des Körpers berücksichtigt wird. Als Ursache könnten z. B. radioaktive Zerfallsprozesse oder der piezo-kalorische Effekt infrage kommen. Für diese Arbeit besteht allerdings keine Relevanz, sodass im Folgenden $\hat{q} \stackrel{!}{=} 0$ gesetzt wird.

Da, wie erwähnt, die Temperatur ein Maß für die durch die Teilchen getragene Energie ist, kann eine Änderung der Inneren Energie auch direkt durch Änderung der zugehörigen Temperatur ausgedrückt werden. Der Zusammenhang zwischen beiden Größen wird dabei über die Wärme-kapazitiven Eigenschaften des Materials hergestellt. Interessanterweise ist es dabei in der Beschreibung üblich, mit der *spezifischen* (d.h. massebezogenen) *Wärmekapazität* c des Materials zu arbeiten. Eine Umrechnung auf die benötigte, volumetrische Kapazität über die *Massendichte* ρ wird dadurch zusätzlich notwendig. Werden außerdem die Wärmestromdichten durch die entsprechenden temperaturabhängigen Ausdrücke aus dem FOURIER'schen Gesetz (Gl. 2.7) ersetzt, so geht Gl. 2.8 über in:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T(t, \vec{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(t, \vec{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(t, \vec{x})}{\partial z^2} \right) = c\rho \frac{\partial T(t, \vec{x})}{\partial t} \quad \text{mit} \quad [c] = \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \quad \text{und} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (2.9)$$

Dieser Zusammenhang wird allgemein als *Wärmeleitungsgleichung* bezeichnet und beschreibt lokal die instationäre Temperaturverteilung innerhalb eines Festkörpers. Es handelt sich um eine partielle Differentialgleichung (kurz: PDGL) zweiter Ordnung, parabolischer Art³.

Oft werden in der Arbeit mit der Wärmeleitungs-PDGL die Materialparameter zu einem einzelnen Kennwert, der sogenannten *Temperaturleitfähigkeit* κ , zusammengefasst. Wird zudem die ebenfalls übliche, vom gewählten Koordinatensystem unabhängige

³Interessant ist, dass sich die Irreversibilität des physikalischen Problems der Entropieproduktion bei Wärmeleitung in einem asymmetrischen Lösungsverhalten der Wärmeleitungs-PDGL bezüglich der Zeitkoordinate äußert. Für $t < 0$ besitzt Gl. 2.9 im Allgemeinen keine Lösung (BRONSTEIN [19]).

Darstellung angewandt und notiert die Zeitableitung nur kurz durch $\partial/\partial t = (\dot{})$, so ergibt sich folgende Variante der Wärmeleitungs-PDGL:

$$\nabla^2 T(t, \vec{x}) = \frac{1}{\kappa} \dot{T}(t, \vec{x}) \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{\lambda}{c\rho} \quad \text{und} \quad [\kappa] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (2.10)$$

Um nun das tatsächliche Temperaturfeld von Ω global und instationär beschreiben zu können, ist neben der die Physik beschreibenden Differentialgleichung zusätzlich die Kenntnis eines vollständigen Satzes von Anfangs- und Randbedingungen notwendig. Als Anfangsbedingung wird eine beliebige, aber stetige Temperaturverteilung $T_0(\vec{x}_\Omega)$ für Ω benötigt:

$$T(t = 0, \vec{x}_\Omega) = T_0(\vec{x}_\Omega) \quad \text{mit} \quad \vec{x}_\Omega \in \Omega \quad (2.11)$$

Weiterhin muss für $t > 0$ auf allen Teilbereichen des Rands $\vec{x}_\Gamma \in \Gamma$ jeweils eine Randbedingungen gelten. Dabei sind die folgenden drei Arten von Randbedingungen qualitativ unterscheidbar (CARSLAW [20], KUHLE [61]):

1. DIRICHLET-Randbedingung:

Es wird auf dem Rand direkt eine Temperatur $T_\Gamma(t)$ vorgegeben:

$$T(t, \vec{x} \in \Gamma_T) = T_\Gamma(t) \quad (2.12)$$

Im thermischen Feldproblem sind derartige Bedingungen zur Abbildung der Realität eher schlecht geeignet, da das Einstellen eines Rands auf eine bestimmte Temperatur technologisch kaum umsetzbar ist. In dieser Arbeit werden DIRICHLET-Randbedingungen nicht verwendet.

2. NEUMANN-Randbedingung:

In Richtung des Normalenvektors des Rands \vec{n}_Γ wird eine Wärmestromdichte $q_\Gamma(t)$ vorgegeben:

$$-\lambda \frac{\partial T(t, \vec{x} \in \Gamma_q)}{\partial \vec{n}_\Gamma} = q_\Gamma(t) \quad (2.13)$$

Der damit auf dem Rand vorliegende, auf die Koordinatenachsen bezogene Flussdichtenvektor $\vec{q}(\vec{x}_\Gamma)$ (vgl. Gl. 2.7) kann daraus abgeleitet werden. Ein relevanter Spezialfall ist die auch als *adiabate Wand* bezeichnete Nullflussbedingung $q_\Gamma(t) = 0$.

3. ROBIN-Randbedingung:

Hier wird entlang \vec{n}_Γ eine Wärmestromdichte $q_\Gamma(t)$ angegeben, deren Wert von der vorliegenden Randtemperatur $T(t, \vec{x} \in \Gamma_r)$ abhängt. Deren allgemeine Darstellung zeigt, dass es sich dadurch prinzipiell um eine Kombination der ersten beiden Arten von Randbedingungen handelt. Üblicherweise wird diese in eine Darstellung überführt, welche sich an der Physik der konvektiven Wärmeübertragung (vgl. Gl. 2.5) orientiert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t, \vec{x} \in \Gamma_r)}{\partial \vec{n}_\Gamma} + F \cdot T(t, \vec{x} \in \Gamma_r) = K & \iff \\ -\lambda \frac{\partial T(t, \vec{x} \in \Gamma_r)}{\partial \vec{n}_\Gamma} = F_\alpha \left(T(t, \vec{x} \in \Gamma_r) - T_\beta \right) & \text{ mit } F = \frac{F_\alpha}{\lambda} \quad K = \frac{F_\alpha}{\lambda} T_\beta \end{aligned} \quad (2.14)$$

Eine Beschreibung der resultierenden Wärmestrahlung weg von bzw. nach Ω (vgl. Gl. 2.6) lässt sich analog über eine derartige Randbedingung mit entsprechend angepasster Ordnung beschreiben.

Mit der Kombination aus Wärmeleitungs-PDGL und Anfangs-/Randbedingungen – zusammen oft auch als *starke Formulierung* bezeichnet – lassen sich beliebige thermische Probleme für ein bekanntes Gebiet Ω analytisch exakt beschreiben. Das wiederum analytische Auffinden einer Lösung ist allerdings nur für verschiedene Arten von vereinfachten Standardproblemen möglich. Umfangreiche Sammlungen derartiger Lösungen sind z. B. in CARLSLAW [20], CRANK [23] oder HAHN [35] zu finden. Eine Analyse von Problemen in denen die Gebietsgeometrie oder der Verlauf der Randbedingungen von beliebigem Charakter sind, ist analytisch allerdings nicht möglich. Hier muss zur Lösung auf die Hilfe der Numerik zurückgegriffen werden.

2.2 Theorie der thermisch-transienten Analyse

Eines der Konzepte zur näherungsweise Behandlung kontinuierlicher Probleme ist die Diskretisierung. Dabei wird der eigentlich unendlich große Lösungsraum auf eine endliche Anzahl interessierender Lösungen an diskreten Punkten reduziert (WILLNER [98]). Dadurch wird ein vollständig beschriebenes Ersatzproblem erhalten, welches lediglich eine diskrete Idealisierung des kontinuierlichen Ausgangsproblems darstellt,

aber dafür in der Lage ist, überhaupt ein Ergebnis zu liefern. Das Abbildungsvermögen hängt dabei direkt mit dem Grad der Diskretisierung, d.h. der Dimension des diskreten Lösungsraums zusammen, welche vom Berechnungsingenieur ausreichend hoch zu wählen ist (BATHE [12]).

Für die hier behandelte Frage nach dem instationären, thermischen Verhalten innerhalb Ω ist es üblich, die Diskretisierung sequentiell zunächst im Raum und anschließend in Richtung der Zeit durchzuführen (WILLNER [98]). Der sich damit ergebende, prinzipielle Ablauf einer numerischen, thermisch-transienten Analyse ist in Abb. 2.1 schematisch zusammengefasst. Darin sind unter den violett akzentuierten Arbeitsschritten jeweils die entsprechenden numerischen Werkzeuge angegeben, welche in den durchgeführten Temperaturfeldberechnungen dieser Arbeit Anwendung finden, also durch die verwendete Berechnungssoftware⁴ dafür bereitgestellt werden.

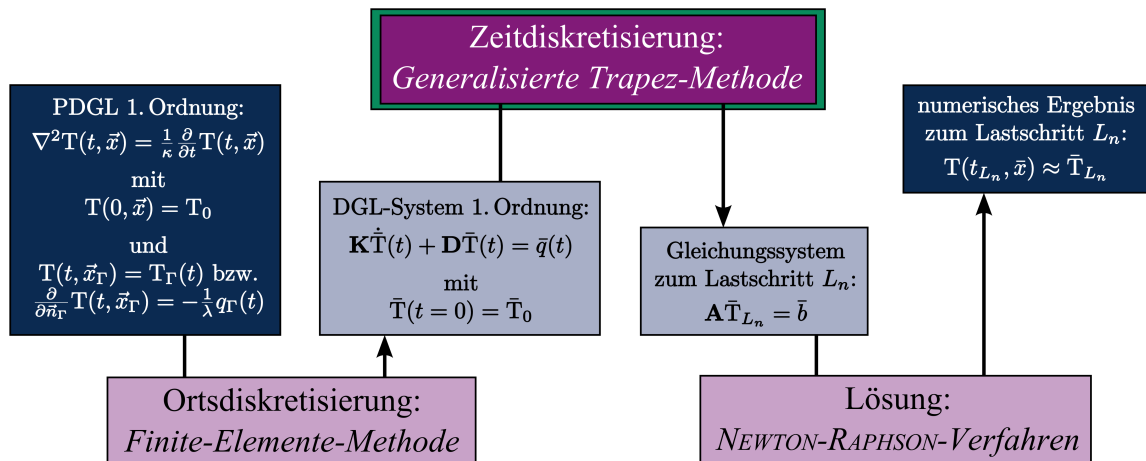


Abbildung 2.1: Prinzipieller Ablauf einer numerischen, thermisch-transienten Analyse

Die Zeitdiskretisierung ist in Abb. 2.1 hervorgehoben, da das in dieser Arbeit zur Effizienzsteigerung untersuchte Mittel der langen Zeitschrittweiten den Analyseablauf und damit die Ergebnisse lediglich in diesem Abschnitt beeinflusst. Zusätzlich ist es notwendig, einige essentielle, theoretische Eckpunkte der zur Ortsdiskretisierung angewendeten Finiten-Elemente-Methode anzusprechen, da im Weiteren einige Entscheidungen im Rahmen der Methodenentwicklung sowie Vereinfachungen bei der Ergebnispräsentation direkt dadurch begründet sind. Entsprechend dem Ablauf der gesamten Analyse wird dies gleich anschließend geschehen und erst danach werden

⁴Die Temperaturfeldberechnungen in dieser Arbeit wurden mit der proprietären Software ANSYS Mechanical APDL Release 15.0 (siehe ANSYS Theory [5], ANSYS Thermal [6]) durchgeführt.

die theoretischen Hintergründe der Zeitdiskretisierung dargelegt. Dementgegen hat der nachgelagerte Abschnitt der finalen Lösung des Problems keinen Einfluss auf die Untersuchungen in dieser Arbeit, sodass auf eine Präsentation der Theorie des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme (siehe dafür BATHE [12] und ANSYS Theory [5]) verzichtet wird.

2.2.1 Ortsdiskretisierung mittels Finiter-Elemente-Methode

Die FEM hat ihre Wurzeln in den 1950er Jahren und wurde seitdem fortlaufend weiterentwickelt sowie für immer neue Anwendungsbereichen zugänglich gemacht. Es ist dadurch heutzutage speziell für die Strukturmechanik ein Berechnungsverfahren mit herausragender Bedeutung (ARGYRIS [7], MEISSNER [66]). Zur Theorie der verschiedenen Formen und Ausführungen der FEM existieren daher zahlreiche Lehrbücher und wissenschaftliche Schriften (z. B. BATHE [12], KNOTHE [54], ZIENKIEWICZ [102]). Im Folgenden werden allerdings nur Einzelheiten jener FEM-Vorschrift präsentiert, die in den hier durchgeführten Berechnungen Anwendung findet (siehe ANSYS Theory [5]).

Ein entscheidender Aspekt der FEM ist bereits, dass nicht die starke Form als grundlegende Problembeschreibung herangezogen wird, sondern das *Prinzip der virtuellen Temperaturen* Anwendung findet. Im Wesentlichen wird dabei das Problem in eine über Ω integrale Form überführt, wobei in Anlehnung an das Konzept zur Lösung durch Variation (WILLNER [98]) die beschreibende PDGL (Gl. 2.10) zusätzlich mit einer passenden, zeitunabhängigen Wichtung $T_\delta(\vec{x})$ – der virtuellen Temperatur – multipliziert wird. Darin lassen sich die aus den NEUMANN- und ROBIN- Randbedingungen (Gl. 2.13, Gl. 2.14) resultierenden Auswirkungen auf das Feld als dessen Divergenz identifizieren und können daher durch den GAUSS-schen Integralsatz entsprechend ersetzt werden. Nach wenigen Umformungen resultiert das Prinzip:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho c T_\delta(\vec{x}) \dot{T}(t, \vec{x}) + \lambda (\nabla T_\delta(\vec{x}))^\top \nabla T(t, \vec{x}) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_q} T_\delta(\vec{x}) q_\Gamma(t) d\Gamma_q + \int_{\Gamma_r} T_\delta(\vec{x}) F_\alpha (T(t, \vec{x}) - T_B) d\Gamma_t \\ & \quad \text{mit } T_\delta(\vec{x}_{\Gamma_T}) \stackrel{!}{=} T(t, \vec{x}_{\Gamma_T}) \quad \text{und} \quad \Gamma_q \cap \Gamma_r = \emptyset \quad (2.15) \end{aligned}$$

Es ist zu sehen, dass von T_δ Konformität mit den DIRICHLET-Randbedingungen gefordert wird. Die Beschreibung des Problems als gewichtetes Integral wird auch als *schwache Form* bezeichnet.

Die grundlegende Idee der FEM ist es nun, das zu berechnende Gebiet Ω in n_e endlich kleine Teilgebiete einfacher Form – die finiten Elementen Ω_e – zu zerlegen, also $\Omega = \bigcup_{E=1}^{n_e} \Omega_e$ mit $\Omega_i \cap \Omega_{j \neq i} = \emptyset$. Innerhalb dieser Elemente erfolgt dann die eigentliche örtliche Diskretisierung, indem das kontinuierliche Temperaturfeld sowie die zugerechnete virtuelle Temperatur aus einer endlichen Anzahl n_K an *Knoten* – zusammengefasst im *Elementknotenvektor* $\bar{\mathbf{T}}_e(t) = (\mathbf{T}_{K1}; \mathbf{T}_{K2}; \dots; \mathbf{T}_{Kn_K})^\top \in \mathbb{R}^{n_K}$ – mithilfe der *Matrix der Formfunktionen* $\mathbf{H}(\vec{\xi}) \in \mathbb{R}^{1 \times n_K}$ interpoliert wird. Üblicherweise werden die Formfunktionen $h_i(\vec{\xi})$ dabei in Abhängigkeit von auf die Elementgeometrie normalisierten und damit dimensionslosen Variablen – den *natürlichen Elementkoordinaten* $\vec{\xi} = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^\top \in [-1; +1]$ – formuliert. Die Interpolation der Temperaturen erfolgt dann über eine Superposition der durch die Formfunktionen $h_i(\xi)$ gewichteten Knotentemperaturen $\mathbf{T}_{Ki}(t)$:

$$\mathbf{T}(\vec{\xi}, t) = \mathbf{H}(\vec{\xi}) \bar{\mathbf{T}}_e(t) := \sum_{i=1}^{n_e} h_i(\vec{\xi}) \mathbf{T}_{Ki}(t) \quad \text{mit} \quad h_i(\vec{\xi} = \vec{\xi}_{Kj}) \stackrel{!}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sodass auch $\dot{\mathbf{T}}(\vec{\xi}, t) = \mathbf{H}(\vec{\xi}) \dot{\bar{\mathbf{T}}}_e(t)$ des Weiteren: $\mathbf{T}_\delta(\vec{\xi}) = (\mathbf{H}(\vec{\xi}) \bar{\mathbf{T}}_{e\delta})^\top$ (2.16)

Es werden also knotenbezogene Formfunktionen verwendet, welche am eigenen Knoten K_i bei $\vec{\xi}_{Ki}$ einen Wert von 1 annehmen und an jeden, anderen Knoten vollständig verschwinden. Es ist zu sehen, dass damit für transiente Probleme die Separation der örtlichen und zeitlichen Abhängigkeit erfolgt. Das Attribut der einfachen Form des Elements garantiert dabei, dass überhaupt entsprechende Formfunktionen existieren, welche die Abbildung aus Gl. 2.16 und damit die Algebraisierung der PDGL in Richtung der Ortskoordinaten ermöglichen.

Für die FE-Formulierung ist ebenfalls eine Approximation der Geometrie des Elements notwendig, welche analog zu der der Feldvariable erfolgen kann. Neben der Diskretisierung der Geometrie wird dadurch ebenfalls eine Beziehung zwischen den auf Elementebene verwendeten, natürlichen Koordinaten $\vec{\xi}$ und den global benötigten, physikalischen Positionen \vec{x} beschrieben. Die Zusammenhänge in Gl. 2.16 können dadurch in einer von \vec{x} abhängigen Form beschrieben werden. Der Ansatz, für Geometrie und Feldvariablen dieselbe Approximation $\mathbf{H}(\xi)$ zu verwenden, wird als *isoparametrisches Konzept* bezeichnet (BATHE [12]) und ermöglicht u. a. eine vorteilhafte Auswertung der auftauchenden Ortsableitungen.

In den in dieser Arbeit durchgeführten FEM-Berechnungen werden immer – sofern nicht explizit anders erwähnt – isoparametrische Hexaederelemente in *Serendipity*⁵-Formulierung mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet. Ein derartiges Element besitzt damit 8 Eckknoten und 12 Kantenmittelknoten. Die exakten Formfunktionen sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nur im Anhang (siehe⁶ Abschnitt A.1, S. 156) aufgeführt.

Für jedes Element lässt sich nun die schwache Form des thermischen Problems (siehe Gl. 2.15) in Abhängigkeit der Temperaturen an den Elementknoten beschreiben (vgl. Gl. 2.16):

$$\begin{aligned} \bar{T}_{e\delta}^\top \int_{\Omega_e} \rho c \tilde{\mathbf{H}}^\top \tilde{\mathbf{H}} \, d\Omega_e \dot{\bar{T}}_e + \bar{T}_{e\delta}^\top \left[\int_{\Omega_e} \lambda \tilde{\mathbf{H}}_\nabla^\top \tilde{\mathbf{H}}_\nabla \, d\Omega_e - \int_{\Gamma_{e,r}} F_\alpha \tilde{\mathbf{H}}^\top \tilde{\mathbf{H}} \, d\Gamma_{e,r} \right] \bar{T}_e \\ = \bar{T}_{e\delta}^\top \left[\int_{\Gamma_{e,q}} \tilde{\mathbf{H}}^\top q_\Gamma \, d\Gamma_{e,q} + \int_{\Gamma_{e,r}} F_\alpha \tilde{\mathbf{H}}^\top T_B \, d\Gamma_{e,r} \right] \\ \text{mit } T(t, \vec{x}) = \tilde{\mathbf{H}}(\vec{\xi}) \bar{T}_e \quad \text{und} \quad \nabla T(\vec{x}, t) = \tilde{\mathbf{H}}_\nabla(\vec{\xi}) \bar{T}_e \quad (2.17) \end{aligned}$$

Darin ist berücksichtigt, dass es sich bei \bar{T}_e und $\bar{T}_{e,\delta}$ um die örtlich diskreten Knoten­größen handelt. In Konsequenz können diese aus den Volumenintegralen herausgezogen werden. Außerdem wirkt der Gradientenoperator nur auf die Matrix der Formfunktionen. Es ist zu sehen, dass die virtuellen Temperaturen hier wieder aus der Beschreibung wegfallen.

Eine ortsdiskrete Beschreibung des Gesamtgebiets Ω ergibt sich dann durch Zusammenführen der elementbezogenen Ausdrücke aus Gl. 2.17. Dieser als *Assemblierung* bezeichnete Schritt basiert auf der physikalisch motivierten Nebenbedingung einer an jedem Knoten erfüllten Wärmebilanz und kann formal als Operator $\mathcal{A}[\cdot]$ ausgedrückt

⁵Die Klasse der Serendipity-Elemente grenzt sich von einer LAGRANGE-Formulierung (siehe ZIENKIEWICZ [102]) dadurch ab, dass jegliche Knoten weggelassen werden, welche nicht erforderlich sind, um die elementübergreifende Kontinuität des Problems oder die Unisolvenz der Ansatzpolynome zu gewährleisten. Speziell für niedrige Polynomgrade bis $p \leq 3$ resultiert daraus, dass die Elemente lediglich Kanten- und Eckknoten besitzen (ARNOLD [8]).

⁶In dieser Arbeit werden Querverweise hinsichtlich ihrer Bedeutung für das Verständnis der aktuell dargelegten Inhalte in zwei Stufen unterschieden. Während Querverweise, welche im Fließtext auftauchen oder in Klammern mit ‚siehe‘ eingeleitet werden, essentiell für die Argumentation sind, weist ‚vgl.‘ auf einen eher informativen Charakter der Verweisziele hin. Darüber hinaus wird bei Querverweisen in andere Kapitel die jeweilige Seitenzahl des Ziels mit angegeben.

werden (WILLNER [98]). Mit Einführen des Systemknotenvektors $\bar{\mathbf{T}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \bar{\mathbf{T}}_e$ ergibt sich das in Abb. 2.1 als Ausgangspunkt der Zeitdiskretisierung angegebene DGL-System:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\dot{\bar{\mathbf{T}}}(t) + \mathbf{D}\bar{\mathbf{T}}(t) &= \bar{\mathbf{q}}(t) \quad \text{mit:} \\ \text{Kapazitätsmatrix: } \mathbf{K} &= \mathcal{A}_{e=1}^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \rho c \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} d\Omega_e \right] \\ \text{Diffusionsmatrix: } \mathbf{D} &= \mathcal{A}_{e=1}^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \lambda \tilde{\mathbf{H}}_{\nabla}^T \tilde{\mathbf{H}}_{\nabla} d\Omega_e - \int_{\Gamma_{e,r}} F_{\alpha} \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} d\Gamma_{e,r} \right] \\ \text{Lastvektor: } \bar{\mathbf{q}} &= \mathcal{A}_{e=1}^{n_e} \left[\int_{\Gamma_{e,q}} \tilde{\mathbf{H}}^T q_{\Gamma} d\Gamma_{e,q} + \int_{\Gamma_{e,r}} F_{\alpha} \tilde{\mathbf{H}}^T T_B d\Gamma_{e,r} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die Berücksichtigung einer ROBIN-Randbedingung kann vor allem im Rahmen einer transienten Analyse prinzipiell auch durch direkte Auswertung der zugehörigen Vorschrift (Gl. 2.14) auf Basis der zum aktuellen Lastschritt L_n vorliegenden Randtemperatur $\bar{\mathbf{T}}_{\Gamma_{e,r}}$ erfolgen. Damit erfolgt eine Umformung und Zuordnung zum NEUMANN-Rand $\Gamma_{e,q}$ (Gl. 2.14). Die zugehörigen Elemente des ROBIN-Rands $\Gamma_{e,r}$ fallen entsprechend aus den Gleichungen des DGL-Systems (Gl. 2.18) heraus.

2.2.2 Aspekte der Zeitdiskretisierung

Für die Zeitintegration ortsdiskretisierter, thermischer Probleme – mathematisch betrachtet das numerische Lösen eines DGL-Systems erster Ordnung – existieren zahlreiche Verfahren, die sich qualitativ hinsichtlich diverser Merkmale (Methodik, Schrittzahl, Komplexität, etc. . .) unterscheiden (siehe z. B. SCHWARZ [87]). Allerdings wird durch die verwendete Software ANSYS ([6]) lediglich die Klasse der *generalisierten Trapezmethoden* (u. a. auch α -Methode genannt, BATHE [12]) bereitgestellt, weshalb sich hier auf deren theoretische Hintergründe beschränkt wird.

Bei den verfügbaren Verfahren zur Zeitdiskretisierung handelt es sich um, auf finiten Differenzen basierende Einschrittverfahren, welche aus einer beliebig gewichteten Kombination der EULER-Verfahren hervorgehen. Mit dem Wichtungsparameter $\theta \in [0; 1]$ – wobei $\theta = 0$ das *explizite EULER-Verfahren* und $\theta = 1$ das *implizite EULER-Verfahren* (kurz: iEV) liefert – lautet die allgemeine Verfahrensvorschrift zur Berechnung des Temperaturvektors $\bar{\mathbf{T}}_{L_n}$ zum aktuellen Lastschritt L_n :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{L_n} &= \bar{\mathbf{T}}_{L_{n-1}} + (1 - \theta) \Delta t \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{L_{n-1}} + \theta \Delta t \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{L_n} \quad \text{mit Zeitschrittweite: } \Delta t = t_{L_n} - t_{L_{n-1}} \\ & \quad \text{in ANSYS: } 1/2 \leq \theta \leq 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Eine Untersuchung der gesamten Klasse der Trapezverfahren hinsichtlich Stabilität⁷ zeigt, dass lediglich die Verfahren $\theta \geq 1/2$ bedingungslos stabil sind, also genau jene Verfahren, auf die von ANSYS durch die angegebene Bedingung für θ weiter limitiert wird.

Zusätzlich ist der Fall $\theta = 1/2$ herauszuheben, für den Gl. 2.19 in das CRANK-NICOLSON-Verfahren übergeht. Aufgrund der symmetrischen Wichtung der Gradienten-abhängigen Lösungsanteile, heben sich die sonst (d.h. bei $\theta \neq 1/2$) dominierenden Fehlerterme der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t)$ in der TAYLOR-Entwicklung der Zeitableitung vollständig auf, sodass dieses Verfahren als einzige Trapezmethode eine Fehlerordnung von $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ besitzt.

Mit der Verfahrensvorschrift (Gl. 2.19) bei gewähltem θ und dem beschreibenden DGL-System (Gl. 2.18) ist nun die notwendigen Anzahl an Gleichungen verfügbar, um die beiden unbekannt Vektoren zum Lastschritt L_n aus den Ergebnissen des vorherigen Lastschritts bestimmen zu können. Umstellen von Gl. 2.19 nach $\dot{\bar{\mathbf{T}}}_{L_n}$ und Einsetzen in Gl. 2.18 liefert ohne zusätzliche Inversionen:

$$\underbrace{\left[\frac{1}{\theta \Delta t} \mathbf{K} + \mathbf{D} \right]}_{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{T}}_{L_n} = \bar{\mathbf{q}} + \underbrace{\mathbf{K} \left[\frac{1}{\theta \Delta t} \bar{\mathbf{T}}_{L_{n-1}} + \frac{1-\theta}{\theta} \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{L_{n-1}} \right]}_{\bar{\mathbf{b}}} \quad (2.20)$$

Durch die horizontalen Klammern ist verdeutlicht, dass damit ein gewöhnliches Gleichungssystem $\mathbf{A} \bar{\mathbf{T}}_{L_n} = \bar{\mathbf{b}}$ vorliegt, welches im Rahmen des nächsten Analyseabschnitts mithilfe der NEWTON-RAPHSON-Prozedur (vgl. Abb. 2.1) gelöst wird. Mit dem erhaltenen $\bar{\mathbf{T}}_{L_n}$ wird wiederum $\dot{\bar{\mathbf{T}}}_{L_n}$ über Gl. 2.18 bestimmt, sodass damit eine Berechnung zum Lastschritt L_{n+1} möglich wird. Das Fundament dieses diskreten Fortschreitens in der Zeit, bildet die aus $\mathbf{T}_0(\vec{x}_\Omega)$ (vgl. Gl. 2.11) örtlich diskretisierte Anfangsbedingung $\bar{\mathbf{T}}_{L_0}$. Interessant ist, dass durch die Verwendung der diskreten Zeitintegration im Vergleich zur mathematischen Beschreibung eine zusätzliche Anfangsbedingung $\dot{\bar{\mathbf{T}}}_{L_0}$ benötigt wird, welche – ausgehend von der Annahme eines zu Beginn ruhenden, thermischen Zustands – von ANSYS automatisiert zu $\dot{\bar{\mathbf{T}}}_{L_0} = \bar{\mathbf{0}}$ festgelegt wird (ANSYS Theory [5]).

⁷Die Eigenschaft der *Stabilität* eines numerischen Verfahrens besagt im Grunde, ob gestörte Anfangsbedingungen durch das Integrationsverfahren künstlich verstärkt werden und potentiell über alle Grenzen hinweg wachsen können. Eine Analyse erfolgt durch Anwenden des Verfahrens auf das DAHLQUIST-Testproblem $\partial y(x)/\partial x = \beta y(x)$; $y(0) = 1$. Verringert sich der Verstärkungsfaktor zwischen den Lösungsschritten $y_{n+1} = F(\Delta x \beta) y_n$ für jedes $\beta < 0$, so ist das Verfahren bedingungslos stabil. Anderweitig ist über die Schrittweite Δx eine Stabilitätsgrenze zu identifizieren (BATHE [12], SCHWARZ [87]).

3 Methodik der Bewegungseinbindung

Diese Arbeit hat zum Ziel, durch gezielte Untersuchungen und Methodenentwicklungen die Berechnung eines spezifischen Problems, nämlich das eines thermischen Systems mit veränderlicher Struktur, durch die Verwendung einer groben Zeitdiskretisierung effizienter zu gestalten. Damit liegt eine vergleichsweise komplexe Fragestellung vor, die im Zuge einer ganzheitlichen Bearbeitung vorab detailliert betrachtet werden muss.

In diesem Kapitel wird nun das gegebene Problem zunächst hinsichtlich gegebener bzw. geforderter Sachverhalte oder Eigenschaften konkretisiert und es wird dessen analytische Beschreibung entwickelt. Anschließend wird die zur numerischen Simulation verwendete Methodik detailliert vorgestellt. Danach werden die Auswirkungen der Bewegungseinbindung auf die numerische Analyse theoretisch ausgearbeitet und es werden jene Fehlerquellen identifiziert, die aus der Verwendung einer langen Zeitschrittweite resultieren. Abschließend werden einige Richtlinien definiert, an denen sich die Entwicklung der Methoden zur Fehlerabschätzung und/oder -korrektur in den nachfolgenden Kapiteln orientiert.

3.1 Gegebenes Problem und dessen analytische Beschreibung

Da es nicht eindeutig ist, was genau unter einem thermischen System mit variabler Struktur verstanden werden kann, wird dies im Folgenden zunächst exakt beschrieben. Speziell der Aspekt der strukturellen Veränderlichkeit kann als Ursache der piezokalorischen Feldkopplung vor allem im Umfeld der thermo-elastischen Mehrfeldmechanik auch abweichend interpretiert werden. Hier wird explizit darauf hingewiesen, dass die in dieser Arbeit betrachteten Strukturvariabilitäten derartige elastische Strukturverformungen nicht einschließen.

3.1.1 Thermisches System mit strukturellen Bewegungen

Die in dieser Arbeit erhaltenen Erkenntnisse und entwickelten Verfahren sollen Anwendung in der Berechnung thermischer Systeme finden, die sich prinzipiell durch das in Abb. 3.1 dargestellte, dreidimensionale Beispielproblem repräsentieren lassen, bzw. in ein derartiges System überführt werden können.

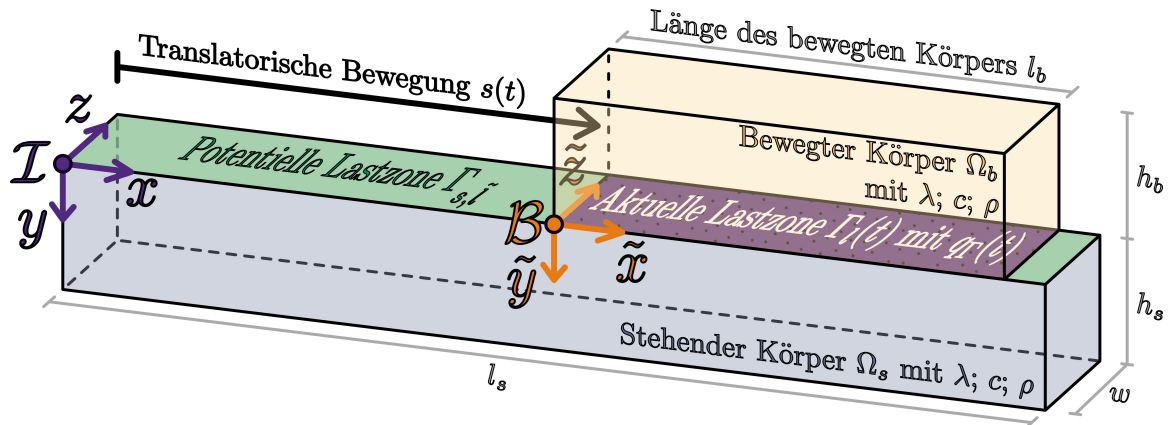


Abbildung 3.1: Beispielproblem eines thermischen Systems mit Strukturvariabilität

Beteiligte Körper Grundlegend ist zunächst, dass zwei Teile des Systems als die an der Bewegung beteiligten Körper identifiziert werden können, welche sich relativ zueinander, starr und ausschließlich translatorisch bewegen. Formal werden diese in den *bewegten Körper* Ω_b mit $\vec{x}_b := \vec{x} \in \Omega_b$ (Index b – ‚bewegt‘) und den *stehenden Körper* Ω_s mit $\vec{x}_s := \vec{x} \in \Omega_s$ (Index s – ‚stehend‘) unterschieden. Die zugehörigen Ränder werden als $\Gamma_s = \partial\Omega_s$ mit $\vec{x}_s := \vec{x} \in \Gamma_s$ und $\Gamma_b = \partial\Omega_b$ mit $\vec{x}_b := \vec{x} \in \Gamma_b$ bezeichnet.

Hinsichtlich der Form wird für beide Körper lediglich vorausgesetzt, dass diese in der Nähe der einander zugewandten Ränder eine Geometrie mit den folgenden Eigenschaften aufweisen:

- Die Geometrie ist keiner Richtung singulär.
Dadurch ist gesichert, dass der Kontaktbereich zwischen Ω_s und Ω_b wie in Abb. 3.1 eine Fläche ist, also andere, z. B. HERTZ-artige Kontaktarten (DUBBEL [26]) ausgeschlossen sind.
- Die Geometrie besitzt orthogonal zur Bewegungsrichtung entlang des Randes eine konstante Ausdehnung, welche während der gesamten Bewegung konstant

bleibt.

Damit lässt sich das System nahe des Kontaktbereichs in ein zweidimensionales Ersatzsystem überführen, mit dessen Hilfe die Bewegung auf das Wesentliche reduziert dargestellt und analysiert werden kann.

Abweichend dazu ist die geometrische Beschaffenheit der beteiligten Körper abseits der durch die Bewegung direkt betroffenen Randgebiete für diese Arbeit irrelevant, da die dortigen Temperaturfeldberechnungen gewöhnliche, thermische Probleme sind.

Beide Körper stehen nun zu jedem Zeitpunkt über einen speziellen Teilbereich ihres Randes, der jeweils aktuellen Lastzone $\Gamma_{s,l}(t)$ mit $\vec{x}_{s,l} := \vec{x} \in \Gamma_{s,l}$ und $\Gamma_{b,l}(t)$ mit $\vec{x}_{b,l} := \vec{x} \in \Gamma_{b,l}$ (Index l – ‚Last‘)¹ mit dem Gegenüber in Kontakt. Während die Lage dieses Randes zum Rest des bewegten Körpers unverändert bleibt, also $\Gamma_{b,l}(t) \rightarrow \Gamma_{b,l}$ bzgl. Ω_b , ändert sich die Position der Lastzone $\Gamma_{s,l}(t)$ relativ zum stehenden Körper permanent und führt dazu, dass auf Ω_s die potentielle Lastzone $\Gamma_{s,\bar{l}} = \bigcup \Gamma_{s,l}(t)$ identifiziert werden kann. $\Gamma_{s,\bar{l}}$ stellt also jenen Randbereich dar, welcher während der Bewegung mindestens einmal bedeckt wird. Die Bewegung wird außerdem noch darauf eingeschränkt, dass der bewegte Körper nicht in Teilen über den stehenden Körper hinaus fährt², die Ausdehnung von $\Gamma_{b,l}$ also unverändert bleibt.

Aufgrund des relativen Charakters einer Bewegung wird nun unabhängig davon welcher Körper tatsächlich bewegt wird, immer jener Körper als stehend angesehen, für den zwischen aktueller und potentieller Lastzone unterschieden werden kann, sodass $|\Gamma_{s,\bar{l}}| \stackrel{!}{>} |\Gamma_{s,l}(t)|$.

Weiterhin ist analog zur Geometrie auch die Materialbeschaffenheit der beteiligten Körper lediglich im Umfeld des Kontaktbereichs von Relevanz. Dabei wurde bereits in Gl. 2.7 (S. 18) festgelegt, dass prinzipiell von isotropem Material mit skalarer Wärmeleitfähigkeit λ und homogener Kapazität $c\rho$ ausgegangen wird. Die Verwendung unterschiedlicher Materialien für Ω_b und Ω_s ist dabei prinzipiell möglich. Allerdings hat eine derartige Differenzierung auf die Arbeit keinen Einfluss, sodass – wie in Abb. 3.1 bereits illustriert – für beide Körper dasselbe Material angenommen wird.

¹Da die Lastzonen bzgl. ihrer Ausdehnung identisch sind, also $|\Gamma_{b,l}(t)| = |\Gamma_{s,l}(t)|$ und sich außerdem von einem ortsfesten Betrachter gesehen immer am gleichen Ort befinden, kann zum Ansprechen der aktuellen Lastzone $\Gamma_l(t)$ mit $\vec{x}_l := \vec{x} \in \Gamma_l$ auch auf die körperreferenzierenden Indizes verzichtet werden (vgl. Abb. 3.1).

²Unabhängig von der prinzipiellen technischen Realisierbarkeit eines derartigen Hinausfahrens, müsste dieses im Rahmen der hier durchgeführten Untersuchungen als Sonderereignis betrachtet werden, welches allerdings ausgeschlossen wird. Eine Erweiterung der entwickelten Methoden auf ein derartiges Problem sollte aber durch entsprechend analoges Vorgehen problemlos möglich sein.

Bewegungsbezogenes Koordinatensystem: Durch die Forderung nach einer Translation als abzubildenden Bewegung sowie dem ebenen Charakter der Lastzone lässt sich das zur Beschreibung des Sachverhalts verwendete Koordinatensystem $\mathcal{I}\langle x, y, z \rangle$ eindeutig in diese Ebene eindrehen. Verdeutlicht durch die Illustration von $\mathcal{I}\langle x, y, z \rangle$ in Abb. 3.1 lassen sich die einzelnen Richtungen mit Bezug auf die Bewegung qualitativ unterscheiden und werden im Weiteren durch die folgenden Bezeichnungen referenziert:

- *x-Koordinate – Bewegungsrichtung:*

Alle $\vec{x} \in \Omega_b$ werden ausschließlich auf Trajektorien parallel zur *x*-Koordinate bewegt.

- *y-Koordinate – Tiefenrichtung:*

Die bewegungsbedingten Lasten wirken parallel zur *y*-Koordinate in die Tiefe der beteiligten Körper, d.h. orthogonal zur Ebene der aktuellen Lastzone und damit entgegengesetzt zu deren Randnormalenvektor $\vec{n}(\vec{x} \in \Gamma_l(t))$.

- *z-Koordinate – Spannrichtung:*

Die potentielle Lastzone $\Gamma_{b,l} \supseteq \Gamma_l(t)$ liegt in einer Ebene, die durch die Bewegungsrichtung sowie die *z*-Koordinate aufgespannt wird.

Dabei ist zu erwähnen, dass für die einzelnen Koordinatenrichtungen – abweichend zur Illustration in Abb. 3.1 – nicht zwingend ein geradliniger Charakter erforderlich ist (bezogen auf ein kartesisches Referenzkoordinatensystem). In einer Vielzahl üblicher technischer Systeme sind beispielsweise speziell für die Bewegungs- und Aufspannrichtung krummlinige Koordinaten für eine vorteilhafte Beschreibung zu wählen. Eine detaillierte Untersuchung zur Wahl des verwendeten Koordinatensystems ist prinzipiell möglich, hier allerdings von untergeordnetem Interesse. Es wird sich daher zunächst auf Analysen innerhalb des in Abb. 3.1 dargestellten, kartesischen Koordinatensystems beschränkt und weiter hinten in Abschnitt 8.2.2 (S. 138) auf eine Anwendung der entwickelten Methoden in alternativen Koordinatensystemen eingegangen

Bewegung Aufgrund der eingeführten Forderungen an die Geometrie des bewegten Körpers besitzt dieser angrenzend an die Lastzone $\Gamma_{b,l}$ immer Randgebiete orthogonal zur Bewegungsrichtung, welche also parallel zur der durch Spann- und Tiefenrichtung aufgespannten Koordinatenebene liegen. Gemäß der traditionell für Fahrzeuge verwendeten Begriffe werden diese Ränder als *Front* und *Heck* des bewegten Körpers

bezeichnet. Die Front – und damit als verbleibendes Komplement auch das Heck – wird dabei eindeutig als jener der beiden Ränder definiert, der bei einer Bewegung in Richtung der positiven Bewegungsrichtung als erstes einen beliebigen Punkt auf Ω_s überfährt. Daraus resultiert, dass sich im Falle einer entgegengesetzten Bewegung die jeweilige Benennung dieser Ränder nicht ändert³.

Für das untersuchte Problem wird ein weitestgehend beliebiges, zeitabhängiges Bewegungsprofil als skalare Funktion $s(t)$ entlang der Bewegungsrichtung vorgegeben. Wie in Abb. 3.1 illustriert erfolgt die Definition dabei immer zum Heck des bewegten Körpers. Weiterhin ergeben sich über die Zeitableitungen entsprechend die gefahrene Geschwindigkeit $v(t)$ bzw. Beschleunigung $a(t)$:

$$\begin{aligned}
 &\text{Bewegung } s(t) \quad \text{mit} \quad [s] = \text{m} \\
 &\text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \tau} s(t) = s(\tau) \quad \text{sowie} \quad \frac{d}{dt} s(t = [t - \varepsilon, t + \varepsilon]) \stackrel{!}{\neq} 0 \\
 &\text{außerdem} \quad \text{Geschwindigkeit} \quad v(t) := \frac{d}{dt} s(t) \quad \text{mit} \quad [v] = \text{m/s} \quad (3.1) \\
 &\quad \quad \quad \text{Beschleunigung} \quad a(t) := \frac{d^2}{dt^2} s(t) \quad \text{mit} \quad [a] = \text{m/s}^2
 \end{aligned}$$

Über die angegebene Bedingung wird zunächst die Stetigkeit für $s(t)$ vorausgesetzt. Des Weiteren werden Stillstandszeiten ausgeschlossen, um die dann vorliegenden, strukturfesten thermischen Systeme im Rahmen der Untersuchungen nicht als Sonderereignisse berücksichtigen zu müssen.

Aus der Bewegung resultierende Last Da in dieser Arbeit die Bewegung des Systems im Fokus steht, wird für die angreifenden Lasten zunächst festgelegt, dass jegliche Ränder abseits der aktuellen Lastzone als adiabate Wände (vgl. Gl. 2.13, S. 20) berücksichtigt werden, also:

$$q(t, \vec{x} \in \Gamma_s / \Gamma_{s,l}(t)) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad q(t, \vec{x} \in \Gamma_b / \Gamma_{b,l}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.2)$$

Im Weiteren verbleiben im System lediglich die mit der Bewegung im Zusammenhang stehenden Kontaktlasten. Basierend auf der Physik des Problems können diese aus Ausgleichsprozessen (siehe Gl. 2.4, S. 16), welche aufgrund eines Temperaturunterschieds im Kontakt auftreten sowie aus einer bewegungsbedingten Wärmeproduktion resultieren.

³Daher wird in dieser Arbeit übertragend auch oft von *Vor-* ($\frac{ds(t)}{dt} > 0$) und *Zurückfahren* ($\frac{ds(t)}{dt} < 0$) gesprochen.

Wird diese als Flussrandbedingungen formuliert, so lässt sich letzteres als ordinäre NEUMANN-Randbedingung repräsentieren, während die Ausgleichsprozesse als eine Art doppelseitige ROBIN-Randbedingung aufgefasst werden können. Eine additive Überlagerung der Anteile führt auf folgende formale Beschreibung der Kontaktlasten:

$$q_{\Gamma}(t, \vec{x}_{s,l}) = q_{N,s}(t) + q_W \left(T_s(t, \vec{x}_{s,l}), T_b(t, \vec{x}_{b,l}) \right) \\ \text{und } q_{\Gamma}(t, \vec{x}_{b,l}) = q_{N,b}(t) - q_W \left(T_s(t, \vec{x}_{s,l}), T_b(t, \vec{x}_{b,l}) \right) \quad (3.3)$$

Im Umfeld der strukturvariabler Systeme stellt dabei die *Reibung* die üblichste physikalische Ursache der Wärmeproduktion dar. Zur Berechnung werden dafür die unterschiedlichsten Einflüsse über das im Kontakt vorherrschende Reibmodell zur wirkenden Reibwärmestromdichte verknüpft. Wie diese gesamte Reibleistung letzten Endes auf die beiden am Kontakt beteiligten Körper verteilt wird, ist Gegenstand tribologischer Forschungen und muss gesichert als nicht gleichverteilt berücksichtigt werden (z.B. BARBER [11]). Daher wird als Ausgangspunkt für die Analysen angenommen, dass beliebig allgemeine Prozesse der wirkenden Wärmestromdichten $q_{N,s}(t)$ und $q_{N,b}(t)$ durch die Problembeschreibung vorgegeben sind. Durch die gegebenen Vorschriften wird außerdem eine Unabhängigkeit der Lastanteile vom Ort gefordert, sodass die NEUMANN-Lasten über die gesamte aktuelle Lastzone $\Gamma_l(t)$ konstant sind.

Dementgegen ist in Gl. 3.3 zu sehen, dass die aus der Kontakttemperaturdifferenz resultierenden, entweder ab- oder zufließenden Ausgleichswärmestromdichten für beide beteiligten Körper betragsmäßig gleich groß sind. Im Weiteren wird dabei angenommen, dass diese lediglich durch eine Wärmeübertragung per Konduktion bestimmt werden, sodass sich $q_W(t, \vec{x}_l)$ auf Basis des vorliegenden Kontaktwärmeübergangskoeffizienten $\alpha_{\Gamma_l}(t, \vec{x}_l)$ direkt nach Gl. 2.4 (S. 16) ergibt:

$$q_W(t, \vec{x}_l) := \alpha_{\Gamma_l}(t, \vec{x}_l) \left(T_b(t, \vec{x}_l) - T_s(t, \vec{x}_l) \right) \quad \text{wobei } \alpha_{\Gamma_l}(t, \vec{x}_l) \stackrel{!}{=} \alpha_W = \text{const.} \quad (3.4)$$

Es ist zu sehen, dass eine Konstanz des Wärmeleitungsvermögens über den gesamten Kontakt Γ_l gefordert wird. Außerdem ist α_K als ein Parameter des Problems vorgegeben.

Fazit Das in dieser Arbeit numerisch zu behandelnde Problem ist mit den vorstehenden Ausführungen zunächst auf physikalischer Ebene beschrieben, wobei allerdings für die Kontaktlasten bereits die Art der mathematischen Berücksichtigung vorgegeben wurde.

Durch dieses Beispielproblem werden naturgemäß Systeme repräsentiert, in denen die technische Umsetzung der Bewegung direkt durch aufeinander abgleitende Führungselemente realisiert ist (z. B. NAUMANN [69]). Zusätzlich ist in HEISEL [40] nachgewiesen, dass in dieser Art auch wälzgelagerte Führungssysteme in ausreichendem Detailgrad modellierbar sind, speziell wenn es dabei um Teilmodelle innerhalb komplexerer Systeme geht. Eine rein thermische Analyse mit per NEUMANN-Randbedingung vorgegebener Reibungswärme ist dabei möglich, da für diese Baugruppen der potentielle Einfluss einer, sich aufgrund von thermischen Deformationen ändernden, strukturellen Kontaktnormalkraft durch die im Einbau eingebrachten Vorspannung nicht gegeben ist (z. B. BRECHER in [15], [16])⁴. Ebenfalls ist das im Überblick (vgl. Abschnitt 1.1, S. 4) bereits angesprochene Problem der bewegten thermischen Last (z. B. CASALINO [21]) als Teilproblem mit in Abb. 3.1 bzw. den vorstehenden Ausführungen enthalten und kann durch Weglassen von Ω_b – wodurch auch der Wegfall von q_W folgt – erhalten werden.

3.1.2 Analytische Beschreibung

Wie in Unterabschnitt 2.1.2 (S. 18) gezeigt, wird die mathematische Beschreibung eines thermischen Feldproblems aus der lokalen Form der Energiebilanz an einem infinitesimalen Kontrollvolumen gewonnen. Für den Fall, dass sich das betrachtete Feld im Gesamten bzgl. eines raumfesten Koordinatensystems bewegt, wird es speziell für die zeitveränderlichen Terme der Bilanzgleichung entscheidend, ob das Kontrollvolumen in seiner Lage differentiell unverändert gegenüber dem Koordinatensystem verbleibt (EULERSche Betrachtung) oder fest einem materiellen Punkt zugeordnet wird (LAGRANGESche Betrachtung). Im letzteren Fall, ist die Bewegung als ein Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{x}) = (v_x(\vec{x}) \ v_y(\vec{x}) \ v_z(\vec{x}))^\top$ aufzufassen, in dem sich das Kontrollvolumen befindet und das damit Einfluss auf dessen zeitliches Verhalten hat. Zur Beschreibung der infinitesimalen d. h. auch strömungsbedingten Veränderungen am Kontrollvolumen wird dadurch die materielle Zeitableitung D/Dt der Temperatur relevant, wobei:

$$\frac{DT(\vec{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{v}^\top \nabla T(\vec{x}, t) \quad (3.5)$$

⁴Hier wird nochmals explizit darauf hingewiesen, dass die absolute Belastung dieser Baugruppen sehr wohl einen Einfluss auf die wirkende Reibkraft hat (BRECHER [17]). Gegenüber diesen ist die angesprochene, thermisch induzierte Normalkraftänderung allerdings vernachlässigbar gering. Der Lasteinfluss kann also bereits in den vorgegebenen Reibwärmestromdichten $q_N(t)$ berücksichtigt werden.

Die lokale Zeitableitung wird darin von einem advektiven Anteil der Änderung überlagert. Die Wärmeleitungs-PDGL aus Gl. 2.9 (S. 19) geht damit für ein bewegtes Kontrollvolumen über in:

$$\underbrace{\dot{T}(t, \vec{x})}_{\text{Kapazität}} + \underbrace{\vec{v}^\top \nabla T(t, \vec{x})}_{\text{Advektion}} = \underbrace{\kappa \nabla^2 T(t, \vec{x})}_{\text{Konduktion}} \quad (3.6)$$

Für den stehenden Körper Ω_s liegt allerdings bei einer Beschreibung bzgl. des raumfesten Koordinatensystems $\mathcal{I} \langle x, y, z \rangle$ ein $\vec{v} = (0 \ 0 \ 0)^\top$ vor, sodass Gl. 3.6 wieder in die advektionsfreie Standard-Wärmeleitungs-PDGL (Gl. 2.10, S. 20) übergeht. Zusammen mit den in Gl. 3.2 und Gl. 3.3 geforderten Rand- und Kopplungsbedingungen folgt die analytische Beschreibung für $T_s(t, \vec{x}_s)$ zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_s}{\partial t} &= \kappa \left[\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right] \\ \text{wobei } \vec{x}_s &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \left| \begin{pmatrix} 0 \leq x \leq l_s \\ 0 \leq y \leq h_s \\ 0 \leq z \leq w \end{pmatrix} \right. \text{ mit} \\ -\lambda \frac{\partial T_s(t, \vec{x}_s)}{\partial \vec{n}(\vec{x}_s)} &= \begin{cases} q_{N,s}(t) + \alpha_W (T_b - T_s) & \text{für } [s(t) \leq x \leq s(t) + l_b] \cap [y = 0] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Analog lässt sich das Temperaturfeld des bewegten Körpers $T_b(t, \vec{x}_b)$ vom ortsfesten $\mathcal{I} \langle x, y, z \rangle$ beschreiben, indem $\vec{v} = (v(t) \ 0 \ 0)^\top$ (vgl. Gl. 3.1) berücksichtigt wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_b}{\partial t} + v(t) \frac{\partial T_b}{\partial x} &= \kappa \left[\frac{\partial^2 T_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_b}{\partial z^2} \right] \\ \text{wobei } \vec{x}_b &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \left| \begin{pmatrix} s(t) \leq x \leq s(t) + l_b \\ -h_b \leq y \leq 0 \\ 0 \leq z \leq w \end{pmatrix} \right. \text{ mit} \\ -\lambda \frac{\partial T_b(t, \vec{x}_b)}{\partial \vec{n}(\vec{x}_b)} &= \begin{cases} q_{N,b}(t) - \alpha_W (T_b - T_s) & \text{für } [s(t) \leq x \leq s(t) + l_b] \cap [y = 0] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die von Ω_b ausgeführte Starrkörperbewegung wird also mathematisch durch die advektiven Terme der PDGL in Kombination mit der bewegungsabhängigen Definition des Gültigkeitsbereichs beschrieben.

Weiterhin ist es möglich das System in Abbildung 3.1 bzgl. des Koordinatensystems $\mathcal{B} \langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \rangle$ zu beschreiben, welches starr am bewegten Körper Ω_b positioniert ist. $\mathcal{B} \langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \rangle$ kann dabei entweder als ein Koordinatensystem interpretiert werden, welches sich gegenüber einem raumfesten Inertialsystem mit $s(t)$ mitbewegt, oder $\mathcal{B} \langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \rangle$ wird selbst als raumfest betrachtet und Ω_s bewegt sich mit $-s(t)$ relativ zu dem stehenden Ω_b . Unabhängig davon ergibt sich für $T_s(t, \vec{x}_s)$ abweichend zu Gleichung 3.7, folgende Beschreibung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_s}{\partial t} - v(t) \frac{\partial T_s}{\partial \tilde{x}} &= \kappa \left[\frac{\partial^2 T_s}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial \tilde{z}^2} \right] \\ \text{wobei } \vec{x}_s &= \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \left| \begin{pmatrix} -s(t) \leq \tilde{x} \leq l_s - s(t) \\ 0 \leq \tilde{y} \leq h_s \\ 0 \leq \tilde{z} \leq w \end{pmatrix} \right. \text{ mit} \\ -\lambda \frac{\partial T_s(t, \vec{x}_s)}{\partial \vec{n}(\vec{x}_s)} &= \begin{cases} q_{N,s}(t) + \alpha_W (T_b - T_s) & \text{für } [0 \leq \tilde{x} \leq l_b] \cap [\tilde{y} = 0] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.9) \end{aligned}$$

Die Beschreibung von Ω_b bzgl. $\mathcal{B} \langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \rangle$ ändert sich zu (vgl. Gleichung 3.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_b}{\partial t} &= \kappa \left[\frac{\partial^2 T_b}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 T_b}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 T_b}{\partial \tilde{z}^2} \right] \\ \text{wobei } \vec{x}_b &= \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \left| \begin{pmatrix} 0 \leq \tilde{x} \leq l_b \\ -h_b \leq \tilde{y} \leq 0 \\ 0 \leq \tilde{z} \leq w \end{pmatrix} \right. \text{ mit} \\ -\lambda \frac{\partial T_b(t, \vec{x}_b)}{\partial \vec{n}(\vec{x}_b)} &= \begin{cases} q_{N,s}(t) - \alpha_W (T_b - T_s) & \text{für } [0 \leq \tilde{x} \leq l_b] \cap [\tilde{y} = 0] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.10) \end{aligned}$$

Damit liegen mit den beiden Gleichungspaaren 3.7/3.8 bzw. 3.9/3.10 zwei abweichende Beschreibungen für dasselbe Problem vor, welche sich vor allem hinsichtlich des Körpers unterscheiden, dessen beschreibende, lokale der Form der PDGL die aus der Bewegung resultierenden, advektiven Terme enthält. Dass der abzubildende physikalische Sachverhalt trotz allem auf beide Arten mathematisch korrekt modelliert ist, liegt in dem Umstand begründet, dass sich die Beschreibungen bzgl. der beiden Koordinatensysteme

$\mathcal{I} \langle x, y, z \rangle$ und $\mathcal{B} \langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \rangle$ jeweils durch eine EUKLIDISCHE Transformation ineinander überführen lassen. Da es sich bei der Temperatur um eine skalarwertige Größe handelt, ist deren Feld bzgl. einer derartigen Beobachtertransformation invariant (ALTENBACH [4]). Es lässt sich schlussfolgern, dass eine Berücksichtigung der advektiven Terme in den PDGL's für die Abbildung der tatsächlichen Physik der bewegten Körper irrelevant ist und in Kombination mit den zeitabhängigen Integrationsgrenzen lediglich der mathematischen Modellierung der Translation dient. Für eine numerische Modellbildung, in welcher die Bewegung durch eine vorgegebene, diskrete Starrkörperverschiebungen realisiert wird, hat das die Konsequenz, dass die Vernetzung der bewegten Körper ohne eine Berücksichtigung der bewegungsbedingten Advektion erfolgen muss. Eventuelle numerische Probleme, welche sonst bei der Modellierung kombinierter Wärme- und Transportproblem ab einer bestimmten PÉCLET-Zahl auftreten (Stichwort: *Wiggles*, siehe GRESHO [32]) sind daher nicht zu fürchten.

3.2 Numerische Umsetzung der strukturvariablen Systeme

Schon im Überblick zum Forschungsgebiet (siehe Abschnitt 1.1, S. 7) wurde kurz aufgezeigt, dass zur Einbindung von Strukturvariabilität in thermischen Berechnungen mehrere, sich qualitativ unterscheidende Herangehensweisen existieren. Diese zeichnen sich durch individuelle Vor- und Nachteile in relevanten Aspekten wie dem benötigten Aufwand zur Implementierung und Berechnung oder etwaigen Einschränkungen bei den abzubildenden Bewegungen aus. Diese Arbeit beschäftigt sich nun nicht mit der eigentlichen Auswahl eines geeigneten Verfahrens, sondern mit der Effizienzsteigerung der auf Basis der vorgenannten Aspekte für die Anwendung bereits gewählten *Methode der diskreten Verschiebungen*⁵. Nachfolgend wird dieses Verfahren zur Bewegungseinbindung im Detail vorgestellt.

⁵Die Auswahl der inkrementellen Methode zur Bewegungseinbindung erfolgte auf Basis des zugrunde liegenden Forschungsprojekts (siehe GROSSMANN [33]). Weiterführende Ausführungen zur Motivation wurden in der Einführung (vgl. Abschnitt 1.2, S. 10) dargelegt bzw. sind in NAUMANN ([69]) und PARTZSCH ([78]) zu finden.

3.2.1 Einbindung der Bewegung in thermisch-transiente Analysen

Die Bewegungseinbindung per diskreter Verschiebung ist in Abb. 3.2 schematisch illustriert. Darin, sowie in zahlreichen folgenden Schemata, ist das bewegte System in seiner zweidimensionalen Ersatzform abgebildet, welche durch einen Schnitt parallel zu der aus Bewegungs- und Tiefenrichtung aufgespannten Ebene erhalten wird.

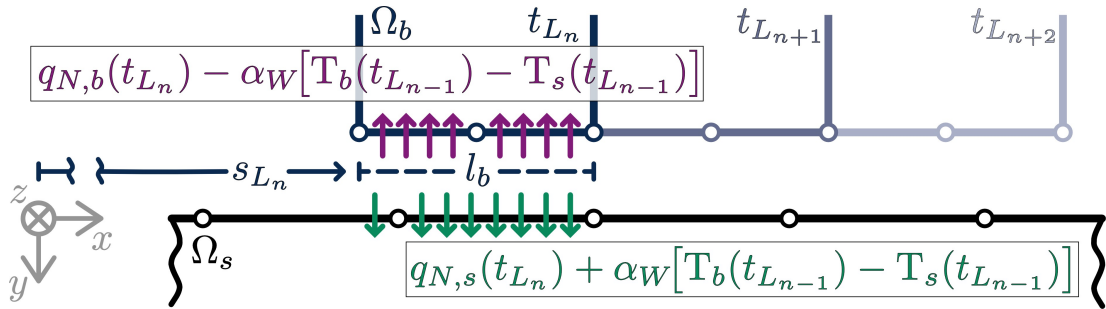


Abbildung 3.2: Prinzip der Bewegungseinbindung

Allgemeine Methodik der Bewegungseinbindung Zu Beginn der Analyse werden die an der Bewegung beteiligten Körper Ω_s und Ω_b örtlich diskretisiert. Anschließend erfolgt die Bewegungseinbindung im transienten Abschnitt der Analyse (vgl. Abb. 2.1, S. 22), indem der bewegte Körper innerhalb der Lastschritte L_n mit den zugehörigen Zeiten t_{L_n} entsprechend der abzubildenden Bewegung $s(t)$ starr mit $s_{L_n} = s(t_{L_n})$ verschoben wird. In Abb. 3.2 ist dies für Ω_b für die drei Lastschritte $L_n \dots L_{n+2}$ über ein verblassendes dunkelblau illustriert, wobei sich der bewegte Körper in dem konkreten Beispielfall jeweils eine Länge l_b pro Lastschritt weiterbewegt, also $s_{L_{n+2}} = s_{L_n} + 2l_b$ ist.

Eine Definition der Lasten (in Abb. 3.2 durch violette und grüne Pfeile illustriert), welche mit der Bewegung in Zusammenhang stehen, erfolgt zu jedem Lastschritt neu. Dadurch, dass die gesamte Systemstruktur über das gegebene $s(t)$ immer vollständig bestimmt ist, ist zu jedem Lastschritt bekannt, wo sich die aktuelle Lastzone $\Gamma_l(t_{L_n}) = [s_{L_n}; s_{L_n} + l_b]$ auf dem stehenden Körper Ω_s befindet. Die NEUMANN-Kontaktlasten können damit direkt auf $\Gamma_l(t_{L_n})$ definiert werden, wobei deren Höhe durch Auswertung der gegebenen Lastverläufe (vgl. Gl. 3.3) zur Lastschrittzeit entsprechend zu $q_{N,s}(t_{L_n})$ und $q_{N,b}(t_{L_n})$ bestimmt ist.

Die ROBIN-artigen Anteile der Kontaktlasten (vgl. Gl. 3.4) werden anhand der Lösungen $T_s(t_{L_{n-1}})$ und $T_b(t_{L_{n-1}})$ des vorherigen Lastschritts sowie dem gegebenen Übergangskoeffizienten α_W bestimmt. Für den stehenden Körper werden allerdings jene Temperaturen herangezogen, die in der aktuell betrachteten Lastzone $\Gamma_l(t_{L_n})$ liegen. Die technische Umsetzung des konduktiven Wärmeaustauschs gestaltet sich dabei vergleichsweise schwierig, da die berechneten Temperaturen in Ortsdiskretisierten Problemen ohne weiteres Postprocessing zunächst nur an den Knoten (in Abb. 3.2 als kleine Kreise illustriert) vorliegen (siehe Gl. 2.16, S. 24). Zudem liegen sich die Knoten von Ω_s und Ω_b im Allgemeinen nicht exakt symmetrisch bzgl. der Lastzone gegenüber (siehe Abb. 3.2). Es ist notwendig, in der zum Lastschritt L_n aktuellen Systemstruktur zunächst die für die Konduktion relevanten Knoten auf Ω_s zu identifizieren. Anschließend werden die resultierenden, konduktiven Wärmestromdichten aus den beitragenden Knotentemperaturen durch Interpolation entsprechend der vorliegenden geometrischen Verhältnisse bestimmt. Wie dabei genau vorgegangen wird, ist für diese Arbeit nicht relevant⁶, da die Untersuchungen zum konduktiven Kontaktlastanteil davon ausgehen, dass dieser exakt entsprechend Gl. 3.4 vorliegt.

Sind die Lastanteile bestimmt, werden diese gleichgewichtet zu den resultierenden Kontaktlasten superponiert (siehe Gl. 3.3) und auf die beteiligten Körper aufgetragen. Damit liegen zwei entkoppelte, thermische Systeme vor, welche separat entsprechend dem bekannten Ablauf einer ordinären, d.h. bewegungsfreien Analyse transient berechnet werden (siehe Abb. 2.1, S. 22).

Die vorgestellte Methode zur Bewegungseinbindung erfüllt die notwendige Bedingung, dass damit im Fall einer infinitesimalen Schrittweite $\Delta t \rightarrow 0$ eine kontinuierliche Bewegung abgebildet wird.

Auswirkungen auf die transiente Systemauswertung Die sich bei $\Delta t > 0$ diskret ändernde Lage der aktuellen Kontaktzone $\Gamma_l(t)$ bedeutet für den stehenden Körper mathematisch betrachtet, dass sich dessen Lastzustand zu jedem Lastschritt unstetig ändert. Selbst wenn die Verfahren insgesamt stabil sind, können sich die Lösungen trotzdem bei ausreichend grober Zeitdiskretisierung unzulässig stark aufschwingen und

⁶Zur Ergebnisreproduktion wird hier angegeben, dass die konduktiven Kontaktlasten in den Berechnungen mithilfe in ANSYS verfügbarer Kontakttechnologie berücksichtigt werden. Die Kontaktidentifikation erfolgt über den *Pinball*-Algorithmus (RUST [85]) während die Interpolation automatisiert nach Gl. 3.4 erfolgt aber sonst nicht näher beschrieben ist (ANSYS Theory [5]).

entsprechend fehlerhaft sein (KAVETZKI [47]). Dadurch wird es notwendig, für die transiente Integration Verfahren mit expliziten Anteilen in der Vorschrift zu vermeiden:

$$\text{Gl. 2.19 (S. 26) mit } \theta \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{T}_{L_n} = \bar{T}_{L_{n-1}} + \Delta t \dot{\bar{T}}_{L_n} \quad (3.11)$$

Von der zur transienten Auswertung verfügbaren Schar der generalisierten Trapezmethoden (siehe Gl. 2.19, S. 26) muss also zwingend das implizite EULER-Verfahren gewählt werden.

Besonderheiten bei ortsdiskretisierten Problemen Die Untersuchungen in dieser Arbeit erfolgen stets unabhängig von der vorliegenden Vernetzung der beteiligten Körper. Die entwickelten Korrekturmethode müssen allerdings für eine Anwendung in ortsdiskretisierten Systemen aufbereitet werden. Um die benötigten Anwendungsvorschriften dabei so einfach wie möglich zu gestalten, wird lediglich für den stehenden Körper Ω_s festgelegt, dass dessen Vernetzung im Bereich nahe der potentiellen Lastzone $\Gamma_{s,i}$ gleichmäßig mit Hexaederelementen (siehe Unterabschnitt 2.2.1, S. 24 bzw. Anhang A.1, S. 156) erfolgt. Durch die Forderungen an die Form des Körpers in diesem Bereich (siehe Unterabschnitt 3.1.1) sollte diese Art der Vernetzung prinzipiell umsetzbar sein und – wie in Abb. 3.3 illustriert – ein Netz liefern, bei dem entlang der Bewegungsrichtung identisch beschaffene Elementschichten zu finden sind. Damit lässt sich auch die Ortsdiskretisierung in den zur Analyse herangezogenen, zweidimensionalen Ersatzdarstellungen der bewegten Systeme berücksichtigen.

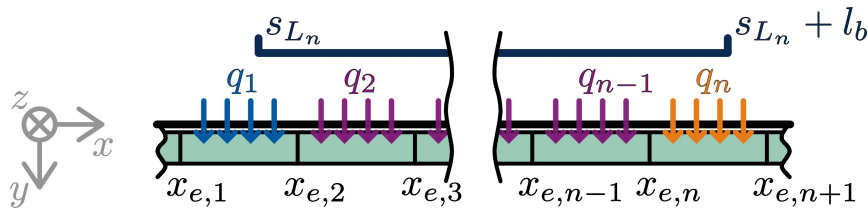


Abbildung 3.3: Anteilige Bedeckung der Randelementschichten

Abb. 3.3 verdeutlicht zudem das im Allgemeinen auftretende Problem der anteilig bedeckten Elementschichten von Ω_s unter der Front bzw. dem Heck von Ω_b . Die übliche Möglichkeit zur Definition einer konstanten Wärmestromdichte auf ein Element führt bei einer direkten Belastung der Randelemente mit dem gegebenen $q_{N,s}(t_{L_n})$ zu einem systematischen Übereintrag der in Ω_s eingebrachten Energie. Eine an die geometrischen Verhältnisse des ortsdiskretisierten, stehenden Körpers angepasste Skalierung der

NEUMANN-Last wird daher notwendig. Die resultierenden Wärmestromdichten q_i der im Kontakt involvierten Elementschichten $i = 1 \dots n$ ergeben sich mittels linearer Interpolation wie folgt:

$$q_1 = \frac{x_{e,2} - s_{L_n}}{x_{e,2} - x_{e,1}} q_{N,s}(t_{L_n}) \quad q_{2 \dots n-1} = q_{N,s}(t_{L_n}) \quad q_n = \frac{s_{L_n} + l_b - x_{e,n}}{x_{e,n+1} - x_{e,n}} q_{N,s}(t_{L_n}) \quad (3.12)$$

Eine Vernachlässigung dieser Skalierung ist lediglich im Fall einer ausreichend feinen Ortsdiskretisierung von Ω_s möglich.

3.2.2 Steuerung und Charakterisierung der Zeitdiskretisierung

Aufgrund dessen, dass der Fokus der hier erläuterten Simulationemethode auf der abzubildenden Bewegung liegt, wird festgelegt, dass die Wahl einer geeigneten Schrittweite zur transienten Diskretisierung durch die Forderung nach einer konstanten Wegschrittweite bestimmt wird. Im Falle einer beschleunigten Bewegung wird dadurch eine Anpassung der resultierenden Zeitschrittweite Δt notwendig. Für die gegebene Bewegung mit $v(t) = ds(t)/dt$ ergibt sich damit folgende Vorschrift zur Zeitschrittweitensteuerung:

$$\begin{aligned} \text{Wegschrittweite } \Delta s &:= s_{L_{n+1}} - s_{L_n} = \int_{t_{L_n}}^{t_{L_n} + \Delta t} v(t) dt \stackrel{!}{=} \text{const.} \\ \Rightarrow \Delta t &= f(v(t), \Delta s) \neq \text{const.} \quad \text{wenn } a(t) = \frac{d^2}{dt^2} s(t) \neq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Der Vorteil dieser Herangehensweise ist, dass die zu den einzelnen Lastschritten aktuellen Lastzonen $\Gamma_l(t_{L_n})$ damit äquidistant über die potentielle Lastzone $\Gamma_{s,\bar{l}}$ verteilt sind. Damit lassen sich positionelle Informationen im Zusammenhang mit der diskreten Bewegung nur auf Basis von Δs und prinzipiell unabhängig vom eigentlichen Bewegungsprofils $s(t)$ beschreiben. Für die Analyse und Beschreibung der diskreten Bewegung, kann damit das gegebene Problem von der zur Simulation gewählten, zeitlichen Diskretisierung entkoppelt werden.

Um die, durch das gewählte Δs vorliegende Diskretisierungstiefe für die Umsetzung der Bewegung objektiv, d.h. unabhängig vom gegebenem Problem zu charakterisieren, wird das dimensionslose Maß η wie folgt eingeführt:

$$\text{Fahrteilstahl } \eta := \frac{l_b}{\Delta s} \quad \text{mit } \eta \geq 1 \quad (3.14)$$

Da η damit beschreibt, in wie vielen Teilen bzw. Schritten die Länge des bewegten Körpers l_b durch die gewählte Wegschrittweite Δs überwunden wird, wird η im Folgenden *Fahrteilmahl der diskreten Bewegung* oder kurz *Fahrteilmahl*⁷ genannt. Bei $\eta \rightarrow \infty$ geht das diskrete Verschieben in eine kontinuierliche Bewegung über.

Weiter wird für η in Gl. 3.14 eine untere Grenze angegeben, mit der sichergestellt wird, dass jeder Abschnitt der potentiellen Lastzone $\Gamma_{s,\bar{l}}$ während der diskret abgebildeten Bewegung mindestens einmal durch den bewegten Körper bedeckt wird. Mit $\eta = 1$ ist damit eine aus dem bewegten Problem resultierende, maximal grobe Zeitdiskretisierung gegeben.

3.3 Aspekte der Entwicklung effizienter Simulationsverfahren: Ziel, Ansatzpunkte und Vorgehen

Während der Zielformulierung in der Einleitung (vgl. Abschnitt 1.2, S. 9) wurde bereits festgelegt, dass die Effizienz der präsentierten Methode zur Simulation strukturvariabler Systeme durch die Verwendung einer groben Zeitdiskretisierung gesteigert werden soll. Mit dem Maß der Fahrteilmahl lässt sich nun konkret quantifizieren, wieviel Aufwand bei einer mit η_G (Index G für zeitlich *grob* diskretisiert) durchgeführten Analyse – im Folgenden oft auch verkürzt als grobe Analyse/Simulation bezeichnet – im Vergleich zu einer mit η_R (Index R für *Referenz*) diskretisierten, zeitkonvergenten Referenzanalyse benötigt bzw. eingespart wird. Da in transienten Analysen (siehe Abb. 2.1, S. 22) die Berechnung der ortsdiskretisierten Systeme zu jedem Lastschritt neu erfolgt (siehe Gl. 2.20, S. 27), kann die erreichte Reduzierung des Rechenaufwands – ausgedrückt über die zur Berechnung benötigte Laufzeit t_{CPU} – direkt anhand jener Lastschritte bestimmt werden, welche in einer zeitlich grob diskretisierten Simulation im Gegensatz zur Referenz nicht berechnet werden. Formal ergibt sich:

$$t_{\text{CPU},G} = \frac{1}{F_{\text{save}}} t_{\text{CPU},R} \quad \text{mit} \quad F_{\text{save}} = \frac{\eta_R}{\eta_G} \quad \text{und} \quad \eta_R > \eta_G \quad (3.15)$$

⁷Im Grunde ist η ein reziprokes Äquivalent der CFL- bzw. COURANT-Bedingung, einem Stabilitätskriterium aus der numerischen Analyse instationärer, konvektionsdominierter Strömungen (FERZIGER [28]).

Die angestrebte Steigerung der Effizienz der Berechnungsmethode wird damit allerdings nur erreicht, wenn gleichzeitig die Ergebnisgüte der Referenz in den groben Simulationen beibehalten wird.

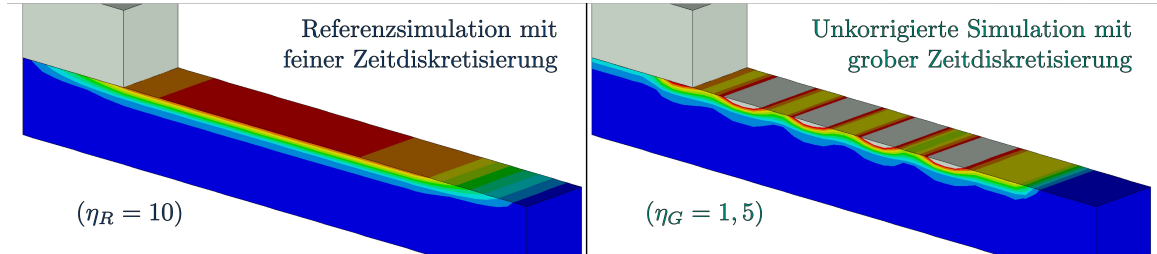


Abbildung 3.4: Einfluss der Zeitdiskretisierung

In Abb. 3.4 sind die Temperaturfelder des stehenden Körpers eines zu Abb. 3.1 ähnlichen Beispielproblems abgebildet, welche sich durch eine mit $\eta_R = 10$ bzw. $\eta_G = 1,5$ diskret abgefahrte Beispielbewegung ergeben haben. Es ist zu sehen, dass sich beide Ergebnisse deutlich unterscheiden, was bedeutet, dass eine der Simulationemethode intrinsische Konservierung der Ergebnisgüte bei grober Zeitdiskretisierung nicht gegeben ist. Damit ist das eigentliche Forschungsziel dieser Arbeit, nämlich die systematische Identifikation, Quantifizierung und gegebenenfalls Korrektur einzelner, zu dem beobachteten Abfall der Ergebnisgüte beitragenden Fehlerquellen, begründet.

3.3.1 Einfluss der Bewegung auf das diskretisierte Problem

Zunächst wird dargelegt, wie sich die Einbindung der Bewegung in eine thermisch-transiente Analyse (vgl. Abb. 2.1, S. 22) auf deren theoretische Beschreibung auswirkt. Die Identifikation der möglichen Fehlermechanismen bei grober Zeitschrittweite erfolgt anschließend darüber, inwiefern Δt in diese Beschreibung eingebunden ist.

Wie in Unterabschnitt 2.2.1 (S. 23) spezifisch für die FEM präsentiert, liefert die Ortsdiskretisierung eines beliebigen Gebiets Ω für ein instationäres, thermisches Problem immer ein Differentialgleichungssystem 1.Ordnung (vgl. Gl. 2.18, S. 2.18). In Matrizendarstellung:

$$\mathbf{K}_\Omega \dot{\bar{\mathbf{T}}}_\Omega(t) + \mathbf{D}_\Omega \bar{\mathbf{T}}_\Omega(t) = \bar{q}_\Omega(t) \quad (3.16)$$

Die Bewegungseinbindung erfolgt erst anschließend beim Übergang auf die transiente Phase. Dadurch stellt der in Gl. 3.16 präsentierte Zusammenhang den Ausgangspunkt für

die folgenden Untersuchungen dar, welche damit zudem unabhängig von der tatsächlich zur Ortsdiskretisierung verwendeten Methode sind.

Im Folgenden wird noch mehrmals eine gesicherte Relation zwischen einem kontinuierlichen Gebiet bzw. Rand und den darin bzw. darauf liegenden Freiheitsgraden nach der Ortsdiskretisierung sowie den zugehörigen Lastvektoren benötigt. Um diese Verbindung zwischen verschiedenen Teilen der kontinuierlichen Welt und den zugehörigen Größen des ortsdiskreten Raums anzuzeigen, wird das Zeichen \bowtie zweckentfremdet⁸. Die Anzeige der Relation für das Ausgangssystem in Gl. 3.16 erfolgt beispielsweise durch $\Omega \bowtie \langle \bar{\mathbf{T}}_\Omega; \bar{q}_\Omega \rangle$.

Matrizendarstellung für Systeme mit Strukturvariabilität Zunächst lässt sich feststellen, dass aufgrund der angewandten Vorgehensweise, genauer wegen der separaten Betrachtung der beteiligten Körper sowie deren ausschließlicher Kopplung über die als Last interpretierte Kontaktwärmeleitung, das betrachtete Gesamtgebiet Ω in zwei, voneinander unabhängige Teilgebiete zerfällt:

$$\Omega = \Omega_b \cup \Omega_s \quad \text{wobei} \quad \Omega_b \cap \Omega_s = \emptyset \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} \Omega_b & \dots \text{ bewegter Körper} \\ \Omega_s & \dots \text{ stehender Körper} \end{array} \quad (3.17)$$

Dabei wird unabhängig davon, welcher Körper tatsächlich bewegt wird, immer jener Körper als Ω_b betrachtet, welcher die kleinere Fläche in das Kontaktpaar der Bewegung einbringt.

Mit $\Omega_b \bowtie \langle \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_b}; \bar{q}_{\Omega_b} \rangle$ und $\Omega_s \bowtie \langle \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_s}; \bar{q}_{\Omega_s} \rangle$ resultiert daraus im Weiteren eine Aufspaltung der Matrizendarstellung in zwei voneinander entkoppelte Teil-DGL-Systeme:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega_b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\Omega_s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{\Omega_b} \\ \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{\Omega_s} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\Omega_b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\Omega_s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_b} \\ \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{q}_{\Omega_b} \\ \bar{q}_{\Omega_s} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Darin sowie im Folgenden wird auf eine Angabe der Zeitabhängigkeit der Temperaturfreiheitsgrade $\mathbf{T}_\Omega = \mathbf{T}_\Omega(t)$ aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Betrachtet wird im Folgenden zunächst nur das Teilgebiet des bewegten Körpers Ω_b . Dessen Rand $\Gamma_b \subset \Omega_b$ lässt sich entsprechend Abb. 3.1 aufteilen und zwar in Bereiche $\Gamma_{b,l} \bowtie \langle \bar{\mathbf{T}}_{\Gamma_{b,l}}; \bar{q}_{\Gamma_{b,l}} \rangle$, welche im Kontakt zu dem Bewegungspartner stehen und damit während der Simulation von den bewegungsbedingten Randbedingungen $q_\Gamma(t, \vec{x}_{b,l})$ (vgl. Gl. 3.3) belastet werden, und in Bereiche $\Gamma_{b,a}$, welche abseits (Index a)

⁸Ursprünglich stammt \bowtie aus der relationalen Algebra und indiziert darin den *Natural-Join*-Operator.

davon liegen. Die beiden Teilränder sind dabei bzgl. Γ_b nicht komplementär zueinander, denn obwohl $\Gamma_b = \Gamma_{b,l} \cup \Gamma_{b,a}$, ist $\Gamma_{b,l} \cap \Gamma_{b,a} = \Theta_{b,la} \neq \emptyset$. Um die Freiheitsgrade, welche von den Bewegungslasten betroffen sind, ausschließlich in $\bar{\mathbb{T}}_{\Gamma_{b,l}}$ wiederzufinden, wird daher $\Gamma_{b,a} \setminus \Theta_{b,la} \bowtie \langle \bar{\mathbb{T}}_{\Gamma_{b,a}}; \bar{q}_{\Gamma_{b,a}} \rangle$ gesetzt. Zusammen mit dem restlichen Gebiet $\Omega_b \setminus \Gamma_b = \Omega_{\hat{b}} \bowtie \langle \bar{\mathbb{T}}_{\Omega_{\hat{b}}}; \bar{q}_{\Omega_{\hat{b}}} \rangle$ lässt sich das DGL-System folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{b}}} & \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{b}}\Gamma_{b,l}} & \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{b}}\Gamma_{b,a}} \\ \mathbf{K}_{\Gamma_{b,l}\Omega_{\hat{b}}} & \mathbf{K}_{\Gamma_{b,l}} & \mathbf{K}_{\Gamma_{b,l}\Gamma_{b,a}} \\ \mathbf{K}_{\Gamma_{b,a}\Omega_{\hat{b}}} & \mathbf{K}_{\Gamma_{b,a}\Gamma_{b,l}} & \mathbf{K}_{\Gamma_{b,a}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbb{T}}}_{\Omega_{\hat{b}}} \\ \dot{\bar{\mathbb{T}}}_{\Gamma_{b,l}} \\ \dot{\bar{\mathbb{T}}}_{\Gamma_{b,a}} \end{pmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\Omega_{\hat{b}}} & \mathbf{D}_{\Omega_{\hat{b}}\Gamma_{b,l}} & \mathbf{D}_{\Omega_{\hat{b}}\Gamma_{b,a}} \\ \mathbf{D}_{\Gamma_{b,l}\Omega_{\hat{b}}} & \mathbf{D}_{\Gamma_{b,l}} & \mathbf{D}_{\Gamma_{b,l}\Gamma_{b,a}} \\ \mathbf{D}_{\Gamma_{b,a}\Omega_{\hat{b}}} & \mathbf{D}_{\Gamma_{b,a}\Gamma_{b,l}} & \mathbf{D}_{\Gamma_{b,a}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbb{T}}_{\Omega_{\hat{b}}} \\ \bar{\mathbb{T}}_{\Gamma_{b,l}} \\ \bar{\mathbb{T}}_{\Gamma_{b,a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{q}_{\Omega_{\hat{b}}} \\ \bar{q}_{\Gamma_{b,l}} \\ \bar{q}_{\Gamma_{b,a}} \end{pmatrix} \quad (3.19) \end{aligned}$$

Da die darin unterschiedenen Teilbereiche des Systems anders als in Gleichung 3.17 nicht voneinander entkoppelt sind, sondern trotz dieser Darstellung natürlich weiterhin strukturell voneinander abhängen, treten hier in den Nebendiagonalen der Systemmatrizen relevante Koppelterme auf. Außerdem erzwingt die Zusammenfassung der Freiheitsgrade hinsichtlich der unterschiedenen Teilbereiche von Ω_b , dass die einzelnen Gleichungen des DGL-Systems entsprechend angeordnet werden. Dadurch verlieren die Systemmatrizen ihre numerisch vorteilhaften Eigenschaften der geringen Bandbreite und Symmetrie. Da diese Anordnung allerdings nur zur Illustration dient und nicht zur eigentlichen Berechnung verwendet wird, ist dies irrelevant.

Wie erwähnt, wird aufgrund der Irrelevanz für die Arbeit der Einfachheit halber angenommen, dass weder innere Wärmequellen noch bewegungsunabhängige NEUMANN-Lasten in/an den betrachteten Systemen angreifen. Damit sind $\bar{q}_{\Omega_{\hat{b}}} = \bar{0}$ sowie $\bar{q}_{\Gamma_{b,a}} = \bar{0}$ und das System aus Gleichung 3.19 lässt sich unter Verwendung von $\Omega_{\hat{b}} \cup \Gamma_{b,a} \setminus \Theta_{b,la} = \Omega_{\hat{b},l} \bowtie \langle \bar{\mathbb{T}}_{\Omega_{\hat{b},l}}; \bar{q}_{\Omega_{\hat{b},l}} = \bar{0} \rangle$ wie folgt darstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{b},l}} & \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{b},l}\Gamma_{b,l}} \\ \mathbf{K}_{\Gamma_{b,l}\Omega_{\hat{b},l}} & \mathbf{K}_{\Gamma_{b,l}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbb{T}}}_{\Omega_{\hat{b},l}} \\ \dot{\bar{\mathbb{T}}}_{\Gamma_{b,l}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\Omega_{\hat{b},l}} & \mathbf{D}_{\Omega_{\hat{b},l}\Gamma_{b,l}} \\ \mathbf{D}_{\Gamma_{b,l}\Omega_{\hat{b},l}} & \mathbf{D}_{\Gamma_{b,l}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbb{T}}_{\Omega_{\hat{b},l}} \\ \bar{\mathbb{T}}_{\Gamma_{b,l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{q}_{\Gamma_{b,l}} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Für den stehenden Körper lässt sich eine analoge Darstellung finden, indem das Ω_s -zugehörige Teil-DGL-System aus Gl. 3.17 hinsichtlich jener Freiheitsgrade partitioniert wird, die in der potentiellen Lastzone $\Gamma_{s,\bar{l}} \bowtie \langle \bar{\mathbb{T}}_{\Gamma_{s,\bar{l}}}; \bar{q}_{\Gamma_{s,\bar{l}}} \rangle$ liegen, also unabhängig

von der Zeit während der Simulation eventuell durch die bewegungsverbundenen Kontaktwärmestromdichten belastet werden⁹:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega_{s,\bar{l}}} & \mathbf{K}_{\Omega_{s,\bar{l}}\Gamma_{s,\bar{l}}} \\ \mathbf{K}_{\Gamma_{s,\bar{l}}\Omega_{s,\bar{l}}} & \mathbf{K}_{\Gamma_{s,\bar{l}}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{\Omega_{s,\bar{l}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{\Gamma_{s,\bar{l}}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\Omega_{s,\bar{l}}} & \mathbf{D}_{\Omega_{s,\bar{l}}\Gamma_{s,\bar{l}}} \\ \mathbf{D}_{\Gamma_{s,\bar{l}}\Omega_{s,\bar{l}}} & \mathbf{D}_{\Gamma_{s,\bar{l}}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_{s,\bar{l}}} \\ \bar{\mathbf{T}}_{\Gamma_{s,\bar{l}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{q}_{\Gamma_{s,\bar{l}}} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Die eigentliche Unterscheidung von stehenden und bewegten Körper erfolgt auf Basis der Definition (vgl. Unterabschnitt 3.1.1), dass $|\Gamma_{s,\bar{l}}| > |\Gamma_{b,\bar{l}} \equiv \Gamma_{b,l}|$ ist. Damit folgt, dass sich der Rand $\Gamma_{s,\bar{l}}$ in zwei qualitativ zu unterscheidende Teile aufspalten lässt, nämlich in einen während des momentanen Lastschritts belasteten Rand $\Gamma_{s,l}$ mit $|\Gamma_{s,l}| = |\Gamma_{b,l}|$ sowie einen freien (Index f) Rand $\Gamma_{s,f}$. Aufgrund der Bewegung ändern sich der Ort sowie für Γ_f die Ausdehnungen dieser Teilränder über die Schritte einer transiente Analyse ständig, da die Aufteilung dadurch determiniert ist, wo sich der bewegte Körper in den ausgewerteten Lastschritten tatsächlich befindet. Darin liegt ein qualitativer Unterschied zur $\Gamma_{b,l}$ - $\Gamma_{b,a}$ -Differenzierung, welche vollständig strukturell sowie über die Analyse hinweg gleichbleibend bestimmt ist.

Beide Ränder teilen sich erneut eine gemeinsame Grenze $\Theta_{lf} \propto \langle \bar{\mathbf{T}}_{\Theta_{lf}}; \bar{q}_{\Theta_{lf}} \rangle$. Allerdings fällt die aus der momentanen Struktur resultierende Grenze Θ_{lf} im allgemeinen Fall lokal nicht exakt auf eine Linie, auf der tatsächlich auch entsprechende Knoten liegen, sodass $\bar{\mathbf{T}}_{\Theta_{lf}}$ und $\bar{q}_{\Theta_{lf}}$ im Allgemeinen nicht existieren. Eine klare Abgrenzung der Bereiche $\Gamma_{s,l}$ und $\Gamma_{s,f}$, so wie diese aufgrund der aktuellen Pose des simulierten Systems notwendig wäre, lässt sich daher nach der Ortsdiskretisierung im Modell nicht mehr durchführen. Dieselbe Problematik wurde bereits in der Erläuterung der Methodik zur Einbindung der Strukturvariabilitäten (vgl. Abb. 3.3) thematisiert und erzwingt in der Umsetzung der Bewegungseinbindung die Skalierung der auferlegten Wärmestromdichten an den Randelementen des Kontaktbereichs (vgl. Gl. 3.12). Damit wird die funktionale Aufteilung von $\Gamma_{s,\bar{l}}$ im Kontinuierlichen erstmalig durch die nachgelagerte Ortsdiskretisierung (Index $(\cdot)^*$) bestimmt, da der potentielle Kontaktbereich dadurch in drei, prinzipiell voneinander unterscheidbare Bereiche zerfällt:

$$\Gamma_{s,\bar{l}} = \Gamma_{s,f^*} \cup \underbrace{\Gamma_{s,v^*} \cup \Gamma_{s,r^*}}_{= \Gamma_{s,l^*}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} \Gamma_{s,f^*} & \dots \text{ ohne Belastung} \\ \Gamma_{s,v^*} & \dots \text{ volle Belastung} \\ \Gamma_{s,r^*} & \dots \text{ skalierte Belastung} \end{array} \quad (3.22)$$

⁹Prinzipiell lässt sich $\Gamma_{b,l}$ ebenso auffassen, nur ist bei diesem eine Unterscheidung zwischen prinzipiellen und tatsächlichen Kontakt nicht nötig, da der komplette Teilrand immer in Kontakt ist, also $\Gamma_{b,l} \equiv \Gamma_{b,\bar{l}}$ ist.

Es ist zu sehen, dass die belasteten Bereiche zu $\Gamma_{s,l^*} \bowtie \langle \bar{\mathbf{T}}_{\Gamma_{s,l^*}}; \bar{\mathbf{q}}_{\Gamma_{s,l^*}} \rangle$ zusammengefasst werden. Damit wird erneut $\Omega_{\dot{s},l^*} = \Omega_s \setminus \Gamma_{s,l^*} \bowtie \langle \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_{\dot{s},l^*}}; \bar{\mathbf{q}}_{\Omega_{\dot{s},l^*}} = \bar{\mathbf{0}} \rangle$ gesetzt, sodass die Knoten auf $\Theta_{fr^*} = \Gamma_{f^*} \cap \Gamma_{r^*}$ alleinig Γ_{l^*} zugeordnet sind. Für den stehenden Körper ergibt sich folgende Matrixendarstellung, in welcher hinsichtlich jener Freiheitsgrade partitioniert wurde, welche bei der zum Zeitpunkt t aktuellen Struktur direkt durch die bewegungsbedingten Randbedingungen belastet werden:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega_{\dot{s},l^*}(t)} & \mathbf{K}_{\Omega_{\dot{s},l^*}\Gamma_{s,l^*}(t)} \\ \mathbf{K}_{\Gamma_{s,l^*}\Omega_{\dot{s},l^*}(t)} & \mathbf{K}_{\Gamma_{s,l^*}(t)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{\Omega_{\dot{s},l^*}(t)} \\ \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{\Gamma_{s,l^*}(t)} \end{pmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\Omega_{\dot{s},l^*}(t)} & \mathbf{D}_{\Omega_{\dot{s},l^*}\Gamma_{s,l^*}(t)} \\ \mathbf{D}_{\Gamma_{s,l^*}\Omega_{\dot{s},l^*}(t)} & \mathbf{D}_{\Gamma_{s,l^*}(t)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_{\dot{s},l^*}(t)} \\ \bar{\mathbf{T}}_{\Gamma_{s,l^*}(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{q}}_{\Gamma_{s,l^*}(t)}(t) \end{pmatrix} \quad (3.23) \end{aligned}$$

Darin sind die Systemmatrizen im Ganzen bzw. deren Elemente grundsätzlich über der Zeit konstant. Lediglich die Partitionierung von \mathbf{K}_{Ω_s} und \mathbf{D}_{Ω_s} ändert sich laufend, da durch die aktuelle Struktur bzw. die abgebildete Bewegung bestimmt ist, welche belasteten Freiheitsgrade $\bar{\mathbf{T}}_{\Gamma_{s,l^*}(t)}$ für eine Darstellung wie in Gl. 3.23 vom Rest des ortsdiskreten Systems zu separieren sind. Dargestellt wird dieser Umstand in Gl. 3.23 durch die zeitabhängigen Indizes der Submatrizen.

Transiente Auswertung strukturvariabler Systeme Durch Gl. 3.11 wurde festgelegt, dass für die Analysen zwingend das implizite EULER-Verfahren zur transienten Integration herangezogen wird. Die in Gl. 2.20 (S. 27) präsentierte, allgemeine Form des aus einer generalisierten Trapezmethode (vgl. Gl. 2.19, S. 26) resultierenden, linearen Gleichungssystems geht damit über in:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{K}_{\Omega} + \mathbf{D}_{\Omega} \right) \bar{\mathbf{T}}_{\Omega|L_n} = \bar{\mathbf{q}}_{\Omega}(t_{L_n}) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{K}_{\Omega} \bar{\mathbf{T}}_{\Omega|L_{n-1}} \quad (3.24)$$

Die an der Bewegung beteiligten Körper werden bei der transienten Auswertung separat in ein derartiges Gleichungssystem überführt. Mit der Matrizendarstellung des bewegten Körpers (siehe Gl. 3.20) ergibt sich für diesen also:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{b},l}} & \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{b},l}\Gamma_{b,l}} \\ \mathbf{K}_{\Gamma_{b,l}\Omega_{\hat{b},l}} & \mathbf{K}_{\Gamma_{b,l}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\Omega_{\hat{b},l}} & \mathbf{D}_{\Omega_{\hat{b},l}\Gamma_{b,l}} \\ \mathbf{D}_{\Gamma_{b,l}\Omega_{\hat{b},l}} & \mathbf{D}_{\Gamma_{b,l}} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_{\hat{b},l}|L_n} \\ \bar{\mathbf{T}}_{\Gamma_{b,l}|L_n} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{q}_{\Gamma_{b,l}}(t_{L_n}) \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{b},l}} & \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{b},l}\Gamma_{b,l}} \\ \mathbf{K}_{\Gamma_{b,l}\Omega_{\hat{b},l}} & \mathbf{K}_{\Gamma_{b,l}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_{\hat{b},l}|L_{n-1}} \\ \bar{\mathbf{T}}_{\Gamma_{b,l}|L_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (3.25) \end{aligned}$$

Analog führt die Analyse des stehenden Körpers (Matrizendarstellung in Gl. 3.23) auf das folgende Gleichungssystem, welches im Lastschritt L_n zur Berechnung der gesuchten $\bar{\mathbf{T}}_{\Omega_s|L_n}$ gelöst wird:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{s},l^*}(t_{L_n})} & \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{s},l^*}\Gamma_{s,l^*}(t_{L_n})} \\ \mathbf{K}_{\Gamma_{s,l^*}\Omega_{\hat{s},l^*}(t_{L_n})} & \mathbf{K}_{\Gamma_{s,l^*}(t_{L_n})} \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\Omega_{\hat{s},l^*}(t_{L_n})} & \mathbf{D}_{\Omega_{\hat{s},l^*}\Gamma_{s,l^*}(t_{L_n})} \\ \mathbf{D}_{\Gamma_{s,l^*}\Omega_{\hat{s},l^*}(t_{L_n})} & \mathbf{D}_{\Gamma_{s,l^*}(t_{L_n})} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_{\hat{s},l^*}(t_{L_n})|L_n} \\ \bar{\mathbf{T}}_{\Gamma_{s,l^*}(t_{L_n})|L_n} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{q}_{\Gamma_{s,l^*}(t_{L_n})}(t_{L_n}) \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{s},l^*}(t_{L_n})} & \mathbf{K}_{\Omega_{\hat{s},l^*}\Gamma_{s,l^*}(t_{L_n})} \\ \mathbf{K}_{\Gamma_{s,l^*}\Omega_{\hat{s},l^*}(t_{L_n})} & \mathbf{K}_{\Gamma_{s,l^*}(t_{L_n})} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{\Omega_{\hat{s},l^*}(t_{L_n})|L_{n-1}} \\ \bar{\mathbf{T}}_{\Gamma_{s,l^*}(t_{L_n})|L_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (3.26) \end{aligned}$$

Damit ist für beide beteiligten Körper beschrieben, wie die theoretische Darstellung der Analyse im Allgemeinen durch die Einbindung der diskreten Verschiebung beeinflusst wird. Inwiefern sich die Bewegung im Falle einer groben Zeitdiskretisierung damit auf Lösung auswirkt, wird im nächsten Abschnitt untersucht.

3.3.2 Bewegungsbedingte Fehler bei langen Zeitschrittweiten

Es ist zu sehen, dass die gewählte Zeitschrittweite Δt bzw. die zu L_n aktuellen Simulationszeit t_{L_n} in den resultierenden, linearen Gleichungssystemen beider Körper vielfältig auftauchen und die Lösung dadurch systematisch auf unterschiedliche Weisen beeinflusst wird. Im Folgenden wird anhand dieser Abhängigkeiten identifiziert, welche systematischen Fehler im Falle einer groben Zeitdiskretisierung bei der Berechnung der strukturvariablen Systeme zu erwarten sind.

Beim Vergleich der linearen Gleichungssysteme beider Körper Ω_b (siehe Gl. 3.25) und Ω_s (siehe Gl. 3.26) miteinander ist zu erkennen, dass der Unterschied lediglich darin

besteht, ob eine Zeitabhängigkeit der Partitionierungsindizes gegeben ist oder nicht. Für den bewegten Körper Ω_b zeigt die konstante Partitionierung der Systemmatrizen an, dass sich die Bewegungseinbindung für diesen lediglich ordinär als eine unbewegte, aber über die Zeit variable Last äußert. Bzgl. der Abhängigkeit der Ergebnisse von der Zeitdiskretisierung stellt der stehende Körper Ω_s daher den allgemeineren Fall dar und wird deshalb im Folgenden zur Identifikation der zu beachtenden Fehlerquellen herangezogen.

Wird Gl. 3.26 mit Blick auf den Einfluss der Zeitdiskretisierung analysiert, so lassen sich drei qualitativ unterscheidbare Fehlerquellen¹⁰ finden:

F1 Leistungsfähigkeit der transienten Integration (PTI): Die gesamte Struktur des Systems in Gl. 3.26, also wo und wie darin z.B. die Systemmatrizen oder die Ergebnisse des vorangegangenen Lastschritts, speziell aber die direkt auftretende Zeitschrittweite Δt , verortet sind, ist bestimmt durch das zur transienten Integration verwendete implizite EULER-Verfahren. Inwiefern das iEV in der Lage ist, trotz grober Schrittweite das gegebene, bereits durch die Bewegungseinbindung beeinflusste DGL-System korrekt zu lösen, muss daher als eine der potentiellen Fehlerquellen untersucht werden. Dieser Frage nach der Konsistenz (siehe SCHWARZ [88]) des Verfahrens wird im nächsten Kapitel 4 nachgegangen.

F2 Kinematik der diskreten Bewegung (BD): Die zeitabhängige Partitionierung der Matrizen und Vektoren in Gl. 3.26 ist durch das Auftreten von Lastvektorelementen ungleich Null bestimmt, also dadurch, wo die Kontaktlasten zum aktuellen Zeitschritt eingetragen werden. Die aus der schrittweisen Verschiebung resultierende, diskrete Kinematik ist als möglicher Fehlerbeitrag in Betracht zu ziehen und wird eingehend in Kapitel 5 behandelt.

F3 Seltene Aktualisierung der Kontaktlasten:

Eine weiterer Einfluss der Zeitdiskretisierung ist in Gl. 3.26 bei den Elementen des Lastvektors zu finden. Im Allgemeinen Fall, d.h. wenn $\bar{q}_{r,s,l^*}(t) \neq const.$, resultieren aus den diskret aktualisierten Lasten systematische Fehler. Der Lastvektor wird dabei entsprechend Gl. 2.18 (S. 26) über die Formfunktionen und anschließender Assemblierung aus den vorliegenden, kontinuierlichen Kontaktlasten $q_r(t, \vec{x}_{s,l})$ gebildet. In der definierten Problemstellung (siehe Gl. 3.3) ergibt sich

¹⁰Zu den einzelnen Fehlern sind in Klammern die in dieser Arbeit verwendeten Abkürzungen angegeben. Deren Bedeutung wird jeweils am Anfang der zugehörigen Kapitel kurz erläutert.

$q_{\Gamma}(t, \vec{x}_{s,l})$ aus zwei zu unterscheidenden, superponierten Anteilen. Für den Fehler F3 wird damit eine weitere Differenzierung bzgl. der Ursachen notwendig:

(a) Seltene Aktualisierung des bewegten Wärmeeintrags (RUMHI):

Die als NEUMANN-Last $q_{N,s}(t)$ repräsentierte bewegte Wärmequelle oder Reibung ist im Allgemeinen nicht konstant, sodass es durch die zeitdiskrete Simulation direkt zu einem Fehler in der dem System zugeführten Wärme kommt. Im Detail wird diese Fehlerquelle in Kapitel 6 behandelt.

(b) Seltene Aktualisierung der Kontaktwärmeleitung (RUCC):

Die Höhe des konduktiven Kontaktlastanteil $q_W(T_s(t, \vec{x}_{s,l}), T_b(t, \vec{x}_{b,l}))$ hängt als doppelseitige ROBIN-Randbedingung direkt von den Temperaturfeldern der betrachteten Körper ab. Die Diskretisierung in Richtung der Zeit führt damit zu einem systematischen Fehler, dessen Auswirkungen in Kapitel 7 untersucht werden.

Damit wurde identifiziert, welche Fehler aufgrund der Zeitdiskretisierung auftreten können. Wie jeweils erwähnt, werden diese Fehlerquellen in den nachfolgenden Kapiteln individuell hinsichtlich ihrer Auswirkungen in zeitdiskreten Analysen untersucht und es werden – sollte es notwendig und insgesamt möglich sein – passende Korrekturverfahren entwickelt, um Beeinträchtigungen in der Ergebnisgüte entgegenzuwirken.

3.3.3 Richtlinien zur Entwicklung effizienter Simulationsverfahren

Zu den globalen Zielen dieser Arbeit (vgl. Abschnitt 1.2, S. 9) gehört primär die Beibehaltung der Ergebnisgüte sowie die angestrebte Einfachheit und generelle Umsetzbarkeit der erarbeiteten Verfahren. Die Entwicklung der Korrekturmethode soll nun entlang der folgenden Richtlinien geschehen, welche auf Basis dieser Ziele formuliert wurden:

R1 Beibehaltung des prinzipiellen Simulationsverfahrens:

Im Allgemeinen ist es innerhalb üblicher Simulationssoftware nicht möglich, uneingeschränkt den Programmcode und damit die Analyseabfolge zu ändern. Die Korrekturmethode sollen daher direkt in den vorgestellten Standardablauf einer strukturvariablen Analyse (siehe Abschnitt 3.2) eingebunden werden, um so deren generelle Umsetzbarkeit zu gewährleisten.

R2 Unabhängigkeit von der Ortsdiskretisierung:

Die Untersuchungen dieser Arbeit sollen unabhängig von Art und Ausführung der Ortsdiskretisierung erfolgen, damit die erhaltenen Erkenntnisse losgelöst vom Fokus der Analyse sowie bei einer Anwendung von zur FEM alternativen Methoden trotzdem Gültigkeit besitzen. Daher wird generell angenommen, dass die beteiligten Körper prinzipiell Kontinua darstellen, welche von einer diskret umgesetzten Bewegung betroffen sind.

R3 Unabhängigkeit von den abgebildeten Bewegungs- und Lastverläufen:

Ebenfalls soll angenommen werden, dass die in die Analyse eingehenden Bewegungs- und Lastverläufe $s(t)$ bzw. $q_N(t)$, abgesehen von den in Gl. 3.1 formulierten Anforderungen, vollständig beliebig und unabhängig voneinander sind. Typische $q_N(t) = f(s(t))$ Beziehungen, wie sie in derartigen, speziell Reibungsbehandelnden Problemen, oft vorliegen, oder andere Forderungen nach speziellen Prozesseigenschaften sollen explizit nicht vorausgesetzt werden.

R4 Korrekter Energiezustand als bestimmende Anforderung:

Es wird festgelegt, dass die im stehenden Körper enthaltene Energie als primäres Entwicklungskriterium herangezogen wird, um die Ergebnisgüte der grob diskretisierten Simulation auf das Niveau der Referenz zu heben. Der dadurch angestrebte, korrekte Energiezustand der Körper wird – speziell mit Blick auf eine eventuell nachfolgende Ermittlung der thermischen Verformungen – als die wesentlichste Voraussetzung angesehen, um eine korrekte Temperaturfeldberechnung zu erreichen. Außerdem soll ein korrekter Betrag der im System vorhandenen Energie gegenüber deren korrekter Verteilung im Körper priorisiert werden.

R5 Geringer Zusatzaufwand während der Simulation:

Die Korrekturmethode sind derart zu entwickeln, dass während der transienten Phase der Analyse nur wenige und eher einfache Rechenoperationen zusätzlich ausgeführt werden. Dadurch soll die tatsächlich zu erreichende Steigerung in der Effizienz der Simulation weiter erhöht und die generelle Implementierung der Korrekturmethode vereinfacht werden.

Es wird nochmal darauf hingewiesen, dass es sich bei R1-R5 um Richtlinien handelt, an welchen sich in den nachfolgenden Untersuchungen und Entwicklungen zwar orientiert wird, denen allerdings nicht das Attribut der Unumstößlichkeit zuerkannt wird.

4 Leistungsfähigkeit der transienten Integration

Die Frage nach dem Einfluss des PTI-Fehlers¹ im Fall grob zeitdiskretisierter Simulationen kann stellvertretend auch über die Frage behandelt werden, ob dieser Einfluss bei einer konkreten Zeitschrittweite in einem relevanten Ausmaß gegeben ist oder vernachlässigt werden kann. Weiter formalisiert, lässt sich das als relevant festgelegte Ausmaß über einen, bei der Auswertung durch das implizite EULER-Verfahren maximal erlaubten Fehler $E_{iEV|erl}$ mit entsprechend zugehöriger Zeitschrittweite $\Delta t_{iEV|erl}$ ausdrücken. Mit der durch das Bewegungsprofil erlaubten, maximalen Zeitschrittweite $\Delta t_{\eta_G=1}$ (siehe Gl. 3.14, S. 41) ist die tatsächliche Zeitschrittweitensteuerung dann durch die folgende Entscheidung bestimmt:

$$\Delta t = \min \left[\Delta t_{\eta_G=1}; \Delta t_{iEV|erl} \right] \quad (4.1)$$

Der physikalische Prozess der Wärmeleitung in realen Materialien ist nun vergleichsweise träge, sodass sich mit technischer Intuition bereits abschätzen lässt, dass für ein konkretes, strukturvariables Problem wahrscheinlich $\Delta t_{iEV|erl} > \Delta t_{\eta_G=1}$ gelten wird. Verlässlich lässt sich die Entscheidung in Gl. 4.1 allerdings nur treffen, indem für das tatsächlich abzubildende Problem entweder $\Delta t_{iEV|erl}$ konkret quantifiziert wird oder in einer Analyse mit dem bewegungsbedingt möglichen $\Delta t_{\eta_G=1}$ der auftretende PTI-Fehler $E_{iEV|\eta_G=1}$ bestimmt und mit $E_{iEV|erl}$ verglichen wird.

In diesem Kapitel wird nun ausgearbeitet, wie die Anwendung der groben Zeitschrittweiten $\Delta t_{\eta_G=1}$ mit Blick auf den PTI-Fehler durch theoretisch fundierte Überlegungen oder kurze Analysen zu rechtfertigen ist. Dazu wird zunächst das gegebene Problem im Umfeld der Fehleranalyse spezifiziert und es wird erläutert, warum eine direkte Quantifizierung des Fehlers durch etablierte Methoden im Rahmen dieser Arbeit

¹Die Kurzbezeichnung der Fehlerquelle ergibt sich aus den Anfangsbuchstaben der englischen Fehlerbeschreibung *Performance of Transient Integration*.

scheitert. Anschließend wird eine Methode zur Abschätzung von $\Delta t_{iEV|erl}$ unter Zuhilfenahme eines passenden Ersatzsystems entwickelt. Zum Schluss wird vorgestellt, wie durch kurze vergleichende Analysen der auftretende $E_{iEV|\eta_G=1}$ identifiziert werden kann und es wird am verwendeten Beispielproblem (siehe Abb. 3.1) nachgewiesen, dass $\Delta t_{iEV|erl} > \Delta t_{\eta_G=1}$ tatsächlich für eine große Anzahl von Anwendungsfällen erwartet werden kann.

4.1 Traditionelle Fehlerabschätzung

Das rechnergestützte Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen stellt ein umfangreiches Teilgebiet der numerischen Mathematik dar, zu dem durch die Lektüre der Standardwerke von z. B. HAIRER ([36], [37]) und STREHMEL ([92]) ein Überblick gewonnen werden kann. Es zeigt sich, dass für die Identifikation der relevanten Literatur innerhalb dieses weiten mathematischen Umfelds das hier interessierende PTI-Problem (vgl. Fehler F1, S. 49) zunächst stärker zu präzisieren ist.

Präzisierung des Problems im numerischen Kontext Im Folgenden werden die entscheidenden Punkte einer Präzisierung der Problematik angegeben, wobei jeweils eine kurze Erklärung bzw. ein kurzer Überblick zu eventuellen Alternativen angefügt wird:

- Die *Konsistenz* des Verfahrens ist entscheidend:
Die Eigenschaft, wie genau ein approximatives Verfahren in der Lage ist, ein exakt gegebenes Problem zu lösen, wird in der Numerik als dessen Konsistenz bezeichnet (siehe STREHMEL [92]).
- Die interessierende Fehlergröße ist der *lokale Diskretisationsfehler* des ersten Schritts:
Die Differenz zwischen der numerischen und der exakten Lösung nach einem Schritt mit gleicher Ausgangssituation stellt den lokalen Diskretisationsfehler dar (SCHWARZ [87]). Dieser ist hier die interessierende Fehlergröße, da durch die Einbindung der Bewegung in den betrachteten Simulationen zu jedem Schritt ein neuer Lastzustand vorliegt.
- Beim impliziten EULER-Verfahren handelt es sich um ein *Einschrittverfahren*:
In Einschrittverfahren erfolgt die Berechnung des nächstens Lastschritts jeweils

nur auf Basis der Ergebnisse des aktuellen Lastschritts. Dementgegen werden in Mehrschrittverfahren auch die Ergebnisvektoren der weiter zurückliegenden Lastschritte herangezogen (HAIRER [36]).

- Eine *a-priori*-Fehlerabschätzung ist notwendig:
Oft erfolgen Fehlerabschätzung *a posteriori* durch Vergleichen der Ergebnisse zweier Näherungen mit benachbarten Genauigkeitsordnungen oder unterschiedlich feinen Zeitdiskretisierungen (KAVETSKI [47]). Da die Betrachtungen zum Fehler F_1 aber allgemein, d.h. unabhängig von einem konkreten Problem durchgeführt werden sollen, wird eine Methode benötigt, die den Fehler *a priori* schätzt.
- Es werden generell *steife* Probleme in dieser Arbeit betrachtet:
Laut HAIRER [37] sind Probleme steif, wenn deren Lösung nicht durch explizite Lösungsverfahren zu erhalten ist. Die Ortsdiskretisierung eines Diffusions- und damit auch eines Temperaturfeldproblems ergibt ein derartiges Problem.

Weiterhin wird das implizite EULER-Verfahren neben der Einordnung als generalisierte Trapezmethode (siehe Gl. 2.19, S. 26) auch oftmals als ein Spezialfall anderer Klassen von Lösungsverfahren aufgefasst. Zum Beispiel lässt sich das iEV auch als implizites RUNGE-KUTTA-Verfahren 1. Ordnung (HAIRER [36]) bzw. als eine diskontinuierliche GALERKIN-Methode mit Ansatzpolynomen 0. Grades (siehe JOHNSON [45]) interpretieren. Die für diese übergeordneten Verfahrensklassen verfügbaren Fehlerabschätzungen können somit für das hier untersuchte Problem ebenfalls herangezogen werden.

Erkenntnisse der Recherche Bei der Recherche nach den eben spezifizierten Punkten, und unter Beachtung möglicher Verallgemeinerungen bzgl. der Auffassung des iEV's, sind innerhalb der Literatur unterschiedliche Herangehensweisen zur Fehlerabschätzung zu finden. Im Detail verschieden, lassen sich diese jedoch immer einer der folgenden zwei Kategorien zuordnen:

- K1** Die Grenzen des Fehlers werden aus problemverbundenen Konstanten ermittelt:
Vor allem im Rahmen der Fehleranalyse für allgemeine, d.h. nicht-steife DGL-Probleme werden durch die Schätzungen zunächst unterschiedliche Eigenschaften²

²Zum Beispiel wird für die Lösung häufig die für reale Probleme sinnvolle Eigenschaft der LIPSCHITZ-Stetigkeit $|f(v_1) - f(v_2)| \leq L|v_1 - v_2|$ gefordert (BRONSTEIN [19]), aus welcher eine Beschränktheit der in der Lösung auftretenden Gradienten folgt. Unter anderem auf Basis der darin verwendeten LIPSCHITZ-Konstante $L \geq \max [df(v)/dv]$ lässt sich im Weiteren die Konsistenz des Lösungsverfahrens abschätzen.

für das betrachtete Problem gefordert. Diese werden mathematisch durch abstrakte Konstanten ausgedrückt, mit welchen wiederum die vorliegenden Fehlergrößen nach oben begrenzt werden (z.B. PLATO [80], SCHWARZ [87]). Unterschiede finden sich in der Anzahl und dem Zweck der eingeführten Konstanten und damit in den abgeleiteten Grenzen. Die unterschiedlichen Möglichkeiten zur Differenzierung wirken sich dabei auf die Konservativität der Schätzungen aus. Konkrete Quantifizierungen der Konstanten auf Basis der verwendeten Schrittweite werden allerdings nie angegeben.

K2 Zur Bestimmung des Fehlers werden die modalen Lösungen des steifen DGL-Systems ermittelt:

Die mathematische Beschreibung realer physikalischer Vorgänge liefert häufig steife DGL-Systeme, bei denen sich die Lösung aus mehreren, natürlichen Exponentialfunktionen zusammensetzt, deren Abklingraten sich stark voneinander unterscheiden³ (SCHWARZ [87]). Diese spektralen Eigenschaften der Lösung werden z. B. von JOHNSON in [45] herangezogen, um mittels des Matrixexponentials der Systemmatrix $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{D}$ (vgl. Gl. 2.18, S. 26) eine konkrete Formulierung der exakten Lösung in die a priori Schätzung des Fehlers mit einzubeziehen. Alternativ schaut z. B. SCHWARZ in [87] direkt auf das individuelle Abklingverhalten der Modallösungen zu Beginn der transienten Phase und orientiert seine Fehler-schätzung bzw. eine daraus resultierende Schrittweitensteuerung an einer beliebig genauen Abbildung jenes modalen Anteils, welcher am rapidesten abklingt und somit am stärksten in den resultierenden Fehler eingeht.

Die aufgeführten Beispiele illustrieren stellvertretend, dass eine konkrete Quantifizierung der für die a priori Schätzungen entscheidenden Parameter immer abhängig von dem betrachteten System erfolgen muss. Eine direkte Bestimmung des Einflusses der gewählten Zeitdiskretisierung, welche entsprechend Richtlinie R2 vollständig unabhängig von der gewählten Ortsdiskretisierung erfolgt, ist damit prinzipiell nicht möglich.

³SCHWARZ zieht diese Eigenschaft der steifen DGL-Systeme – mathematisch ausgedrückt über die Variation der Realteile der Eigenwerte – in [87] sogar als charakteristisches Merkmal für deren Definition heran.

4.2 Fehlerabschätzung bei strukturvariablen Problemen

Wie dargelegt, ist jegliche Quantifizierung eines iEV-Diskretisationsfehlers angewiesen auf ein konkret betrachtetes System. In den hier durchgeführten Untersuchungen liegt dieses allerdings nicht vor, bzw. wird als weitestgehend beliebig angenommen (vgl. Unterabschnitt 3.1.1, S. 29). Um trotz allem einen Eindruck von der Größenordnung des im Falle einer langen Zeitschrittweite zu erwartenden PTI-Fehlers zu bekommen, wird nachfolgend zunächst ein Ersatzsystem entwickelt, an dem dann im Weiteren die Fehlerabschätzung stellvertretend durchgeführt wird.

4.2.1 Entwicklung und Beschreibung eines Ersatzsystems

Der grundlegende Anspruch an das Ersatzsystem ist es, jene allgemein aus einer Bewegung resultierenden Auswirkungen auf ein Temperaturfeld abzubilden, welche für die hier angestrebte Fehlerabschätzung relevant sind. Für einen ersten Eindruck wird dabei eine Betrachtung der Temperaturentwicklung durch ein System mit lediglich einem Freiheitsgrad als zunächst ausreichende Näherung angesehen.

Ersatzsystem Die entscheidenden, d.h. betragsmäßig größten Fehler treten immer am Anfang⁴ einer Belastung durch eine Flächenlast auf und finden sich in deren Eintragsfläche, da trivialerweise dort die betragsmäßig größte Erwärmung zu erwarten ist. Eine ausschließliche und direkte Beschreibung dieser Oberflächentemperatur durch ein Einfreiheitsgradsystem ist dabei nicht möglich, da die notwendige Berücksichtigung des kapazitiven Materialverhaltens durch die singuläre Ausdehnung einer Fläche in deren Normalenrichtung verhindert wird.

Basierend auf den Überlegungen zum Fehlerursprung und den Modellierungsrestriktionen wird das in Abb. 4.1 illustrierte Ersatzsystem definiert. Das Temperaturfeld der obersten Elementschicht unter der Lasteintragsfläche (orange), welche in Tiefenrichtung

⁴In der Präzisierung des Problems wurde bereits festgestellt, dass aufgrund der Bewegungsabbildung sowieso nur ein transienter Auswertungsschritt pro Belastungszustand durchzuführen ist. Dass darin auch die größten Fehler einer iEV-Lösung zu finden sind, begründet sich dadurch, dass die Sprungantwort – welche für steife DGL-Systeme aus superponierten, exponentiell abfallenden Modallösungen besteht – in diesem Abschnitt ihre höchste Krümmung, also sich stark verändernde Gradienten besitzt (vgl. dazu iEV Vorschrift in Gl. 3.11, S. 40).

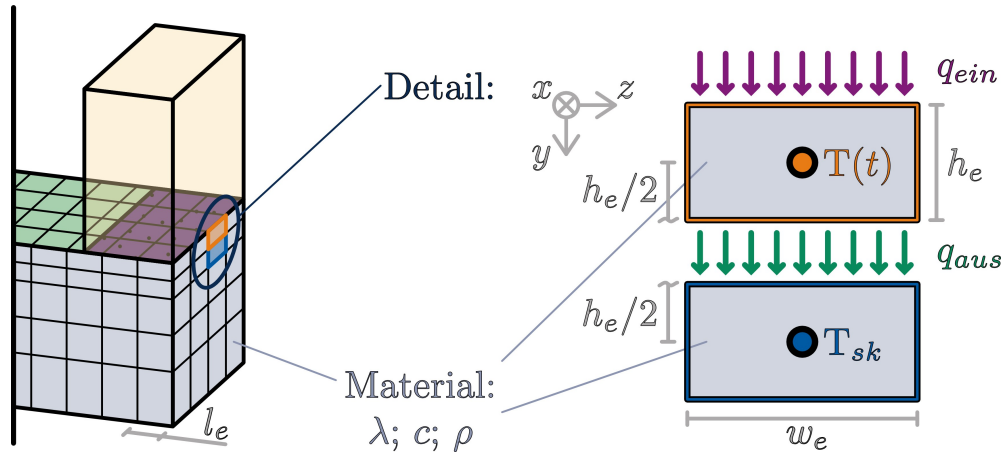


Abbildung 4.1: Ersatzsystem zur PTI-Abschätzung

eine Ausdehnung von h_e hat, wird auf den alleinig betrachteten Freiheitsgrad $T(t)$ kondensiert (*Lumped-Formulierung* (Index lp), siehe HAHN [35], STOUT [91]).

Der Schicht wird Wärme über die im betrachteten Lastzustand vorliegende Wärmestromdichte q_{ein} zugeführt. Gleichzeitig erfolgt aufgrund der körperinneren Wärmeleitung eine Weitergabe von q_{aus} an die nächsttieferliegende Elementschicht (blau), welche damit für die oberste Schicht als Wärmesenke (Index sk) mit entsprechend kondensierter Temperatur T_{sk} fungiert. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass beide relevante Schichten in Tiefenrichtung dieselbe Ausdehnung besitzen, wodurch auch deren Schwerpunkte – bzw. jene Punkte, auf welche lokal am sinnvollsten kondensiert wird – zueinander einen Abstand von h_e haben (siehe Abb. 4.1).

Weitere Wärmeströme in Spann- und Bewegungsrichtung liegen nicht vor, da sich die Lastverhältnisse in diesen Richtungen nicht ändern. Wird nun $T_{sk} = f(T(t))$ angenommen, so ergibt sich das angestrebte Einfreiheitsgradsystem für das im Folgenden die mathematische Beschreibung abgeleitet wird.

Mathematische Beschreibung Zur Herleitung der beschreibenden DGL des Ersatzsystems wird für das stellvertretende Element der obersten Schicht die Energiebilanz unter Einbezug des kapazitiven Verhaltens aufgestellt. Werden weiterhin die Wärmeströme über die Systemgrenzen durch die konkret anliegende Oberflächenlast $q_{ein} = q$ sowie die im *Lumped-System* diskret zu formulierende, innere Konduktion $q_{aus} = \alpha_{lp}(T(t) - T_{sk})$ ersetzt, so resultiert zunächst:

$$\rho c w_e l_e h_e \dot{T}(t) = w_e l_e q_{ein} - w_e l_e q_{aus} \quad \Rightarrow \quad \rho c h_e \dot{T}(t) = q - \alpha_{lp}(T(t) - T_{sk}) \quad (4.2)$$

Darin ist zu sehen, wie sich die Ausdehnungen des betrachteten Elements in Bewegungs- und Spannrichtung herauskürzen, womit für das nun eindimensionale Problem also lediglich die Ausdehnung in Tiefenrichtung h_e relevant ist.

Mit dem Wärmeübergangskoeffizienten α_{lp} ist in Gl. 4.2 ein materialabhängiger Parameter zur diskreten Abbildung der Wärmeleitung vertreten, welcher zunächst auf Basis der Wärmeleitfähigkeit λ des kontinuierlichen Ursprungsproblems bestimmt werden muss. Dafür wird angenommen, dass der Abstand h_e zwischen den Kondensationspunkten als plausibelste, effektive Länge zur Beschreibung der vorliegenden Wärmeleitungsverhältnisse heranzuziehen ist. Indem das Körpergebiet dieser Länge als Reihenschaltung von Flächen mit infinit kleinen Wärmeleitwerten aufgefasst wird, ergibt sich für α_{lp} :

$$\frac{1}{\alpha_{lp}} = \int_0^{h_e} \frac{1}{\lambda} dy \quad \Rightarrow \quad \alpha_{lp} = \frac{\lambda}{h_e} \quad (4.3)$$

Weiterhin wird für die Senkentemperatur eine funktionale Abhängigkeit $T_{sk} = f(T(t))$ eingeführt. Für eine erste Näherung wird sich dabei auf einen linearen Zusammenhang beschränkt, in dessen Proportionalitätsfaktor ein weiterer Parameter b zur Steuerung der Abschätzung eingeführt wird:

$$T_{sk}(t) = (1 - b) T(t) \quad \text{mit} \quad b \in (0; 1] \quad \text{wobei} \quad b \rightarrow \begin{cases} 1 & \dots \text{ konservativ} \\ 0 & \dots \text{ adiabate Wand} \end{cases} \quad (4.4)$$

Über b wird also direkt, die den Wärmeabfluss treibende Temperaturdifferenz (vgl. Gl. 4.2) und damit das Verhältnis zwischen ein- und austretender Energie beeinflusst. Mit geringerem b verzögert sich dabei das Erreichen des stationären Endzustands, in welchem die Wärmeströme über die Elementgrenzen betragsmäßig gleich sind. Die zu erwartende Lösung wird damit in der ersten Phase nach dem Lastsprung gestreckt und der Zeitraum bis zum Erreichen eines kritischen Unterschieds im Gradienten der Lösung, welcher bei einer Auswertung mittels iEV den Fehler bestimmt, steigt an. Der Parameter b steuert also, wie konservativ die Abschätzung ist. Mit $b = 1$ wird dabei die sicherste Aussage erhalten, welche allerdings auch deutlich von der Realität entfernt liegen kann. Im Gegensatz dazu wird durch $b = 0$ die Grenze zum nächsttieferliegenden Element als adiabate Wand modelliert und es kommt zu einer linearen und damit unbeschränkten Aufwärmung der obersten Schicht.

Durch Ersetzen von T_{sk} in Gl. 4.2 durch Gl. 4.4 und Beschreiben des Materials mittels der Temperaturleitfähigkeit κ (siehe Gl. 2.10, S. 20) ergibt sich das betrachtete Einfreiheitsgradsystem zu:

$$\dot{T}(t) + \frac{b}{h_e^2} \kappa T(t) = \frac{\kappa}{\lambda} \frac{1}{h_e} q \quad \text{mit} \quad T(t=0) = 0 \quad (4.5)$$

Es ist zu sehen, dass für den betrachteten Freiheitsgrad direkt die Nullanfangsbedingung als Ausgangszustand vorgegeben wird. Die Allgemeinheit wird dadurch nicht eingeschränkt, da Fälle mit anderer Ausgangssituation per entsprechend geeigneter, das Argument verschiebender Substitution auf das Problem in Gl. 4.5 zurückgeführt werden können.

4.2.2 Fehler der numerischen Berechnung

Da für das Ersatzsystem in Gl. 4.5 eine analytische Lösung gefunden werden kann, lässt sich der auftretende Fehler bei dessen Auswertung mittels iEV exakt durch Vergleich beider Lösungen quantifizieren. Die analytische Lösung $T_{ana}(\Delta t)$ der betrachteten DGL erster Ordnung ergibt sich aus homogener und partikulärer Lösung zu:

$$T_{ana}(\Delta t) = \frac{1}{b} \frac{h_e}{\lambda} q \left(1 - e^{-b\kappa/h_e^2 \Delta t} \right) \quad (4.6)$$

Weiterhin wird die numerische Lösung des Ersatzsystems erhalten, indem das iEV für den ersten Schritt des Lastzustands $L_{n=1}$ für eine beliebige Zeitschrittweite Δt angewandt wird. Die Konkretisierung der iEV-Vorschrift aus Gl. 3.11 (S. 40) liefert damit zunächst:

$$T_{L_1}(\Delta t) = T_{L_0} + \dot{T}_{L_1}(\Delta t) \cdot \Delta t \quad \text{mit} \quad T_{L_1}(\Delta t) = T_{iEV}(\Delta t) \quad \text{und} \quad T_{L_0} = T(t=0) \quad (4.7)$$

Der darin noch unbekannte Gradient $\dot{T}_{L_1}(\Delta t)$ wird direkt über die beschreibende DGL aus Gl. 4.5 bestimmt:

$$\dot{T}_{L_1}(\Delta t) = -\frac{b\kappa}{h_e^2} T_{L_1}(\Delta t) + \frac{\kappa}{\lambda} \frac{q}{h_e} \quad (4.8)$$

Einsetzen in Gl. 4.7 und etwas Umformen ergibt die numerische Lösung:

$$T_{iEV}(\Delta t) = q \frac{h_e \Delta t}{b\lambda \Delta t + c\rho h_e^2} \quad (4.9)$$

Als nächstes wird eine dimensionslose Zeitschrittweite $\Delta\tau$ auf Basis des exponentiellen Anteils der analytischen Lösung in Gl. 4.6 eingeführt:

$$\Delta\tau := \frac{b\kappa}{h_e^2} \Delta t \quad (4.10)$$

Die beiden Lösungen gehen damit in die folgenden Formen über (vgl. Gl. 4.6 und Gl. 4.9):

$$\frac{T_{ana}(\Delta\tau)}{q} = \frac{h_e}{b\lambda} (1 - e^{-\Delta\tau}) \quad \text{und} \quad \frac{T_{iEV}(\Delta\tau)}{q} = \frac{h_e}{b\lambda} \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau + 1} \quad (4.11)$$

Der interessierende, relative Fehler $E_{iEV}(\Delta\tau)$ der Anwendung des iEV's am Ersatzsystem stellt nun die Differenz beider Lösungen bezogen auf die exakte Lösung dar. Es ergibt sich:

$$E_{iEV}(\Delta\tau) := \frac{T_{ana}(\Delta\tau) - T_{iEV}(\Delta\tau)}{T_{ana}(\Delta\tau)} = 1 - \frac{\Delta\tau}{(1 + \Delta\tau)(1 - e^{-\Delta\tau})} \quad (4.12)$$

Dieser Zusammenhang ist in Abb. 4.2 links in Standarddarstellung illustriert. Es ist zu sehen, dass der Fehler zunächst vergleichsweise schnell bis zu einem Maximum (oranges Viereck) ansteigt und anschließend für größere τ (siehe die logarithmische Darstellung in Abb. 4.2 rechts) wieder auf vernachlässigbare Werte abfällt. Dies lässt sich mit Blick auf die kontinuierliche Lösung $T_{ana}(\Delta t) = f(e^{-\Delta t})$ (vgl. Gl. 4.6) dadurch begründen, dass der für die Lösung mittels iEV relevante Anstieg $\dot{T}_{L_1}(\Delta t)$ (siehe Gl. 4.7) mit linear steigender Zeitschrittweite im Betrag ebenfalls invers exponentiell abfällt.

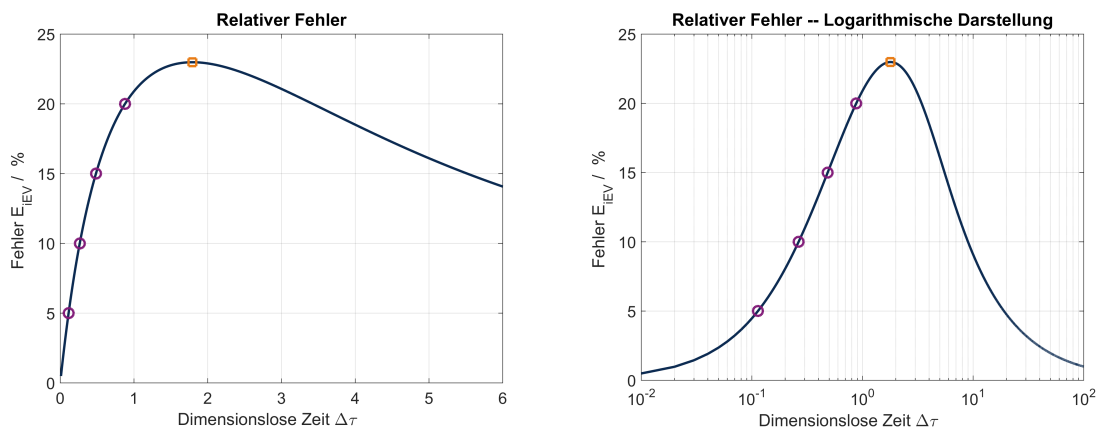


Abbildung 4.2: Fehler bei der numerischen Auswertung des Ersatzsystem

Das Maximum $E_{iEV|_{\max}}(\Delta\tau_{\max})$ lässt sich in Höhe und Zeitpunkt des Auftretens ausgehend von Gl. 4.12 direkt bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Delta\tau} E_{iEV}(\Delta\tau) &= \frac{e^{\Delta\tau} (\Delta\tau^2 + \Delta\tau - e^{\Delta\tau} + 1)}{(e^{\Delta\tau} - 1)^2 (t + 1)^2} \\ &\Leftrightarrow 0 \stackrel{!}{=} (\Delta\tau_{\max}^2 + \Delta\tau_{\max} - e^{\Delta\tau_{\max}} + 1) \\ &\Rightarrow E_{iEV|_{\max}}(\Delta\tau_{\max} = 1,79328) = 0,2298 \approx 23\% \quad (4.13) \end{aligned}$$

Es ist zu sehen, dass die Gleichung, durch welche $\Delta\tau_{\max}$ bestimmt wird, nichtlinear ist und deren Lösung daher numerisch – z. B. durch das Sekantenverfahren (siehe BRONSTEIN [19]) – erfolgen muss.

Eine gleichartige Vorgehensweise wird notwendig, um die maximal mögliche Zeitschrittweite zu einem vorgegebenen, erlaubten (Index *erl*) Fehler $E_{iEV|_{erl}} \in (0; E_{iEV|_{\max}}]$ zu bestimmen. Die implizite Vorschrift zur Berechnung der interessierenden $\Delta\tau_{erl}$ ergibt sich direkt aus Gl. 4.12 zu:

$$0 = (1 - E_{iEV|_{erl}}) (\Delta\tau_{erl} + 1) (1 - e^{\Delta\tau_{erl}}) - \Delta\tau_{erl} \quad \text{mit} \quad \Delta\tau_{erl} \stackrel{!}{\in} (0; \Delta\tau_{\max}] \quad (4.14)$$

Durch die Einschränkung der möglichen Lösung auf den Bereich vor dem Maximum wird sichergestellt, dass der erlaubte Fehler auch bei kürzeren Zeitschrittweiten $\Delta\tau < \Delta\tau_{erl}$ nicht überschritten wird und dass die gefundene Lösung eindeutig ist.

In Tab. 4.1 sind nun beispielhaft die zu den $E_{iEV|_{erl}} = k \cdot 5\%$ Fehlergrenzen (mit $k = 1 \dots 4$) gehörenden $\Delta\tau_{erl}$ aufgeführt. In Abb. 4.2 sind diese Punkte zudem violett hervorgehoben.

Tabelle 4.1: Dimensionslose Zeitschrittweiten zu ausgewählten Fehlergrenzen

$E_{iEV _{erl}}$	5%	10%	15%	20%
$\Delta\tau_{erl}$	0,1135	0,2646	0,4842	0,8782

Die zu einer erlaubten Fehlertoleranz gehörende, problemunabhängige Zeitschrittweite $\Delta\tau_{erl}$ lässt sich nun über die in Gl. 4.10 eingeführte Substitution auf das konkrete Ersatzproblem zurück übertragen. Die maximale Zeitschrittweite Δt_{erl} bei dessen Auswertung mit dem iEV ergibt sich damit zu:

$$\Delta t_{iEV} = \Delta t_{erl} = \frac{\Delta\tau_{erl}}{\kappa} \frac{h_e^2}{b} \quad (4.15)$$

Auf Basis der durchgeführten Abschätzung lässt sich also feststellen, dass die aufgrund der transienten Integration maximal mögliche Zeitschrittweite Δt_{iEV} ungefähr quadratisch mit der Elementausdehnung h_e in Tiefenrichtung ansteigt.

Die Abschätzung am Ersatzsystem zeigt, dass bei strukturvariablen Problemen letzten Endes durch die angestrebte örtliche Abbildungsgüte entschieden wird, ob prinzipiell mit groben Zeitschrittweiten gerechnet werden kann. Es kann qualitativ festgestellt werden, dass Probleme, bei denen $\Delta t_{iEV} > \Delta t_{\eta_G=1}$ gilt, durchaus möglich sind und diese dann eine eher grobe Ortsdiskretisierung nahe der potentiellen Lastzone $\Gamma_{s,\bar{l}}$ aufweisen. Vor allem wird dies in der Modellbildung von Systemen der Fall sein, welche auch abseits des Bewegungskontakts vergleichsweise komplex sind. In Kapitel 1 (S. 2) wurde dabei erläutert, dass die hier zu entwickelten Methoden speziell in derartig diskretisierten Problemen zum Einsatz kommen sollen (vgl. HEISEL [40]).

4.3 Vergleichende Analysen zum PTI-Einfluss

Generell sollte für ein konkretes Problem überprüft werden, ob eine Vernachlässigung des auftretenden PTI-Fehlers mit Blick auf eine akzeptable Fehlertoleranz gerechtfertigt ist und die Zeitschrittweitensteuerung damit auf Basis der Bewegung erfolgen kann. Dafür kann die vorgestellte Abschätzung herangezogen werden. Alternativ ist es möglich, den PTI-Einfluss am konkreten FE-Modell durch eine vergleichende Analyse von bewegten Testlastfällen zu quantifizieren. Im folgenden Abschnitt wird erläutert, wie dabei vorzugehen ist. Zunächst wird allerdings ein genauere Blick auf die in dieser Arbeit verwendeten Beispiel-FE-Modelle geworfen.

4.3.1 Das verwendete FE-Modell

Die Richtlinie R2 fordert die Unabhängigkeit der hier durchgeführten Untersuchungen und methodologischen Arbeiten von einer konkreten Ortsdiskretisierung. Trotz allem wird an diversen Stellen in dieser Arbeit ein FE-Modell verwendet; speziell um damit die Leistungsfähigkeit der entwickelten Korrekturmethode beim Einsatz in tatsächlichen Simulationen zu begutachten oder – wie in diesem Kapitel – um direkt einen Eindruck von der Auswirkung einer groben Zeitschrittweite zu erlangen. In diesem Unterabschnitt wird nun das in weiten Teilen dieser Arbeit verwendete FE-Modell beschrieben, sodass die präsentierten Ergebnisse – welche damit berechnet wurden – eingeordnet und ggf. reproduziert werden können.

Das FE-Modell, welches für die hier benötigten Zwecke aus dem gegebenen Beispielproblem (siehe Abb. 3.1, S. 29) abgeleitet wurde, ist in Abb. 4.3 illustriert. Darin ist zu sehen, welche konkreten Werte für die geometrischen Ausdehnungen der beteiligten Körper festgelegt wurden, wobei hier explizit die Abmessung des bewegten Körpers in Bewegungsrichtung mit $l_b = 1\text{ m}$ hervorgehoben wird. Die entsprechende Ausdehnung des stehenden Körpers wird durch den angegebenen $l_s = f(s(t))$ -Zusammenhang jeweils gleich dem maximalen Bewegungsbereich inkl. der Zugabe für Ω_b gewählt. Dies ist dadurch begründet, dass verschiedene der nachfolgenden Analysen unterschiedliche Bereiche einer Bewegung betrachten, sodass jene Bereiche außerhalb des aktuellen Fokus verkürzt werden können. Weiterhin wird speziell für Ω_s orthogonal zur Bewegungsrichtung ein quadratischer Querschnitt angenommen, um so die Regelmäßigkeit der darin umgesetzten Ortsdiskretisierung zu erhöhen.

Das in der Berechnung verwendete Material wird durch die in Abb. 4.3 aufgeführten Parameterwerte konkretisiert. Diese sind aus den realen thermischen Materialeigenschaften von *Stahl* gerundet (SKOLAUT [89]), weshalb das verwendete Material im Folgenden auch als *idealiserter Stahl* bezeichnet wird.

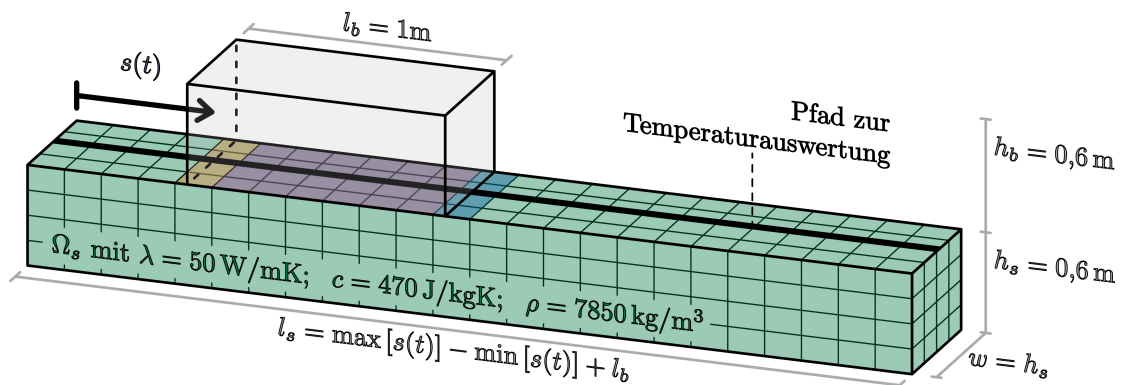


Abbildung 4.3: Illustration des verwendeten FE-Modells

Bzgl. der örtlichen Diskretisierung⁵ wird zunächst hervorgehoben, dass das FE-Modell – genau wie das abgebildete Lastprofil – im Rahmen der Frage nach der verwendeten Zeitdiskretisierung lediglich einen Aspekt der gegebenen Ausgangssituation darstellt. Da

⁵In Abb. 4.3 wurde das FE-Netz des bewegten Körpers ausgespart, da dessen Ergebnissen in der Arbeit keine Relevanz zukommen wird. Wenn überhaupt, wird Ω_b in den durchgeführten Simulation mit eingebunden, um als Indikator für die aktuelle Position der bewegten Wärmequelle zu dienen. Dazu ist hier bereits zu erwähnen, dass die Untersuchungen zur RUCC-Frage (Fehler F3b, S. 50) vollständig analytisch erfolgen, sodass dafür kein ortsdiskretisiertes Problem als gegeben benötigt wird.

von Interesse ist, wie sich die Ergebnisse einer Simulation bei der Verwendung von langen statt kurzen Zeitschrittweiten ändern, ist es für die Inhalte dieser Arbeit irrelevant, ob und in welchem Maße die gewählte Ortsdiskretisierung das untersuchte Beispielproblem realistisch abbildet (vgl. auch Richtlinie R2, S. 51). Für eine einfache Beschreibbarkeit der FE-Netze werden daher immer Elemente mit quadratischer Geometrie in Spann-Tiefen-Ebene (y - z -Ebene, vgl. Abb. 3.1, S.29) verwendet, deren Ausdehnungen aus einer ganzzahligen Teilung der Körperausdehnung w mit dem Divisor $F_e \in \mathbb{N}$ resultieren ($F_e = 4$ in Abb. 4.3). Insofern es nicht explizit abweichend angegeben wird, erfolgt die Wahl der Elementausdehnung in Bewegungsrichtung standardmäßig zu $l_e = h_e$, womit die Elemente eine kubische Form der Kantenlänge w/F_e haben.

Abb. 4.3 zeigt außerdem, dass die Auswertung eines Temperaturverlaufs in Bewegungsrichtung immer direkt in der potentiellen Lastzone und darin wiederum mittig entlang eines Pfades erfolgt⁶. Zudem ist nochmals das in Abb. 3.3 (S. 40) adressierte Problem der Lastskalierung unter Front und Heck der bewegten Wärmequelle illustriert.

Fehlerabschätzung am Vergleichssystem Mit der Festlegung eines Materials für das Beispielproblem lässt sich nun ein konkreter Eindruck von den Ergebnissen der im vorherigen Abschnitt vorgestellten, zu einem erlaubten Fehler gehörenden Zeitschrittweitschätzung gewinnen. Gleichung 4.15 geht damit für einen beispielhaften Maximalfehler von $E_{iEV|erl} = 5\%$ in den folgenden Zusammenhang über (vgl. Gl. 2.10 (S. 20), Tab. 4.1, und Abb. 4.3):

$$\Delta t_{iEV} = \frac{0,1135}{\left(\frac{50}{470 \cdot 7850}\right) \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} \frac{h_e^2}{b} = 8375 \frac{\text{s}}{\text{m}^2} \frac{h_e^2}{b} \quad (4.16)$$

Dieser ist in Abb. 4.4 links für drei verschiedene Konservativitätsstufen b dargestellt. Da es sich um einen exponentiellen Zusammenhang handelt, dessen kritische Informationen in dem betrachteten Quadranten des Koordinatensystems tendenziell südwestlich zu finden sind⁷, ist die in Abb. 4.4 rechts gegebene, doppeltlogarithmische Darstellung vorteilhafter.

⁶Bei den in dieser Arbeit präsentierten Knotentemperaturen auf den jeweiligen Auswertepfaden werden die Ergebnisse an den Mittelknoten der quadratischen Elemente (vgl. Anhang A.1, S. 156) weggelassen. In Anhang A.2 (S. 158) sind die Hintergründe dieser Entscheidung etwas detaillierter erläutert.

⁷Damit ist gemeint, dass die für die Anwendung einer groben Zeitschrittweite eigentlich interessierende Aussage, ob das abgeschätzte $t_{iEV} > t_{\eta=1}$ ist, eher im Falle kleinerer h_e negativ zu beantworten ist.

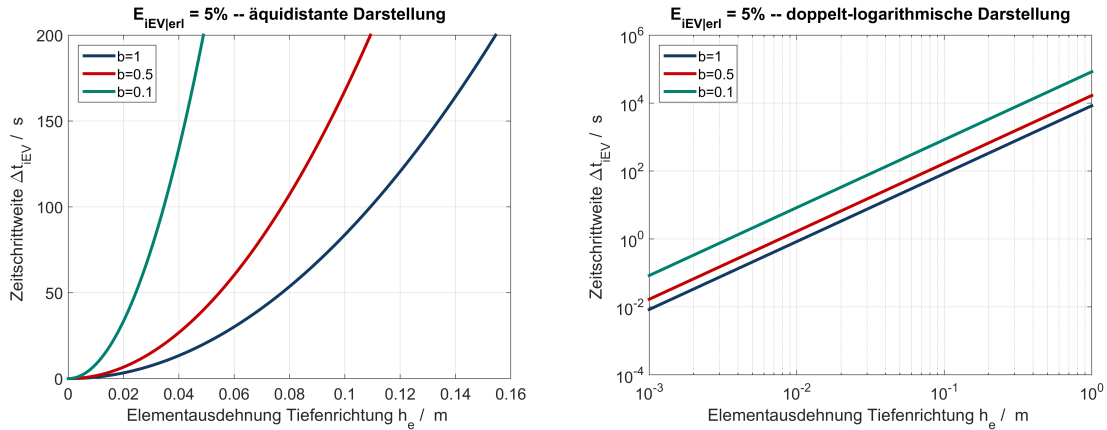


Abbildung 4.4: Abschätzung der maximalen Zeitschrittweiten

Für die in Abb. 4.3 dargestellte Diskretisierung mit $h_e = 0,15$ m zeigt bereits Abb. 4.4 links, dass selbst im Fall der konservativsten Abschätzung Zeitschrittweiten bis $\Delta t = 180$ s eine Berechnung des Systems ohne signifikante PTI-Fehler erlauben. Wird das betrachtete System allerdings im Maßstab 2:15 geschrumpft, sodass $h_e = 2 \cdot 10^{-2}$ m ist, so ist in Abb. 4.4 rechts abzulesen, dass dann im konservativsten Fall nur noch vergleichsweise geringe Zeitschrittweiten bis $\Delta t_{iEV} \approx 1$ s zur Berechnung möglich wären.

Prinzipiell ist zu sagen, dass in relativ kleinen Problemen zumeist auch bewegte Wärmequellen mit eher geringerer Ausdehnung in Bewegungsrichtung zu finden sind. Dadurch verringert sich ebenfalls das zugehörige $\Delta t_{\eta=1}$ und bestimmt damit erfahrungsgemäß weiterhin die maximal mögliche Zeitschrittweite. Da es sich hierbei allerdings um eine pauschale Beobachtung und keine deduzierte Gesetzmäßigkeit handelt, ist der Einzelfall immer individuell zu untersuchen. Für eine große Anzahl von Problemen wird aber die intuitive Vermutung bestätigt, dass, aufgrund der bekannten Trägheit des thermischen Felds im Falle realistischer Materialien, eine Berechnung mit groben, aus einer bewegten Last resultierenden Zeitschrittweiten legitim ist.

4.3.2 Vergleichende Analysen

Neben der Abschätzung basierend auf der Elementtiefe unter der potentiellen Lastzone, kann der PTI-Einfluss für ein konkretes FE-Modell auch direkt mittels eines Vergleichs zwischen der Referenz- und einer $\Delta t_{\eta=1}$ -Simulation eines bewegten Testlastfalls eingeschätzt werden.

Bewegter Testlastfall Der grundlegende Anspruch an den Testfall ist es, dass der interessierende PTI-Fehler von den anderen möglichen Fehlerursachen in Simulationen mit grober Zeitschrittweite isoliert auftritt und dadurch individuell begutachtet werden kann. Mit Blick auf die verbleibenden Fehler sind dazu von den Testsimulationen jeweils die folgenden Punkte zu erfüllen:

- Kinematisch bedingte Fehlereinträge (Fehler F2) treten nur auf, wenn die Bewegung in der Simulation mit einem $\eta \notin \mathbb{N}$ abgebildet wird. Eine ausführliche Erläuterung dieser Aussage zugrunde liegenden Mechanismus ist in Abschnitt 5.1 (S. 74) zu finden.

Trivialerweise ist direkt eine Untersuchung mit $\eta_G = 1$ durchzuführen. Für den Fall, dass signifikante Ergebnisdefekte festzustellen sind, ist im Weiteren durch zusätzliche Testsimulationen mit $(\eta_G > 1) \wedge (\eta_G \in \mathbb{N})$ die maximal mögliche Zeitdiskretisierung mit $\Delta t_{\eta_G} < \Delta t_{iEV}$ zu identifizieren.

- Fehler durch eine diskrete Auswertung des abgebildeten, bewegten Lastprofils (Fehler F3a) äußern sich nicht, wenn $s(t) = v_K \cdot t$ mit $v_K = konst.$ und $q_N(t) = q_K = konst.$ vorliegen. Dabei wird in Abschnitt 6.1 (S. 90) detailliert ausgeführt, weshalb im Falle gleichmäßiger Bewegungen und konstanter Wärmestromdichten keine fehlerhaften Energieeinträge zu erwarten sind.

Die Bewegungsgeschwindigkeit v_K des Testlastfalls bestimmt für diesen die resultierende, grobe Zeitschrittweite t_{η_G} und sollte daher entsprechend der maximalen Zeitschrittweite gewählt werden, welche durch das eigentlich abzubildende Bewegungsprofil und der angestrebten Zeitdiskretisierung zu erwarten ist. Im Gegensatz dazu kann q_K in den Vergleichsanalysen vollständig beliebig gewählt werden.

- Der beeinträchtigende Einfluss einer selten aktualisierten Wärmeleitung durch den Kontakt zwischen stehenden und bewegten Körper (Fehler F3b) kann trivialerweise durch $\Omega_b = \emptyset$ vermieden werden. Damit liegt lediglich das Problem einer bewegten Last an $\Omega_s \rightarrow \Omega$ vor.

Für die Vergleichsanalyse an dem hier verwendeten Beispiel-FE-Modell wird nun auf Basis dieser Punkte das in Abb. 4.5 präsentierte, bewegte Testlastprofil verwendet. Es ist zu sehen, dass sich die bewegte Last alternierend zwischen zwei, 9 m ($= 9 \cdot l_b$) entfernten Endpunkten bewegt, sodass entsprechend Abb. 4.3 für Ω_s ein $l_s = 10$ m festgelegt wird. Zudem wird beliebig $v_K = 1$ m/s gewählt, da sich die Geschwindigkeit

an keinem Originalbewegungsprofil zu orientieren hat und so $\Delta t_{\eta_G=1} = 1$ s resultiert. Die Höhe der Wärmestromdichte wurde auf $q_N(t) = 10000 \text{ W/m}^2$ festgelegt, um in den Ergebnissen einen Temperaturanstieg in der Größenordnung von $10^{-1} \dots 10^0$ K zu erhalten.

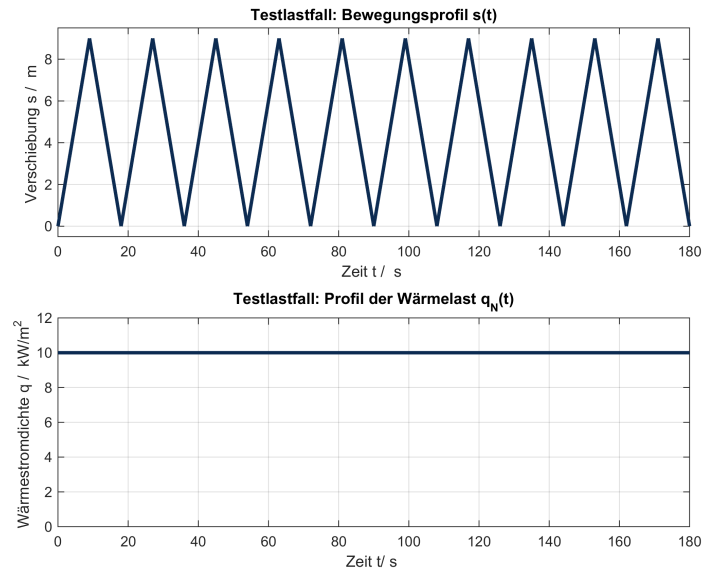


Abbildung 4.5: Profil des bewegten Testlastfalls

Weiterhin wird unter einem Bewegungszyklus im Folgenden die Fahrt von einem Endpunkt der Bewegung zum anderen und wieder zurück verstanden. Das Testlastprofil wird dabei in Abb. 4.5 mit einer Länge von zehn Bewegungszyklen vergleichsweise lang⁸ definiert, mit dem Ziel, ebenfalls die Entwicklung der Ergebnisgüte mit fortschreitender Bewegungsdauer zu examinieren.

Ergebnisse der vergleichenden Analyse Die hier präsentierten Vergleichsanalysen dienen primär dem Zweck, die oft gegebene Vernachlässigbarkeit des PTI-Fehlers nochmals zu belegen. Daneben sollen weitere, interessante Eigenheiten der zeitlich grob diskretisierten, strukturvariablen Simulation adressiert und erläutert werden.

In den einzelnen Analysen werden jeweils die Ergebnisse von Simulationen mit $\eta_G = 1$ und Referenzsimulationen mit $\eta_R = 10$ gegenübergestellt. Die berechneten Tempera-

⁸Erfahrungsgemäß reicht die Berechnung deutlich weniger Zyklen aus, um den Umfang des PTI-Fehlers verlässlich einschätzen zu können. Auf die Empfehlung einer konkreten Anzahl wird hier allerdings verzichtet. Es ist erneut für jedes Problem individuell zu entscheiden.

turen werden am Ende der transienten Berechnung des gegebenen Bewegungsprofils entlang des in Abb. 4.3 illustrierten Pfades ausgewertet und über dem Ort aufgetragen. Da $\bar{T}_{\Omega_s}(t = 0) = 0$ als Anfangszustand definiert wurde, sind Erwärmung und Absoluttemperatur identisch.

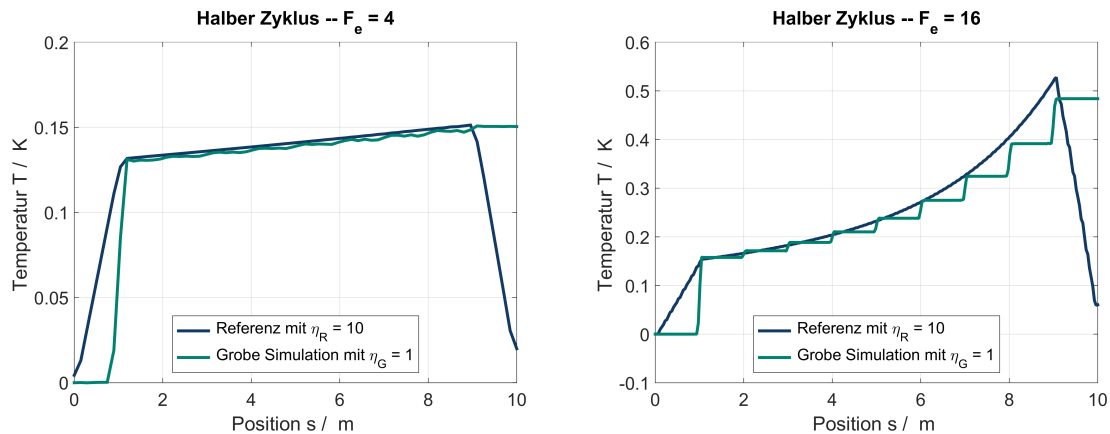


Abbildung 4.6: PTI-Verhalten bei unterschiedlich feiner Ortsdiskretisierung

Zunächst werden zwei Vergleichsanalysen durchgeführt, in denen mit $t = [0; 9\text{s}]$ lediglich ein halber Zyklus des in Abb. 4.5 gegebenen Bewegungsprofils abgebildet wird. Alle Bereiche der potentiellen Lastzone $\Gamma_{s,\bar{i}}$ werden darin nur einmal belastet, wodurch die Unterschiede, wie sich die Körpererwärmung im Falle grob oder fein diskretisierter Überfahrten herausbildet, direkt an den in Abb. 4.6 präsentierten Ergebnissen zu beobachten sind. In den groben Simulationen (grün) bilden sich aufgrund der diskreten Umsetzung der Verschiebung deutliche Unstetigkeiten im Temperaturverlauf heraus. Zudem lässt sich im Vergleich zur Referenz (blau) tendenziell eine geringere Erwärmung in den groben Simulationen beobachten. Die Verwendung einer groben Zeitschrittweite resultiert also auch hier (vgl. Gl. 4.12) in der erwarteten, thermischen Versteifung des Problems.

Weiterhin ergibt sich beim kontinuierlichen Ein-/Ausfahren in/aus einen Endpunkt der Bewegung ein linear abfallendes Temperaturprofil, welches innerhalb einer groben Simulation nur in der durch die Wegschrittweite gegebenen Auflösung abbildbar ist. Außerdem wird aufgrund der Kinematik einer diskreten Bewegung (vgl. Abb. 3.2, S. 38) bei der Ein- bzw. Ausfahrt neben den Endpunkten jeweils keine bzw. die doppelte Menge der Referenzenergie eingetragen, was in Abb. 4.6 deutlich an der resultierenden Temperatur der groben Simulation in den betroffenen Schienenbereichen $s = [0; 1\text{m}]$

und $s = [9 \text{ m}; 10 \text{ m}]$ erkennbar ist. Im Fall einer Umkehr, heben sich diese Fehleinträge allerdings gegenseitig auf und die korrekte Energie wird eingetragen.

Primär soll mit den ersten beiden Vergleichsanalysen allerdings der Einfluss der für den PTI-Fehler als kritisch identifizierten Netzweite der Ortsdiskretisierung untersucht werden. In der ersten Analyse (Abb. 4.6 links) wurde die vergleichsweise grobe, in Abb. 4.3 illustrierte Ortsdiskretisierung mit $F_e = 4$ also $h_e = 0,15 \text{ m}$ umgesetzt. Die Ergebnisse zeigen, dass die Verwendung grober Zeitschrittweiten in den Bereichen abseits der Endpunkte zu lediglich vernachlässigbaren Abweichungen in der berechneten Temperatur führt.

Ähnlich gestaltet es sich im Fall einer, für das betrachtete Problem bereits sehr feinen Ortsdiskretisierung mit $F_e = 16$ also $h_e = 37,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Das sich real ergebende Temperaturfeld wird damit deutlich exakter abgebildet, was mit Blick auf die Theorie der FEM (siehe Gl. 2.17, S. 25) bedeutet, dass durch die Ortsdiskretisierung weniger tief in Richtung des Körperinneren gemittelt wird. In den resultierenden Ergebnissen (Abb. 4.6 rechts) ist nun zu sehen, dass speziell in Bereichen nahe dem oberen Endpunkts deutliche Abweichungen zwischen den verglichenen Temperaturen auftreten. Die Belastung dieser Bereiche liegt zum Zeitpunkt der Auswertung bei $t = 9 \text{ s}$ vergleichsweise kurz zurück, sodass die eingebrachte Wärme bisher weniger Zeit hatte ins Körperinnere hinein zu diffundieren. In Kombination mit der bei η_G generell auftretenden Problemversteifung, lassen sich damit die beobachteten Abweichungen erklären. Entsprechend bestätigt die Betrachtung der Bereiche nahe dem Anfangspunkt der Bewegung, dass bei länger wirkender Diffusion beide Analysen wieder die ungefähr gleiche Temperatur ergeben. Ein wirklich relevanter, durch eine grobe Zeitdiskretisierung induzierter PTI-Fehler ist also prinzipiell auch für diese feine Diskretisierung nicht feststellbar.

Mittels vier weiteren Analysen, deren Ergebnisse in Abb. 4.7 zusammengefasst sind, wird nun untersucht, inwiefern sich die Ergebnisse im Fall längerer Bewegungsprofile entwickeln. Dazu wird von Testlastfall in Abb. 4.5 entweder ein vollständiger Zyklus mit $t = [0; 18 \text{ s}]$ (obere Zeile) oder alle zehn Zyklen mit $t = [0; 180 \text{ s}]$ (untere Zeile) in den Simulationen abgebildet. Zusätzlich werden erneut jeweils zwei unterschiedlich feine Ortsdiskretisierungen mit $F_e = 4$ (linke Spalte) und $F_e = 8$ (rechte Spalte) umgesetzt. Ein kurzer Blick auf die Ergebnisse lässt bereits erkennen, dass sich die in den einmaligen Überfahrten identifizierten Abweichungen (vgl. Abb. 4.6) im Fall längerer Bewegungsverläufe nicht über inakzeptable Grenzen hinaus verstärken und die festgestellte Vernachlässigbarkeit des PTI-Fehlers somit bestehen bleibt.

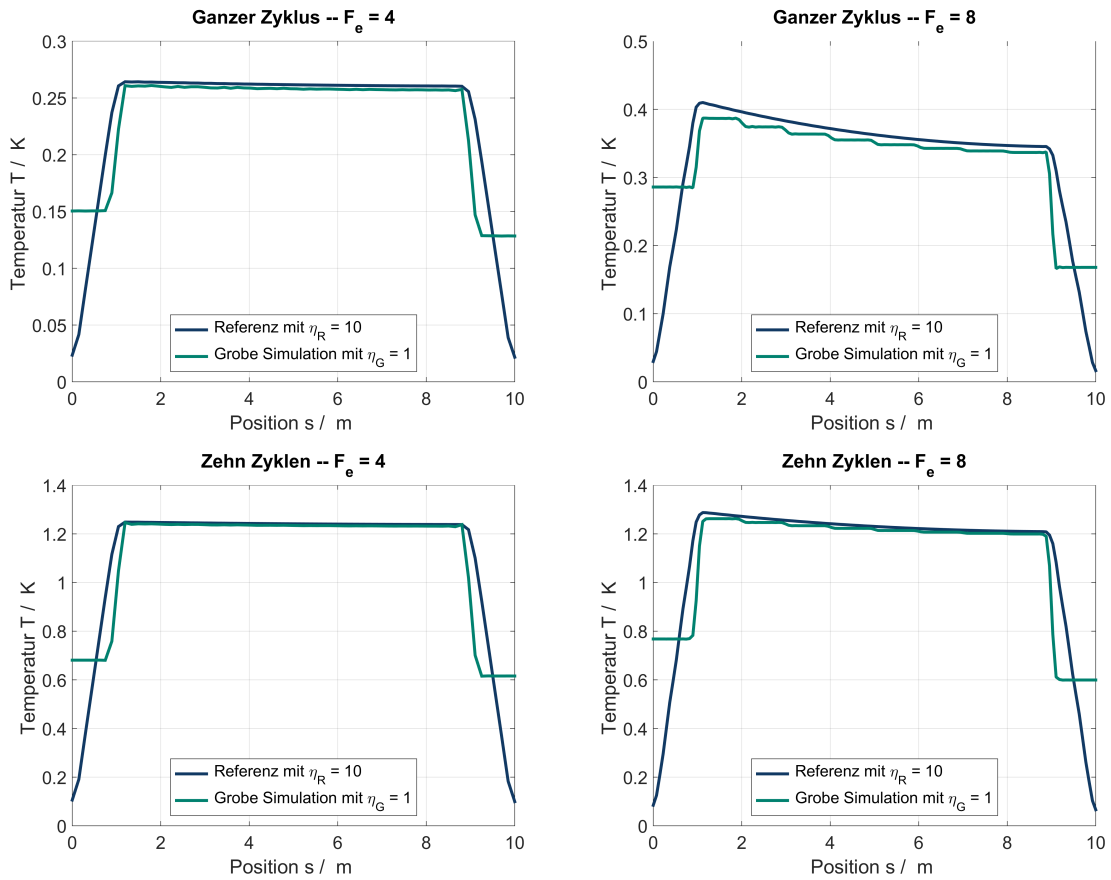


Abbildung 4.7: Einfluss des PTI-Fehlers in längeren Simulationen

Im Vergleich der beiden Zeilen von Abb. 4.7 lässt sich komplementär sogar eine deutliche Verbesserung in der Abbildungsgüte der groben Simulation gegenüber den jeweiligen Referenzen beobachten. In den Ergebnissen des grob mit $F_e = 4$ ortsdiskretisierten Systems (linke Spalte) verschwindet die nach einem Zyklus (oben) noch zu sehende, sehr geringe Differenz eigentlich vollständig nach der Simulation der zehn Zyklen (unten) und lediglich in den Bereichen neben den Endpunkten verbleibt der methodisch bedingte Unterschied in den Temperaturverläufen. Dasselbe Verhalten zeigt sich für das feiner vernetzte System mit $F_e = 8$ (rechte Spalte), in welchem die Unterschiede relativ zur Gesamterwärmung ebenfalls deutlich mit der Länge der Simulation abnehmen. Die Abweichung einer η_G -Simulation gegenüber der Referenz stellt also hauptsächlich einen zeitlich lokalen Defekt in der örtlichen Abbildung des Temperaturprofils dar. Dadurch, dass die absolute Höhe des Defekts unverändert bleibt und dieser außerdem einer substantiellen, aus der eingetragenen Energie resultierenden

Erwärmung überlagert ist, lässt dessen Relevanz mit der Länge der Simulation nach. Dieser Eindruck bestätigt sich nochmals beim Vergleichen der unteren Zeile in Abb. 4.7, in der sich erkennen lässt, dass im Fall längerer Bewegungsprofile die berechneten Erwärmungen dem gleichen Wert von $T \approx 1,25 \text{ K}$ zustreben und das, obwohl eine unterschiedlich feine Ortsdiskretisierung vorliegt (vgl. dazu Abb. 4.6 und Abb. 4.7 obere Zeile).

5 Fehleinträge aufgrund der diskreten Kinematik

Das folgenden Kapitel¹ widmet sich der Analyse und Korrektur jener Fehleinträge, welche aus der speziellen Kinematik einer diskret ausgeführten Bewegung resultieren und in dieser Arbeit als BD-Fehler bezeichnet werden. Beim Betrachten des Temperaturfelds der mit η_G -diskretisierten Simulation in Abb. 3.4 (S. 43) ist deutlich das wellenförmige Temperaturprofil der Lösung zu erkennen. Da dieses alternierende Auftreten von Temperaturbeulen und -dellen das charakteristische Resultat dieser speziellen Fehlerquelle darstellt, wurden die Anfangsbuchstaben der entsprechenden englischen Begriffe *bump* und *dent* zur Bezeichnung der Fehlerquelle herangezogen.

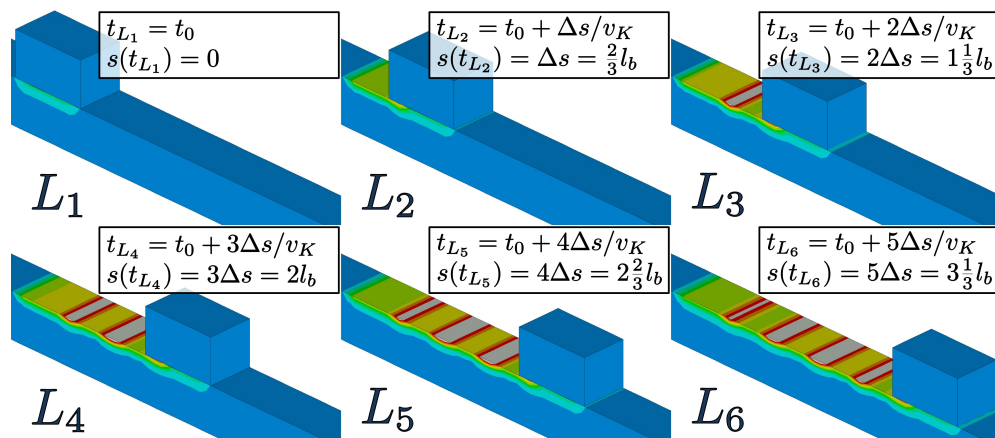


Abbildung 5.1: Bilderserie einer diskreten Bewegung mit $\eta = 1,5$

In Abb. 5.1 ist nun das Herausbilden der Beulen und Dellen während der strukturvariablen Simulation mit $\eta_G = 1,5$ nochmals etwas anschaulicher anhand einer Bilderserie mit den Lösungen der ersten sechs Lastschritte der Simulation dargestellt. Bei genauerer Betrachtung lässt sich erkennen, dass sich die Temperaturbeulen – also jene Bereiche,

¹Ein Großteil der in diesem Kapitel präsentierten Ausführungen wurden bereits in ähnlicher Form als eigenständige Publikation in PARTZSCH [76] veröffentlicht.

in denen sich Ω_s bei η_G mehr erwärmt, als in der kontinuierlichen Referenz – immer dort herausbilden, wo sich im vorhergehenden Lastschritt das Heck der bewegten Wärmequelle befunden hat.

In diesem Kapitel wird daher zunächst ein genauerer Blick auf die positionellen Verhältnisse bei Anwendung der diskreten Verschiebungen geworfen, um damit die konkrete Ursache des BD-Fehlers zu identifizieren. Dabei wird sich herausstellen, dass derartige BD-Fehler in der Simulation einer realen Bewegung prinzipbedingt nicht vermieden werden können und sich dadurch neue Anforderungen an die transiente Schrittweitensteuerung ergeben. Im Vergleich zu einer Alternative wird im Weiteren dargelegt, warum das in Gl. 3.13 (S. 41) gewählte Vorgehen bereits ohne weitere Korrektur die Auswirkungen des BD-Fehlers mindert und wie die Schrittweiten für das konkret gegebene Bewegungsprofil $s(t)$ dann tatsächlich zu bestimmen sind. Anschließend werden die auftretenden Beulen- und Dellenbereiche zunächst vollständig mittels analytischer Überlegungen beschrieben und das eigentliche Vorgehen in der Korrektur wird abgeleitet. Einer Aufbereitung zur Umsetzung in Ortsdiskreten Systemen folgt zuletzt die numerische Validierung der entwickelten Methode an einigen Beispielen.

5.1 Diskrete Umsetzung einer realen Bewegung

Liegt ein allgemeines Bewegungsprofil ohne Stillstände vor (vgl. Gl. 3.1, S. 32), so lässt sich dieses immer als eine Aneinanderreihung einzelner Abschnitte auffassen, in denen sich jeweils von einem Anfangspunkt (Index A) zu einem Endpunkt (Index E) bewegt wird:

$$t \in [t_A; t_E] \quad \text{mit} \quad t_A < t_E \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} s_A \\ s_E \end{pmatrix} = s \left(t = \begin{pmatrix} t_A \\ t_E \end{pmatrix} \right) \quad (5.1)$$

In Abb. 5.2 ist nun illustriert, wie die Strecke zwischen s_A und s_E mittels diskreten Verschiebungen und bei der Verwendung unterschiedlicher Fahrteilzahlen η durch n_L Lastschritte L_i ($i = 1 \dots n_L$) überwunden wird. Darin wird durch die farbigen Balken schematisch dargestellt, wo sich die bewegte Wärmequelle zu den jeweiligen Lastschritten befindet. Diese Darstellungsform wird hier und in den folgenden Kapiteln noch oft verwendet, um das bewegte und damit durch die Zeitabhängigkeit prinzipiell dreidimensionale Problem zu veranschaulichen.

Abb. 5.2 unten beinhaltet zu den darüber illustrierten Simulationen die zugehörigen, resultierenden Temperaturfelder nach der Überfahrt. Darin sowie in den weiteren Analy-

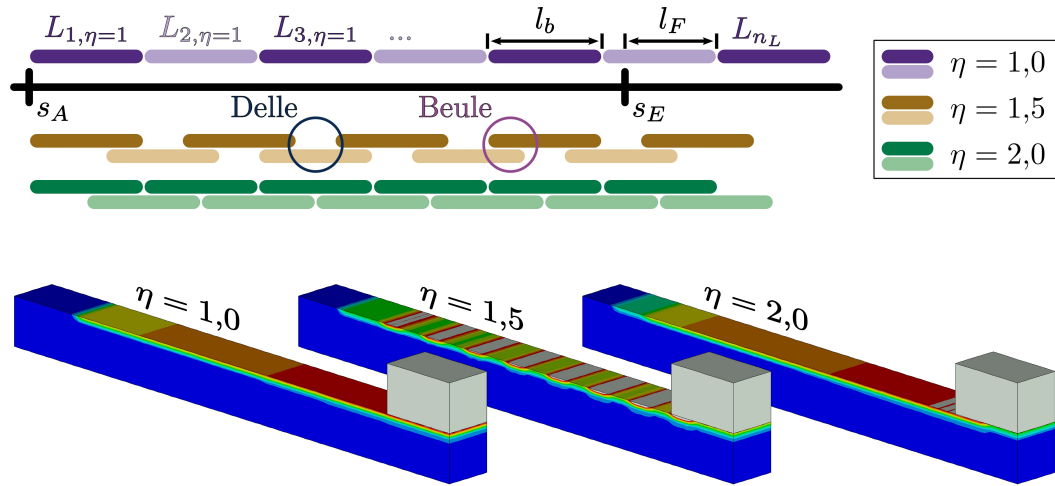


Abbildung 5.2: Diskrete Bewegungen mit unterschiedlichen Fahrteilzahlen η

sen dieses Kapitels wird erneut ein konstantes Lastprofil mit $[s(t) = v_K \cdot t; q(t) = q_K]$ verwendet, um so den BD-Fehler von den Problemen durch seltene Auswertung der Last (RUMHI-Fehler F3a) zu isolieren. Die Gültigkeit der zur BD-Problematik erarbeiteten Erkenntnisse bzgl. der speziellen Kinematik diskreter Bewegungen wird dadurch nicht beeinträchtigt.

Ursache des BD-Fehlers Eine Analyse der unterschiedlichen Verfahrensschaubilder in Abb. 5.2 hinsichtlich der Bedeckung von Ω_s durch die stückweise verschobene Last zeigt nun, dass bei Simulationen mit $\eta \in \mathbb{N}$ der gesamte überfahrene Bereich gleich oft – und zwar immer η -mal – belastet wird. Als Resultat dieses gleichmäßigen Wärmeeintrags ergibt sich in den zugehörigen Ergebnissen ($\eta = 1$ und $\eta = 2$ in Abb. 5.2 unten) ein uniformes Temperaturfeld, welches so auch bei einer kontinuierlichen Bewegung zu erwarten wäre und das damit entsprechend der Analysen in Kapitel 4 auch nahezu korrekt ist.

Dementgegen ist für die Simulation mit $\eta = 1,5$ festzustellen, dass sich auf Ω_b Bereiche abwechseln, welche während der diskreten Überfahrt unterschiedlich oft ein Teil der zu den L_i jeweils aktuellen Lastzone $\Gamma_l(t_{L_i})$ sind. Dies ist dadurch begründet, dass die Länge der bewegten Wärmequelle l_b kein ganzzahliges Vielfaches der Wegschrittweite $\Delta s(\eta = 1,5) = \frac{2}{3} l_b$ (siehe Gl. 3.14, S. 41) ist. Da Zeitschrittweiten und Wärmelasten konstant sind (vgl. das umgesetzte Lastprofil $[v_K \cdot t; q_K]$), kommt es dementsprechend zu einem ungleichförmigen Eintrag der durch das Lastprofil bereitgestellten Wärme und in Konsequenz zu dem bei $\eta = 1,5$ beobachtbaren, BD-beeinträchtigten Temperaturfeld.

Es ist leicht zu erkennen, dass das bei $\eta = 1,5$ beobachtete Verhalten auf jegliche $\eta \notin \mathbb{N}$ zutrifft und bei derart diskretisierten Simulationen ebenfalls zu BD-fehlerbehafteten Ergebnissen führt. Letzten Endes ist damit bereits die Ursache der BD-Fehler und wann mit deren Auftreten zu rechnen ist, vollständig erläutert². Wie in Abb. 5.2 oben außerdem durch den blauen bzw. roten Kreis hervorgehoben wurde, bilden sich in den Bereichen mit weniger Wärmeeintrag trivialerweise die Temperaturdellen aus und umgekehrt. Weiterhin ist anzumerken, dass der Gesamtwärmeeintrag in Ω_s durch die Zeitdiskretisierung nicht beeinflusst wird, sondern es sich bei dem BD-Fehler um ein Verteilungsproblem zwischen Dellen und Beulen handelt.

Lastschrittweite in realen Bewegungen Zur Vermeidung der BD-Fehler ist es nun ein naheliegender Ansatz, für die strukturvariablen Simulationen immer ein Zeitdiskretisierung mit $\eta \in \mathbb{N}$ zu fordern. An den Verfahrensschaubildern in Abb. 5.2 oben ist allerdings zu erkennen, dass im Fall konkret vorgegebener Fahrteilzahlen eine punktgenaues Erreichen des Endpunkts s_E nicht möglich ist und der eigentlich abzubildende Bewegungsabschnitt immer um eine gewisse *Fehlstrecke* l_F überfahren³ wird. Es ist festzustellen, dass sich die Forderungen nach einer korrekten Bewegungsabbildung und einer Vermeidung des BD-Fehlers einander widersprechen und nur gleichzeitig erfüllbar sind, wenn folgendes gilt:

$$\frac{|s_E - s_A|}{l_b/\eta} = n_L \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad \eta \in \mathbb{N} \quad (5.2)$$

Dadurch wird der triviale Umstand beschrieben, dass in einer transienten Simulation lediglich vollständige Lastschritte möglich sind, womit der aktuelle Bewegungsabschnitt also in einer natürlichen Anzahl n_L an Schritten zu überwinden ist.

Für die Simulation einer realen Bewegung ist allerdings davon auszugehen, dass die in Gl. 5.2 aufgeführten Bedingungen im Allgemeinen nicht gleichzeitig erfüllt sind. Für die weiteren Überlegungen wird deshalb die Forderung nach einer korrekten Bewegungsabbildung priorisiert, da diese wesentlich für das eigentliche Ziel der Abbildung des kontinuierlichen Falls trotz grober Zeitdiskretisierung ist. Damit wird es notwendig,

²Dies begründet auch, warum für den Testlastfall in 4.3.2 die Simulation mit $\eta \in \mathbb{N}$ zur Isolation des PTI-Fehlers gefordert wurde

³Dabei wird angenommen, dass die Überwindung eines Bewegungsabschnitts erst abgeschlossen ist, wenn der Endpunkt s_E mindestens erreicht wurde. Prinzipiell kann zur Umsetzung konkreter Fahrteilzahlen zwar auch eine abweichende Implementierung gewählt werden, das hier adressierte Problem einer fehlerhaften Abbildung des Bewegungsprofils bleibt aber bestehen.

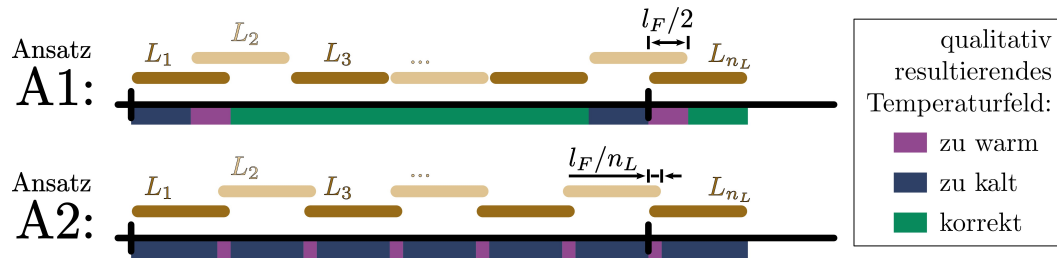


Abbildung 5.3: Ansätze zur Zeitschrittweitensteuerung bei realen Bewegungen

die Fehlstrecke l_F durch Umsetzung einer geeigneten Zeitschrittweitensteuerung zu kompensieren. Dies kann durch zwei qualitativ unterscheidbare Herangehensweisen erfolgen, deren zugehörige Verfahrsschaubilder in Abb. 5.3 illustriert sind:

- A1** Schubweise Kompensation von l_F während einer kleinen Zahl von Lastschritten: Nahe der Endpunkte wird die Zeitschrittweite in zwei Lastschritten derart mit $\eta \notin \mathbb{N}$ gesteuert, dass der verbleibenden Bereich dazwischen BD-frei mit $\eta \in \mathbb{N}$ überfahren werden kann.
- A2** Kontinuierliche Kompensation von l_F während allen Lastschritten: Die Lastschrittweite wird auf dem gesamten Bewegungsabschnitt mit einem $\eta \notin \mathbb{N}$ gesteuert. Das anzuwendende η ist dabei bestmöglich an eine natürliche Zahl anzunähern.

Ein Anwenden dieser Ansätze führt im Weiteren zu Temperaturfeldern, welche unterschiedlich durch die BD-Problematik beeinträchtigt werden. Für den Fall, dass ein Kontinuum (Richtlinie R2, S. 51) überfahren wird, sind in Abb. 5.3 die qualitativ resultierenden Temperaturen den Verfahrsschaubilder hinzugefügt. Mit dem Ansatz A1 ist demnach zwar eine korrekte Lösung in weiten Teilen des Abschnitts zu erwarten, die verbleibenden BD- Ungleichförmigkeiten an den Rändern sind aber vergleichsweise stark ausgeprägt. Dementgegen führt Ansatz A2 zu einem ungleichförmigen Temperaturfeld über den gesamten Bewegungsabschnitt, in welchem die Temperaturdellen durch vergleichsweise schmale Beulen unterbrochen werden. Dieser Ansatz der konstanten Wegschrittweiten, welcher bis hierher bereits ohne weitere Begründung Anwendung fand, ist allerdings aus den folgenden Gründen für eine Anwendung in der Simulation vorzuziehen:

- Die in größerer Anzahl vorkommenden Grenzen zwischen Temperaturdellen und -beulen bzw. die dort vorliegenden, steilen Temperaturgradienten begünstigen

einen Ausgleich des gestörten Temperaturfelds durch den natürlichen Prozess der Wärmeleitung⁴ in Ω_s .

- In einer numerischen Analyse wird Ω_s im Allgemeinen örtlich diskretisiert. Durch die damit eingeführte Versteifung des Problemverhaltens (für die FEM vgl. Abschnitt 2.2.1 (S. 23), genauer Gl. 2.17) kommt es zu einer methodisch bedingten Glättung der über die Last eingebrachten Ungleichförmigkeiten, da diese im Allgemeinen nicht exakt mit der durch die Ortsdiskretisierung möglichen Auflösung abzubilden sind.
- Die äquidistante Verteilung der Ungleichförmigkeiten erleichtert aufgrund der damit vorliegenden Regelmäßigkeit deren allgemeine Beschreibung und Korrektur sowie die anschließende Implementierung dieser Zusammenhänge in eine Analyse.

Es ist leicht zu sehen, dass die Mechanismen aus den ersten beiden Punkten eine Einebnung der BD-Ungleichförmigkeiten bereits ohne weitere Korrektur fördern. Des Weiteren ist die im dritten Punkt angesprochene Regelmäßigkeit bei den Verschiebungen auch für die Analyse der anderen Fehlerursachen (F1 und F3a/F3b) von Vorteil.

Der Ausgangspunkt zur konkreten Umsetzung einer kontinuierlichen Kompensation von l_F stellt dabei die priorisierte erste Bedingung aus Gl. 5.2 dar, mit welcher das zur Simulation notwendige η bestimmbar ist. Die notwendige Lastschrittanzahl n_L wird dabei auf Basis eines vorzugebenden Parameters $\tilde{\eta} \in \mathbb{N}$ bestimmt, über den die Feinheit der zeitlichen Diskretisierung näherungsweise gesteuert wird und der jene natürliche Zahl darstellt, an welche η im Ansatz A2 angenähert wird. Formal erfolgt die Bestimmung der konkreten Fahrteilzahl η damit wie folgt:

$$\eta = \frac{l_b}{|s_E - s_A|} n_L \quad \text{mit} \quad n_L = \begin{cases} \text{round}(k) & \text{für } \tilde{\eta} \geq 2 \\ \text{ceil}(k) & \text{für } \tilde{\eta} = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad k = \frac{|s_E - s_A|}{l_b} \tilde{\eta} \quad (5.3)$$

Die darin mögliche Anwendung der Aufrundungsfunktion anstelle einer direkten Rundung ist erforderlich, um die in Gl. 3.14 (S. 41) definierte Einschränkung der möglichen Fahrteilzahlen auf $\eta \geq 1$ zu gewährleisten.

⁴Hier wird im Grunde genommen die Oberfläche der warmen Bereiche gegenüber deren kalter Umgebung vergrößert. Dasselbe Prinzip findet beispielsweise auch Anwendung, wenn gekochter Reis mit dem Ziel eines schnellen Abkühlens ausgebreitet wird.

Mit Gl. 5.3 ist nun die Standardvorschrift⁵ gegeben, mit welcher die Fahrteilzahl η in den strukturvariablen Simulationen ausgehend von der abzubildenden Bewegung sowie der gewünschten Feinheit der Zeitdiskretisierung bestimmt wird.

5.2 Korrektur der kinematisch bedingten Fehleinträge

Wie gezeigt wurde, ist für reale Bewegungsprofile mit beliebig langen Abschnitten $|s_E - s_A|$ im Allgemeinen mit dem Auftreten von systematischen BD-Ungleichförmigkeiten zu rechnen. Deren Eigenschaften lassen sich in Abhängigkeit der verwendeten Fahrteilzahl η beschreiben, womit die Entwicklung einer passenden Korrekturmethode erfolgen kann.

5.2.1 Herleitung der Korrekturformeln

Die weiteren Überlegungen erfolgen allgemein für Bewegungen mit einem beliebigem η , werden aber durch die Verfahrschaubilder für $\eta = 1,75$ und $\eta = 3,33$ in Abb. 5.4 unterstützt. Zusätzlich zu der bereits in Abb. 5.2 illustrierten Passage mit $\eta = 1,5$ werden dadurch auch die Fälle mit asymmetrischer BD-Ausdehnung bzw. einem $\eta \geq 2$ verdeutlicht.

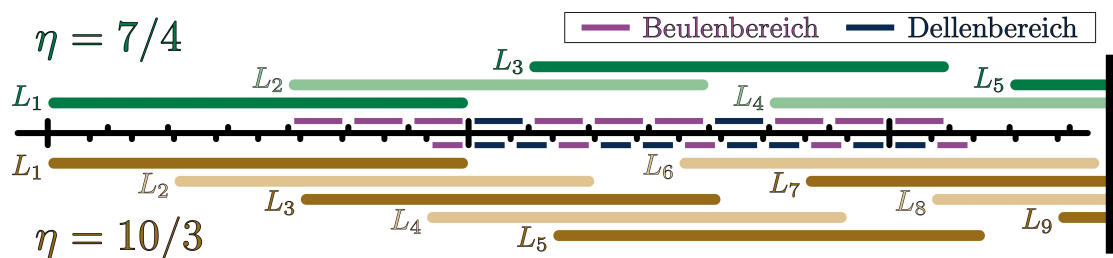


Abbildung 5.4: Verfahrschaubilder zu beispielhaften, diskreten Bewegungen

Als Ausgangspunkt für die Herleitung wird zunächst mit Δt_1 jene Zeitspanne definiert, welche die bewegte Last aufgrund ihrer Geschwindigkeit benötigt, um einen spezifischen

⁵In einigen der nachfolgenden Testanalysen wird allerdings vereinzelt von dieser Standardvorschrift abgewichen, um Simulationen mit konkret definierten Fahrteilzahlen η zu ermöglichen. In diesen Fällen wird jeweils explizit darauf hingewiesen.

Punkt auf Ω_s zu passieren. Mit dem gewählten η lässt sich damit die Zeitschrittweite der Simulation ausdrücken zu:

$$\Delta t_\eta = \frac{1}{\eta} \Delta t_1 \quad \text{mit} \quad \Delta t_1 := \frac{l_b}{v_K} \quad (5.4)$$

Die Wärme, welche durch q_K dann insgesamt während eines Lastschritts in den stehenden Körper eingetragen wird, lässt sich unter Einbezug der geometrischen Ausdehnung der Wärmequelle (vgl. Abb. 3.1, S. 29) berechnen mit:

$$Q(\eta) = l_b w \Delta t_\eta q_K \quad (5.5)$$

Analog kann die Wärmemenge beschrieben werden, welche während einer vollständigen, diskreten Überfahrt in einen spezifischen Bereich (Index br) eingetragen wird. Mit dessen Ausdehnung in Bewegungsrichtung l_{br} sowie der Anzahl n_{br} , die beschreibt wie oft der Bereich ein Teil der aktuellen Lastzone $\Gamma_l(t_{L_i})$ ist, ergibt sich:

$$Q_{br}(\eta) = n_{br} l_{br} w \Delta t_\eta q_K \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} n_{br} \\ l_{br} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} n_B \\ l_B \end{pmatrix} & \text{für Beulenbereich} \\ \begin{pmatrix} n_D \\ l_D \end{pmatrix} & \text{für Dellenbereich} \end{cases} \quad (5.6)$$

Daraus lässt sich eine zugehörige Wärmestromdichte ableiten, welche den betrachteten Bereich während der diskreten Überfahrt effektiv belastet:

$$q_{br}(\eta) = \frac{Q_{br}}{l_{br} w \Delta t_1} = \frac{n_{br}}{\eta} q_K \quad (5.7)$$

Um diesen Zusammenhang nun auf die vorliegenden Beulen- und Dellenbereiche zu übertragen, müssen die zugehörigen Belastungszahlen $n_{B,D}$ beschrieben werden. Dazu wird zunächst mit $\eta_.$ eine weitere Größe zur Beschreibung der gewählten Zeitdiskretisierung definiert:

$$\eta_ := \text{floor}(\eta) \quad \text{wobei} \quad \eta_ = \eta \quad \text{falls} \quad \eta \in \mathbb{N} \quad (5.8)$$

Die Herleitung der Belastungszahlen $n_{B,D}$ wird nun mithilfe von Abb. 5.4 und speziell anhand des Lastschritts L_4 im Verfahrensschaubild von $\eta = 10/3$ erläutert, kann aber auch an jeden anderen dargestellten L_i von $\eta = 7/4$ und $\eta = 10/3$ nachvollzogen werden. Es ist zu sehen, dass die Wärmebeule am Heck von $\Gamma_l(t_{L_4})$ durch die Lastschritte

L_{1-4} zu ihrer finalen Höhe von $n_B = 4$ akkumuliert wird, während der anschließende Dellenbereich eine Bedeckung weniger sieht. Wird neben diesem Beispiel außerdem berücksichtigt, wie sich die Wegschrittweite $\Delta s(\eta)$ zu l_b verhält, dann ist zu sehen, dass für die Belastungszahlen allgemein gilt:

$$n_B(\eta) = \eta_- + 1 \quad \text{und} \quad n_D(\eta) = \eta_- \quad (5.9)$$

Einsetzen dieser Zahlen in Gl. 5.7 liefert dann direkt die effektiven BD-Wärmestromdichten $q_{B,D}$.

Die eigentliche BD-Korrektur basiert nun auf der Idee, passend skalierte Wärmelasten $\tilde{q}_{B,D}$ auf jene Bereiche von $\Gamma_l(t_{L_i})$ zu aufzubringen, in denen aufgrund der diskreten Bewegung die Herausbildung einer Beule bzw. Delle zu erwarten ist. Die dafür benötigten Skalierfaktoren $C_{B,D}$ werden dabei entlang der Bedingung abgeleitet, dass sich die effektiven BD-Wärmestromdichten $q_{B,D}$ in einer korrigierten Simulation wieder zu der nominellen Kontaktlast q_K ergeben. Formal lässt sich dies schreiben als (vgl. Gl. 5.7):

$$q_{B,D}(\eta, q(t_{L_i})) = \tilde{q}_{B,D} = \frac{n_{B,D}}{\eta} \tilde{q}_{B,D} \stackrel{!}{=} q_K \quad \text{sodass} \quad \tilde{q}_{B,D} = C_{B,D} q_K \quad (5.10)$$

Mit Gl. 5.9 ergeben sich für die Korrekturfaktoren damit die folgenden Ausdrücke:

$$C_B = \frac{\eta}{\eta_- + 1} \quad \text{und} \quad C_D = \frac{\eta}{\eta_-} \quad (5.11)$$

Um zu identifizieren, an welchen Orten die einzelnen BD-Bereiche auftauchen, ist es ebenfalls notwendig deren geometrische Ausdehnung in Bewegungsrichtung $l_{B,D}$ zu beschreiben. Anhand derselben Wärmebeule wie soeben (in Abb. 5.4 am Heck von L_4 bei $\eta = 10/3$) lässt sich erkennen, dass sich die Länge l_B im Allgemeinen aus der folgenden Differenz ergibt:

$$l_B(\eta) = l_b - n_D \Delta s = \left(1 - \frac{\eta_-}{\eta}\right) l_b \quad (5.12)$$

Da jeder Lastschritt zudem für das Herausbilden jeweils eines Beulen- sowie Dellenbereichs verantwortlich ist, lässt sich damit auch l_D direkt wie folgt bestimmen:

$$l_D(\eta) = \Delta s - l_B = \left(\frac{\eta_- + 1}{\eta} - 1\right) l_b \quad (5.13)$$

Zur vollständigen Beschreibung der BD-Fehler ist nun noch zu ermitteln, wie die BD-Bereiche unter $\Gamma_l(t_{L_i})$ genau verteilt sind. Dies kann in Abb. 5.4 an einen beliebigen ausgewählten Lastschritt, z.B. L_2 von $\eta = 7/4$ oder L_5 von $\eta = 10/3$ erkannt werden. Es lässt sich feststellen, dass unter der aktuellen Lastzone immer n_B Beulen und n_D Dellen in wechselnder Abfolge zu erwarten sind, wobei die Dellen trivialerweise von den Beulen eingeschlossen werden.

5.2.2 Anwendung der BD-Korrektur

Mit den entwickelten Korrekturformeln ist es jetzt prinzipiell möglich die BD-Unförmigkeiten, welche bei der diskreten Überfahrt eines Kontinuums entstehen würden, vollständig zu korrigieren. Wie bereits erwähnt, ist allgemein in realen Simulationen mit ortsdiskreten Systemen aber mit Problemen in der örtlichen Auflösung zu rechnen. Bevor die Leistungsfähigkeit der BD-Korrektur bei Anwendung in einer realen Simulationen überprüft werden kann, ist es daher notwendig, eine Strategie zur Implementierung der Korrektur in Analysen mit ortsdiskreten Problemen zu entwickeln.

Implementierung in ortsdiskrete Systeme Die angesprochene Problematik des unzureichenden Auflösungsvermögen ist in Abb. 5.5 schematisch für eine Bewegung mit einer beispielhaften Diskretisierung von $\eta < 2$ dargestellt. Es ist zu sehen, dass dann unter der aktuellen, als dunkelblauer Balken dargestellten Lastzone zwei Beulen- (purpur) und ein Dellenbereich (hellblau) zu erwarten sind, deren Grenzen $x_{br,i}$ normalerweise nicht exakt auf die Grenzen $x_{e,i}$ zwischen den Elementschichten e_i fallen. In Abb. 5.5 ist dabei speziell an der Schicht e_2 jener problematische, nichttriviale Fall zu erkennen, in welchem eine einzelne Elementschicht durch Anteile mehrere BD-Bereiche bedeckt ist. Da aber für die Belastung einer einzelnen Randfläche eines Elements normalerweise keine örtliche Variation der Flächenlast vorgebar ist (siehe Gl. 2.16, S. 24), wird eine passende Approximation der Lastverhältnisse notwendig.

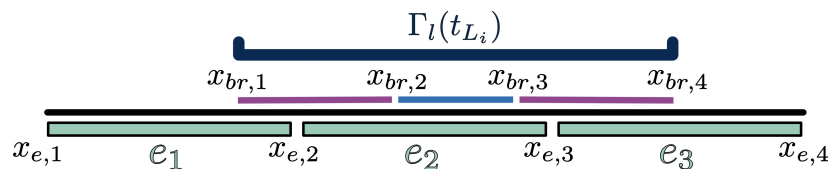


Abbildung 5.5: BD-Bereiche auf einem ortsdiskreten System

Aufgrund des extensiven Charakters der Wärme ist es sinnvoll, die stellvertretende Elementschichtlast q_{e_i} aus einem gewichteten, arithmetischen Mittel der wirkenden, korrigierten BD-Lasten $\tilde{q}_{B,D}$ (siehe Gl. 5.10 und Gl. 5.11) zu bestimmen. Als Gewichte sind die für e_i relevanten Wirkungslängen der BD-Lasten zu verwenden. Die für deren Beschreibung notwendigen, geometrischen Informationen sind in Abb. 5.5 lediglich für das dargestellte Beispiel konkret angegeben. Die Systematik der Benennung für die nachfolgenden, allgemeingültigen Aussagen ist daraus entsprechend zu extrapolieren.

Die Positionen der Elementgrenzen⁶ $x_{e,i}$ sind abhängig von der umgesetzten Ortsdiskretisierung und daher aus den Daten des Netzes zu identifizieren. Dementgegen lassen sich die absoluten Positionen der zum aktuellen Lastschritt L_i in $\Gamma_l(t_{L_i})$ zu erwarteten BD-Grenzen $x_{br,k}(t_{L_i})$ (mit $k = 1 \dots 2n_B$ vgl. Abb. 5.5) aus den Längen $l_{B,D}$ (vgl. Gl. 5.12 und Gl. 5.13) und damit direkt aus der Fahrteilzahl η beschreiben zu:

$$\begin{aligned} x_{br,2j-1}(t_{L_i}) &= s(t_{L_i}) + (j-1)(l_B + l_D) \quad \text{und} \\ x_{br,2j}(t_{L_i}) &= s(t_{L_i}) + x_{br,2j-1}(t_{L_i}) + l_B \quad \text{für } j = 1 \dots n_B \end{aligned} \quad (5.14)$$

Weiterhin muss für eine allgemeine Implementierungsvorschrift unterschieden werden, ob es sich bei einem spezifischen Bereich um eine Beule/Delle handelt. Dafür wird ein Bereichs-Indikator $i_{br} \in \mathbb{N}$ eingeführt, welcher jeden BD-Bereich über den Index von dessen oberer Grenze identifiziert, sodass $i_{br} = 2 \dots 2n_B$. Unter Verwendung der Modulo-Funktion⁷ $[a \bmod b]$, lässt sich mit i_{br} der für einen Bereich zu verwendende Skalierungsfaktor C_{br} formal über den folgenden Ausdruck bestimmen (vgl. Gl. 5.11):

$$C_{br}(i_{br}) = \left[(i_{br} - 1) \bmod 2 \right] C_B + \left[i_{br} \bmod 2 \right] C_D \quad (5.15)$$

Für eine beliebige dieser Schichten e_i mit $i = 1 \dots n_e$ und n_e als Anzahl der aktuell belasteten Elementschichten, lässt sich die stellvertretende Last q_{e_i} also bestimmen,

⁶Obwohl – so, wie z. B. in Abb. 4.3 (S. 63) oder Abb. 5.5 illustriert – oft gilt, dass die Ausdehnung der Elementschichten in Bewegungsrichtung konstant ist, stellt dies keine zwingende Voraussetzung der Vernetzung dar und wird daher auch nicht für die Entwicklung der allgemeinen Implementierungsvorschrift der BD-Korrektur angenommen.

⁷Die Modulo-Funktion gibt bei einer Division mit Rest über $[a \bmod b] = a - b \cdot \text{floor}(\frac{a}{b})$ den Rest wieder (KNUTH [55]).

indem die darauf wirkenden BD-Bereiche mit den Indikatoren von $i_{br} = i_u$ bis $i_{br} = i_o$ wie folgt berücksichtigt werden:

$$q_{e_i} = \frac{q_K}{x_{e,i+1} - x_{e,i}} \left[(x_{br,i_u} - x_{e,i}) C_S(i_u) + \sum_{i_{br}=i_u+1}^{i_o-1} (x_{br,i_{br}} - x_{br,i_{br}-1}) C_S(i_{br}) + (x_{e,i+1} - x_{br,i_o-1}) C_S(i_o) \right] \quad (5.16)$$

Die Elementschichten unter Heck (e_1) und Front (e_{n_e}) der aktuellen Lastzone $\Gamma_l(t_{L_i})$ sind entsprechend ähnlich zu berechnen, wobei lediglich die Summanden der bei e_1 bzw. e_{n_e} unbelasteten Bereiche zu verwerfen sind:

$$q_{e_1} = \frac{q_K}{x_{e,2} - x_{e,1}} \left[\sum_{i_{br}=2}^{i_o-1} (x_{br,i_{br}} - x_{br,i_{br}-1}) C_S(i_{br}) + (x_{e,2} - x_{br,i_o-1}) C_S(i_o) \right] \quad \text{und}$$

$$q_{e_{n_e}} = \frac{q_K}{x_{e,n_e+1} - x_{e,n_e}} \left[(x_{br,i_u} - x_{e,n_e}) C_S(i_u) + \sum_{i_{br}=i_u+1}^{2n_B} (x_{br,i_{br}} - x_{br,i_{br}-1}) C_S(i_{br}) \right] \quad (5.17)$$

Durch die Anwendung der BD-Korrektur kann also auf die sonst notwendige Lastinterpolation unter Front und Heck von $\Gamma_l(t_{L_i})$ (siehe Abb. 3.3 (S. 40) und Gl. 3.12) verzichtet werden.

Leistungsfähigkeit der BD-Korrektur: Im Folgenden wird am Beispiel einiger Testsimulation überprüft, inwiefern die BD-Korrektur die Ergebnisse einer zeitlich grob diskretisierten Simulation beeinflusst. Für die bewegte Last wird dazu das in Abb. 5.6 dargestellte, konstante Lastprofil verwendet. Mit $|v_K| = 1 \text{ m/s}$ und $q_K = 10 \text{ kW/m}^2$ ähnelt dieses weitestgehend dem im Kapitel 4 verwendeten Testlastfall (siehe Abb. 4.5, S. 67), nur das diesmal lediglich zwischen $s = [0; 6 \text{ m}]$ hin- und hergefahren wird und damit $l_s = 7 \text{ m}$ ist (vgl. Abb. 4.3, S. 63). In den nachfolgenden Testsimulationen wird dabei immer das komplette Profil mit allen fünf Bewegungszyklen abgefahren, sodass die lastschrittbezogene Auswertung jeweils am Ende bei $t = 60 \text{ s}$ erfolgt.

Die Wahl zur Verkürzung der Bewegungsabschnitte ist dadurch begründet, dass $|s_E - s_A| = 6 \text{ m}$ durch eine vergleichsweise große Zahl an unterschiedlichen, groben

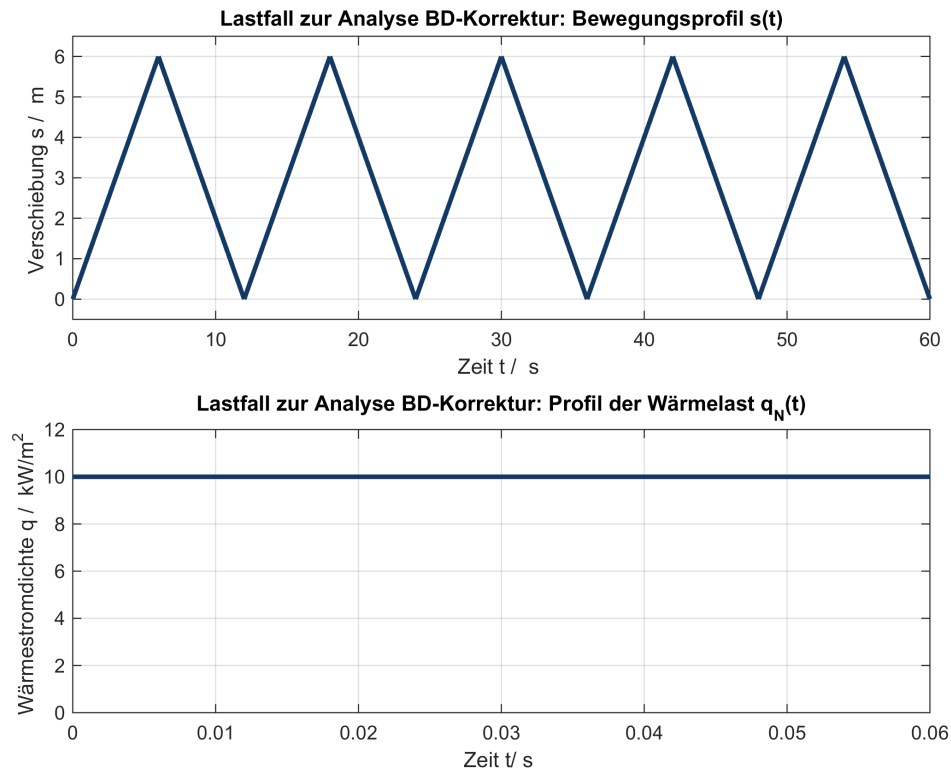


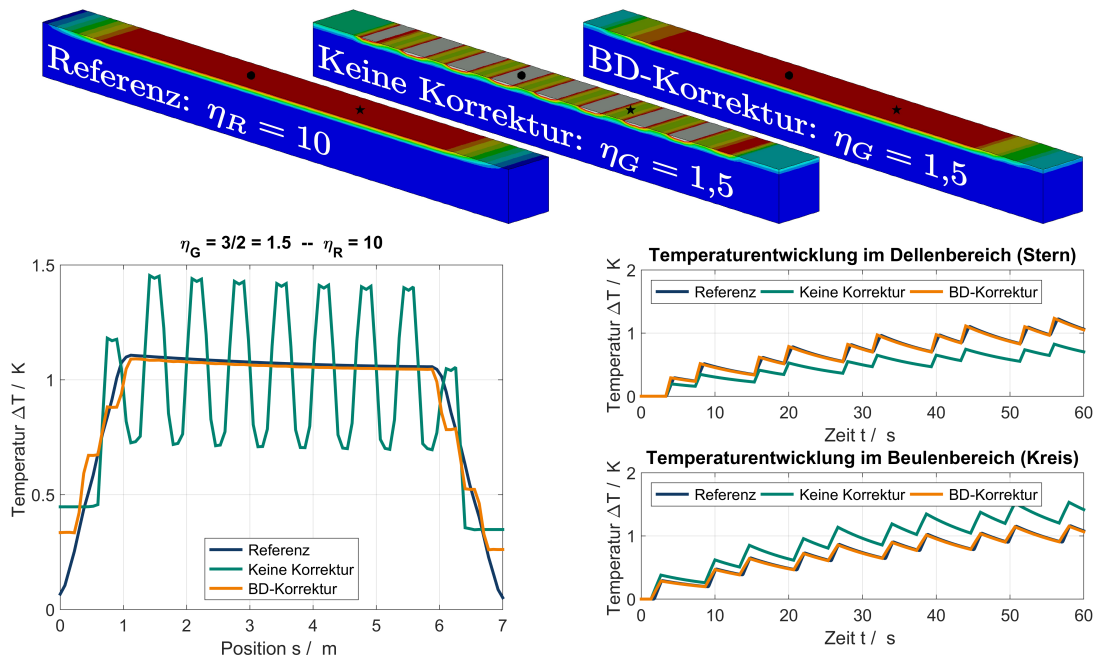
Abbildung 5.6: Bewegtes Lastprofil innerhalb der Analyse der BD-Korrektur

$\eta_G < 3 \notin \mathbb{N}$ exakt überwunden⁸ werden kann. Damit lässt sich die Vergleichbarkeit der einzelnen Analysen untereinander sowie mit der Referenz erhalten.

Abb. 5.7 zeigt nun die Ergebnisse einer korrekturfreien sowie einer BD-korrigierten Simulation für den bereits auch in Abb. 5.1 und Abb. 5.2 dargestellten Fall von $\eta_G = 1,5$. Gegenübergestellt werden diese einer Referenz, welche korrekturfrei mit $\eta_R = 10$ berechnet wurde.

Im oberen Teil von Abb. 5.7 ist das resultierende Temperaturfeld am Ende des Lastprofils dargestellt. Es ist zu sehen, dass bei einer Diskretisierung mit $\eta_G = 1,5$ durch die BD-Korrektur (rechts) eine Homogenisierung des sonst durch die Kinematik der stückweisen Verschiebung stark gestörten Temperaturfelds (mitte) erreicht wird. Verglichen mit der Referenz (links) lässt sich – abgesehen von den Bereichen neben

⁸Prinzipiell lässt sich ein exaktes Anfahren des Endpunktes mit einem beliebig gewählten, rationalen $\eta_G = \alpha/\beta \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ immer erreichen, wenn $|s_E - s_A| / (\beta \cdot l_b) \in \mathbb{N}$ ist. Das für den Testfall gewählte Verhältnis von $|s_E - s_A| / l_b = 6$ hat mit $\beta = \{1; 2; 3; 6\}$ also vergleichsweise viele, ganzzahlige Teiler, womit sich die angesprochene, große Zahl an möglichen η_G begründet.

Abbildung 5.7: Auswirkung der BD-Korrektur bei $\eta_G = 1,5$

den Endpunkten der Bewegung, was aufgrund des Auflösungsvermögens der groben Simulationen zu erwarten ist – kaum noch ein Unterschied feststellen. Sogar die Abstände zwischen den Isothermen in Tiefenrichtung erscheinen weitestgehend gleich. Damit wird erneut die Erkenntnis aus Kapitel 4 bestätigt, dass primär die Menge der eingetragenen Energie für das resultierende Temperaturfeld entscheidend ist, während der Einfluss der gewählten Zeitschrittlänge in diesen Größenordnungen vernachlässigbar gering ist.

In Abb. 5.7 unten links sind die einzelnen Lösungen der Pfadauswertung in der potentiellen Lastzone (vgl. Abb. 3.1, S. 29) präsentiert. Es ist deutlich zu erkennen wie im korrekturfreien η_G -Fall (grün) der Temperaturverlauf aufgrund der BD-Problematik um die Referenz (blau) mäandert. Die relativen Abweichungen zwischen Beulen- bzw. Dellentemperatur und dem maßgebenden Temperaturanstieg der Referenz betragen zum Auswertzeitpunkt $t = 60$ s ungefähr 35%.

Rechts daneben sind zusätzlich für zwei ausgewählte Knoten der potentiellen Lastzone, welche in der korrekturfreien Analyse mittig innerhalb eines Beulen- bzw. Dellenbereichs liegen (in Abb. 5.7 jeweils illustriert durch eine schwarze Markierung in Kreis- bzw. Sternform), die transienten Temperaturentwicklung über den Simulationszeitraum dargestellt. An allen Ergebnisverläufen ist zunächst erkennbar, dass die BD-korrigierte

Simulation (orange) Ergebnisse liefert, welche mit denen der Referenz nahezu identisch sind. Lediglich die bereits angesprochenen Bereichen nahe den Endpunkten (in Abb. 5.7 unten links) und die Abbildung der Extrempunkte in den Zeitverläufen (Abb. 5.7 unten rechts) sind beeinträchtigt. Beide Defekte sind aufgrund der Auflösungsbeschränkungen einer η_G -Simulation unvermeidbar. Außerdem ist die in Kapitel 4 untersuchte iEV-Abweichung zu beobachten und erneut als vernachlässigbar zu identifizieren.

In den transienten Ergebnissen in Abb. 5.7 (unten rechts) ist speziell anhand der Temperaturentwicklung während der letzten beiden, abgebildeten Zyklen (für Delle/oben ab ≈ 40 s bzw. für Berg/unten ab ≈ 34 s) zu erkennen, dass die BD-Abweichungen aufgrund interner Diffusionsprozesse scheinbar eine stationäre Ausprägung erreicht haben und deren absolute Höhe über die Zyklen im Weiteren unverändert bleibt. Allerdings wird dieser Eindruck durch einen Blick auf die längerfristige Temperaturentwicklung in Abb. 5.8 widerlegt. Darin zeigt sich, dass die Abweichungen der Beulen- und Dellenbereichen gegenüber der Referenz, welche in Abb. 5.8 durch die korrigierte Simulation repräsentiert wird, kontinuierlich zunehmen. Damit ist eine potentielle Vernachlässigbarkeit des BD-Verhaltens nicht gegeben und die Notwendigkeit einer Korrektur wird nochmals bestätigt.

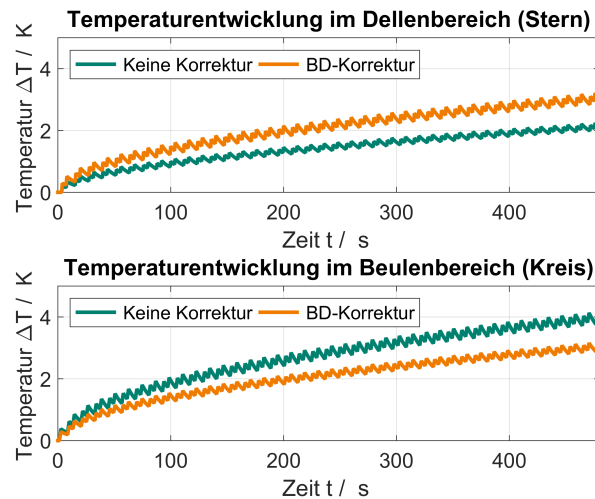


Abbildung 5.8: Längerfristige Temperaturentwicklung im Beulen-/Dellenbereich

In Abb. 5.9 sind zudem die Ergebnisse dreier weiterer Beispiele mit unterschiedlichen η_G dargestellt, um für diese alternativen Fälle die Auswirkungen der BD-Problematik sowie das Wirken der Korrekturmethode zu illustrieren. Mit $\eta_G = 7/6$ (Abb. 5.9 oben) und $\eta_G = 11/6$ (Abb. 5.9 mittig) sind dabei zwei Fahrteilzahlen gewählt wurden, welche

vergleichsweise nahe an einem $\eta_G \in \mathbb{N}$ liegen und damit eher der Zeitdiskretisierung einer realen Simulation (siehe Schrittweitensteuerung in Gl. 5.3) entsprechen. Es ist zu erkennen, wie sich für $\eta_G \gtrsim \eta \in \mathbb{N}$ vergleichsweise lange Dellenbereiche herausbilden während eine korrekturfreie Simulation mit $\eta_G \lesssim \eta \in \mathbb{N}$ eher lange Beulenbereiche liefert. Für beide Fälle weichen die langen Bereiche weniger stark von der Referenz ab, als die kurz ausgeprägten Gegenstücke. Zudem zeigt Abb. 5.9 unten, dass die BD-Fehler im Fall eines etwas feineren $\eta_G = 2,5$ erwartungsgemäß öfter und weniger stark ausgeprägt auftreten. Die Gleichungen 5.11 bis 5.13 werden damit bestätigt.

Eine Betrachtung der BD-korrigierten Ergebnisse aller in Abb. 5.9 präsentierten Simulationen zeigt, dass diese ebenfalls nahezu identisch zur Referenz sind. Für die gegebenen Plots der gesamten Temperaturfelder ist ebenfalls die in Abb. 5.7 zu findende Referenz gültig, da in allen Fällen das gleiche, bewegte Lastprofil (vgl. Abb. 5.6) abgebildet ist.

Es lässt sich also festzustellen, dass das entwickelte Verfahren den BD-Fehler unabhängig von der gewählten, zeitlichen Diskretisierung nahezu vollständig korrigiert. Da dazu während der Simulationen lediglich einige wenige, elementare arithmetische Operationen zusätzlich erforderlich sind (vgl. Gl. 5.16), ist die angestrebte Effizienzsteigerung der Analyse in diesem Punkt erreicht.

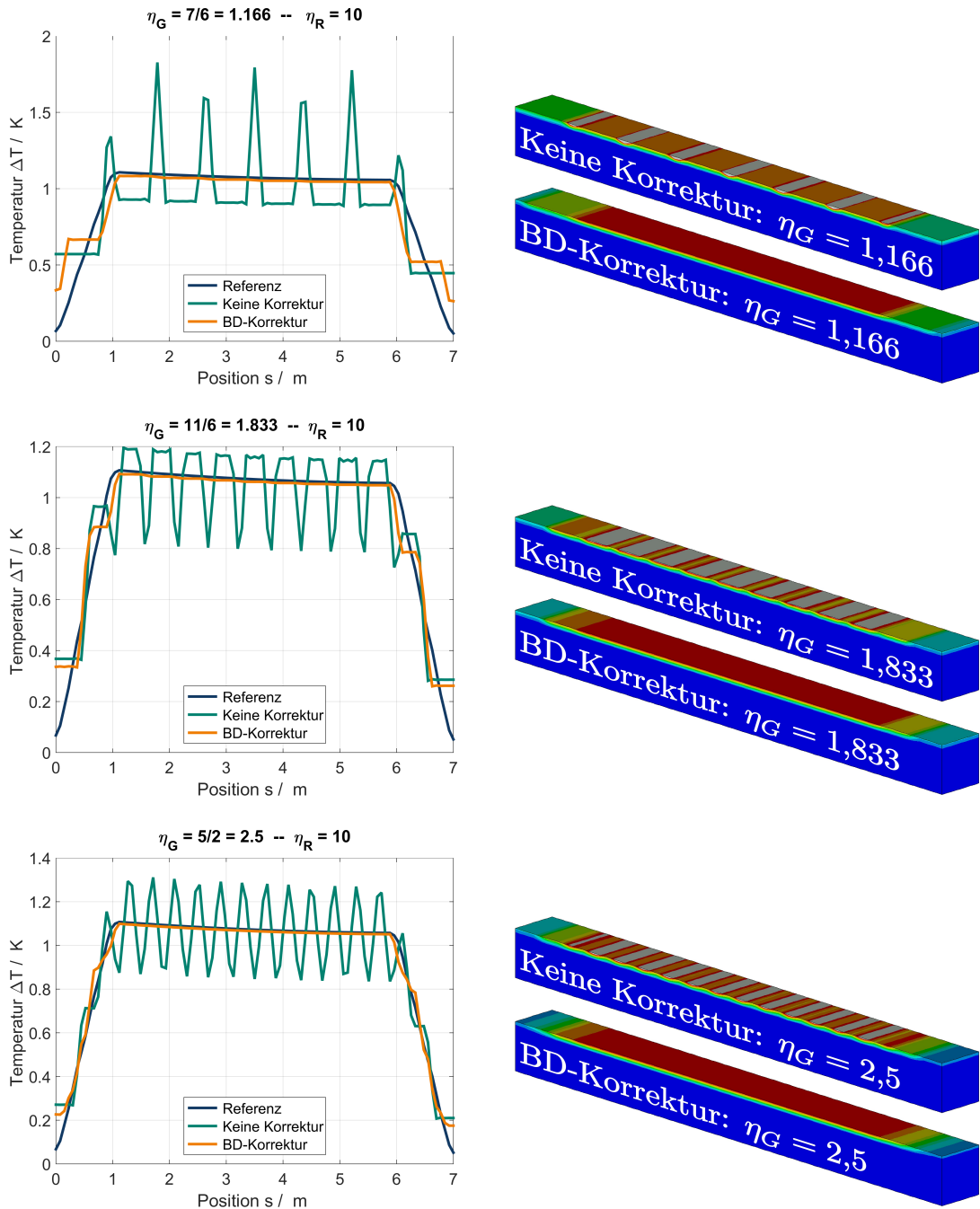


Abbildung 5.9: Auswirkung der BD-Korrektur bei unterschiedlichen η_G

6 Korrektur des diskret aktualisierten Wärmeeintrags

In den bisherigen Analysen wurden mit dem Ziel der Fehlerisolierung lediglich Lastprofile verwendet, welche aus Abschnitten gleichförmiger Bewegungen mit konstanten Wärmestromdichten bestanden. Beim Blick auf das für die strukturvariablen Simulationen mögliche Anwendungsgebiet (vgl. Abschnitt 1.1, S. 7) ist allerdings ersichtlich, dass ein derartiges, konstantes Lastprofil nicht ausreicht, um das komplette Spektrum von technologisch relevanten Bewegungsprozessen abzubilden. In einer Vielzahl der Anwendungsfälle im Ingenieurwesen liegen beschleunigte Bewegungen vor, mit denen u. a. spezielle Mechanismen umgesetzt oder kinetische Belastungen gemindert werden. Die Annahme eines beliebigen, aber stetigen Bewegungsverlaufs $s(t)$ (siehe Gl. 3.1, S. 32) als Teil des gegebenen Problems ist daher erforderlich. Daneben ist ebenfalls von einem vollständig allgemeinen Verlauf der Wärmestromdichte $q_N(t)$ auszugehen. Obwohl die auftretende Verlustleistung in den meisten Reibmodellen geschwindigkeitsabhängig ist (siehe z. B. OLSSON [74]) und damit oft eine direkte Abhängigkeit $q_N(t) = f(s(t))$ zwischen den beiden Komponenten eines bewegten Lastprofils vorliegt, existieren auch genügend relevante, technische Fragestellungen, in denen die gegebene NEUMANN-Kontaktlast direkt einstellbar bzw. von anderen Einflüssen bestimmt und somit $q_N(t) \neq f(s(t))$ ist. In diesem Kapitel wird daher ein Verfahren entwickelt, mit welchem der Fehler¹ der seltenen Auswertung eines beliebig gegebenen, bewegten Lastprofils $[s(t); q_N(t)]$ korrigiert wird.

Im Folgenden wird dazu auf Basis der Ursache des RUMHI-Defekts ein als *Standard-Korrektur* bezeichnetes Verfahren eingeführt, welches diesen Fehler korrigieren soll. Die Untersuchung von dessen Leistungsfähigkeit führt allerdings zur Identifikation einiger

¹Die Anfangsbuchstaben der zu dieser Problematik zugehörigen, englischen Bezeichnung *Rarely Updated Moving Heat Input* sind dabei für den RUMHI-Fehler auch in dieser Arbeit als namensgebend gewählt wurden, da ein Großteil der Arbeiten zu dessen Analyse und Korrektur, welche in diesem Kapitel präsentiert werden, bereits ähnlich in englischer Sprache in PARTZSCH [79] veröffentlicht wurden.

verbleibender, methodisch bedingter Nachteile, welche anschließend ebenfalls beschrieben und korrigiert werden. Dabei wird sich entsprechend der Entwicklungsrichtlinie R4 (S. 51) daran orientiert, den Energieeintrag durch die bewegte Wärmequelle in der groben Simulation ähnlich dem in der Referenz zu gestalten. Das Kapitel schließt, indem die Wirkungsweise der vollständigen RUMHI-Korrekturmethode innerhalb einer realen Simulation am Beispielproblem präsentiert wird.

6.1 Standard-Korrektur des RUMHI-Fehlers

Die Untersuchungen zur RUMHI-Problematik erfolgen entlang Richtlinie R2 (S. 51) am diskret überfahrenen Kontinuum und sind für allgemeine Fahrteilmzahlen $\eta \in \mathbb{Q}$ gültig. In der Mehrzahl der präsentierten Analysen werden allerdings zeitliche Diskretisierungen mit $\eta \in \mathbb{N}$ verwendet, um eine Beeinträchtigung der Ergebnisse durch eine Überlagerung mit BD-Defekten (vgl. Kapitel 5) vermeiden.

Details des RUMHI-Fehlermechanismus Um das nachfolgend präsentierte Vorgehen in der Standardkorrektur zu begründen, wird zunächst detailliert auf die eigentliche Ursache des RUMHI-Fehlers innerhalb Simulationen mit diskret umgesetzten Bewegungen (vgl. Abb. 3.2, S. 38) eingegangen.

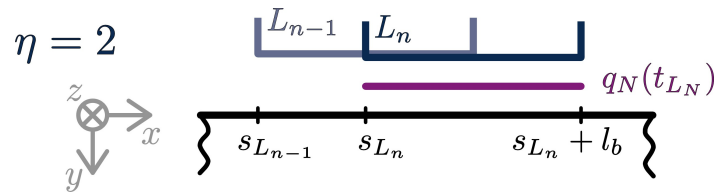


Abbildung 6.1: Wärmeeintrag in diskreten Bewegungen

In Abb. 6.1 ist nochmals illustriert, wie und wo im Fall einer zeitdiskreten Analyse die Wärme zum aktuellen Lastschritt L_n sowie zum vorangegangenen Lastschritt L_{n-1} in den stehenden Körper Ω_s eingebracht wird. Es ist zu sehen, dass Ω_s in L_n diskret von seiner vorherigen Position bei $s(t_{L_{n-1}}) = s_{L_n} - l_b/\eta$ auf die aktuelle Lastzone beginnend bei $s_{L_n} = s(t_{L_n})$ verschoben wird. Entsprechend der Simulationsmethodik beträgt die zum Lastschritt L_n durch die bewegte Last in Ω_s eingebrachte Wärmemenge damit:

$$Q_{L_n} = l_b w \cdot \Delta t_{L_n} \cdot q_{L_n} \quad \text{mit} \quad q_{L_n} = q_N(t_{L_n}) \quad \text{und} \quad \Delta t_{L_n} = t_{L_n} - t_{L_{n-1}} \quad (6.1)$$

Die für L_n relevante Wärmestromdichte q_{L_n} wird also per Auswertung des gegebenen NEUMANN-Anteil des Lastprofils zum Zeitpunkt des Lastschritts bestimmt. Außerdem ist die aktuelle Zeitschrittweite der transienten Analyse (vgl. Gl. 2.19, S. 26) die relevante Dauer Δt_{L_n} , in der die Wärmestromdichte auf Ω_s wirkt.

Die für den RUMHI-Fehler entscheidende Problematik ist nun, dass durch den Lastschritt L_n der gesamte Energieeintrag für die Dauer von $(t_{L_{n-1}}; t_{L_n}]$ mit einem Mal eingetragen wird. Liegt ein variabler NEUMANN-Lastprozess $q_N(t) \neq konst.$ vor, weicht damit der Energieeintrag in einer zeitlich diskreten Analyse im Allgemeinen von dem in der kontinuierlichen Bewegung ab:

$$\frac{Q_{L_n}}{l_b w} = \Delta t_{L_n} \cdot q_N(t_{L_n}) \neq \int_{t_{L_{n-1}}}^{t_{L_n}} q_N(t) dt \quad (6.2)$$

Außerdem wird Q_{L_n} lediglich in die aktuelle Lastzone $[s_{L_n}; s_{L_n} + l_b]$, statt in den eigentlich überfahrenen Bereich $(s_{L_{n-1}}; s_{L_n} + l_b]$ eingetragen. Es liegt also zusätzlich eine fehlerhafte Verteilung der eingetragenen Energie vor. Im Fall einer beschleunigten Bewegung kommt es damit sogar bei einem korrektem Betrag von Q_{L_n} – welcher entsprechend Gl. 6.2 bei $q_N(t) = konst.$ immer erhalten wird – zu einem RUMHI-Fehler, da die bei $v(t) \neq konst.$ vorliegende Veränderlichkeit der infinit kurzen Verweilzeiten ($\hat{=} v(t)$) von $\Gamma_l(t)$ auf Teilbereichen von $(s_{L_{n-1}}; s_{L_n} + l_b]$ durch eine Simulation mit η_G nicht abgebildet wird.

Zusammengefasst liegt also das aus dem RIEMANN-schen Integralbegriff bekannte Problem vor, ein bestimmtes Integral zu einer kontinuierlichen Funktion lediglich durch deren Wert an der oberen Integrationsgrenze auszuwerten. Der Umstand, dass dies für $s(t)$ und $q_N(t)$, also für beide Elemente des bewegten Lastprofils, durchzuführen ist, verleiht dem RUMHI-Problem einen zweidimensionalen Charakter, auf den durch das zu entwickelnde Korrekturverfahren einzugehen ist. Mit Rückblick auf die Definition des bewegten Testlastfalls in Kapitel 4 (siehe Unterabschnitt 4.3.2, S. 65) lässt sich damit außerdem erkennen, warum im Fall eines konstanten Lastprofils kein RUMHI-Defekt zu erwarten ist.

Entwicklung des Verfahrens zur Standard-Korrektur Da das abzubildende, bewegte Lastprofil $[s(t); q_N(t)]$ als Teil des zu analysierenden Problems gegeben ist, ist bereits vor der Analyse vollständig bestimmt, wieviel Wärme durch die bewegte Last in einen beliebigen Bereich von Ω_s im kontinuierlich Fall eingetragen wird. Die entlang

den Entwicklungsrichtlinien konstruierte Standardkorrektur, deren prinzipieller Ablauf in Abb. 6.2 als Überblick dargestellt ist, nutzt diese Kenntnis des anzustrebenden Belastungszustands aus, indem dieser durch entsprechend korrigierte Wärmestromdichten in η_G -diskretisierten Simulationen nachgebildet werden soll.

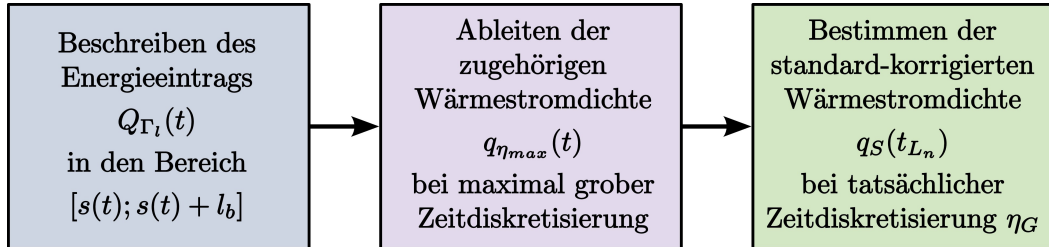


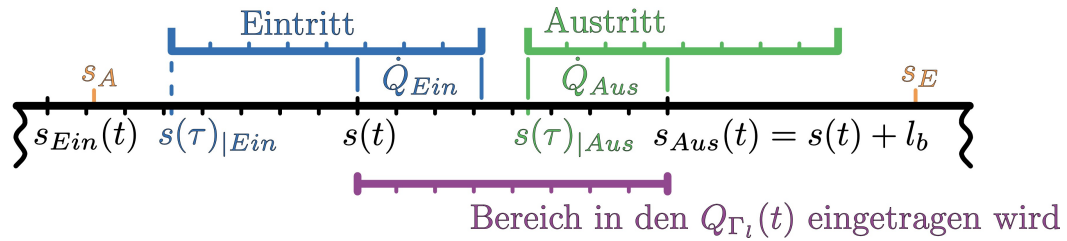
Abbildung 6.2: Prinzipieller Ablauf der RUMHI-Standardkorrektur

Konkret (siehe Abb. 6.2) wird zunächst innerhalb eines Prozesses $Q_{\Gamma_l}(t)$ zusammengefasst, wieviel Wärme insgesamt durch den aktuellen Bewegungsabschnitt in die jeweils aktuelle Lastzone $\Gamma_l(t)$, also in $[s_{L_n}; s_{L_n} + l_b]$ eingebracht wird. Daraus lässt sich anschließend eine Wärmestromdichte $q_{\eta_{max}}(t)$ ableiten, welche diese Energiemenge innerhalb einer Analyse mit der maximal möglichen Zeitdiskretisierung eintragen würde. Da die beiden ersten Schritte nur vom gegebenen Lastprofil abhängen, sind diese im Vorfeld der eigentlichen Analyse durchführbar und damit im Einklang mit Richtlinie R5 (siehe S.51). Während der Simulation wird dann zu jedem Lastschritt L_n auf Basis von $q_{\eta_{max}}(t_{L_n})$ sowie der tatsächlich vorliegenden Zeitdiskretisierung mit $\eta_G \geq \eta_{max}$ letztendlich die standard-korrigierte (Index S) Wärmestromdichte $q_S(t_{L_n})$ bestimmt.

Das angestrebte Korrekturverfahren wird nun zunächst für die Anwendung an einer beliebigen, bewegten Last² $[s(t); q_N(t)]$ mit $t \in [t_A; t_E]$ ausgearbeitet, welche innerhalb eines Abschnitts direkt von $s_A = s(t_A)$ zu $s_E = s(t_E)$ – den Endpunkten der Bewegung – verschoben wird.

Zur Ermittlung von $Q_{\Gamma_l}(t)$ ist es nun erforderlich, den Prozess des Wärmeeintrags in $[s_{L_n}; s_{L_n} + l_b]$ in zwei Phasen aufzuspalten, in denen die bewegte Wärmequelle virtuell in den interessierende Bereich eintritt (Index *Ein*) bzw. aus diesem wieder austritt (Index *Aus*). Wie an der Illustration der Problematik in Abb. 6.3 zu erkennen ist, unterscheiden sich beide Phasen darin, ob eine Bedeckung von Teilen von $\Gamma_l(t)$ durch die Front (beim Eintritt) bzw. das Heck (beim Austritt) der bewegten Last vorliegt. Für die Bestimmung der zu $Q_{\Gamma_l}(t)$ beitragenden Wärmeströme \dot{Q}_{Ein} bzw. \dot{Q}_{Aus} sind dann

²Es wird daran erinnert, dass die Definition der Verschiebung $s(t)$ dabei immer zum Heck der Last erfolgt (vgl. Abb. 3.1, S. 29).


 Abbildung 6.3: Ein- und Austrittsphase während der Überfahrt von $\Gamma_l(t)$

entsprechend unterschiedlich definierte Abstände als relevante Längen heranzuziehen. Weiterhin wird mit $s_{Ein}(t) = s(t_{Ein}) := s(t) - l_b$ jener Zeitpunkt bzw. die zugehörige Verschiebung definiert, zu dem die Eintrittsphase im Fall, dass diese ein vollständiger Teil der gegebenen Bewegung $s(t)$ ist, beginnen würde (siehe Abb. 6.3). Analog lässt sich das Ende der Austrittsphase $s_{Aus}(t) = s(t_{Aus}) := s(t) + l_b$ definieren. Formal zusammengefasst, ist der gesuchte Prozess $Q_{\Gamma_l}(t)$ damit wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 Q_{\Gamma_l}(t) &:= \int_{t_u(t)}^t \dot{Q}_{Ein}(\tau) d\tau + \int_t^{t_o(t)} \dot{Q}_{Aus}(\tau) d\tau \\
 \text{mit} \quad \begin{bmatrix} \dot{Q}_{Ein}(\tau) \\ \dot{Q}_{Aus}(\tau) \end{bmatrix} &= w \begin{bmatrix} s(\tau) - s_{Ein}(t) \\ s_{Aus}(t) - s(\tau) \end{bmatrix} q_N(\tau) \\
 \text{und} \quad t_u(t) &= \begin{cases} t_A & \text{falls } |s(t) - s_A| \leq l_b \\ t_{Ein}(t) & \text{sonst} \end{cases} \\
 t_o(t) &= \begin{cases} t_E & \text{falls } |s_E - s(t)| \leq l_b \\ t_{Aus}(t) & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Es ist zu sehen, dass die Integrationsgrenzen $t_u(t)$ und $t_o(t)$ davon abhängen, ob sich die zum Zeitpunkt t gehörende Position $s(t)$ innerhalb eines l_b -langen Bereichs neben den Endpunkten – den sogenannten *Bewegungsenden* – befindet. In einen derartigen Fall, beinhaltet das gegebene Bewegungsprofil keine komplette Überfahrt von $\Gamma_l(t)$. In Abb. 6.3 ist dies am Beispiel eines $s(t)$ illustriert, das innerhalb des Bewegungsendes neben dem unteren Endpunkt der Bewegung s_A liegt. Da $s_A > s_{Ein}(t)$ ist, ist die Eintrittsphase lediglich unvollständig in der gegebenen Bewegung enthalten. Dementgegen ist für das Beispiel in Abb. 6.3 ein vollständiger Austritt aus $\Gamma_l(t)$ möglich, da $s_E > s_{Aus}(t)$ ist.

Um aus dem $Q_{\Gamma_l}(t)$ nun die gesuchte Wärmestromdichte $q_{\eta_{max}}(t)$ abzuleiten (siehe Abb. 6.2), ist es erforderlich (siehe Gl. 2.3, S. 16), die zu jedem Zeitpunkt t maximalen

Belastungsdauern $\Delta t_{max}(t)$, zu identifizieren. Dafür wird zunächst die Information nach der maximal möglichen Zeitdiskretisierung – ausgedrückt über die Form der Fahrteilzahlen – mit dem Prozess $\eta_{max}(t)$ beschrieben:

$$\eta_{max}(t) := \begin{cases} l_b/\Delta s_{max}(t) & \text{falls } \Delta s_{max} \leq l_b \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } \Delta s_{max}(t) := \min[|s(t) - s_A|; |s_E - s(t)|] \quad (6.4)$$

Die maximal mögliche Zeitdiskretisierung wird also abhängig von der Distanz von $s(t)$ zum nächstgelegenen Bewegungsendpunkt bestimmt und ergibt sich aus der Überlegung, dass dieser Abstand bei einer Fahrt hin zum Endpunkt bzw. von diesem weg, innerhalb nur eines Lastschritts überwunden wird. Für den Fall, dass $s(t)$ außerhalb eines Bewegungsendes liegt, greift allerdings die Mindestbedeckungsbedingung $\eta \geq 1$ aus Gl. 3.14 (S. 41).

Mit Blick auf die verwendete Simulationsmethode (vgl. Gl. 2.19, S. 26), ergibt sich damit der gesuchte Prozess der zugehörigen, maximalen Belastungsdauern $\Delta t_{max}(t)$ aus der Differenz der aktuellen Zeit und der Zeit t_{vor} des virtuellen, vorherigen Lastschritts bei einer Diskretisierung mit $\eta_{max}(t)$. Da eine beliebig beschleunigte Bewegung gegeben ist, ist $\Delta t_{max}(t)$ formal wie folgt zu bestimmen:

$$\Delta t_{max}(t) := t - t_{vor}(t) \quad \text{mit} \quad |s(t_{vor}(t)) - s(t)| \stackrel{!}{=} \frac{l_b}{\eta_{max}(t)} \quad \text{und} \quad t_{vor}(t) < t \quad (6.5)$$

Mit Gl. 6.3 und Gl. 6.5 sowie der geometrischen Ausdehnung der Wärmequelle $A_{\Gamma_l} = l_b w$ ergibt sich $q_{\eta_{max}}(t)$ nach Gl. 2.3 (S. 16) zu:

$$q_{\eta_{max}}(t) := \frac{1}{l_b w} \frac{Q_{\Gamma_l}(t)}{\Delta t_{max}(t)} \quad (6.6)$$

Auf dessen Basis wird nun während der η_G -diskretisierten Simulation die standard-korrigierte Last $q_S(t)$ bestimmt (siehe Abb. 6.2). Die tatsächliche Korrekturformel wird dabei entlang zweier Grenzfälle entwickelt, für die trotz Korrektur jeweils ein exakter Energieeintrag gefordert wird:

$$q_S(t, \eta_G = \eta_{max}(t)) \stackrel{!}{=} \frac{1}{\eta_{max}(t)} q_{\eta_{max}}(t) \quad \text{und} \quad q_S(t, \eta_G \rightarrow \infty) \stackrel{!}{=} q_N(t) \quad (6.7)$$

Die Wichtung des $q_{\eta_{max}}(t)$ mit dem Reziproke von $\eta_{max}(t)$ ist dabei notwendig, da in einer Simulation mit $\eta_{max}(t) > 1$ der durch das $q_S(t)$ belastete Bereich $[s_{L_n}; s_{L_n} + l_b]$ auch Energieeinträge aus weiteren Lastschritten erhält.

Um die geforderten Grenzfälle aus Gl. 6.7 zu erfüllen und gleichzeitig die Linearität des Problems der Wärmeakkumulation sowie die Entwicklungsrichtlinie zum Rechenaufwand R5 (S.51) zu berücksichtigen, wird letztendlich die folgende Formel zur Standard-Korrektur vorgeschlagen:

$$q_S(t, \eta_G) := q_N(t) + \frac{1}{\eta_G} \underbrace{\left[q_{\eta_{max}}(t) - \eta_{max}(t)q_N(t) \right]}_{=: q_{corr}(t)} \quad (6.8)$$

Der Term in Klammern ist dabei unabhängig von der gewählten Zeitdiskretisierung bereits vollständig im Vorfeld der Analyse bestimmbar und wird daher zur *Korrekturwärmestromdichte* $q_{corr}(t)$ zusammengefasst. Während der FE-Simulation wird dann aus den nun drei vorzugebenden Lastverläufen $\left[s(t); q_N(t); q_{corr}(t) = f(s(t); q_N(t)) \right]$ die korrigierte Last $q_S(t)$ nur auf Basis der Zeitdiskretisierung bestimmt. Die Prozedur der Standard-Korrektur ist damit unabhängig von der vorliegenden, örtlichen Diskretisierung sowie dem gegebenen, bewegten Lastprofil.

Leistungsfähigkeit der Standard-Korrektur Die nachfolgenden Analysen zum Einfluss der RUMHI-Korrekturverfahren werden vorrangig hinsichtlich der eingetragenen Wärme durchgeführt, während auf eine Untersuchung der tatsächlichen Auswirkungen auf das resultierende Temperaturfeld weitestgehend verzichtet wird. Dies ist für die hier angestrebten Erkenntnisse ausreichend, da die RUMHI-Korrektur zum Ziel hat, den Energieeintrag in der kontinuierlichen Referenz innerhalb einer groben Simulationen nachzubilden und die im Unterabschnitt 5.2.2 (S. 81) präsentierten Ergebnisse bereits gezeigt haben, dass der Temperaturanstieg dazu stark korreliert.

Die positionsbezogenen Wärmeeinträge werden durch Berechnungen bestimmt, in denen die zeitdiskreten, strukturvariablen Simulationen gleich der in Abschnitt 3.2 (S. 37) vorgestellten Methodik virtuell nachgebildet werden. Zu jedem Lastschritt L_n werden aus den wirkenden Wärmestromdichten $q_N(t)$ bzw. $q_S(t)$ und der aktuellen Zeitschrittweite die resultierenden Wärmemengen berechnet und den jeweils belasteten Bereichen zugeordnet bzw. auf die bereits darin eingetragene Wärme aufsummiert. Die örtliche Diskretisierung von Ω_s in Bewegungsrichtung richtet sich dabei immer nach dem durch die Referenzanalyse bestimmten, maximal notwendigen Auflösungsvermögen

$l_e = l_b/\eta_R$. Zur übersichtlichen Darstellung der Ergebnisse wie z. B. in Abb. 6.4 werden die Abschnitte allerdings auf Bereiche der Länge l_b/η_C zusammengefasst, mit denen lediglich alle lokalen Variationen in den Energieeintragungsfeldern der groben Simulationen erfasst werden. Die Darstellung erfolgt mit Blick auf den diskreten Charakter der Ergebnisse vorteilhaft über Balkendiagramme³.

Weiterhin wird explizit hervorgehoben, dass die präsentierten Wärmeeintragungsfelder immer durch die sogenannte *preL₁-Manipulation* per Hand etwas verändert werden. Dabei wird den betroffenen Heatmap-Elementen der η_G -diskretisierten Simulationen exakt jene Wärmemenge hinzugefügt, welche innerhalb einer Referenzanalyse im Zeitraum vor dem ersten Lastschritt einer groben Analyse eingebracht wurde. Damit wird manuell eine systematische Diskrepanz zwischen der Referenz und den groben Simulationen eliminiert, welche in einer realen Analyse methodisch bedingt nicht zu vermeiden ist, bei der Evaluierung der Leistungsfähigkeit der Korrekturverfahren allerdings vom Wesentlichen ablenkt. Eine etwas detailliertere Erläuterung der Hintergründe zur *preL₁-Manipulation* ist im Anhang A.3 (S. 160) zu finden.

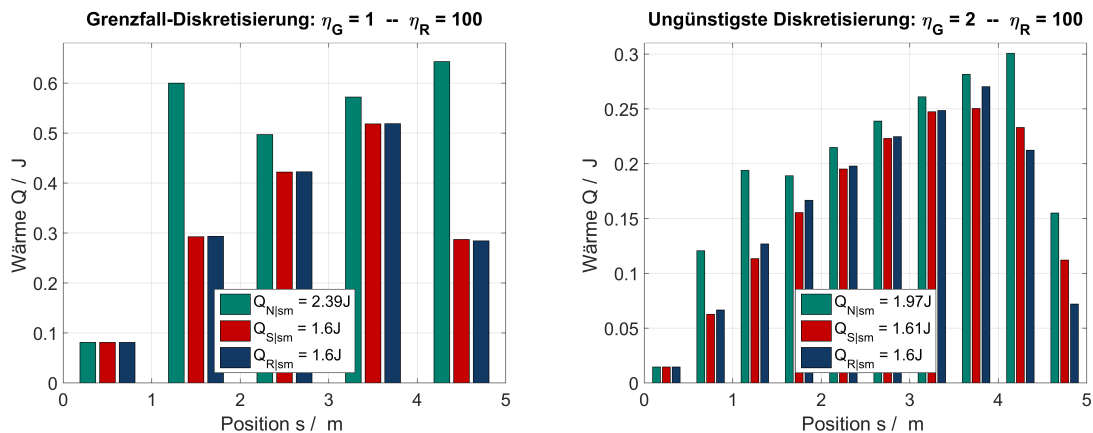


Abbildung 6.4: Wärmeeintrag bei bewegten Lastprofil mit nichtkonstanten Verläufen

Als erstes wird die Standard-Korrektur am Beispiel eines nichtkonstanten Bewegungsprofils mit $\left[s(t) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2; q_N(t) = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{s}^2} t^2 \right]$ und $t \in [0; 2\text{s}]$ ausprobiert. Zur Berechnung konkreter Wärmemengen wird dabei hier und im Folgenden ebenfalls $l_b = 1\text{ m}$ und $w = 0,6\text{ m}$ (vgl. Abb. 4.3, S. 63) angenommen.

In Abb. 6.4 (links) sind für den Grenzfall (vgl. Gl. 6.7) eines $\eta_G = 1$ die Wärmeeintragungsfelder einer korrekturfreien, groben Simulation (grün, Kurzname: N) und einer

³Damit handelt es sich prinzipiell – aber auch wortwörtlich – um eindimensionale Heatmaps.

standard-korrigierten, groben Simulation (rot, Kurzname: S) dargestellt. Diesen ist die Heatmap einer korrekturfreien Referenzanalyse (blau, Kurzname: R) gegenübergestellt, für welche ein $\eta_R = 100$ als ausreichend fein angenommen ist. Es ist zu erkennen, wie in der N -Simulation deutlich zu viel Wärme in Ω_s eingetragen wird, während der korrigierte Fall bzgl. des Gesamtwärmeeintrags (Index sm) sowie der abschnittsbezogenen Wärmeeinträge nicht von der Referenz zu unterscheiden ist. S - und R -Analyse weichen nur noch in der tatsächlichen Verteilung der eingetragenen Energie innerhalb der l_b -langen Abschnitte ab, was aber in Abb. 6.4 aufgrund der Abszissenteilung nicht beobachtbar ist und daher hier erwähnt wird. Dabei handelt es sich um dasselbe unvermeidliche Auflösungsproblem, auf das schon in Abb. 5.7 (S.85) hingewiesen wurde. Aufgrund der Priorisierung der Energieeintragsmenge in Richtlinie R4 (S.51), ist dieser Defekt allerdings tolerierbar.

Für dieselbe Bewegung zeigt Abb. 6.4 (rechts) die Wärmeeinträge im Fall, dass für die groben Simulationen ein $\eta_G = 2$ verwendet wird. Dabei handelt es sich um jene Diskretisierungstiefe, in der die Standard-Korrektur aufgrund ihrer Methodik am wenigsten bringt, da hier vergleichsweise grob verschoben wird, aber die Energie abseits der Grenzfälle prinzipbedingt nicht exakt eingetragen wird. Trotz dessen ist weiterhin eine deutliche Verbesserung der Ergebnislage in der S -Analyse erkennbar, speziell im Bereich $s \in [2 \text{ m}; 3 \text{ m}]$. Gleichzeitig ist zu beobachten, dass das Abbildungsvermögen in den Bereichen neben den Endpunkten $s \in [0; 2 \text{ m}]$ und $s \in (3 \text{ m}; 5 \text{ m}]$ – den sogenannten *Endbereichen* – etwas abfällt. Dies ist besonders am Bereich $s \in [3,5 \text{ m}; 4 \text{ m}]$ zu sehen, in dem die korrigierte Simulation sogar mehr von der Referenz abweicht, als die N -Analyse.

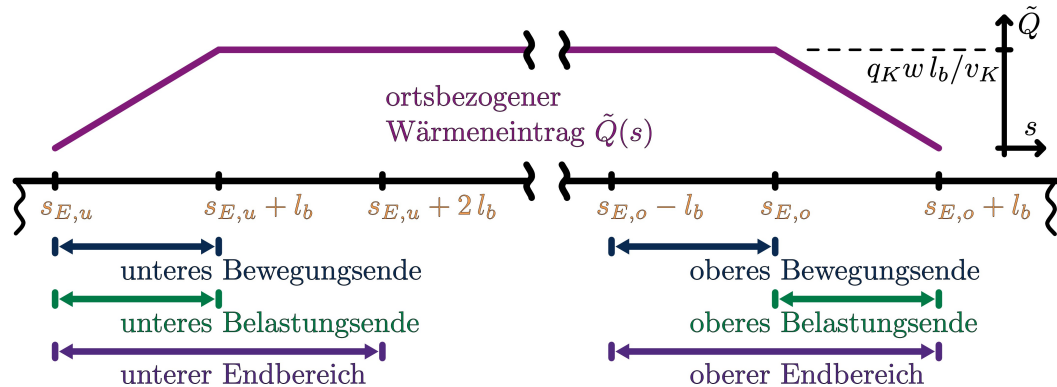


Abbildung 6.5: Nomenklatur relevanter Bereiche auf Ω_s

Da nun mit *Bewegungsende* und *Endbereich* bereits zwei Begriffe eingeführt sind, mit denen auf einen spezifischen Bereich von Ω_s in der Nähe der Bewegungsendpunkte

referenziert wird, ist in Abb. 6.5 nochmals übersichtlich dargestellt, was unter den einzelnen Begriffen verstanden wird. Für den Fall einer Bewegung zwischen den Endpunkten $s_{E,u}$ und $s_{E,o}$ mit einem konstanten, bewegten Lastprofil $[v_K t; q_K]$ ist zudem der resultierende, kontinuierliche Verlauf des positionsbezogenen Wärmeeintrags \tilde{Q} mit $[\tilde{Q}] = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}}$ dargestellt. Wie zu sehen ist, werden jene Bereiche, in denen das \tilde{Q} linear abfällt, zusätzlich als sogenannte *Belastungsenden* bezeichnet.

Die Standard-Korrektur in den Endbereichen Um den unerwarteten Leistungsabfall der Standard-Korrektur genauer zu untersuchen, werden die Energieeintragsfelder der Simulationen für ein konstantes, bewegtes Lastprofil $[s(t) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} t; q_N(t) = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}]$ herangezogen. Dabei wurde in Unterabschnitt 4.3.2 (S. 65) und weiter oben in diesem Abschnitt (S. 91) bereits dargelegt, dass für ein derartiges Lastprofil keine Fehler bei der Verwendung einer groben Zeitschrittweite zu erwarten sind. Eine Anwendung der Standard-Korrektur sollte also keine Auswirkungen auf die ursprüngliche Last bzw. die resultierenden Ergebnisse haben.

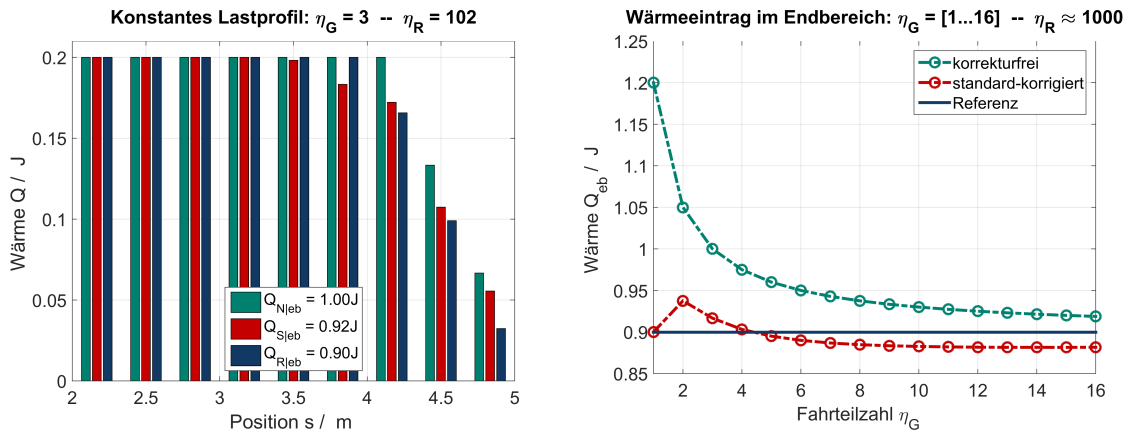


Abbildung 6.6: Wärmeeintrag in den Endbereichen bei konstantem Lastprofil

In Abb. 6.6 (links) sind die Wärmeeinträge des konstanten Bewegungsprofils im Fall einer groben Diskretisierung mit $\eta_G = 3$ dargestellt. Dabei muss ebenfalls die Referenzdiskretisierung auf $\eta_R = 102$ geändert werden, da $\eta_R/\eta_G \in \mathbb{N}$ gelten muss, damit eine exakte Zuordenbarkeit der aus den Wegschrittweiten resultierenden Bereiche auf Ω_s möglich ist. Es ist zu erkennen, dass außerhalb ($s \in [2\text{ m}; 3\text{ m}]$) der Endbereiche – wie gefordert – keine Auswirkungen der Standard-Korrektur zu beobachten sind. In dem dargestellten Endbereich ($s \in [3\text{ m}; 5\text{ m}]$) ist dagegen eine Abweichung in der S -Analyse zu erkennen, weshalb sich im Folgenden auf diesen Bereich fokussiert wird.

Auf den ersten Blick erscheint es, als ob die Standard-Korrektur im Endbereich zu einer fehlerhaften Verteilung der einzubringenden Wärme führt, wobei in die drei Bereiche des Belastungsendes ($s \in (4 \text{ m}; 5 \text{ m}]$) zu viel Energie eingetragen wird, während der Rest des Endbereichs zu wenig Last sieht. Wird zudem der Gesamtenergieeintrag Q_{eb} im Endbereich ($s \in (3 \text{ m}; 5 \text{ m}]$) betrachtet, so lässt sich erkennen, dass sich auch hier die S - und R -Analyse unterscheiden. Zur Untersuchung dieses Aspekts der Standard-Korrektur sind deshalb in Abb. 6.6 (rechts) die resultierenden Q_{eb} für weitere $\eta \in \mathbb{N}$ aufgetragen. Dabei ist zu sehen, dass die beobachteten Abweichungen immer⁴ auftreten, dabei je nach Diskretisierungstiefe positiv oder negativ ausfallen sowie für feinere η_G sogar dazu führen können, dass die S -Analyse stärker von der Referenz abweicht als die N -Analyse. Da aber die Verwendung einer groben Zeitdiskretisierung aufgrund des konstanten, bewegten Lastprofils als Fehlerursache auszuschließen ist, muss dieser Defekt von systematischem Charakter sein und dessen Ursache in der Arbeitsweise der Standard-Korrektur liegen. Im nächsten Abschnitt wird dieses Fehlverhalten daher eingehend untersucht und anschließend korrigiert.

6.2 Korrektur der Wärmefehleinträge in den Endbereichen

Wird zudem berücksichtigt, dass im Fall von oszillierenden Bewegungen bei jeder Fahrt durch einen Umkehrpunkt jeweils zweimal der Endbereich zu durchfahren ist, so wird ersichtlich, dass der Wärmefehleintrag mit jeder Oszillation wächst und daher auf lange Sicht nicht zu tolerieren ist (Richtlinie R4, S.51). Besonders betroffen sind dabei strukturvariable Analysen, in denen das Verhältnis $|s_E - s_A|/l_b$ eher gering ist, der Endbereich also einen vergleichsweise großen Anteil am gesamten Bewegungsabschnitt hat.

Zur Analyse des Endbereich-Defekts wird zunächst analytisch beschrieben, wie die Standard-Korrektur bei einem konstanten, bewegten Lastprofil innerhalb der Endbereiche arbeitet. Damit wird anschließend die tatsächliche Ursache der Problematik identifiziert und es wird eine passende, als *Endbereich-Korrektur* bezeichnete Korrekturmethode entwickelt. Der Einfachheit halber wird sich dabei lediglich auf die Einfahrt in einen oberen Endpunkt $s_E = s(t_E)$ fokussiert, sodass $t \leq t_E$ und $s(t) \leq s_E$. Die drei

⁴Der Grenzfall $\eta_G = 1$ ist aufgrund der Konstruktion des Korrekturverfahrens erwartungsgemäß davon ausgeschlossen.

anderen möglichen Durchfahrten eines Endbereichs können aber vollständig analog behandelt werden und die hier entwickelten Formeln zur Endbereich-Korrektur gelten für diese ebenfalls.

Korrekturwärmestromdichte für konstante, bewegte Lastprofile Kommt die Standard-Korrektur zur Anwendung, so wird aus dem gegebenen Lastprofil im Vorfeld der Simulation zunächst die Korrekturwärmestromdichte $q_{crr}(t)$ abgeleitet, wobei die Berechnung des Wärmeeintragsprozesses $Q_{\Gamma_l}(t)$ (Gl. 6.3) den Ausgangspunkt darstellt. Für ein konstantes, bewegtes Lastprofil $[s(t) = v_K t; q_N(t) = q_K]$ ergibt sich im Endbereich $s(t) \in (s_E - l_M; s_E]$ der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{\Gamma_l}(t)}{w} &= \int_{t - \frac{l_b}{v_K}}^t [s(\tau) + l_b - s(t)] q_K d\tau + \int_t^{t_E} [s(t) + l_b - s(\tau)] q_K d\tau \\ &= \left[-\frac{v_K}{2} t^2 + (v_K t_E - l_b) t + t_E \left(l_b - \frac{v_K}{2} t_E \right) + \frac{1}{2} \frac{l_b^2}{v_K} \right] q_K \\ &\quad \text{mit } t \in \left(t_E - \frac{l_b}{v_K}; t_E \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Die Information über die maximal mögliche Zeitdiskretisierung innerhalb des Endbereichs lässt sich in den Formen als Fahrteilzahl und Zeitdauer (siehe Gl. 6.4 und Gl. 6.5) ebenfalls konkret für das konstante, bewegte Lastprofil bestimmen zu:

$$\begin{aligned} \eta_{max}(t) &= \begin{cases} \frac{l_b}{v_K(t_E - t)} & \text{falls } t \in \left(t_E - \frac{l_b}{v_K}; t_E \right) \\ 1 & \text{falls } t = t_E \end{cases} \\ \text{und } \Delta t_{max}(t) &= \begin{cases} -(t - t_E) & \text{falls } t \in \left(t_E - \frac{l_b}{v_K}; t_E \right) \\ \frac{l_b}{v_K} & \text{falls } t = t_E \end{cases} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Mit den letzten beiden Gleichungen ergibt sich dann die Korrekturwärmestromdichte $q_{crr}(t)$ im Endbereich entsprechend Gl. 6.6 und Gl. 6.8 zu:

$$\frac{q_{crr}(t)}{q_K} = \frac{1}{l_b w} \frac{Q_{\Gamma_l}(t)/q_K}{\Delta t_{max}(t)} - \eta_{max}(t) = \begin{cases} -\frac{[v_K(t-t_E)+l_b]^2}{2v_K l_b(t_E-t)} & \text{falls } t \in \left(t_E - \frac{l_b}{v_K}; t_E \right) \\ -\frac{1}{2} & \text{when } t = t_E \end{cases} \quad (6.11)$$

Das konstante, bewegte Lastprofil führt also im Endbereich auf eine Korrekturwärmestromdichte $q_{crr}(t)$, deren dominanter Anteil hyperbolisch mit $\lim_{t \rightarrow t_E} q_{crr}(t) = -\infty$ abfällt, die aber direkt am Endpunkt t_E eine Unstetigkeit aufweist. Diese Eigenschaften erklä-

ren in Kombination mit dem Ablauf einer strukturvariablen Simulation, warum durch die Standard-Korrektur die in Abb. 6.4 und Abb. 6.6 beobachteten Endbereichsdefekte eingebracht werden.

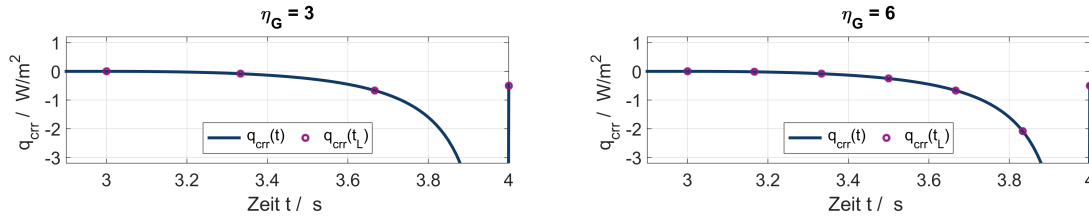


Abbildung 6.7: Auswertung der Korrekturwärmestromdichte im Bewegungsende

In Abb. 6.7 ist dazu beispielhaft illustriert, an welchen Stellen innerhalb der Bewegungsenden das $q_{crr}(t)$ im Fall einer S -Analyse mit $\eta_G = 3$ (links) bzw. $\eta_G = 6$ (rechts) ausgewertet wird. Aufgrund der gewählten Bewegungsgeschwindigkeit von $v_K = 1 \frac{m}{s}$ ist es irrelevant, ob an der Abszisse die Zeit t oder die zugehörige Verschiebung $s(t)$ angetragen ist. Die konstante Wegschrittweite Δs führt nun dazu, dass die Abszissenwerte der Auswertungspunkte bei $\eta \in \mathbb{N}$ symmetrisch⁵ um den Mittelpunkt des Bewegungsendes (bei $s = s_E - l_b/2$) bzw. der Dauer von dessen Durchfahrt (zum Zeitpunkt $t = t_E - l_b/2v_K$) angeordnet sind. Da der Endpunkt s_E immer exakt angefahren wird, ist dieser ein obligatorischer Bestandteil der Menge der Auswertepunkte. Durch diesen wird in standard-korrigierten Simulationen mit $\eta_G > 1$ aufgrund des isolierten Charakters von $q_{crr}(t_E)$ grundsätzlich zu viel Wärme als nötig zu $Q_{S|eb}$ beigetragen. Dementgegen wird durch die Auswertepunkte auf dem Hyperbelast in Summe stets zu wenig Wärme eingetragen, da für das hyperbolisch abfallende $q_{crr}(t)$ bzgl. der $(s_E - l_b/2)$ -Vertikale keine Symmetrie vorliegt. Da alle Beiträge zu $Q_{S|eb}$ gleich gewichtet werden, verliert der Endpunkt mit steigendem η_G gegenüber den davorliegenden Lastschritten an Dominanz. Die beobachteten Fehleinträge im Endbereich sowie der Wechsel zwischen Über- und Untereintrag im Speziellen (siehe Abb. 6.6 rechts) sind dadurch erklärt.

Analytische Wärmeeinträge in S- und R-Analyse Mit den nun bekannten, analytischen Ausdrücken des erweiterten, bewegten Lastprofils $[s(t); q_N(t); q_{crr}(t)]$ lässt sich beschreiben, wieviel Wärme in einen bestimmten Bereich von Ω_S durch die standard-korrigierte Simulation eingebracht wird. Ein Vergleich mit dem ebenfalls

⁵Im Fall von $\eta \notin \mathbb{N}$ ist die Symmetrie der Auswertepunkte bzgl. der Mitte des Bewegungsendes zwar nicht exakt gegeben, die erläuterten Zusammenhänge, welche zu den Endbereichsdefekten führen, liegen aber genauso vor.

beschreibbaren Referenzwärmeeintrag wird dann zur Korrektur der Endbereichsdefekte herangezogen.

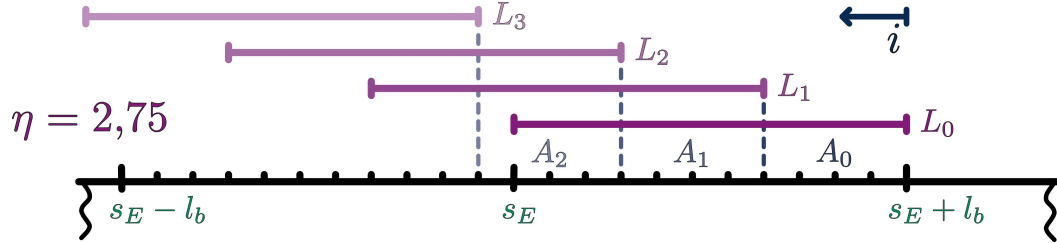


Abbildung 6.8: Schema der Einfahrt in einen Endpunkt

Zur Beschreibung der Wärmeeinträge im Endbereich wird dieser – wie in Abb. 6.8 am Beispiel eines $\eta_G = 11/4$ dargestellt – in Δs -lange Teilabschnitte A_i aufgeteilt. Für diese und die Lastschritte L_i wird dabei eine neue Indizierung $i \in \mathbb{N}$ eingeführt, in der beginnend bei $i = 0$ vom Endpunkt weggezählt wird. Wie in Abb. 6.8 zu sehen ist, sind die Abschnitte mit $i = 0 \dots \eta$ (vgl. Gl. 5.8, S. 79) aufgrund ihrer Länge gleich der Wegschrittweite auch dahingehend zu unterscheiden, wie oft diese ein Teil der aktuellen Lastzone $\Gamma_l(t_{L_i})$ sind.

Die Analyse der Problematik für $\eta \notin \mathbb{N}$ ist hier notwendig, da der Abschnitt A_η ebenfalls noch durch die Endbereichsdefekte beeinträchtigt ist, aber in diesem gleichzeitig die BD-Problematik (vgl. Abb. 5.2, S. 74) zum Tragen kommt. Anhand Abb. 6.8 ist weiterhin zu sehen, dass Lastschritte mit $i \geq \eta$ nicht mehr von dem hyperbolischen Abschnitt von $q_{crr}(t)$ betroffen sind (vgl. Abb. 6.7) und somit nicht durch die Endbereich-Korrektur beeinflusst werden sollten.

Zunächst wird für das konstante, bewegte Lastprofil $[v_K t; q_K]$ jene Wärme Q_S beschrieben, welche allgemein innerhalb einer standard-korrigierten Simulation durch den Lastschritt L_i in einen vollständig bedeckten Abschnitt A_i der Länge $l_A(\eta) = \Delta s$ eingebracht wird. Mit Gl. 6.1 und Gl. 6.8 ergibt sich die Wärme für ein s_{L_i} innerhalb des Bewegungsendes durch Auswerten von $q_{crr}(t)$ aus Gl. 6.11 zum zugehörigen Zeitpunkt $t_{L_i} = t_E - i/\eta l_b/v_K$ zu:

$$\begin{aligned}
 {}_{A_i, L_i} Q_S(\eta) &= w \cdot \underbrace{\frac{l_A(\eta)}{\eta}}_{l_b} \cdot \underbrace{\frac{\Delta t(\eta)}{\eta v_K}}_{\frac{1}{\eta} \frac{l_b}{v_K}} \cdot \overbrace{\left[q_K + \frac{1}{\eta} q_{crr}(t_{L_i}) \right]}^{q_S(t_{L_i}, \eta)} \\
 &= q_K w \frac{1}{\eta^2} \frac{l_b^2}{v_K} \begin{cases} 1 - \frac{1}{2\eta} & \text{falls } i = 0 \\ 1 - \frac{1}{2\eta^2} \frac{(\eta-i)^2}{i} & \text{falls } i > 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Für die Abschnitte ohne BD-Defekt A_i mit $i = 0 \dots \eta - 1$ lässt sich der Gesamtwärmeeintrag innerhalb einer S -Analyse damit bestimmen zu:

$$\begin{aligned} {}_{A_i}Q_S(\eta) &= \sum_{j=0}^i {}_{A_i}Q_S(\eta) \\ &= q_K w \frac{1}{\eta^2} \frac{l_b^2}{v_K} \left[1 + i - \frac{1}{2\eta} - \frac{1}{2\eta^2} \cdot \sum_{j=1}^i \frac{(\eta - j)^2}{j} \right] \quad \text{mit } i = 0 \dots \eta - 1 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Diese Wärme ist dabei über die komplette Länge des Abschnitts A_i gleichmäßig verteilt, da dieser in den Lastschritten, in denen ${}_{A_i}Q_S$ sukzessive akkumuliert wird, jeweils vollständig bedeckt ist.

Zusätzlich lässt sich aus dem gegebenen Lastprofil ebenfalls beschreiben, wieviel Wärme durch eine kontinuierliche Referenz in einen beliebigen Abschnitt von Ω_s eingebracht wird. Für einen Abschnitt A_i mit $l_A < l_b$ ist dies analog zum Vorgehen in Gl. 6.3 möglich, wobei zusätzlich ein Zeitraum der Überfahrt mit vollständiger Bedeckung zu integrieren ist. Für die BD-freien Abschnitte mit $i = 0 \dots \eta - 1$, aus denen die Wärmequelle nicht wieder hinausfährt, ergibt sich für das konstante, bewegte Lastprofil:

$$\begin{aligned} {}_{A_i}Q_R(\eta_G) &= \int_{t_E - \frac{i+1}{\eta} \frac{l_b}{v_K}}^{t_E - \frac{i}{\eta} \frac{l_b}{v_K}} q_K w \left[v_K \tau + l_b - \left(v_K t_E + l_b - \frac{\eta - (i+1)}{\eta} l_b \right) \right] d\tau \\ &\quad + \int_{t_E - \frac{i}{\eta} \frac{l_b}{v_K}}^{t_E} q_K w \frac{l_b}{\eta} d\tau \\ &= q_K w \frac{1}{\eta^2} \frac{l_b^2}{v_K} \left(i + \frac{1}{2} \right) \quad \text{mit } i = 0 \dots \eta - 1 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Es ist zu sehen, dass die Berechnungsvorschriften aus Gl. 6.12 bis Gl. 6.14 alle den gleichen Kern $(q_K w l_b^2) / (\eta^2 v_K)$ beinhalten, welcher den Wärmeeintrag in einen vollständig überfahrenen, Δs -langen Abschnitt darstellt. Die Skalierungsfaktoren sind dann nur noch vom Abschnittsindex i und der Fahrteilzahl η abhängig.

Für den bereits BD-belasteten Abschnitt A_η (siehe Abb. 6.8) ist die Beschreibung der Wärmemengen ${}_{A_\eta}Q_S(\eta_G)$ bzw. ${}_{A_\eta}Q_R(\eta_G)$ (vgl. Gl. 6.13 bzw. Gl. 6.14) analog möglich. Allerdings ist dies für die Entwicklung der Endbereich-Korrektur nicht erforderlich, was in dem nachfolgenden Paragraph detailliert erläutert wird.

Herleitung der Korrekturfaktoren im Endbereich Die Entwicklung der eigentlichen Endbereich-Korrektur (Index E) erfolgt nun unter Beachtung der Art und Weise, wie die Wärme während einer groben Simulationen tatsächlich eingetragen wird (siehe Abb. 6.8). Entsprechend Richtlinie R1 (S. 50) ist diese Prozedur zwingend beizubehalten, sodass die einzige Möglichkeit zur Intervention eine Anpassung der zu einem Lastschritt L_j applizierten Wärmestromdichte $q_N(t_{L_j})$ (bzw. $q_S(t_{L_j})$ nach der Standard-Korrektur) ist. Die Korrektur des Wärmeeintrags in einen bestimmten Abschnitt A_i muss daher sukzessive über jene Lastschritte erfolgen, in denen A_i Teil der aktuellen Lastzone $\Gamma_l(t_{L_j})$ ist.

Damit das Endbereich-korrigierte $A_i Q_E(\eta)$ innerhalb einer zeitdiskreten Analyse letztendlich gleich dem Referenzeintrag $A_i Q_R(\eta)$ ist, muss die schrittweise Akkumulation der Wärme durch eine Vorschrift der folgenden Form darstellbar sein:

$$A_i Q_E(\eta) = \underbrace{\sum_{j=0}^{i-1} L_j C_E(\eta) \cdot A_{i,L_j} Q_S(\eta) + L_i C_E(\eta) \cdot A_{i,L_i} Q_S(\eta)}_{= A_{i-1} Q_R(\eta) \quad \text{falls } i \leq \eta-1} \stackrel{!}{=} A_i Q_R(\eta) \quad (6.15)$$

Darin verschwindet für $i = 0$ der Summenterm, sodass der verbleibende Ausdruck in eine vollständig bestimmte Gleichung zur Ermittlung des Faktors $L_0 C_E(\eta)$ übergeht, mit dem der Lastschritt im Endpunkt hinsichtlich der Endbereichsdefekte zu korrigieren ist. Mit Gl. 6.12 und Gl. 6.14 ergibt sich:

$$L_0 C_E(\eta) = \frac{A_0 Q_R(\eta)}{A_{0,L_0} Q_S(\eta)} = \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2\eta}} = \frac{\eta}{2\eta - 1} \quad \text{für } i = 0 \quad (6.16)$$

In Gl. 6.15 wurde zudem bereits angedeutet, dass im Fall von $i > 0$ das Lösen eines linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der unbekanntenen Korrekturfaktoren $L_j C_E(\eta)$ umgangen wird, indem alle näher zum Endpunkt liegenden Lastschritte $L_{j < i}$ bereits als exakt korrigiert angenommen werden. Für die von der BD-Problematik noch nicht betroffenen Abschnitte A_i mit $i = 1 \dots (\eta - 1)$ ist der Wärmeeintrag durch die Lastschritte L_0 bis $L_{\eta-1}$ dann gleich dem Referenzeintrag im benachbarten Abschnitt A_{i-1} (vgl. Abb. 6.8). Mit Gl. 6.12 und Gl. 6.14 lassen sich so die weiteren

Korrekturfaktoren bestimmen:

$$\begin{aligned}
 L_i C_E(\eta) &= \frac{A_i Q_R(\eta) - A_{i-1} Q_R(\eta)}{A_{i,L_i} Q_S(\eta)} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2\eta^2} \frac{(\eta-i)^2}{i}} = \frac{2i \cdot \eta^2}{2i \cdot \eta^2 - (\eta-i)^2} \quad \text{für } 1 \leq i \leq \eta - 1
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Die Herleitung eines Korrekturfaktors für Abschnitt A_{η} kann nun weitestgehend analog zum Vorgehen aus Gl. 6.13 bis Gl. 6.17 erfolgen. Es muss aber beachtet, dass eine energetisch korrekte, (η) -diskretisierte Simulation aufgrund der BD-Problematik prinzipbedingt eine von der Referenzwärme abweichende Wärme in A_{η} einzutragen hat. Dies ist durch den Umstand begründet, dass ein Δs -langer Abschnitt bei BD-Beeinträchtigung immer jeweils einen Beulen- und Dellenbereich beinhaltet, während die Beulenanzahl in einem l_b -langen Bereich immer um eins größer als die der Dellen ist (siehe dazu Unterabschnitt 5.2 (S. 78), speziell Abb. 5.4). Der Wärmeeintrag in einen $(\Delta s = l_b/\eta)$ -langen Bereich unterscheidet sich daher von einem $(1/\eta)$ -großen Anteil der gesamt in einem l_b -langen Bereich eingetragenen Wärme. Beim Bestimmen des Korrekturfaktors für L_{η} ist daher die in A_{η} benötigte Referenzwärme einer korrekten groben Simulation zunächst entsprechend den BD-bedingten Verhältnissen per Skalierung aus der Referenzwärme der kontinuierlichen Bewegung abzuleiten.

Die individuelle Herleitung des $L_{\eta} C_E(\eta)$ wird hier allerdings umgangen, indem die Wirkungsweise der Endbereich-Korrektur für die Lastschritte mit $1 \leq i < \eta$ analysiert und anschließend auf den Fall $i = \eta$ übertragen wird. Beim Blick auf die Bildung der Korrekturfaktoren in Gl. 6.17 lässt sich erkennen, dass aus dem Referenzverhalten der ursprüngliche Nenner $A_i Q_R(\eta) - A_{i-1} Q_R(\eta) = 1 \cdot q_K (w_b^2)/(\eta^2 v_K)$, also der A_i -bezogene Wärmeeintrag des korrekturfreien Falls resultiert. Mittels der Endbereich-Korrektur werden also die aus Standard-Korrektur bedingten Wärmefehleinträge zurück auf den energetisch korrekten Fall skaliert, welcher für ein konstantes, bewegtes Lastprofil die korrekturfreie Simulation ist (vgl. Gl. 6.2). Die Herleitung des $L_{\eta} C_E(\eta)$ wird daher ebenfalls auf einen Wärmeeintrag von $1 \cdot q_K (w_b^2)/(\eta^2 v_K)$ im Zähler führen, da dies eben jene Wärmemenge ist, die im energetisch korrekten Fall während eines Δt -langen Zeitschritt zugeführt wird. Da zudem die im Fall einer standard-korrigierten Simulation durch L_{η} eingetragene Wärme $A_{\eta,L_{\eta}} Q_S(\eta)$ ebenfalls über Gl. 6.12 zu bestimmen ist, folgt, dass deren Korrekturfaktor aus Gl. 6.17 auch für den Fall $i = \eta$ gültig ist.

Damit sind die Korrekturfaktoren für alle Lastschritte im Endbereich hergeleitet. Diese lassen sich ebenfalls direkt zur Skalierung der Wärmestromdichte verwenden, da

diese mit der Wärme in einem linearen Zusammenhang steht (siehe Gl. 6.1). Indem $i \in \mathbb{N}$ nun als die Anzahl der Lastschritte zum örtlich nächsten Endpunkt aufgefasst wird, ergibt sich die Endbereich-korrigierte Wärmestromdichte $q_E(t_{L_i}, \eta)$ aus der standard-korrigierten Wärmestromdichte $q_S(t_{L_i}, \eta)$ (vgl. Gl. 6.8) für jeden Lastschritt einer diskreten Bewegung von s_A nach s_E zu:

$$q_E(t_{L_i}, \eta) = {}_{L_i}C_E(\eta) \cdot q_S(t_{L_i}, \eta)$$

$$\text{mit } {}_{L_i}C_E(\eta) = \begin{cases} \frac{\eta}{2\eta-1} & \text{falls } i = 0 \\ \frac{2i \cdot \eta^2}{2i \cdot \eta^2 - (\eta-i)^2} & \text{falls } 1 \leq i \leq \eta \\ 1 & \text{falls } i > \eta \end{cases} \quad (6.18)$$

Dieser Ausdruck ist bisher nur für die Simulation eines einzelnen Bewegungsabschnitts gültig, da noch nicht berücksichtigt wurde, wie in diskreten Simulationen der Wärmeeintrag im Fall einer Umkehr erfolgt. Die nachfolgende Analyse zum Verhalten der Endbereich-Korrektur in der Anwendung betrachtet daher zunächst nur einzelne Bewegungsabschnitte.

Leistungsfähigkeit der Endbereich-Korrektur Die Integration der Endbereich-Korrektur in die strukturvariable Simulation ist ohne weiteres möglich, da die benötigte Schrittdistanz zu den Endpunkten i direkt aus n_L – der Gesamtanzahl der Lastschritte zur Überwindung von $|s_E - s_A|$ – abgeleitet werden kann und n_L entsprechend Gl. 5.3 (S. 77) bereits im Vorfeld der Analyse des Abschnitts während der Zeitschrittweitensteuerung ermittelt wird.

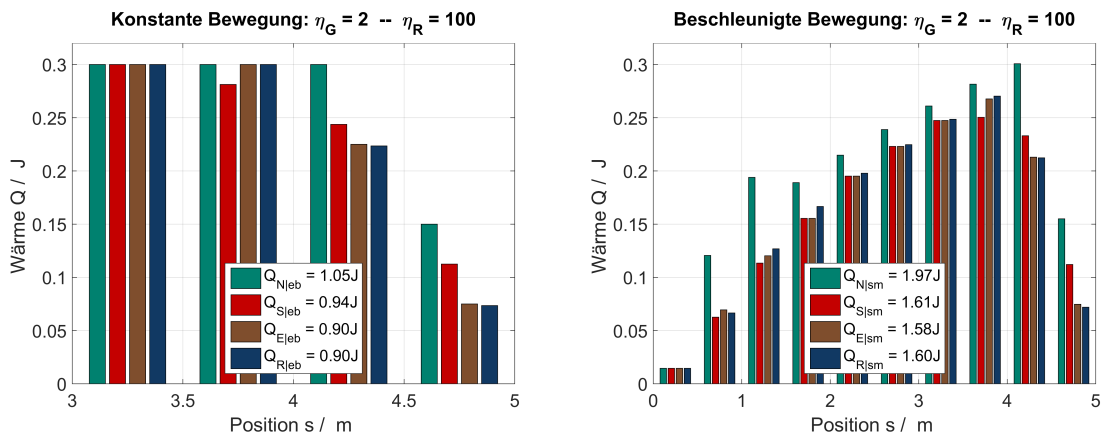
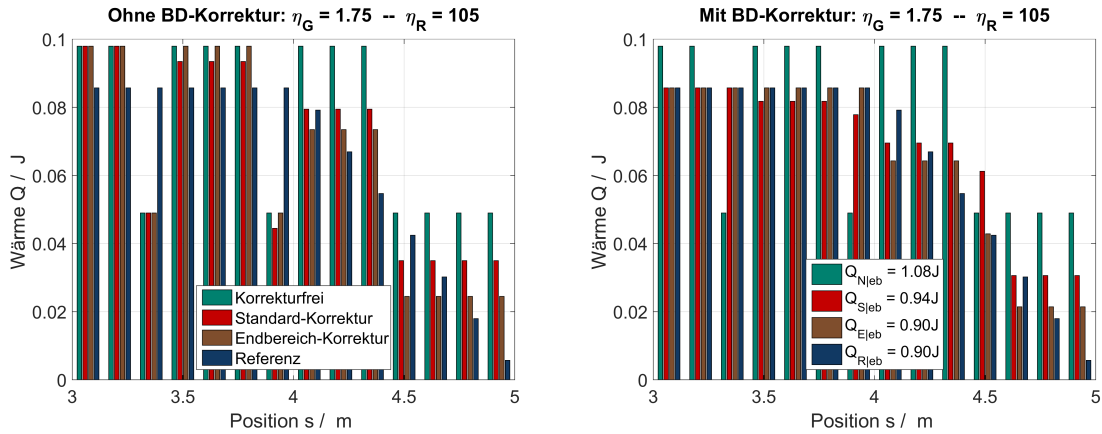


Abbildung 6.9: Auswirkungen der Endbereich-Korrektur

In Abb. 6.9 (links) sind nun die Wärmeeinträge beim Anwenden der Endbereich-Korrektur (braun, Kurzname E) den Ergebnissen der anderen Simulationsarten aus Abb. 6.6 (links) gegenübergestellt, zunächst erneut für eine Analyse des konstanten, bewegten Lastprofils $\left[1 \frac{\text{m}}{\text{s}} t; 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$. Mit $\eta_G = 2$ ist dabei jene Zeitdiskretisierung gewählt, für die nach Abb. 6.6 (rechts) die größten Abweichungen zwischen S - und R -Analyse auftreten. Es ist zu sehen, dass durch die Endbereich-Korrektur die angestrebte Angleichung des Gesamtwärmeeintrags im Endbereich erreicht wurde. Daneben ist außerdem die in der S -Analyse beobachtete Fehlerverteilung der eingetragenen Wärme korrigiert worden. Die RUMHI-Korrektur ist damit in der Lage, die geforderte Abwesenheit eines Einflusses bei der Simulationen eines konstanten, bewegten Lastprofils zu gewährleisten. Gleichzeitig ist die systematische Überabschätzung der N -Analyse direkt im Endpunkt korrigiert worden, da über die Standardkorrektur der lineare Abfall des Wärmeeintrags im Belastungsende (vgl. Abb. 6.5) erfasst wird.

In Abb. 6.9 (rechts) sind die Wärmeeinträge bei der Simulation der beschleunigten Bewegung aus Abb. 6.4 für den gesamten Bewegungsabschnitt dargestellt. In den Endbereichen ist gegenüber der S -Analyse eine deutlich verbesserte Abbildung des Referenzwärmeeintrags innerhalb der E -Analyse feststellbar. Wird allerdings der Gesamtwärmeeintrag Q_{sm} verglichen, so ist aufgrund von $|Q_{R|sm} - Q_{E|sm}| > |Q_{R|sm} - Q_{S|sm}|$ festzustellen, dass die Endbereich-Korrektur in diesem Vergleichswert ein schlechteres Ergebnis liefert. Dies ist durch die grundsätzliche Wirkungsweise der Standard-Korrektur begründet, durch welche bei einer Simulation abseits der Grenzfälle (vgl. Gl. 6.7) im Fall von bewegten Lastprofilen mit $a(t) > 0$ und $\frac{d}{dt}q_N(t) > 0$ generell zu wenig Energie eingetragen wird. Allerdings wird in S -Analysen, welche wie in Abb. 6.9 mit $\eta_G = 2$ diskretisiert werden, auch immer zu viel Wärme in die Endbereiche eingetragen (siehe Abb. 6.6 (rechts)). Damit liegen zwei nachteilige Eigenschaften der Standard-Korrektur vor, welche sich bei dem in Abb. 6.9 betrachteten, bewegten Lastprofil und der gewählten Zeitdiskretisierung zufällig gegenseitig aufheben. Dass die E -Analyse gegenüber der S -Analyse das Q_{sm} schlechter abbildet, ist also nicht systematisch und spricht daher nicht gegen eine Anwendung der Endbereich-Korrektur.

In Abb. 6.10 sind zudem die Wärmeeintragsfelder einer Analyse des konstanten, bewegten Lastprofils aus Abb. 6.6 (links) unter Verwendung einer Zeitdiskretisierung mit


 Abbildung 6.10: Endbereich-Korrektur bei Simulationen mit $\eta \notin \mathbb{N}$

$\eta_G = 7/4 \notin \mathbb{N}$ zu sehen⁶. In der linken Spalte ist es dabei schwieriger die vorteilhaften Auswirkungen der RUMHI-Korrekturen zu identifizieren, da alle grob diskretisierten Simulationen zusätzlich durch die auftretenden BD-Defekte von der Referenz abweichen. Die Beulen- bzw. Dellenbereiche sind z. B. deutlich in $s \in [(4 - 4/7) \text{ m}; (4 - 1/7) \text{ m}]$ bzw. $s \in [(4 - 1/7) \text{ m}; 4 \text{ m}]$ zu erkennen.

In Abb. 6.10 (rechts) sind daher bei der Bestimmung der Heatmaps der korrigierten Simulationen beide bisher entwickelten Korrekturverfahren angewandt worden. Dabei wird die bewegte Wärmequelle zunächst im Ganzen standard- (*S*-Analyse) bzw. Endbereich-korrigiert (*E*-Analyse; schließt Standard-Korrektur mit ein) und anschließend bereichsbezogen BD-korrigiert (siehe Abschnitt 5.2, S. 78). An den Ergebnissen ist zu sehen, dass die aufgrund der Standard-Korrektur eingebrachten, energetischen Fehleinträge auch hier durch die Anwendung der Endbereich-Korrektur vollständig vermieden werden und die Referenz im Rahmen des Auflösungsvermögens exakt abgebildet wird. Damit ist an einem Beispiel belegt, dass die Korrekturfaktoren aus Gl. 6.18 auch für jene Fälle funktionieren (siehe Bereich $s \in [(4 - 1/7) \text{ m}; (4 + 3/7) \text{ m}] \hat{=} A_\eta$ bei $\eta_G = 1,75$), in denen deren Herleitung nicht vollständig formal dargelegt wurde.

⁶Für die Berechnung und Darstellung der Wärmeeintragsfelder von $(\eta_G \notin \mathbb{N})$ -Analysen ist es erforderlich, dass eine korrekte Auflösung der auftretenden BD-Bereiche durch die gewählte Referenzdiskretisierung möglich ist; d.h. $l_B(\eta_G)/(l_b/\eta_R) = n_{R,B} \stackrel{!}{\in} \mathbb{N}$ und $l_D(\eta_G)/(l_b/\eta_R) = n_{R,D} \stackrel{!}{\in} \mathbb{N}$. Die Diskretisierung der Abszisse kann mit einer Länge von $n_{R,BD} \cdot l_b/\eta_R$ erfolgen. Dabei ist $n_{R,BD}$ der größte gemeinsame Teiler von $n_{R,B}$ und $n_{R,D}$, welcher z. B. mit dem Algorithmus von EUKLID bestimmt werden kann (siehe KNUTH [56]).

Beeinträchtigung durch beide Endpunkte des Abschnitts Bisher wurde bei der Herleitung der Endbereichs-Korrektur jener, eigentlich allgemeinere Fall außen vor gelassen, bei dem die Anwendung der Standard-Korrektur durch beide Endpunkte gleichzeitig beeinträchtigt ist. Diese Situation tritt auf, wenn sich die bewegte Wärmequelle zwischen zwei sehr nah beieinander liegenden Endpunkten befindet, genauer wenn $|s_E - s_A| < 2l_b$.

In einem derartigen Fall bleibt die Prozedur der Standard-Korrektur unverändert (siehe Gl. 6.3 bis Gl. 6.8). Die Berücksichtigung einer Doppelbeeinträchtigung wirkt sich lediglich auf die Herleitung der Endbereich-Korrektur aus. Diese erfolgt zwar vollständig analog zum Vorgehen in Gl. 6.9 bis Gl. 6.18, fällt aber dadurch, dass die Möglichkeit einer zweiseitigen Begrenzung in Betracht gezogen werden muss, deutlich umfangreicher aus. Hier wird daher nur die resultierende Korrekturvorschrift angegeben, während deren ausführliche Herleitung im Anhang A.4 (S. 162) zu finden ist.

Zur Korrektur einer doppelten Beeinträchtigung ist es erforderlich, klar zwischen den Schrittabständen $\tilde{i}_A = |s(t_{L_n}) - s_A|/\Delta s \in \mathbb{N}$ und $\tilde{i}_E = |s(t_{L_n}) - s_E|/\Delta s \in \mathbb{N}$ zu unterscheiden. Der letztendliche Korrekturfaktor, welcher für die einfache und doppelte Beeinträchtigung sowie für den Fall ohne Endbereichsdefekt gültig ist, lautet damit:

$$L_{\tilde{i}_A|\tilde{i}_E} C_E(\eta) = \frac{2i_M\eta^2}{2i_M\eta^2 - (\eta - i_A)^2 - (\eta - i_E)^2}$$

mit $i_M = \min[i_A, i_E] \stackrel{!}{>} 0$ und
$$\begin{bmatrix} i_A \\ i_E \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \tilde{i}_A \\ \tilde{i}_E \end{bmatrix} & \text{falls} \quad \begin{bmatrix} \tilde{i}_A \\ \tilde{i}_E \end{bmatrix} \leq \eta \\ \eta & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.19)$$

Im Fall von $|s_E - s_A| < l_b$ sind ebenfalls die Lastschritte an den Endpunkten mit einem $i_M = 0$ von einer Beeinträchtigung durch den gegenüberliegenden Endpunkt betroffen. Um dies zu berücksichtigen, müsste der für die Endpunkte gültige Korrekturfaktor (vgl. Gl. 6.18) ebenfalls neu hergeleitet werden. Hier wird allerdings darauf verzichtet, da im folgenden Abschnitt ein vollständig anderes Verfahren zur Bestimmung der RUMHI-korrigierten Wärmestromdichten an den Endpunkten vorgeschlagen wird.

6.3 Korrektur der Wärmefehleinträge in den Endbereichen

Innerhalb der technologisch relevanten Anwendungsfälle der strukturvariablen Simulationen sind häufig Bewegungen abzubilden, in denen sowohl Phasen der Vor- als auch der Zurückfahrt zu finden sind. Im folgenden Abschnitt werden daher zunächst die RUMHI-Korrekturmethode für eine Anwendung an jenen Punkten, an denen die Bewegungsrichtung wechselt, erweitert. Wie gezeigt wird, ist dazu ein konsistentes Vorgehen allerdings nicht zielführend, sodass im Weiteren eine alternative Methode zur Berechnung der Wärmelast an diesen sogenannten *Umkehrpunkten* vorgestellt wird. Danach wird das Kapitel mit einer Untersuchung der Leistungsfähigkeit der gesamten RUMHI-Korrektur abgeschlossen.

6.3.1 Umkehrpunkt-Korrektur

Da die bisher betrachteten, einzelnen Bewegungsabschnitte in sich geschlossen korrigiert wurden, sind beim Übergang auf Bewegungen mit mehreren Abschnitten lediglich potentielle Auswirkungen auf die Korrektur der Umkehrpunkte zu untersuchen, da ausschließlich an diesen eine bisher noch nicht betrachtete Situation vorliegt.

Konsistente Erweiterung der RUMHI-Korrektur In Abb. 6.11 ist die schrittweise Fahrt durch einen Umkehrpunkt (Index U) innerhalb einer zeitdiskreten Analyse schematisch dargestellt. Wie durch den Übergang von violett nach grün illustriert ist, stellt der Lastschritt im Umkehrpunkt L_U gleichzeitig den End- bzw. Anfangsschritt der zwei involvierten, aufeinanderfolgenden Bewegungsabschnitte dar. Der Lastschritt L_U muss dementsprechend auch gleichzeitig den aus der Ein- und Ausfahrt resultierenden Wärmeeintrag leisten.

Die Standard-Korrektur erfolgt unter Verwendung der Korrekturwärmestromdichte $q_{err}(t)$, welche wiederum aus der in $[s_{L_U}; s_{L_U} + l_b]$ eingebrachten Wärme $Q_{\Gamma_l}(t_{L_U})$ berechnet wird. Eine konsistente Erweiterung dieser Prozedur auf das in Abb. 6.11

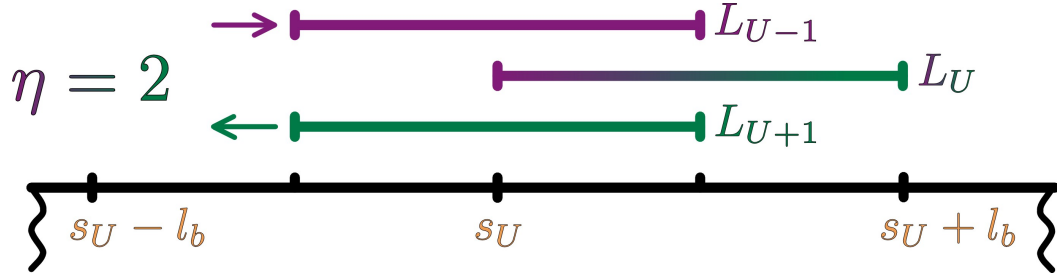


Abbildung 6.11: Wärmeeintrag in diskreten Bewegungen

gegebene Problem aus Ein- und Ausfahrt ergibt mit Gl. 6.3 und Gl. 6.8 die folgende, standard-korrigierte Wärmestromdichte:

$$q_S(t_{L_U}, \eta_{G, \text{ein}}, \eta_{G, \text{aus}}) := q_N(t_{L_U}) + \frac{1}{(\eta_{G, \text{ein}} + \eta_{G, \text{aus}}) / 2} \left[\frac{Q_{\Gamma_l}(t_{L_U})}{l_b w [t_{L_U} - t_{L_{U-1}}]} - 1 \cdot q_N(t_{L_U}) \right]$$

wobei $Q_{\Gamma_l}(t_{L_U}) \approx Q_{\Gamma_l}(t_{L_U} - \epsilon) + Q_{\Gamma_l}(t_{L_U} + \epsilon); \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (6.20)$

In diesen Ausdruck wurde die am Umkehrpunkt vorliegende, maximal mögliche Diskretisierung von $\eta_{\text{max}}(t_{L_U}) = 1$ bereits eingearbeitet. Der Umstand, dass die eingetragene Wärme $Q_{\Gamma_l}(t_{L_U})$ ungefähr doppelt so hoch ist wie in den angrenzenden Verschiebungen, unterstreicht zudem den isolierten Charakter des Umkehrpunkts. Zusätzlich wurde in Gl. 6.20 die Möglichkeit einer abweichenden zeitlichen Diskretisierung von Ein- ($\eta_{G, \text{ein}}$) und Ausfahrt ($\eta_{G, \text{aus}}$) berücksichtigt. Die dafür angegebene Verwendung des Mittelwerts der beteiligten Fahrteilzahlen ist dabei hinsichtlich des resultierenden Energieeintrags nicht vollständig korrekt. Der Ansatz stellt aber unter Beachtung der Zeitschrittweitensteuerung aus Gl. 5.3 (S. 77) eine ausreichende Näherung dar, da die tatsächlichen η_G der einzelnen Abschnitte immer in der Nähe desselben Steuerparameters $\tilde{\eta}$ liegen und somit $\eta_{G, \text{ein}} \approx \eta_{G, \text{aus}}$ ist.

Die Korrektur der Endbereichsdefekte an einem Endpunkt gestaltet sich ebenfalls anders, wenn aus diesem wieder herausgefahren wird. Die Herleitung aus Gl. 6.9 bis Gl. 6.18 ergibt für diesen Fall den folgenden Korrekturfaktor:

$${}_{L_U \hat{=} L_0} C_E(\eta_{C, \text{ein}}, \eta_{C, \text{aus}}) = 1 \quad (6.21)$$

Eine weitere Korrektur von $q_S(t_{L_U})$ ist also nicht notwendig. Damit wird im Fall eines konstanten, bewegten Lastprofils der Umstand wiedergegeben, dass der linear

abfallende Wärmeeintrag bei der Einfahrt durch eine unkorrigierte Simulation im Endpunkt zwar doppelt überschätzt wird (vgl. $s \in [4,5 \text{ m}; 5 \text{ m}]$ in Abb. 6.9 oder Gl. 6.16), eine gleichzeitige Abbildung des ebenfalls linear ansteigenden Wärmeeintrags bei der Ausfahrt aber in Summe entsprechend korrekt erfolgt. Für die Herleitung wurde dabei angenommen, dass der Umkehrpunkt nicht innerhalb des Endbereichs eines anderen Endpunkts liegt.

Ergebnisse bei konsistenter Umkehrpunkt-Korrektur Zunächst soll die zeitdiskrete Fahrt durch einen Umkehrpunkt erneut für zwei Fälle untersucht werden, in denen aufgrund der Verwendung eines konstanten, bewegten Lastprofils $[v_{Kt}; 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}]$ keine RUMHI-Fehler zu erwarten sind. Die tatsächlich betrachteten Bewegungsverläufe $s_{l,r}(t)$ dieser beiden Fälle sind zusammen mit den resultierenden Wärmeeintragsfeldern des frontseitigen Endbereichs in Abb. 6.12 präsentiert. In der linken Spalte ist die gewählte Bewegung mit $v_{l, \text{ein}} = -v_{l, \text{aus}}$ dabei symmetrisch bzgl. des Umkehrpunkts zu $t_{l, LU} = 2 \text{ s}$. Dementgegen ist die abgebildete Bewegung in der rechten Spalte asymmetrisch bzgl. $t_{r, LU} = 1 \text{ s}$ mit $|v_{r, \text{ein}}| \neq |v_{r, \text{aus}}|$. Die violetten Punkte auf den Bewegungsprofilen zeigen dabei an, zu welchen Zeitpunkten das Bewegungsprofil innerhalb der Simulationen mit $\eta_G = 2$ aufgrund der konstanten Wegschrittweite $\Delta s = l_b / \eta_G$ ausgewertet wird.

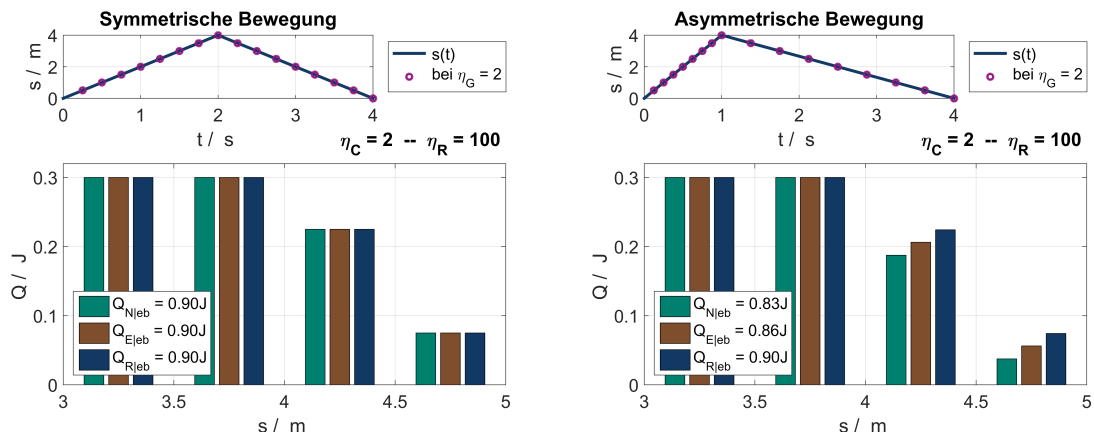


Abbildung 6.12: Wärmeeintrag in diskreten Bewegungen

Von Interesse ist nun, inwiefern die konsistente Umkehrpunkt-Korrektur den zu L_U benötigten Wärmeeintrag tatsächlich bereitstellt. Dies kann speziell an $s \in [4,5 \text{ m}; 5 \text{ m}] \hat{=} A_0$ betrachtet werden, da dieser Abschnitt ausschließlich durch L_U belastet wird, sodass das Umkehrpunkt-Verhalten dort isoliert auftritt. Für das

symmetrische Bewegungsprofil (Abb. 6.12 links) resultieren dabei in allen Simulationen gleiche Wärmeeintragsfelder, womit die geforderte Abwesenheit von RUMHI-Defekten sowie der hergeleitete Korrekturfaktor in Gl. 6.21 bestätigt werden.

Dementgegen sind bei der asymmetrischen Bewegung (Abb. 6.12 rechts) Abweichungen in den Wärmeeinträgen der groben Simulationen gegenüber der Referenz⁷ sowie zueinander zu beobachten. Speziell für die Unterschiede im Abschnitt $A_0 \triangleq s \in [4,5 \text{ m}; 5 \text{ m}]$ ist zu erkennen, dass diese im benachbarten, ebenfalls durch L_U belasteten $A_1 \triangleq s \in [4 \text{ m}; 4,5 \text{ m}]$ vom Umfang gleich bleiben, daneben allerdings in $A_2 \triangleq s \in [3,5 \text{ m}; 4 \text{ m}]$ – also jenem Abschnitt, welcher als erster nicht vom Lastschritt zum Umkehrpunkt betroffen ist – verschwinden. Damit lässt sich als Ursache der Abweichungen eindeutig eine fehlerhafte Berücksichtigung⁸ des Umkehrpunktes in den groben Simulationen identifizieren.

Eine Erklärung für dieses Fehlverhalten kann in der simultanen Zugehörigkeit des Umkehrpunktes zu zwei Bewegungsabschnitten, welche sich im Allgemeinen voneinander unterscheiden, gefunden werden. Es ist nicht möglich, die Eigenschaften beider involvierter Lastverläufe exakt abzubilden, da lediglich die Einfahrt zur Bestimmung der Zeitschrittweite $\Delta t(t_{L_U})$ herangezogen wird. Die eigentlich vorliegenden, virtuellen Verweilzeiten auf A_0 , welche allgemein mit $(t_{L_U} - t_{L_{U-1}}) \neq (t_{L_{U+1}} - t_{L_U})$ voneinander abweichen, lassen sich methodisch bedingt daher in groben Simulationen nicht erfassen und es kommt zu den beobachteten Fehlern im Wärmeeintrag. Je stärker dabei die Unterschiede in den Bewegungsverläufen sind, mit desto höheren Fehleinträgen ist zu rechnen. Der Defekt hängt damit nicht nur von der gewählten Zeitdiskretisierung, sondern ebenfalls von dem abzubildenden, bewegten Lastprofil ab.

Analytisch bestimmte Umkehrpunkt-Korrektur Aufgrund der dargelegten Abhängigkeit der Umkehrpunkt-Fehleinträge von den abzubildenden Bewegungen, ist deren Korrektur auch ausschließlich unter Einbezug dieser Bewegungsverläufe sinnvoll möglich. Gezwungenermaßen ist daher in diesem Fall die Richtlinie R3 (S. 51), welche die Unabhängigkeit vom Lastprofil fordert, aufzugeben. Andererseits lässt sich damit in beliebig groben Simulationen eine exakte Abbildung der Wärmeverhältnisse im Umkehrpunkt erreichen.

⁷Die Referenz selbst trägt dabei aufgrund des konstanten $q_{r,l|N}(t) = 1 \frac{W}{m^2}$ den gleichen Betrag an Wärme ein wie im Fall der symmetrischen Bewegung.

⁸Es wird angemerkt, dass dies nur bei Fahrteilzahlen abseits der Grenzfälle der Standard-Korrektur, also für $\eta_G > 1$ auftritt und die konsistent erweiterte Endbereich-Korrektur bei $\eta_{G, ein/aus} = 1$ auch für das asymmetrische Bewegungsprofil Wärmeeintragsfelder gleich denen der Referenz liefert.

Die Korrektur erfolgt nun, indem während der Simulation abhängig von der vorliegenden Zeitdiskretisierung $\eta_{G,ein/aus}$ und anhand des gegebenen, bewegten Lastprofils $[s(t), q_N(t)]$ zunächst exakt bestimmt wird, wieviel Wärme in den ausschließlich von L_U bedeckten Abschnitt A_0 eingetragen wird. Daraus lässt sich die notwendige, Umkehrpunkt-korrigierte Wärmestromdichte $q_U(t_{L_U})$ ableiten und auf $[s_{L_U}; s_{L_U} + l_b]$ aufbringen. Im allgemeinen Fall einer unterschiedlichen Zeitdiskretisierung der Ein- bzw. Ausfahrt mit $\eta_{G,ein} \neq \eta_{G,aus}$ ist außerdem zu beachten, dass die zugehörigen, einmalig bedeckten Abschnitte $A_{0,ein}$ bzw. $A_{0,aus}$ abweichende, geometrische Ausdehnungen in Bewegungsrichtung besitzen. Die formale Vorschrift zur Bestimmung des $q_U(t_{L_U})$ ergibt sich damit zu:

$$q_T(t_{L_U}, \eta_{C,ein}, \eta_{C,aus}) = \frac{A_0 Q_{\Gamma_L,ein}}{l_b/\eta_{G,ein} (t_{L_U} - t_{L_{U-1}})} + \frac{A_0 Q_{\Gamma_L,aus}}{l_b/\eta_{G,aus} (t_{L_U} - t_{L_{U-1}})}$$

$$\text{mit } \begin{bmatrix} A_0 Q_{\Gamma,ein} \\ A_0 Q_{\Gamma,aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{t_{L_{U-1}}}^{t_{L_U}} [\mathbf{F}_{sgn} \cdot (s_{L_U} - s(\tau)) + l_b/\eta_{G,ein}] q_N(\tau) d\tau \\ \int_{t_{L_U}}^{t_{L_{U+1}}} [\mathbf{F}_{sgn} \cdot (s_{L_U} - s(\tau)) + l_b/\eta_{G,aus}] q_N(\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

$$\text{und } \mathbf{F}_{sgn} = \text{sgn}(s_{L_{U-1}} - s_{L_U}) \quad (6.22)$$

Über den Faktor \mathbf{F}_{sgn} wird darin unterschieden, ob aktuell ein heck- ($s(t_{L_U}) < s(t_{L_U} \pm \epsilon)$) oder frontseitiger ($s(t_{L_U}) > s(t_{L_U} \pm \epsilon)$) Umkehrpunkt durchfahren wird.

Zur Umsetzung der Korrektur aus Gl. 6.22 ist es nun erstmalig erforderlich, die benötigten Integrale während der Simulation auszuwerten, was prinzipiell als Verletzung der Richtlinie R5 (S. 51) zum Zusatzaufwand aufgefasst werden kann. Die Integralberechnung ist allerdings nur einmal pro Bewegungsabschnitt erforderlich. Außerdem ist für Integralwerte mit einer ausreichenden, numerischen Genauigkeit der tatsächlich notwendige Zusatzaufwand in der überwiegenden Mehrzahl der Anwendungsfälle gegenüber dem restlichen Aufwand zur Systemauswertung (vgl. Gl. 2.20, S. 27) ebenfalls vernachlässigbar gering. Die bei der Anwendung einer analytischen Umkehrpunkt-Korrektur damit prinzipiell vorliegende Beeinträchtigung der erreichten Effizienzsteigerung ist also ohne relevante Bedeutung und damit trotz Richtlinie R5 hinnehmbar.

Leistungsfähigkeit der Umkehrpunkt-Korrektur In Abb. 6.13 sind die Wärmeeintragsfelder für zwei verschiedene, bewegte Beispiellastprofile präsentiert. In beiden Fällen wird erneut ein konstanter Verlauf der Wärmestromdichte mit $q_{l,r|N}(t) = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ als gegeben betrachtet. Um einige weitere Aspekte der RUMHI-Korrektur zu illus-

trieren, sind in der oberen Zeile von Abb. 6.13 den Heatmaps außerdem die jeweils analysierten Bewegungsverläufe $s_{l,r}(t)$ sowie die resultierenden Korrekturwärmestromdichten $q_{l,r|crr}(t)$ zugeordnet. In der Bewegung der linken Spalte werden hintereinander zwei beschleunigte Parabeln abgefahren, sodass $s_l(t) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$ wenn $t \in (0; 2\text{s}]$ und $s_l(t) = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (t - 2\text{s})^2 + 4 \text{m}$, wenn $t \in (2\text{s}; 4\text{s}]$. In der rechten Spalte wird eine Periode einer sinusförmigen Bewegung mit $s_r(t) = 2 \text{m} [\sin(\pi/2\text{s} \cdot (t - 1)) + 1]$ abgefahren.

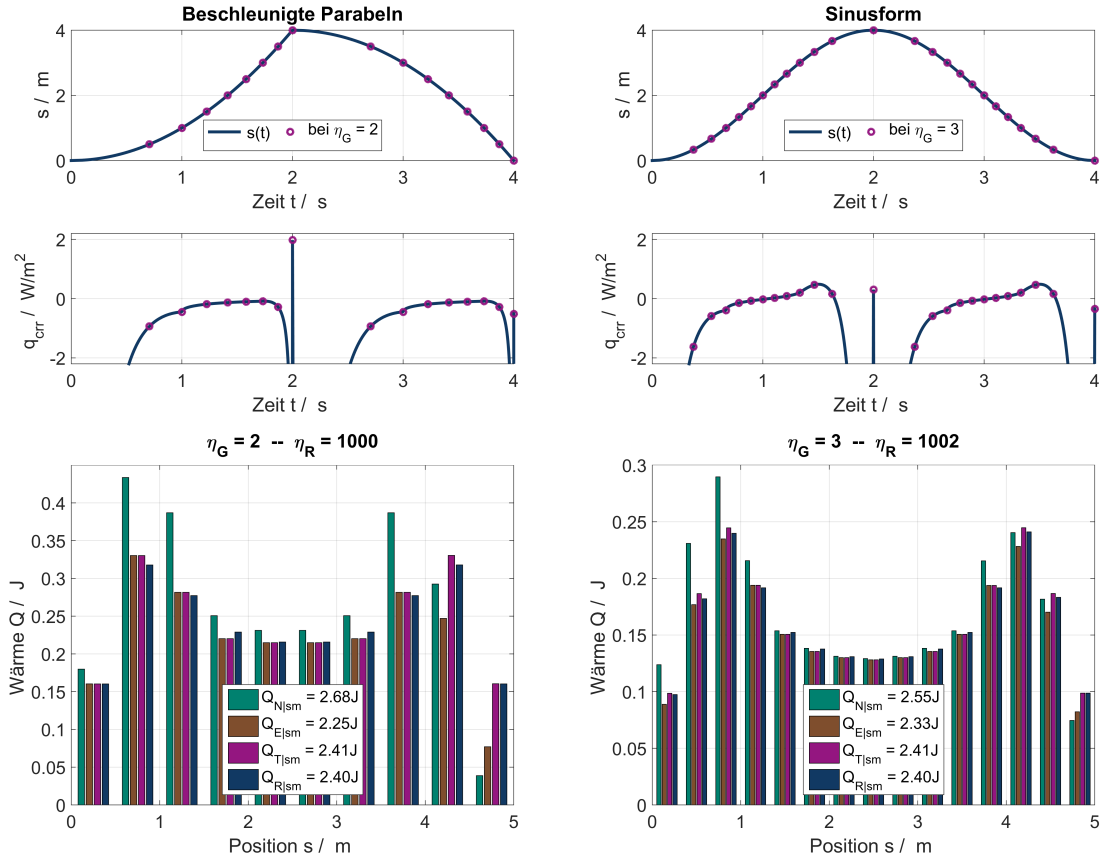


Abbildung 6.13: Umkehrpunkt-Korrektur für parabel- und sinusförmige Bewegungen

Den Lastfällen beider Spalten von Abb. 6.13 ist gemein, dass die Wärmequelle in den Phasen der Vor- bzw- Zurückfahrt grundsätzlich dieselbe, aber jeweils entgegengesetzte Bewegung ausführt. Für beide Fälle ergeben sich damit in den einzelnen Abschnitten der Bewegung jeweils identische Verläufe der resultierenden Korrekturwärmestromdichte (siehe $q_{l,r|crr}(t)$ in $t \in (0; 2\text{s})$ und $t \in (2\text{s}; 4\text{s})$). An diesen ist außerdem zu sehen, dass sich die Standard-Korrektur wie angestrebt verhält und durch ein $q_{crr} \neq 0$ vor allem in Phasen hoher Beschleunigung (vgl. Gl. 3.1, S. 32) verstärkt eingreift. An dem aus der sinusförmigen Bewegung resultierenden $q_{r|crr}(t)$ lässt sich dabei erkennen, dass aus

einer Beschleunigung, mit der sich die absolute Geschwindigkeit erhöht, ein $q_{crr}(t) > 0$ folgt, während eine echte Bremsung umgekehrt zu einem $q_{crr}(t) < 0$ führt.

Weiterhin wurde für den ersten Abschnitt der beschleunigten Bewegung $s_l(t)$ mit $t \in (0; 2\text{ s})$ das zugehörige Wärmeeintragsfeld bereits in Abb. 6.9 (rechts) präsentiert. Ein Vergleich mit dem zugehörigen $q_{l,crr}(t)$ in der linken Spalte von Abb. 6.13 zeigt, dass der standard-korrigierte Wärmeeintrag vor allem in jenen Phasen fehlerhafter ausfällt, in denen sich das tatsächlich angewandte $q_{l,crr}(t_{L_n})$ stark über die Lastschritte ändert. Besonders ausgeprägt ist dieses Verhalten in Abb. 6.9 (rechts) im Abschnitt $s \in [1,5\text{ m}; 3,5\text{ m}]$ beim Vergleich mit den zugehörigen Lastschritten zwischen $t_{L_n} \in [1\text{ s}; \sqrt{3}\text{ s}]$ zu beobachten.

Von eigentlichem Interesse sind hier allerdings die Auswirkungen der analytischen Umkehrpunkt-Korrektur, welche in den Wärmeeintragsfeldern jeweils isoliert im Bereich $s \in [4,5\text{ m}; 5\text{ m}]$ betrachtet werden können. Es ist für beide Bewegungen festzustellen, dass die Verwendung der Wärmestromdichte $q_U(t_{L_U})$ aus Gl. 6.22 nochmals deutlich dazu beiträgt, die Abweichungen des Wärmeeintrags in einer groben Simulationen gegenüber dem in einer Referenz zu verringern. Die größeren Ergebnisverbesserungen sind dabei erwartungsgemäß für den stark asymmetrischen Bewegungsverlauf in der linken Spalte zu beobachten. Aber auch die grobe Abbildung der eigentlich symmetrischen Sinusbewegung (Abb. 6.13 rechts) profitiert von der Korrektur und das, obwohl die fehlerhaften Wärmeeinträge dabei nicht durch die Umkehrpunkt-Problematik selbst begründet sind, sondern aus der hohen Krümmung von $s(t)$ um den Umkehrpunkt herum resultieren. Durch den analytischen Ursprung von $q_U(t_{L_U})$ wird allerdings umgangen, dass die Standard-Korrektur im Umkehrpunkt zur Anwendung kommt, sodass die aus Krümmung resultierenden, entsprechend hohen Fehleinträge vermieden werden. Es handelt sich also um einen unbeabsichtigten, aber letztendlich vorteilhaften Nebeneffekt der Umkehrpunkt-Korrektur.

6.3.2 Auswirkungen der gesamtheitlichen RUMHI-Korrektur

Die vollständige RUMHI-Korrektur resultiert nun aus der Kombination der in den zurückliegenden Abschnitten entwickelten Teil-Korrekturverfahren, welche abhängig von der jeweils vorliegenden Fahrsituation letztendlich angewandt werden. Unter Berücksichtigung der Schrittdistanzen \tilde{i}_A und \tilde{i}_E zu den jeweiligen Endpunkten des aktuellen Abschnitts (vgl. Gl. 6.19) sowie dem entsprechenden Minimum i_M , ergibt sich aus Gl. 6.8, Gl. 6.19 und Gl. 6.22 die folgende, zusammengefasste Vorschrift zur Bestim-

mung einer RUMHI-korrigierten Wärmestromdichte in zeitlich grob diskretisierten Simulationen:

$$q_G(t = t_{L_{\bar{i}_A, \bar{i}_E}}, \eta_G) = \begin{cases} \frac{2i_M \eta_G^2}{2i_M \eta_G^2 - (\eta_G - i_A)^2 - (\eta_G - i_E)^2} \left[q_N(t) + \frac{1}{\eta_G} q_{corr}(t) \right] & \text{falls } i_M > 0 \\ \frac{\int_{t_{L_U-1}}^{t_{L_U}} [F_{sgn} \cdot (s_{L_U} - s(\tau)) + l_b / \eta_{G, ein}] q_N(\tau) d\tau}{l_b / \eta_{G, ein} (t_{L_U} - t_{L_U-1})} \\ + \frac{\int_{t_{L_U}}^{t_{L_U+1}} [F_{sgn} \cdot (s_{L_U} - s(\tau)) + l_b / \eta_{G, aus}] q_N(\tau) d\tau}{l_b / \eta_{G, aus} (t_{L_U} - t_{L_U-1})} & \text{falls } i_M = 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

Die Leistungsfähigkeit dieser vollständigen Korrektur wird nun an der groben Simulation des in Abb. 6.14 dargestellten, bewegten Lastprofils untersucht. Mit $s_j(t) = 1 \frac{m}{s^2} (-1)^j (t - 2j) + 2(1 - (-1)^j)$ für $t \in (2(j-1)s; 2(j)s]$ und $j = 1..4$ wird erneut eine Konkatenation aus parabolischen Bewegungsverläufen betrachtet, welche dieses Mal allerdings von den Umkehrpunkten weg, bis hin zum Stillstand verzögert werden. Weiterhin wird mit $q_N(t) = 1 \cdot 10^3 \frac{Ws^2}{m^4} (ds(t)/dt)^2$ ein geschwindigkeitsabhängiges Wärmelastprofil gewählt, womit die RUMHI-Defekte im Fall einer korrekturfreien Simulation verstärkt werden.

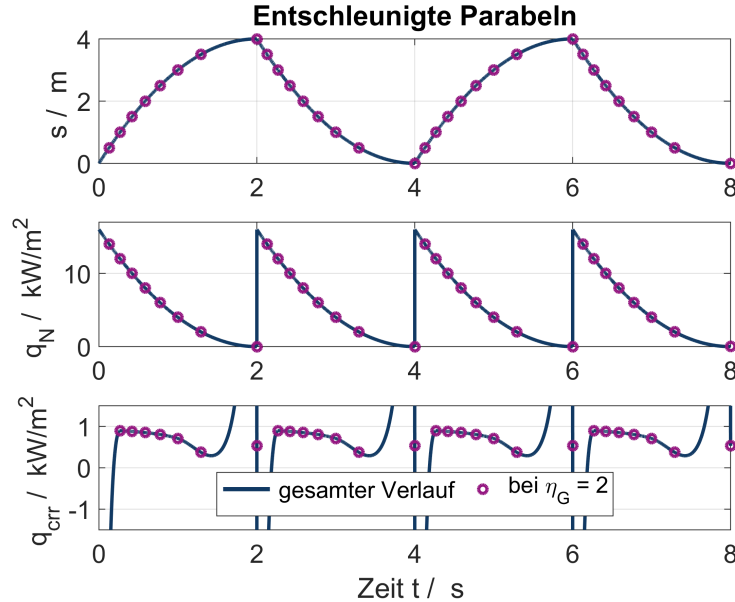


Abbildung 6.14: Elemente des zur Analyse verwendeten, bewegten Lastprofils

Zusätzlich ist in Abb. 6.14 die aus dem Lastprofil resultierende Korrekturwärmestromdichte $q_{corr}(t)$ dargestellt. Für diese ist besonders im Bereich um die jeweils ersten drei

bis vier Lastschritten eines Abschnittes zu sehen, dass der Betrag von $q_{crr}(t)$ durch die Änderungsraten (Gradient und Krümmung) der Lastprofilverläufe darüber dominiert wird, während deren tatsächliche Höhe eher weniger ins Gewicht fällt.

In der abschließenden Performance-Untersuchung wird die RUMHI-Korrektur ebenfalls in einer tatsächliche Temperaturfeldberechnung erprobt. Dies geschieht erneut an dem in Abb. 4.3 (S. 63) vorgestellten FE-Modell mit einer aus dem $s(t)$ resultierenden Länge von $l_s = 5$ m. Es wird ein $F_e = 6$ verwendet, sodass die Kantenlänge der kubischen Elemente $w_e = 0,1$ m beträgt.

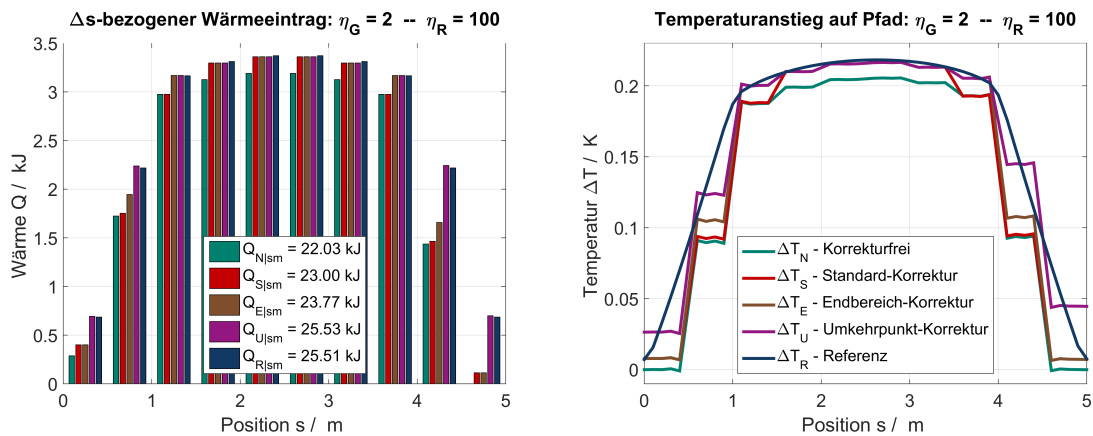


Abbildung 6.15: Ergebnisse der Simulation unter Anwendung der RUMHI-Korrektur

In Abb. 6.15 sind nun die Ergebnisse der Simulationen in den unterschiedlichen Korrekturtiefen dargestellt. Im Wärmeeintragsfeld bzgl. Δs -langer Bereiche (links) ist deutlich zu erkennen, wie die einzelnen Schritte der RUMHI-Korrektur zu einer verbesserten Abbildung des Lastzustands in den groben Simulationen beitragen und das, obwohl diese mit $\eta_G = 2$ im ungünstigsten Fall diskretisiert sind. Die daraus auf dem Auswertepfad (vgl. Abb. 4.3, S. 63) resultierenden Temperaturanstiege zum letzten Lastschritt bei $t_{L_{n_L}} = 8$ s (rechts) folgen erneut klar erkennbar diesem Wärmeeintrag. Damit wird durch die Anwendung der vollständigen RUMHI-Korrektur erreicht, dass in einer groben Simulation nahezu dieselben Ergebnisse ΔT_U (violett) erhalten werden, wie in der Referenz ΔT_R (blau).

Die Ursachen der verbleibenden Differenzen in Abb. 6.15 lassen sich in dem bereits erwähnten begrenzten Auflösungsvermögen sowie der Simulation abseits eines Grenzfalles der Standard-Korrektur finden. Daneben ist das Temperaturfeld zusätzlich durch die prinzipielle Nichtexistenz der preL1-Manipulation (vgl. Anhang A.3, S. 160) während dessen Berechnung beeinträchtigt. Im betrachteten Beispiel äußert sich die

dadurch fehlende Wärme in der Lastzone des hypothetischen, nullten Lastschritts bei $s \in [s(t_{L_0}) = 0; 1 \text{ m}]$ über einen Abfall der grob berechneten Temperaturanstiege gegenüber dem der Referenz, was besonders im Vergleich mit den Ergebnissen des entsprechenden Bereichs $s \in [4 \text{ m}; 5 \text{ m}]$ am gegenüberliegenden Endpunkt erkennbar ist. Da dieser Defekt allerdings definitiv nur einmal pro Simulation auftritt und daher im Fall von länger andauernden Lastverläufen an Einfluss verliert, ist dessen Vernachlässigung gegenüber der Alternative einer Korrektur angemessen.

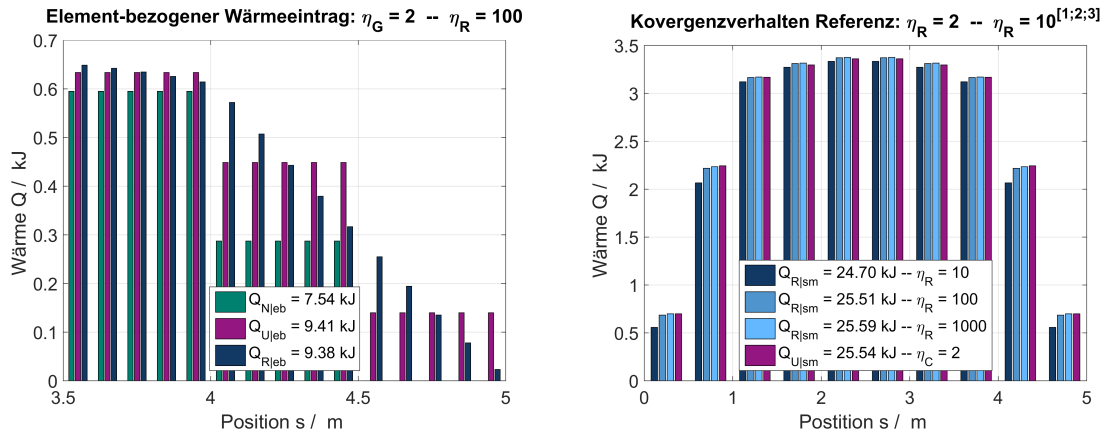


Abbildung 6.16: Weitere Aspekte der RUMHI-Korrektur

Zur Illustration der verbleibenden, durch die Auflösungsbegrenzung bedingten Unterschiede im Belastungsende, ist in Abb. 6.16 (links) einmal die Heatmap des oberen Endbereichs bezogen auf die Elementlänge $l_e = 0,1 \text{ m}$ angegeben. Darin ist jene Fehlverteilung der eingetragenen Energie ersichtlich, die zu den treppenförmigen Profilen der Temperaturverläufe aus den η_G diskretisierten Simulationen führt. Wie außerdem zu sehen ist, führt die Verwendung des geschwindigkeitsabhängigen Lastprofils $q_N(t_{L_U}) = f(v(t_{L_U})) = 0$ (siehe Abb. 6.14) dazu, dass in der N -Analyse gar keine Wärme in den ausschließlich zu L_U bedeckten Bereich $s \in [4,5 \text{ m}; 5 \text{ m}]$ eingetragen wird. Als Resultat steigt die Temperatur dort nicht an (siehe Abb. 6.15 rechts).

Ein weiterer Aspekt der strukturvariablen Simulationen bzgl. der tatsächlichen Validität einer Referenzanalyse ist in Abb. 6.16 (rechts) dargestellt. Es ist erkennbar, dass für das untersuchte Beispielpromblem aus Abb. 6.14 selbst eine vergleichsweise fein diskretisierte, aber korrekturfremie Referenz mit $\eta_R = 10$ gegenüber dem quasi kontinuierlichen Fall mit $\eta_R = 1000$ noch deutliche Unterschiede in der eingetragenen Wärme aufweist. Besonders sind dabei jene Bereiche betroffen, die zu den Umkehrzeitpunkten bedeckt sind. Für das Beispiel, welches vorsätzlich als stark RUMHI-beeinträchtigt

gewählt wurde, beträgt die fehlende Wärme rund 3,5% des Referenzeintrags. Aus diesem Grund wird in den Analysen dieses Unterabschnitts immer eine Referenz mit $\eta_R = 100$ betrachtet, der gegenüber die korrigierten Ergebnisse angemessen verglichen werden können. Weiterhin legt der Vergleich der Δs bezogenen $Q_{T|\eta_G=2}$ und $Q_{R|\eta_R=1000}$ aus Abb. 6.16 (rechts) aufgrund der geringen Unterschiede nahe, grobe Simulationen mit vollständiger RUMHI-Korrektur ebenfalls zur Identifikation der für die Konvergenz ausreichenden Diskretisierung zu verwenden.

Zusammenfassend ist für die RUMHI-Korrektur festzustellen, dass durch eine geringen Zusatzaufwand während der Lastschritte einer zeitlich grob diskretisierten Analyse (vgl. Gl. 6.23) eine deutliche Verbesserung von deren Abbildungsgüte (vgl. Abb. 6.15) erreicht wird. Das angestrebte Ziel einer effizienteren Simulation ist damit auch für Probleme, in denen relevante RUMHI-Defekte auftreten, erreicht.

7 Diskrete Aktualisierung der Kontaktwärmeleitung

Der Prozess der Wärmeleitung durch den Kontakt zwischen sich zueinander bewegendem Körpern stellt in der Realität einen relativ komplexen Prozess dar, egal ob die Bewegung durch Wälzkörper ermöglicht wird (z. B. JUNGNICHEL [46]) oder die Körper lediglich entlang ihrer Oberflächen aufeinander abgleiten (z. B. CHANTRENNE [22]). Für diese Arbeit ist es dabei nicht von Interesse, ob eine Abbildung dieser Prozesse durch den skalaren Wärmeübergangskoeffizienten mit Blick auf die angestrebte Ergebnisgüte ausreichend ist. Stattdessen wird auch hier die Frage untersucht, inwiefern die Auswirkungen einer vollständig modellierten Wärmeleitung in Simulationen mit grober Zeitdiskretisierung¹ von denen in einer kontinuierlichen Referenz abweichen.

Dazu wird im folgenden Abschnitt zunächst der Ablauf einer diskret abgebildeten Wärmeleitung im Fall bewegter Systeme untersucht und es wird ein Modell zur Abschätzung der zu erwartenden Abweichungen im Fall grober Diskretisierung entwickelt sowie theoretisch beschrieben. Anschließend wird das Fehlerverhalten der diskreten Wärmeleitung in Abhängigkeit der relevanten Modellparameter analysiert. Auf Basis dieser Erkenntnisse wird abschließend die Entscheidung begründet, im Rahmen dieser Arbeit auf die Entwicklung eines geeigneten Korrekturverfahrens zu verzichten.

7.1 Ersatzmodell

Die Methodik zur Berücksichtigung der Kontaktwärmeleitung in strukturvariablen Simulationen wurde in Unterabschnitt 3.2.1 (S. 38) mit vorgestellt und erfolgt auf Basis der treibenden Temperaturdifferenz $T_b(t_{L_{n-1}}) - T_s(t_{L_{n-1}})$ zwischen den Körpern, welche aus den Ergebnissen des vorherigen Lastschritts resultiert. Diese wird mit einem

¹Auch hier werden die Anfangsbuchstaben der englischen Fehlerbeschreibung *Rarely Updated Contact Conduction* als dessen Kurzbezeichnung RUCC herangezogen.

definierten Wärmeübergangskoeffizienten α_W in eine Wärmestromdichte überführt und als Teil der NEUMANN-Kontaktlasten in die zum aktuellen Lastschritt bedeckten Gebiete aufgebracht (vgl. auch Abb. 3.2, S. 38).

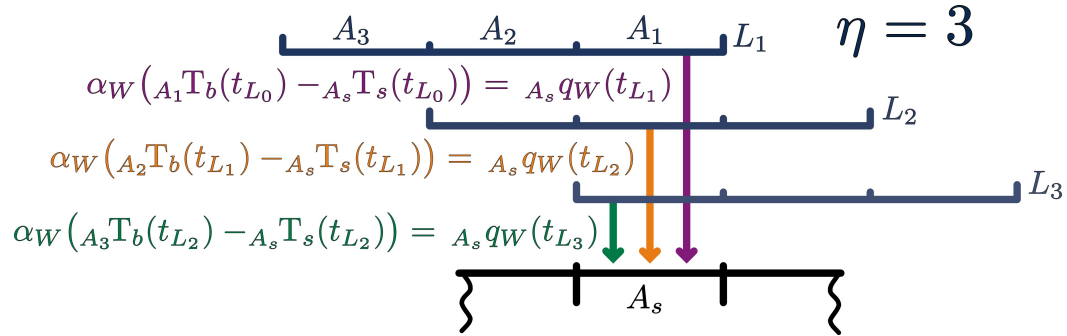


Abbildung 7.1: Diskret abgebildete Kontaktwärmeleitung und Ersatzmodell

In Abb. 7.1 ist nun für das Beispiel $\eta = 3$ schematisch dargestellt, wie sich der konduktive Wärmeeintrag in einen spezifischen Schienenabschnitt A_s des stehenden, als Kontinuum betrachteten Körpers Ω_s im Fall einer diskreten Überfahrt gestaltet². Örtliche Variationen sind dabei unterhalb des Auflösungsvermögens der diskreten Bewegung – also der Wegschrittweite $|A_s|_x = \Delta s = l_b/\eta$ – erneut nicht möglich, sodass sich in Bewegungsrichtung die konduktiv bedingte Temperaturentwicklung über diesen Bereich gleicht.

Wie in Abb. 7.1 dargestellt, wird der konduktive Kontaktlastanteil auf A_s zu den einzelnen Lastschritten der Überfahrt entsprechend der aktuellen Bedeckungssituation aus den Ergebnissen des vorherigen Lastschritts bestimmt. Zur exakten Beschreibung des RUCC-Verhaltens ist also die Kenntnis der Temperaturzustände der beteiligten Körper erforderlich. Diese sind allerdings kein Teil jener Informationen über das betrachtete, strukturvariable Problem, welche für die methodologischen Untersuchungen dieser Arbeit als gegeben vorausgesetzt werden (vgl. Unterabschnitt 3.1.1, S. 29) und müssten daher als weitestgehend allgemein sowie im Fall einer Korrektur als online zu ermittelnde Eingangsgrößen angenommen werden. Eine genaue, a priori Beschreibung des RUCC-Fehlers, welcher aus der diskreten Abbildung des konduktiven Energieausgleichs resultiert, wird sich damit vergleichsweise komplexer gestalten, als für die

²Für die nachfolgenden Analysen wird generell von einem $\eta \in \mathbb{N}$ ausgegangen, um eine Überlagerung des hier behandelten RUCC-Verhaltens mit der BD-Problematik (vgl. Kapitel 5) zu vermeiden. Für die Beulen- und Dellenbereiche gilt aber ebenfalls, dass der dort wirkende, konduktive Wärmestrom während einer diskreten Überfahrt endlich oft aktualisiert wird.

aus dem Energieeintrag resultierenden Fehler der beiden vorangegangenen Kapitel. Mit Blick auf die Sensitivität der errechneten Temperaturen von der gewählten, örtlichen Netzweite (siehe z. B. Abb. 4.6, S. 68), ist eine konkrete Quantifizierung des Fehlers unter Einhaltung der Richtlinie R2 (S. 51) zur Unabhängigkeit von der örtlichen Diskretisierung sogar unmöglich.

Daher wird ähnlich wie in der Analyse des PTI-Einflusses (vgl. Abschnitt 4.2, S. 56) ein Ersatzproblem definiert, mit dem der Einfluss der RUCC-Problematik zunächst näherungsweise erfasst soll. Für dieses wird vereinfachend angenommen, dass der bewegte Körper Ω_b gegenüber des interessierenden Bereichs A_s immer gleich warm ist, dass also (vgl. Abb. 7.1):

$${}_{A_i}T_b(t_{L_{i-1}}) \stackrel{!}{=} {}_{A_j}T_b(t_{L_{j-1}}) = T_b > {}_{A_s}T_s(t) \quad \text{mit } i \neq j \quad (7.1)$$

Weiterhin ist darin bereits festgelegt, dass lediglich jener Fall betrachtet wird, in dem Ω_b wärmere als Ω_s ist. Für die komplementäre Situation würden die nachfolgenden Analysen analog erfolgen.

Im Fall einer diskreten Überfahrt in mehreren Schritten mit einer konstanten Temperatur T_b führt die fortschreitende Erwärmung des stehenden Körpers in A_s zu sukzessiv geringer werdenden ${}_{A_s}q_W(t_{L_i})$ (in Abb. 7.1 durch die Einfärbung von ‚violett‘ zu ‚grün‘ illustriert). Das Tempo, mit dem die konduktiven Ausgleichsvorgänge ablaufen, nimmt also über die Lastschritte ab und es ist zu erwarten, dass die finale Erwärmung von A_s im Fall einer steigender Anzahl an Bedeckungen geringer ausfällt.

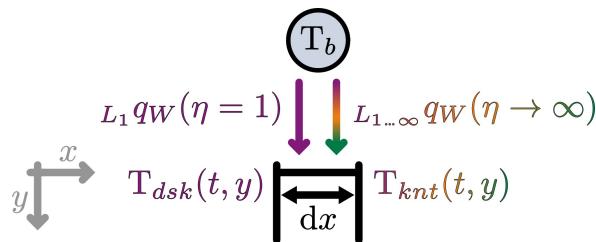


Abbildung 7.2: Ersatzmodell zur Analyse des RUCC-Verhaltens

Das in Abb. 7.2 dargestellte Ersatzproblem folgt nun aus der Überlegung, dass ein in Bewegungsrichtung infinitesimaler Streifen von Ω_s in gleicher Weise durch eine Überfahrt mit konstanter Temperatur erwärmt wird, wie durch eine gleichlang wirkende, statische ROBIN-Randbedingung derselben Bulk-Temperatur (vgl. Gl. 2.14, S. 21). Der Vergleich zwischen der Lösung dieses Ersatzsystems mittels einer diskreten Auswertung in einem

Schritt $T_{dsk}(t, y)$ (also $\eta = 1$, Index dsk für 'diskret') und dessen kontinuierlicher Lösung in unendlich vielen Schritten (d.h. $\eta \rightarrow \infty$, Index knt für 'kontinuierlich') vermittelt somit auch einen Eindruck von dem zu erwartenden RUCC-Verhalten. Die größten Abweichungen sind dabei an der Oberfläche bei $y = 0$ zu erwarten.

Für das Ersatzproblem wird nun der betrachtete Streifen als semi-infinit in Spann- und Tiefenrichtung angesehen und es wird ein homogenes Temperaturfeld mit $T_{dsk}(y, t = 0) = T_{knt}(y, t = 0) = 0$ vorausgesetzt³. Die analytische Lösung für ein derartiges System unter einer konstanten NEUMANN-Last q ist in CARLSLAW [20] wie folgt angegeben (vgl. Gl. 2.10, S. 20):

$$T(y, t) = q \frac{2}{\lambda} \left[\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} e^{-y^2/4\kappa t} - \frac{y}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right]$$

mit $\operatorname{erfc}(\gamma) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\psi^2} d\psi$ komplementäre Fehlerfunktion (7.2)

Bei einer Überfahrt der Dauer t_P (Index P für 'Passage') liegt nun im maximal zeitdiskreten Fall eine NEUMANN-Randbedingung von $L_1 q_W(\eta = 1) = \alpha_W T_b$ vor und es ergibt sich an der Oberfläche eine Temperatur $T_{d\bar{s}k}$ von:

$$T_{d\bar{s}k} = T_{dsk}(t = t_P, y = 0) = T_b \cdot \frac{2\alpha_W}{\lambda} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} t_P \quad (7.3)$$

Diese soll mit der Temperaturerhöhung im Fall einer kontinuierlichen Überfahrt verglichen werden. Trivialerweise führt nun die ständige Aktualisierung der konduktiven Wärmestromdichten bei $\eta \rightarrow \infty$ dazu, dass die Belastung des Ersatzproblems durch die vorliegende ROBIN-Randbedingung direkt – d.h. ohne den Umweg einer diskreten Umwandlung in eine NEUMANN-Randbedingung – für das resultierende Temperaturfeld $T_{knt}(t, y)$ verantwortlich ist. In CARLSLAW [20] ist für eine derartige Fragestellung mit Bulk-Temperatur T_β und Übergangskoeffizient F_α (vgl. Gl. 2.14, S. 21) die folgende Lösung zu finden:

$$\frac{T(y, t)}{T_\beta} = \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} - e^{\frac{F_\alpha}{\lambda} y + \left(\frac{F_\alpha}{\lambda}\right)^2 \kappa t} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} + \frac{F_\alpha}{\lambda} \sqrt{\kappa t} \right) \quad (7.4)$$

³Auch hier (vgl. Gl. 4.5, S. 59) können homogene Anfangsbedingungen anderer Temperatur per geeigneter Substitution auf den betrachteten Fall zurückgeführt werden.

Die hier interessierende Temperatur an der Oberfläche $T_{k\bar{n}t}$ nach einer kontinuierlichen Überfahrt der Dauer t_P ist damit:

$$T_{k\bar{n}t} = T_{knt}(t = t_P, y = 0) = T_b \left[1 - e^{\left(\frac{\alpha_W}{\lambda}\right)^2 \kappa t_P} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_W}{\lambda} \sqrt{\kappa t_P} \right) \right] \quad (7.5)$$

Der relative Fehler der Temperaturerhöhung an der Lastfläche zwischen einer kontinuierlichen und einer maximal diskreten Auswertung des Ersatzproblems E_{EP} (Index EP für ‚Ersatzproblem‘) lässt sich nun mit Gl. 7.5 und Gl. 7.3 wie folgt ausdrücken:

$$E_{EP} := \frac{T_{d\bar{s}k}}{T_{k\bar{n}t}} - 1 = \frac{2 \frac{\alpha_W}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{\pi} \kappa t_P}}{1 - e^{\left(\frac{\alpha_W}{\lambda}\right)^2 \kappa t_P} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_W}{\lambda} \sqrt{\kappa t_P} \right)} - 1 > 0 \quad (7.6)$$

Eine weitere Umformung dieses Ausdrucks in eine einfachere oder sinnvollere Form ist nicht möglich. Trotz dessen lässt sich erkennen, dass der relative Fehler zwar vom Material (über κ und λ) sowie den charakteristischen Größen des strukturvariablen Problems t_P und α_W beeinflusst wird, dafür aber unabhängig von der treibenden Temperaturdifferenz T_b ist. Inwiefern sich die verschiedenen Einflüsse konkret äußern, wird im nachfolgenden Abschnitt detailliert untersucht.

7.2 Fehlerverhalten und Korrekturverzicht

Innerhalb dieses Abschnittes wird zunächst stellvertretend das Fehlerverhalten am Ersatzproblem untersucht. Danach wird erörtert, inwiefern diese Erkenntnisse auf originale, strukturvariable Fragestellungen übertragen werden können. Motiviert durch einige dieser Überlegungen wird abschließend dargelegt, warum im Rahmen dieser Arbeit von der Entwicklung einer RUCC-Korrektur abgesehen wird.

Fehlerverhalten am Ersatzproblem Von den in Gl. 7.6 identifizierbaren Einflüssen auf den relativen Fehler am Ersatzproblem werden im Folgenden lediglich die Auswirkungen des Wärmeübergangskoeffizienten α_W sowie der Überfahrtszeit t_P betrachtet, da diese beiden Größen direkt mit der abgebildeten Bewegung im Zusammenhang stehen. Das Material ist eine Eigenschaft des stehenden Körpers und wird für eine konkrete Quantifizierung des Fehlers erneut als der Abb. 4.3 (S. 63) eingeführte, idealisierte Stahl mit $\lambda = 50 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ und $\kappa = 1,36 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ festgelegt.

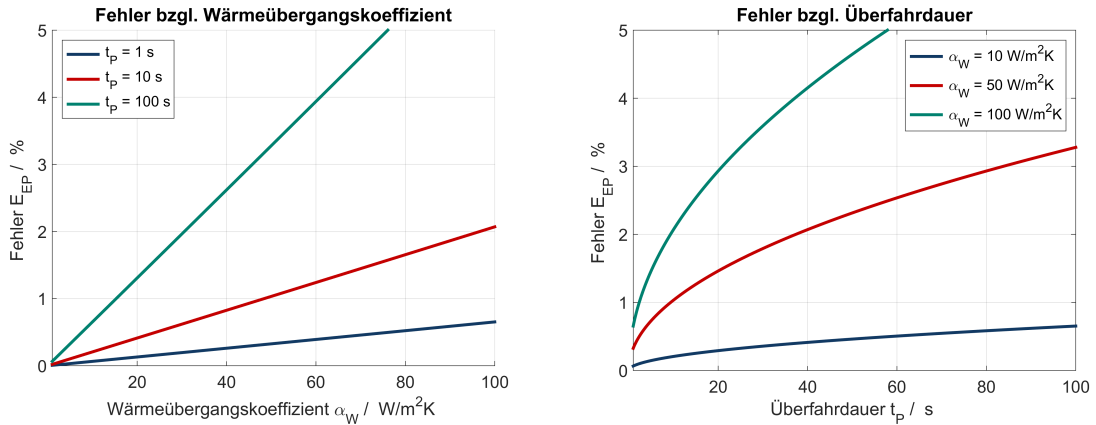


Abbildung 7.3: Fehlerverhalten des Ersatzproblems bzgl. relevanter Einflussgrößen

In Abb. 7.3 (links) ist für drei beispielhafte Überfahrzeiten zu sehen, dass mit steigendem Wärmeübergangskoeffizienten α_W auch steigende Fehler bei der diskreten Abbildung des Ersatzproblems zu erwarten sind, wobei der Zusammenhang linear zu sein scheint. Bzgl. der Höhe der Fehler lässt sich feststellen, dass in dem betrachteten α_W -Bereich lediglich für die längste der betrachteten Überfahrzeit von $t_P = 100$ s ein Fehler von mehr als 5% zu erwarten ist. Im Fall einer kürzeren Überfahrt mit $t_P = 1$ s verbleibt der Fehler unter 1% und ist damit sehr gering. Ähnliche Beobachtungen zur vergleichsweise geringen Fehlerhöhe (d.h. $E_{EP} < 5\%$) sind bei dessen Analyse in Abhängigkeit von der Überfahrzeit t_P in Abb. 7.3 (rechts) zu machen. Der Zusammenhang zwischen steigender Überfahrzeit und Fehler scheint allerdings dem einer Wurzelfunktion (Exponentialfunktion mit Ordnung 1/2) zu gleichen.

Warum die Zusammenhänge zwischen Fehler und Einflussgröße derart ausfallen wie beobachtet und das, obwohl in Gl. 7.6 sowohl α_W als auch t_P jeweils in den Argumenten der darin vorkommenden, natürlichen Exponentialfunktion und komplementären Fehlerfunktion zu finden sind, wird nun durch Einführung eines dimensionslosen Kennwerts des strukturvariablen Problems σ untersucht. Die den Fehler beschreibende Gl. 7.6 geht damit in die folgende Form über:

$$E_{EP}(\sigma) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{1 - e^{\sigma^2} \operatorname{erfc}(\sigma)} - 1 \quad \text{mit} \quad \sigma := \frac{\alpha_W}{\lambda} \sqrt{\kappa t_P} \quad (7.7)$$

Diese Beziehung ist in Abb. 7.4 (links) aufgetragen, wobei zu sehen ist, dass in dem betrachteten Bereich zwischen E_{EP} und σ ein nahezu exakt-linearer Zusammenhang besteht. Mehr noch ist festzustellen, dass $E_{EP}(\sigma)$ kaum von jener violett gestrichelten

Gerade unterschieden werden kann, welche aus dem Ursprung sowie dem oberen Endpunkt von $E_{EP}(\sigma)$ in dem betrachteten Bereich konstruiert wurde. Da $\sigma = f((\alpha_W)^1)$ bzw. $\sigma = f((t_P)^{1/2})$ ist, werden durch diesen Umstand ebenfalls die in Abb. 7.3 beobachteten Zusammenhänge des Fehlers zu den beiden Einflussgrößen begründet.

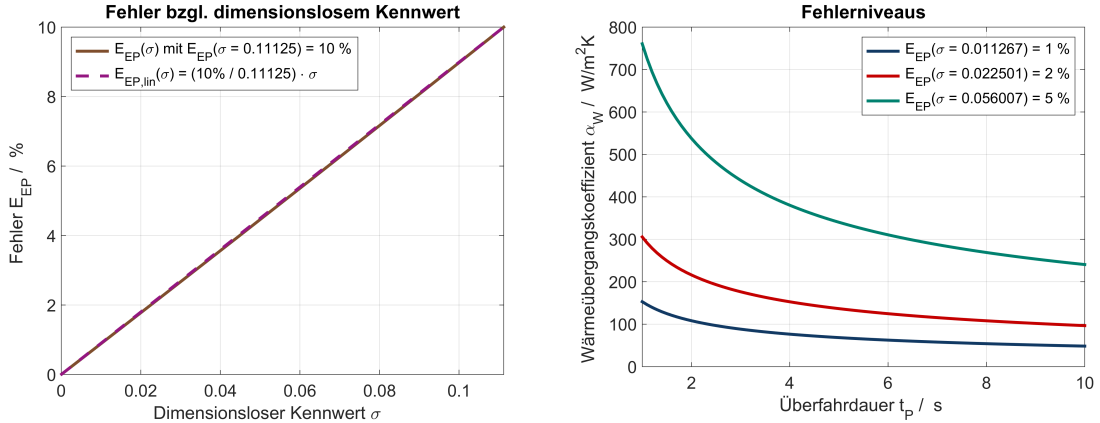


Abbildung 7.4: Verallgemeinertes Fehlerverhalten am Ersatzproblem

Über den bijektiven Zusammenhang zwischen E_{EP} und σ ist nun eine Identifikation der maximalen Werte möglich, welche ein strukturvariables Problem hinsichtlich der Parameter α_W und t_P besitzen darf, damit bei der diskreten Auswertung des zugehörigen Ersatzproblems eine beliebige Fehlergrenze nicht überschritten wird. Es ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$\alpha_{W|E_{EP}}(t_{P|E_{EP}}) = \sigma(E_{EP}) \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_{P|E_{EP}}}} \quad \text{mit} \quad \sigma(E_{EP}) = (E_{EP}(\sigma))^{-1} \quad (7.8)$$

Wie beschrieben, ist das zu einem Fehler E_{EP} gehörende $\sigma(E_{EP})$ über die zu Gl. 7.7 inverse Beziehung zu bestimmen. Deren Invertierung ist allerdings analytisch nicht möglich, sodass die interessierenden $\sigma(E_{EP})$ jeweils numerisch ermittelt werden müssen.

Abb. 7.4 (rechts) zeigt nun beispielhaft für drei verschiedene Fehler die in der t_P - α_W -Ebene resultierenden Niveaulinien, welche den jeweiligen Bereich akzeptabler Parameterpaare mit $|(t_P; \alpha_W)^T| \leq |(t_{P|E_{EP}}; \alpha_{W|E_{EP}})^T|$ begrenzen.

Übertragbarkeit des Fehlerverhaltens Bevor das RUCC-Verhalten auf Basis der Erkenntnisse zum Fehlerverhalten am Ersatzproblem abgeschätzt wird, ist eine kritische Auseinandersetzung mit deren prinzipieller Übertragbarkeit auf das Fehlerverhalten

des originalen, strukturvariablen Problems notwendig. Von Nachteil ist dabei, dass die vereinfachende Annahme einer konstanten Temperatur T_b im bewegten Körper im Allgemeinen keine konservative Abschätzung des originalen Fehlers nach sich zieht. Deutlich wird dies an dem betrachteten Fall eines wärmeren, bewegten Körpers, in dem die Auswertung des Ersatzmodells in einem Schritt zu einer stärkeren Temperaturerhöhung T_{dsk} führt als im Fall unendlich vieler Schritte (siehe Gl. 7.6). Dabei würde ein über die Schritte fallendes $T_b(t)$ – also ${}_{A_i}T_b(t_{L_{i-1}}) < {}_{A_{i-1}}T_b(t_{L_{i-2}})$ (siehe Abb. 7.1) – dazu führen, dass die Erwärmung T_{knt} im kontinuierlichen Fall weiter abfällt und der Fehler der diskreten Auswertung E_{EP} wächst.

Der Mechanismus, dass im Fall der Vorfahrt die Front immer zuerst in einen noch kalten Bereich hinein fährt und diesen vor der Überfahrt des verbleibenden Körpers bereits etwas erwärmt, führt in den dahinterliegenden Bereiche allerdings zu einer geringer werdenden, konduktiven Abkühlung von Ω_b (vgl. Abb. 7.1) und damit zu einem ansteigenden Temperaturprofil in Richtung Heck. Obwohl dadurch prinzipiell eher der Fall eines über die Schritte ansteigenden $T_b(t)$ – also ${}_{A_i}T_b(t_{L_{i-1}}) > {}_{A_{i-1}}T_b(t_{L_{i-2}})$ – vorliegt, lässt sich nicht pauschal sagen, dass der Betrag des Fehlers zwischen maximal diskreter und kontinuierlicher Auswertung damit geringer ausfällt, da die Temperaturerhöhung der kontinuierlichen Lösung auch prinzipiell über die der diskreten Auswertung hinauswachsen kann. Wie bereits erwähnt, ist hier eine genaue Quantifizierung der Unterschiede aufgrund der fehlenden Kenntnis des tatsächlichen Verlaufs der Temperatur auf Ω_b nicht möglich.

Von Vorteil für die Abschätzung ist allerdings, dass in dem oft betrachteten Fall oszillierender Bewegungen der erläuterte Mechanismus zur Herausbildung eines ansteigenden Temperaturprofils abwechselnd bzgl. der Front bzw. des Hecks von Ω_b wirkt, wodurch die Herausbildung eines gleichmäßigen Temperaturfelds in Ω_b begünstigt wird. Die vereinfachende Annahme des Ersatzproblems wird also speziell im Fall wechselnder Bewegungsrichtungen durch das originale Problem näherungsweise erfüllt. Daher sollten sich ebenfalls die Abschätzungen zum Fehlerverhalten ohne größere Bedenken – aber gegebenenfalls unter Einhaltung einer angemessenen Sicherheit – übertragen lassen.

Am Ersatzproblem kann also näherungsweise abgeschätzt werden, ob eine Vernachlässigung der RUCC-Defekte für ein spezielles, strukturvariables Problem im Fall einer maximal, zeitdiskreten Analyse möglich ist. Die dafür relevanten Parameter t_P und α_W , aber auch die mögliche Fehlertoleranz E_{EP} , sind dabei immer Teil der abzubildenden Fragestellung.

Verzicht auf die Entwicklung einer Korrektur Bereits die kurzen Überlegungen zu den bei Wärmeleitung durch einen bewegten Kontakt entstehenden Temperaturfeldern zeigen, dass alleine die genaue Quantifizierung der maximal auftretenden Abweichungen eine vergleichsweise komplexe Fragestellung darstellt. Die Entwicklung eines Verfahrens, das diese Defekte in der angestrebten Genauigkeit und entlang der Entwicklungsrichtlinien korrigiert, würde allerdings eine detaillierte Quantifizierung der Abweichungen für jeden Ort der aktuellen Kontaktzone unter Beachtung der diskreten, örtlichen Verschiebungen erfordern. Im Weiteren ist dann zu eruieren, mit welchen Mitteln die eigentliche Korrektur der Abweichungen letztendlich erfolgen kann und wie diese in Analysen mit örtlicher Diskretisierung ausgehend von den darin vorliegenden, auf einzelne Punkte kondensierten Temperaturfeldern umzusetzen ist.

Anhand der aufgezählten Arbeitspunkte ist zu erkennen, dass die Entwicklung eines Korrekturverfahrens für die RUCC-Defekte ein sehr ambitioniertes Projekt darstellt, auf dessen Bearbeitung aufgrund des zu erwartenden Umfangs im Rahmen dieser Arbeit verzichtet wird. Stattdessen wird sich mit dem aus der ersten Annäherung an die Problematik resultierendem Ersatzproblem begnügt, mit welchem zumindest eingeschätzt werden kann, ob für ein betrachtetes strukturvariables Problem überhaupt mit relevanten und daher für die Modellbildung entscheidenden RUCC-Defekten zu rechnen ist. An den Fehlerniveaulinien in Abb. 7.4 (rechts) ist dabei für das Beispiel des idealisierten Stahls zu erkennen, dass auch bei vergleichsweise kleinen Fehlertoleranzen weite Bereiche möglicher $(t_P; \alpha_W)^T$ -Tupel existieren, für die eine Vernachlässigbarkeit der RUCC-Problematik gegeben ist.

Ergibt die Abschätzung der RUCC-Defekte für ein gegebenes Problem deren notwendige Berücksichtigung im Fall einer maximalen Zeitdiskretisierung, so lassen sich auch diese über eine Annäherung an den kontinuierlichen Fall durch Verwendung einer weniger groben Zeitdiskretisierung ($\eta > 1$) verringern. Analog zum Vorgehen in der PTI-Problematik (vgl. Unterabschnitt 4.3.2, S. 65) sollte die maximal mögliche Zeitschrittweite dabei durch kurze Vergleichsrechnungen ermittelbar sein; ein Ansatz, der prinzipiell einer konventionellen Konvergenzuntersuchung gleichkommt. Als Konsequenz kann das RUCC-Verhalten zum Schlüsselkriterium dafür werden, ob das betrachtete, strukturvariable Problem überhaupt einer Effizienzsteigerung durch grobe Zeitdiskretisierung und entsprechender Korrektur zugänglich ist.

8 Abschließende Betrachtungen

Nachfolgend werden zunächst die in dieser Arbeit gemachten Erkenntnisse kurz zusammengefasst. Anschließend wird die gleichzeitige Anwendung der entwickelten Korrekturverfahren an zwei kurzen Beispielen erprobt. Die Arbeit schließt mit einem Ausblick über einige weitere Möglichkeiten zur Behandlung der Problematik.

8.1 Zusammenfassung

Das zentrale Thema der zurückliegenden Kapitel war die thermische Simulation strukturvariabler Systeme und die Frage danach, wie Berechnungen der Wärmefelder bei derartigen Problemen effizienter durchgeführt werden können. Wie in Kapitel 1 erläutert wurde, war diese Problematik im Speziellen durch die aktuellen Herausforderungen im Bereich der Werkzeugmaschinen motiviert, in denen eine Berücksichtigung der translatorisch zueinander bewegten Baugruppen für die angestrebte Ergebnisgenauigkeit relevant ist. Der Aufwand für die Berechnung solcher Fragestellungen aus der LAGRANGE-Perspektive ist durch die inkrementelle Umsetzung der Bewegung vergleichsweise hoch und kann für komplexe Systeme schnell die verfügbaren Möglichkeiten übersteigen. Daher wurde die Entwicklung von Verfahren zur Steigerung der Effizienz dieser Analysen angestrebt, wobei das über die Bewegung und das Modell gegebene Problem unverändert erhalten bleiben sollte. Es wurde daher festgelegt, dass eine Verringerung des Rechenaufwands ausschließlich über gröbere Inkremente bei der Bewegungseinbindung zu erreichen ist, während die Ergebnisqualität gleichzeitig durch die zu entwickelnden Verfahren konserviert werden sollte.

Für die Bearbeitung dieser Forschungsfrage wurden in Kapitel 2 zunächst die relevanten Grundlagen der mathematischen Beschreibung thermischer Systeme sowie das prinzipielle Vorgehen bei deren numerischer Berechnung vorgestellt. Die aus der Einbindung der Bewegung resultierende Instationarität der Probleme bedingt dabei eine Auswertung mittels thermisch transientser Analyse. Deren sequentieller, in Orts- und

Zeitdiskretisierung aufgeteilter Ablauf wurde allgemein sowie über die theoretischen Grundzüge der in dieser Arbeit dafür verwendeten FEM bzw. generalisierten Trapezmethode dargelegt. Zudem wurde hervorgehoben, dass die inkrementelle Einbindung der Bewegung innerhalb der Zeitdiskretisierung, also über den transienten Teil der Analyse, erfolgt, weshalb sich darauf im Rahmen der Verfahrensentwicklung zu fokussieren ist.

Die prinzipielle Bewegungseinbindung wurde danach eingehend in Kapitel 3 dargelegt und theoretisch untersucht. Zunächst wurde dafür ein strukturvariables Beispielsystem eingeführt, an welchem entscheidende sowie charakteristische Elemente eines strukturvariablen Problems, wie z. B. das bewegte Lastprofil oder die bewegungsbezogenen Koordinatenrichtungen, benannt und hinsichtlich notwendiger Eigenschaften definiert worden. Mittels einer analytischen Beschreibung des Problems aus zwei unterschiedlichen Perspektiven wurde anschließend gezeigt, dass die bewegungsermöglichenden Advektionsterme auf die Physik des Temperaturfelds erwartungsgemäß keinen Einfluss haben und somit im Rahmen einer FE-Modellierung mit bewegten Netzen nicht zu berücksichtigen sind. Danach wurde die zur Bewegungseinbindung verwendete Methode der diskreten Verschiebungen detailliert vorgestellt, wobei speziell die Notwendigkeiten der Verwendung des impliziten EULER-Verfahrens zur transienten Integration und einer regelmäßigen Vernetzung des stehenden Körpers hervorgehoben worden. Außerdem wurde die Steuerung der Zeitdiskretisierung über eine konstante Wegschrittweite begründet und das bewegungscharakterisierende Maß der Fahrteilkahl η , welchem in der Arbeit eine herausragende Bedeutung zukommt, eingeführt. Im Weiteren wurde theoretisch ausgearbeitet, inwiefern sich die diskret umgesetzten Bewegungen auf die numerische Auswertung des ortsdiskretisierten, stehenden Körpers auswirken. Dabei wurde festgestellt, dass die Verwendung einer groben Zeitdiskretisierung vier qualitativ zu unterscheidende Fehler nach sich zieht, welche individuell in den nachfolgenden Kapiteln zu analysieren und gegebenenfalls zu korrigieren waren. Auf Basis der globalen Ziele dieser Arbeit wurden abschließend fünf Richtlinien eingeführt, an denen sich diese methodologischen Arbeiten zu orientieren hatten.

In Kapitel 4 wurde dann das Fehlerverhalten des impliziten EULER-Verfahrens bei der Verwendung langer Zeitschrittweiten (PTI) untersucht. Dabei ergab eine Recherche, dass ein Heranziehen konventioneller Methoden zur Fehlerabschätzung aufgrund deren Abhängigkeit von der konkreten Ortsdiskretisierung nicht möglich war. Daher wurde ein Ersatzproblem definiert, welches das kondensierte Temperaturverhalten in der zur Lastzone nächsten Elementschicht beschreibt und dessen numerischer Auswertefehler

stellvertretend analysiert wurde. Aus den Resultaten wurde abgeleitet, dass eine Berücksichtigung des PTI-Fehlers in einer großen Zahl relevanter Anwendungsfälle aufgrund der vergleichsweise hohen Trägheit des thermischen Feldproblems nicht erforderlich ist. Um diese am Ersatzproblem gemachte Erkenntnis kritisch zu überprüfen, wurde anschließend ein konkretes FE-Modell vorgestellt, welches das Beispielproblem abbildet und so auch in den nachfolgenden Temperaturberechnungen verwendet wurde. An diesem wurden schließlich strukturvariable Vergleichsanalysen eines bewegten, den PTI-Fehler isolierenden Testlastfalls durchgeführt, welche die Erkenntnis einer oftmals gegebenen Vernachlässigbarkeit des Fehlers bestätigten.

Als Nächstes wurden in Kapitel 5 eingehend die aus der Kinematik einer diskreten Bewegung bedingten Fehler (BD) analysiert, durch welche im Fall einer groben Zeitdiskretisierung im Allgemeinen Temperaturfelder mit wellenförmig verlaufenden Isothermen resultieren. Zu Beginn wurde dafür die alternierende Anzahl an Bedeckungen benachbarter Lastzonenbereiche während der diskreten Überfahrt im Fall eines $\eta \notin \mathbb{N}$ als Ursache identifiziert. Dass diese Situation der Normalfall in strukturvariablen Simulationen ist, wurde in einer anschließenden Betrachtung der Zeitschrittweitensteuerung bei beliebigen Bewegungsprofilen gezeigt. Danach wurde mithilfe illustrierter, diskreter Beispielbewegungen das Auftreten der BD-Abweichungen hinsichtlich Ort und Höhe exakt für beliebige Fahrteilzahlen η beschrieben. Auf Basis dieser Information wurde ein Verfahren zur Korrektur entwickelt, welches durch entsprechende Skalierung der applizierten Wärmestromdichte den Wärmeeintrag in den stehenden Körper trotz alternierender Bedeckungsanzahl homogenisiert. Nach einer Aufbereitung des Korrekturverfahrens zur Anwendung in ortsdiskretisierten Systemen wurde dessen Leistungsfähigkeit in einigen Analysen abschließend evaluiert. Es konnte festgestellt werden, dass in den BD-korrigierten, groben Simulationen eine signifikante Annäherung der Ergebnisse an die Referenz erreicht wurde, ohne dass während der Simulation ein nennenswerter Zusatzaufwand notwendig war.

Das anschließende Kapitel 6 hatte die Analyse und Korrektur jener Fehler zum Inhalt, welche durch die bei grober Zeitdiskretisierung seltene Auswertung eines zeitveränderlichen, bewegten Lastprofils (RUMHI) resultieren. In einer eingehenden Betrachtung des Fehlermechanismus wurde zunächst der problematische, zweidimensionale Charakter der RUMHI-Defekte dargelegt. Unter Beachtung dieser Eigenschaft wurde anschließend eine Standard-Korrektur entwickelt, welche im Vorfeld der Analyse eine auf dem ortsbezogenen Wärmeeintrag basierende Korrekturwärmestromdichte bestimmt und

diese während der Simulation zur Korrektur der tatsächlich, applizierten Wärmelast heranzieht. Eine Analyse von deren Leistungsfähigkeit bestätigte im Vergleich mit dem korrekturfreien Fall und der Referenz zwar den prinzipiellen Erfolg der Korrektur, offenbarte aber auch deutliche, verbleibende Defizite in den Endbereichen. Über die Anwendung der Standard-Korrektur auf den eigentlich nicht korrekturbedürftigen Fall eines konstanten, bewegten Lastprofils konnte die Ursache dieser Defizite in der Methodik des Korrekturverfahrens selbst gefunden werden. Deren Korrektur wurde anschließend über die analytische Beschreibung dieses Falls entwickelt und an Beispielen mit jeweils nur einem Bewegungsabschnitt erfolgreich erprobt. Beim Übergang auf die Korrektur beliebiger Bewegungen mit mehreren Abschnitten zeigte sich allerdings, dass die RUMHI-Korrektur prinzipbedingt nicht in der Lage ist, die potentiell an den Umkehrpunkten vorliegenden Unterschiede in den Profilen der ein- und ausfahrenden Bewegung simultan ausreichend exakt zu erfassen. Es wurde notwendig, die applizierten Wärmestromdichten an den Umkehrpunkten während der Simulation exakt zu ermitteln, dabei aber die Entwicklungsrichtlinie nach einem geringen Zusatzaufwand etwas zu verletzen. In der anschließenden Leistungsfähigkeitsanalyse der gesamtheitlichen RUMHI-Korrektur konnte gezeigt werden, dass deren Anwendung im Rahmen der Beschränkungen des Auflösungsvermögens eine deutliche Steigerung der Ergebnisqualität gegenüber einer korrekturfreien Analyse mit sich bringt. Der dafür notwendige Zusatzaufwand während der Simulation ist trotz der aufwendigeren Berechnungen an den Umkehrpunkten als – speziell mit Blick auf die sonstigen Berechnungen während der Lastschritte einer transienten Auswertung ortsdiskretisierter System – vernachlässigbar gering einzuordnen.

Der in Kapitel 7 zuletzt betrachtete Fehler resultiert aus der bei grober Zeitdiskretisierung seltenen Aktualisierung des konduktiven Wärmeaustauschs (RUCC) zwischen den an der Bewegung beteiligten Körpern. Bei einer detaillierten Betrachtung der konduktiven Vorgänge zwischen diskret zueinander verschobenen Körpern wurde zunächst festgestellt, dass eine exakte Quantifizierung des RUCC-Fehlers mit den für diese Arbeit gegebenen Informationen prinzipiell nicht möglich ist. Daher wurde anschließend ein Ersatzproblem entwickelt, an dem die konduktiv bedingte Erhöhung der Oberflächentemperatur im Fall einer maximal diskreten sowie einer kontinuierlichen Überfahrt analytisch bestimmt und miteinander verglichen werden konnten. Eine Analyse des so abgeschätzten Fehlerverhaltens zeigte dann, dass die relative RUCC-Abweichung bei gegebenem Material durch die Kombination aus Übergangskoeffizient und Überfahrzeit

bestimmt ist. Für ein strukturvariables Problem sowie einer gegebenen Fehlergrenze kann damit näherungsweise abgeschätzt werden, inwiefern die RUCC-Problematik zu berücksichtigen ist. Abschließend wurde der Verzicht auf die Entwicklung einer RUCC-Korrektur in dieser Arbeit begründet, indem u.a. die zu erwartende Komplexität der Aufgabe sowie deren Unvereinbarkeit mit den definierten Entwicklungsrichtlinien näher erläutert wurden. Die RUCC-Problematik ist damit ein problematischer Aspekt der effizienten Simulationen, dessen vollumfängliche Bearbeitung in dieser Arbeit nicht zu leisten war, für den aber gezeigt wurde, dass die Option der Vernachlässigbarkeit potentiell gegeben ist.

Zusammengefasst haben die Fehleranalysen ergeben, dass die Vernachlässigbarkeit des PTI-Fehlers in thermischen Problemen eigentlich immer vorliegt, während eine gesicherte Nichtberücksichtigung des RUCC-Fehlers eventuell möglich aber noch durch weitere, detailliertere Untersuchungen zu stützen ist. Dementgegen können die resultierenden Defekte aus der BD- und RUMHI-Problematik über die dafür entwickelten Verfahren korrigiert werden. Inwiefern sich deren gleichzeitige Anwendung auf die Ergebnisse einer zeitlich grob diskretisierten Simulation auswirkt, wird im folgenden Abschnitt an zwei weiteren strukturvariablen Problemen untersucht.

8.2 Anwendung der Korrekturverfahren

Die nachfolgenden Analysen haben zum Ziel, lediglich die entwickelten Korrekturmethoden im Einsatz an weiteren Anwendungsfällen zu begutachten. Das Interesse liegt daher auf den Auswirkungen der unterschiedlich korrigierten, bewegten Lastprofile auf das Temperaturfeld des stehenden Körper. Statt eines vollständigen, strukturvariablen Problems wird Ω_s deshalb jeweils individuell als thermisches Feldproblem mit diskret bewegter Last betrachtet.

8.2.1 Fräsmaschinenständer

Das erste betrachtete Problem stammt aus dem in der Einleitung angesprochenen Feld der Werkzeugmaschinenberechnung (vgl. Kapitel 1, S. 2) und soll die Anwendbarkeit der Verfahren in tatsächlichen, ingenieursrelevanten Fragestellungen überprüfen. Es handelt sich bei dem stehenden Körper um einen Fräsmaschinenständer, der als Untersuchungsobjekt bereits in einigen anderen Arbeiten (z. B. GROSSMANN [34], NAUMANN [69]) betrachtet wurde und dessen abgeleitetes FE-Modell in Abb. 8.1 dargestellt ist.

In der Totalen (links) sowie am Detail (rechts) ist ersichtlich, dass der Ständer u.a. durch die inneren Versteifungsrippen eine komplexe und damit nicht regelmäßig vernetzbare Geometrie aufweist. Um trotz allem die geforderte gleichmäßige Vernetzung mit Hexaedern (siehe Unterabschnitt 3.2.1, S.40) umzusetzen, wird empfohlen, bei derartigen Geometrien zunächst einen regelmäßig vernetzbaren Teil der Geometrie abzutrennen, beide entstehende Teile separat zu vernetzen und diese – wie im Detail in Abb. 8.1 illustriert – mittels eines Verbundkontaktes¹ zu rekombinieren. Da die translatorischen Bewegungen gewöhnlich entlang geradliniger Führungselemente ausgeführt werden, sollten eigentlich immer Bereiche vorhanden sein, welche ein derartiges Vorgehen erlauben.

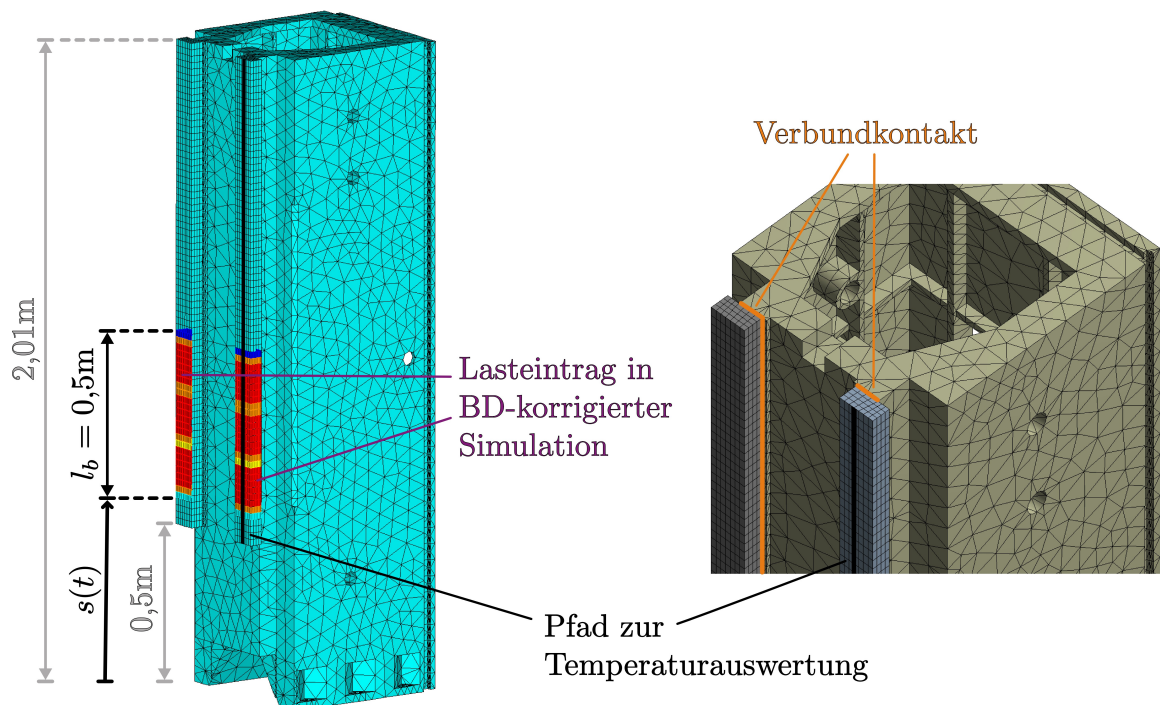


Abbildung 8.1: FE-Modell des Fräsmaschinenständers

Während eines Fertigungsprozesses bewegt sich entlang des Ständers ein Spindelstock, welcher das Fräs Werkzeug aufnimmt und in der Bearbeitung eine Bewegung in vertikaler Richtung entlang den Führungsschienen ausführt. In Abb. 8.1 ist zu sehen, wie im Modell die zugehörigen Reiblasten auf der Schiene aufgebracht werden. Zusätzlich sind

¹Dieser führt automatisch Zwangsbedingungen zwischen den am Kontakt beteiligten Gebieten ein und bedingt damit keinen zusätzlichen Berechnungsaufwand in der transienten Phase der Analyse (ANSYS Theory [5])

deren Ausdehnung in Bewegungsrichtung l_b sowie relevante geometrische Abmessungen des Ständers mit angegeben. Das simulierte, bewegte Lastprofil, welches in Abb. 8.2 dargestellt ist, lässt sich damit hinsichtlich der gewählten Verfahrenswege interpretieren.

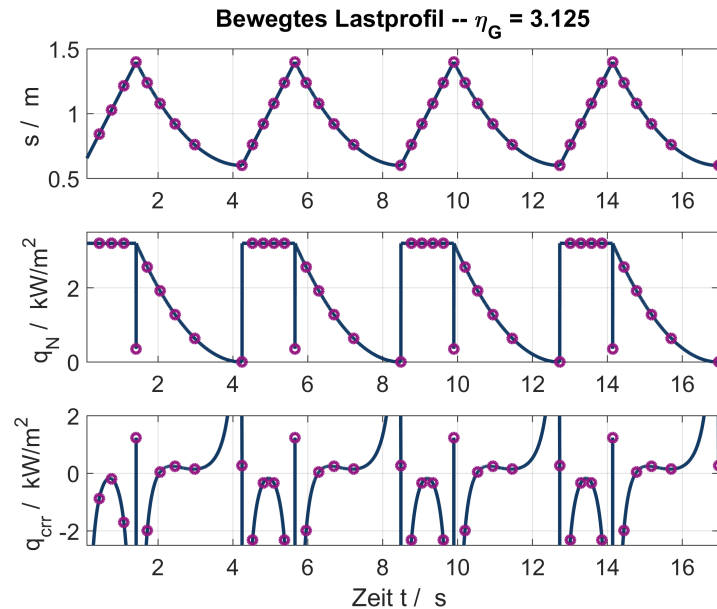


Abbildung 8.2: Bewegtes Lastprofil bei Simulation des Maschinenständers

Bei dem beispielhaft gewählten Fahrprofil $s(t)$ handelt es sich um eine alternierende Kombination aus mit $|a(t)| = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ entschleunigten Parabeln zwischen $s_{E,u} = 0,6\text{m}$ und $s_{E,o} = 1,4\text{m}$ (vgl. Abb. 6.5, S. 97), welche durch eine konstante Bewegung halber Dauer miteinander verbunden sind. Die originäre NEUMANN-Kontaktlast $q_N(t) = F \cdot v(t)^2$ ist als geschwindigkeitsabhängig mit $F = 10 \cdot 10^3 \frac{\text{Ws}^2}{\text{m}^4\text{K}}$ gewählt. Aufgrund des geringen Verhältnisses von $s_{E,o} - s_{E,u} / l_b = 1,6$ wurde für die zeitliche Diskretisierung der groben Simulation ein $\tilde{\eta} = 3$ gewählt, womit sich nach Gl. 5.3 (S. 77) das angegebene $\eta = 3,125$ ergibt. Für das betrachtete Problem liegt interessanterweise in dem Bereich $s \in (0,9\text{m}; 1,1\text{m})$ der in Abschnitt 6.2 (S. 108) behandelte Fall einer doppelten Endpunkt-Beeinträchtigung vor.

In Abb. 8.3 sind nun die aus den verschiedenen stark korrigierten Simulationen resultierenden Temperaturverläufe an der Schienenoberfläche zu sehen, wobei die genaue Lage des Auswertepfads in Abb. 8.1 durch den schwarzen Strich angegeben ist. Allgemein ist festzustellen, dass die Korrekturverfahren erneut dazu beitragen, dass sich die Ergebnisse der groben Simulation den Referenzergebnissen annähern und zwar nicht

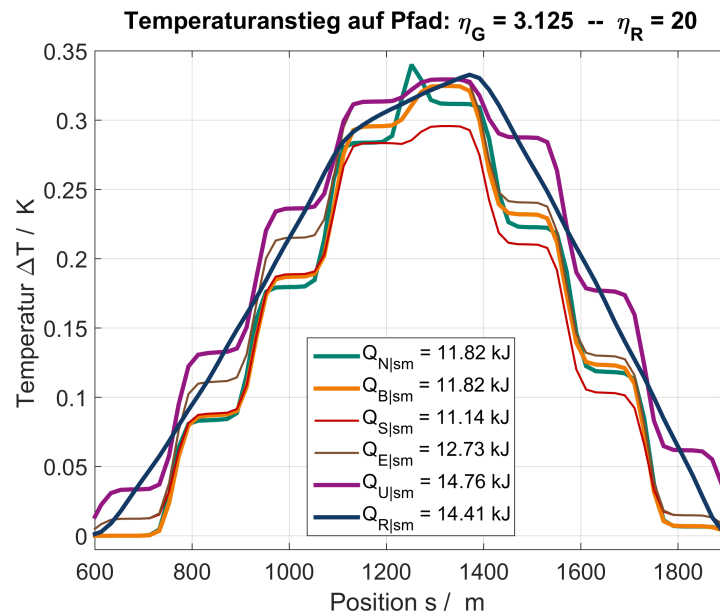


Abbildung 8.3: Temperaturerhöhung auf Pfad in den unterschiedliche Korrekturstufen

nur in den Temperaturverläufen selbst, sondern auch mit Blick auf den in der Legende angegebenen Gesamtenergieeintrag.

Hinsichtlich der einzelnen Beiträge sind für das betrachtete Problem speziell die Endbereich- (braun) und Umkehrpunkt-Korrektur (violett) hervorzuheben, welche auf nahezu alle Schienenbereiche signifikant einwirken. Interessant ist auch, dass sich aufgrund der BD-Problematik im korrekturfreien Fall (grün) lediglich ein echter Beulenbereich ausbildet, welcher durch die zugehörige BD-Korrektur (orange) aber verlässlich geglättet wird. Begründet sind beide Beobachtungen durch die bzgl. der Länge l_b relativ kurzen Verfahrswege. Dadurch stellen auch die Belastungsenden (vgl. Abb. 6.5, S. 97) einen Großteil der Gesamtbewegung dar, weshalb die darin besonders stark, treppenförmig auftretenden Auflösungsbeschränkungen (vgl. auch Abb. 6.15 rechts, S. 118) die erhaltenen Temperaturverläufe der groben Simulationen dominieren.

Ein ähnlich positiver Eindruck vom Wirken der Korrekturverfahren lässt sich beim Blick auf Abb. 8.4 gewinnen, in der die am Ende der Simulation erhaltenen Temperaturplots nahe der Schienenbereiche für die vier relevanten Korrekturstufen zusammengefasst sind. Ein Vergleich der Lage der Isothermen zeigt, dass zwar noch einige Unterschiede zwischen Referenz und vollständig korrigiertem Resultat zu erkennen sind, aber u.a. an den oberen und unteren Rändern des überfahrenen Bereichs lässt sich sehen, dass

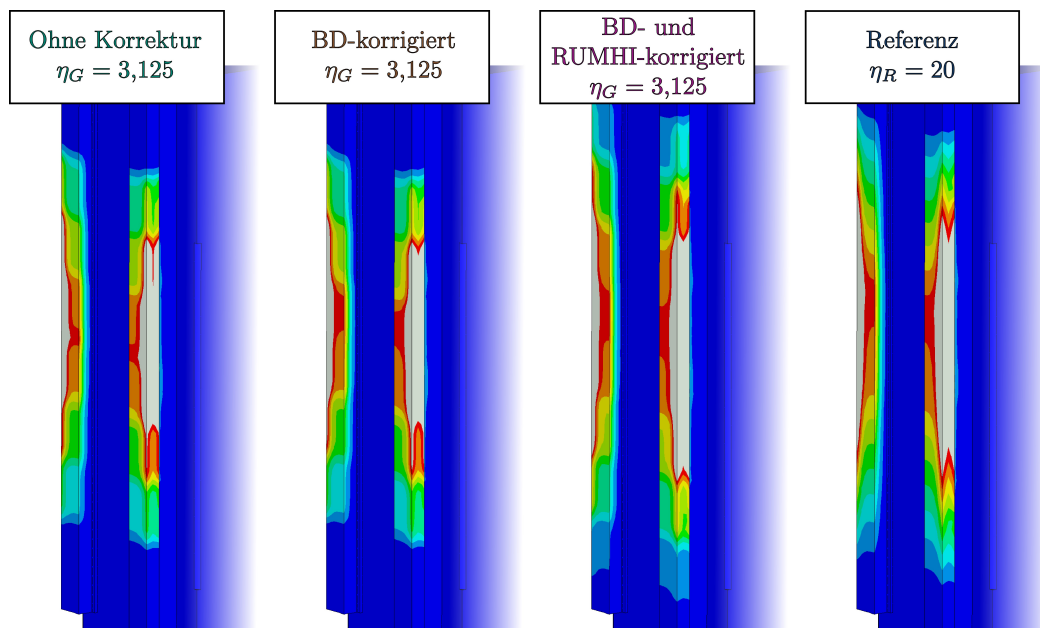


Abbildung 8.4: Resultierende Temperaturfelder im Schienenbereich

durch den geringen Korrekturaufwand ein deutlich referenznäheres Temperaturfeld berechnet wird.

Positiv ist in den groben Simulationen auch das Temperaturverhalten in jenen Bereichen zu bewerten, in denen zwei Flächen der Lastzone an einer Kante zusammenstoßen. An derartigen Stellen nimmt der stehende Körper in Tiefenrichtung eine singuläre Ausdehnung an. Da in dieser Arbeit nicht untersucht wurde, inwiefern sich die Verwendung einer groben Zeitschrittweite in der Analyse eines derartigen Problems auswirkt, ist die Feststellung, dass in der beispielhaften Anwendung keine erkennbaren Schwierigkeiten dadurch auftreten, zufriedenstellend.

8.2.2 Translationen in Polarkoordinaten

Der zweite Anwendungsfall soll die Anwendbarkeit der Korrekturverfahren in bewegten Systemen illustrieren, welche von einem kartesischen Blickpunkt aus gesehen eigentlich Rotationen ausführen. In Abb. 8.5 sind zwei prinzipielle Beispiele für derartige Fragestellungen illustriert. Deren Beschreibung in Polarkoordinaten – genauer Zylinderkoordinaten – ermöglicht das Auffassen der Rotation als eine Translation entlang des Drehwinkels ϕ . Systeme wie z. B. Bahnräder (TUDOR [95]) oder Bolzengelenke (MANSOURI [65]), bei denen die Lastzone in axialer Richtung z aufgespannt ist (Abb. 8.5

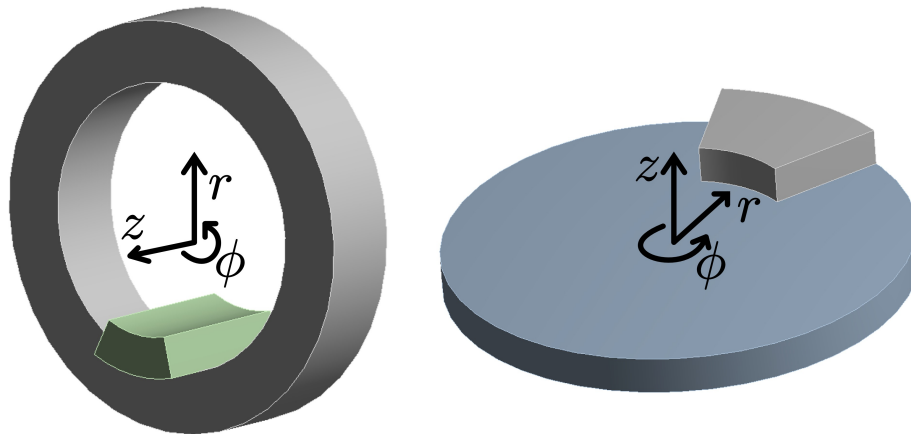


Abbildung 8.5: Mögliche strukturvariable Probleme in Polarkoordinaten

links), werden nach dem namensgebenden Stellvertreter als Klotzbremssysteme bezeichnet. Analog werden Systeme mit einer Aufspannung entlang der radialen Koordinate r als Scheibenbremssysteme eingeordnet. Neben den Namensgebern (YEVTUSHENKO [101]) gehören dazu z. B. auch die Stift/Scheibe-Tribometer (KENNEDY [51]).

Pfad zur
Temperaturauswertung

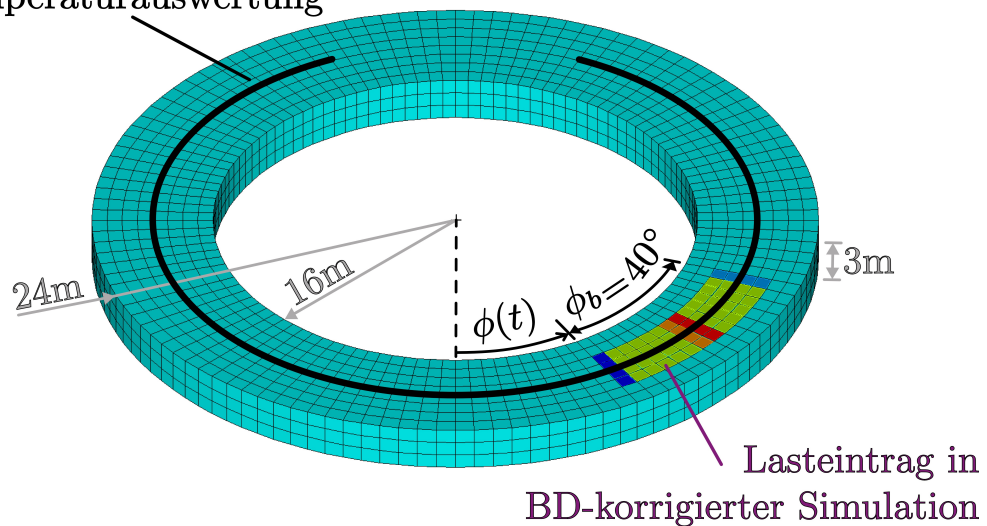


Abbildung 8.6: Beispiel-Modell

Für eine Übertragbarkeit der entwickelten Korrekturmethode auf die rotierenden Systeme ist nun lediglich entscheidend, dass die Voraussetzung einer orthogonal zur Bewegungsrichtung immer gleich ausgedehnten Lastzone (Abschnitt 3.1, S. 28) sowie

einer in Bewegungsrichtung regelmäßigen Vernetzung (Abschnitt 3.2.1, S. 40) ebenfalls erfüllt sind. Die Herleitung der BD- und RUMHI-Korrektur für derartige Systeme erfolgt dann vollständig analog zum Vorgehen in den zugehörigen Kapiteln und führt auf die gleichen Vorschriften zur Skalierung und Applikation.

In Abb. 8.6 ist nun das Modell des beispielhaft analysierten Scheibenbremsensystem zu sehen, an welchem eine Anwendung der Korrekturverfahren evaluiert werden soll. Es ist ersichtlich, dass es die Anforderungen an die Lastgeometrie nach sich ziehen, dass die Lastzone lediglich durch Kanten begrenzt wird, welche parallel oder orthogonal zur Bewegungsrichtung verlaufen. Die verwendeten geometrischen Ausdehnungen sind willkürlich gewählt und in Abb. 8.6 lediglich für eine potentielle Ergebnisreproduktion angegeben.

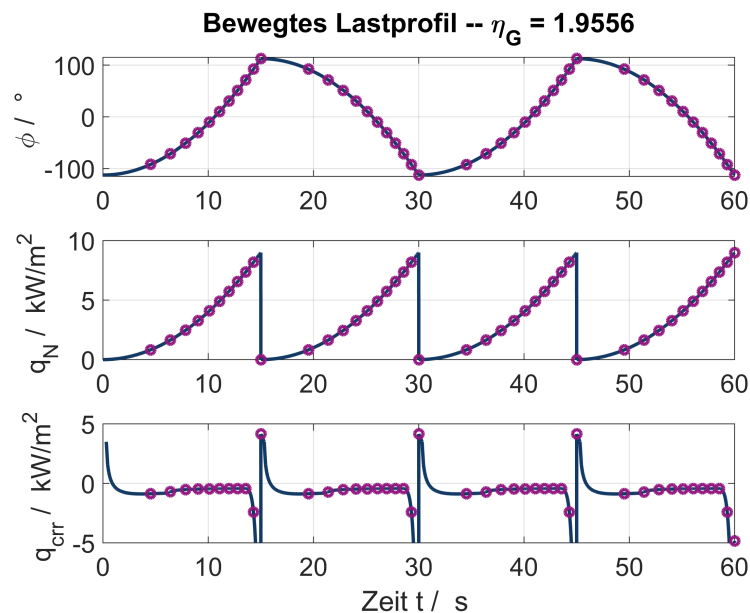


Abbildung 8.7: Bewegtes Lastprofil bei Simulation des Scheibenbremsensystems

Für die Simulation wurde das in Abb. 8.7 dargestellte, bewegte Lastprofil verwendet, in dem mit $a(t) = 1^\circ/\text{s}^2$ beschleunigten Parabeln im Bereich $\phi(t) = [-(15^2/2)^\circ; +(15^2/2)^\circ]$ hin- und hergefahren wird. Die beschleunigten Bewegung resultieren in Kombination mit dem geschwindigkeitsabhängigen Wärmelastprofil $q_N(t) = 10 \frac{\text{Ws}^2}{\text{m}^2 \text{K} \cdot (^\circ)^2} \cdot (v(t))^2$ in einer systematischen Überschätzung des Wärmeeintrags in einer korrekturfreen groben Simulation und ziehen daher die negativ ausfallende Korrekturwärmestromdichte $q_{\text{corr}}(t)$ nach sich.

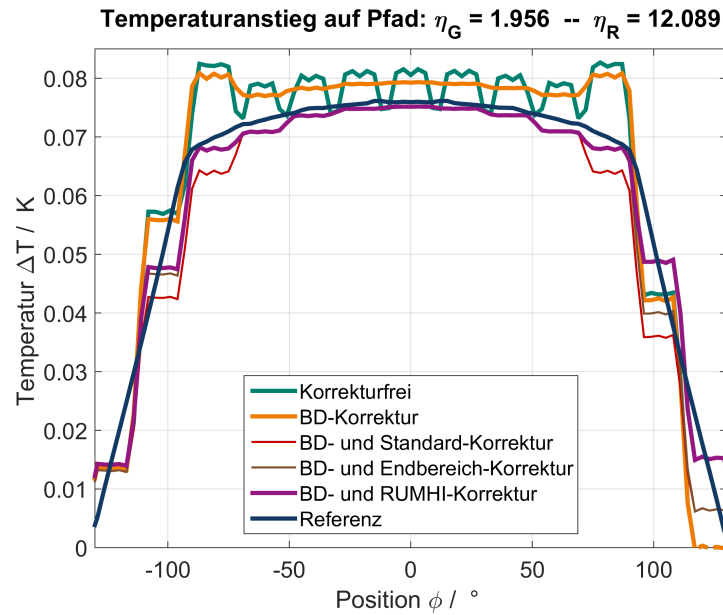


Abbildung 8.8: Pfadtemperaturen bei unterschiedlichen Korrekturen

Für die Zeitschrittweite wird in den groben Simulationen ein $\tilde{\eta} = 2$ gewählt, womit sich aus dem Längenverhältnis von Lastzone und Bewegungsabschnitt ein $\eta = 1,9556 < \tilde{\eta}$ (vgl. Gl. 5.3, S. 77) ergibt. Für eine derartige Situation resultiert ein BD-Verhalten, in dem vergleichsweise lange Beulenbereiche einen kurzen Dellenbereich einschließen.

Die aus den verschiedenen stark korrigierten Simulationen resultierenden Temperaturverläufe auf dem in Abb. 8.6 dargestellten Pfad sind in Abb. 8.8 aufgetragen. Allgemein lassen sich in den Ergebnissen dieselben Auswirkungen und verbleibenden Defizite beobachten, wie in den bisher präsentierten Ergebnissen (vgl. z. B. Abb. 5.7, S. 85 und Abb. 6.15, S. 118) der tatsächlich translatorischen Systeme. Besonders fällt dabei die Homogenisierung der BD-Defekte sowie die Vermeidung der systematischen Überabschätzung durch die Standard-Korrektur auf, da in dem betrachteten Beispiel des Scheibenbremsensystems der Anteil des Fahrwegs außerhalb der Endbereiche deutlich mehr Raum einnimmt als noch beim Fräsmaschinenständer (vgl. Abb. 8.3).

Auch der Blick auf die in Abb. 8.9 dargestellten Plots zeigt, dass mit den Korrekturverfahren eine Steigerung der Effizienz zur Berechnung der eigentlich rotierenden Systeme möglich ist, da sich das in der groben Simulation erhaltene Temperaturfeld durch die einzelnen Korrekturschritte augenscheinlich immer mehr der Referenz annähert und sich der benötigte Rechenaufwand entsprechend Gl. 3.15 um den Faktor $F_{save} = \eta_R/\eta_G = 12,089/1,9556 \approx 6$ verringert. Speziell die bereits mehrmals angesprochene,

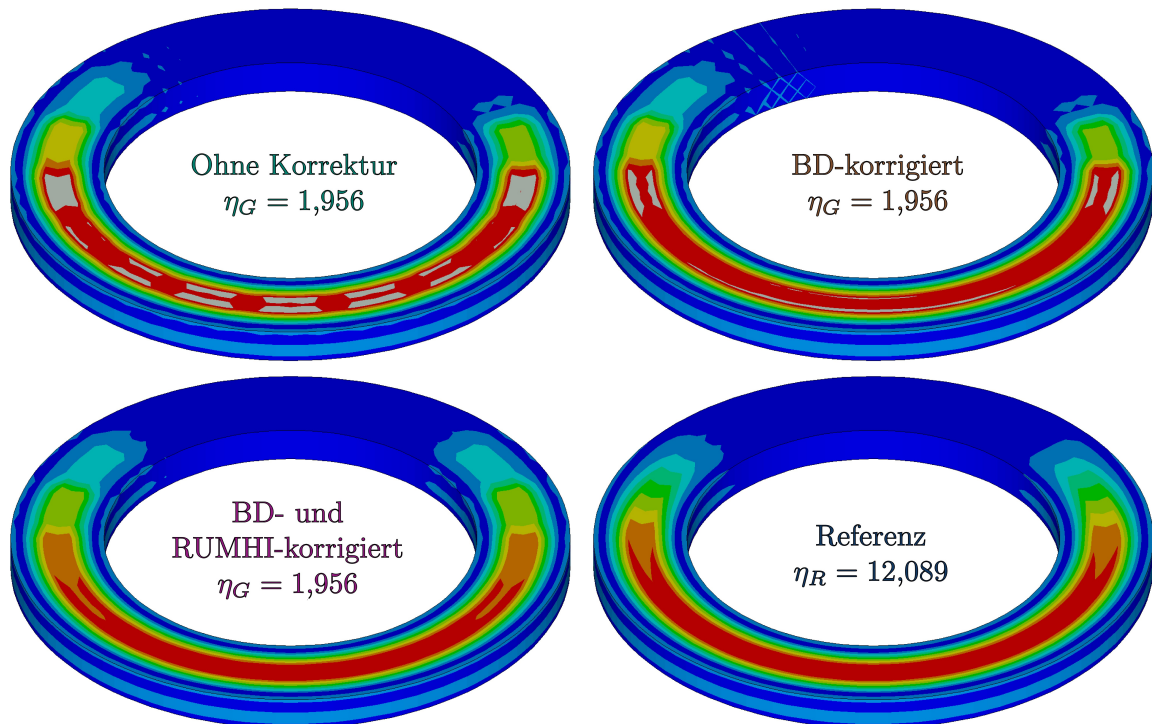


Abbildung 8.9: Resultierende Temperaturfelder der Scheibe

durch die Wegschrittweite bedingte Auflösungsbeschränkung ist aber auch darin – vor allem nahe der Endpunkte – ersichtlich.

Problematisch an der Technologie der rotierenden Systeme ist nun, dass die Drehachse der Bewegung gewöhnlich starr gelagert ist und die bewegte Wärmequelle damit – im Gegensatz zu den Translationen – nicht durch eine eigene konstruktive Lösung geführt werden muss. In Konsequenz liegen damit oft Systeme vor, in denen die Rotation zwar als eine Translation entlang ϕ aufgefasst werden kann, deren Lastflächen aber nicht die notwendigen geometrischen Voraussetzungen für eine Anwendung der Korrekturverfahren erfüllen. Inwiefern diese Problematik mit dem Ziel einer erhöhten Anwendbarkeit der Korrekturverfahren eventuell umgangen werden kann, wird als einer der potentiellen Arbeitspunkte im nachfolgenden Abschnitt als Teil eines kurzen Ausblicks angesprochen.

8.3 Ausblick

Die Untersuchungen zur Effizienzsteigerung strukturvariabler, thermischer Simulationen mittels der ausschließlichen Verwendung einer groben Zeitdiskretisierung erfolgten in dieser Arbeit grundständig. Die Identifikation weiterer denkbarer Arbeitspunkte zur Weiterentwicklung der Methodik ist daher problemlos möglich.

Um die verbleibende Unsicherheit bzgl. der RUCC-Problematik zu eliminieren, sollte deren detailliertere Untersuchung zunächst im Fokus stehen. Speziell zu Beginn ist dabei eine genauere Quantifizierung der absolut zu erwartenden Fehler auf Basis der Berücksichtigung des aktuellen Temperaturzustands anzustreben. Für ein gegebenes Problem sollte damit dann auch direkt der Einfluss des RUCC-Fehlers in Relation zu den RUMHI-Defekten quantifizierbar sein – ein Zusammenhang, welcher potentiell als weiterer Indikator bzgl. der Notwendigkeit einer RUCC-Berücksichtigung heranziehbar wäre. Auf Basis des detailliert beschriebenen Fehlerverhaltens ist im Weiteren ein geeignetes Verfahren für dessen Korrektur im Fall grober Zeitschrittweiten und damit langen diskreten Verschiebungswegen zu entwickeln. Ob dabei die Aufrechterhaltung der Richtlinie R2 (S. 51) mit Blick auf die beobachtete Sensitivität der Resultate von der örtlichen Netzweite noch sinnvoll ist, sollte mit Blick auf die nachgelagerte Umsetzung der Korrektur in ortsdiskreten Systemen zunächst eingehend eruiert werden. Insbesondere, da durch die methodisch bedingten Einzelheiten der Berechnung des Temperaturfelds sowie der konduktiven Kontaktlasten zu erwarten ist, dass sich die zu entwickelnde Korrekturumsetzung vergleichsweise komplex gestalten wird.

Ein weiterer, evtl. problematischer Aspekt der gewählten Methodik ist das in der Berechnung des Fräsmaschinenständers kurz angesprochene Problem der kantigen, bzw. nicht ebenen Geometrien der Lastzone und die damit möglicherweise nicht gegebene Vernachlässigbarkeit des PTI-Fehlers innerhalb kritischer Bereiche. Zwar sind in den Ergebnissen in Abb. 8.4 keine größeren Defekte des Temperaturfelds zu identifizieren, welche direkt aus diesem potentiellen Fehlermechanismus resultieren könnten, inwiefern diese Ursache allerdings im Allgemeinen problematisch werden könnte, sollte trotzdem durch einige kurze Studien an unterschiedlichen Geometrien untersucht und – wenn möglich – gesichert ausgeschlossen werden.

Eine methodologische Weiterentwicklung der RUMHI-Korrektur könnte prinzipiell die Behandlung der bei $\eta_G > 1$ abseits des Grenzfalles verbleibenden Energieeintragsdefekte zum Inhalt haben. Eine mögliche Herangehensweise wäre die Beschreibung eines weiteren Korrekturfaktors, welcher diese Abweichungen z. B. auf Basis der lokalen

Konvexität des bewegten Lastprofils korrigiert und dabei die aktuelle Fahrteilzahl η_G mit berücksichtigt. Ebenfalls wäre es in ortsdiskreten Systemen denkbar, die Auswirkungen der in den groben Simulationen vorliegenden Auflösungsbeschränkungen zu umgehen, indem z. B. in den Belastungsenden eine elementgenaue Berücksichtigung des darin linearen Abfalls des Wärmeeintrags (siehe Abb. 6.5, S. 97) erfolgt. Darüber hinaus könnte es auch sinnvoll sein, die applizierte Wärmestromdichte ähnlich wie an den Umkehrpunkten immer direkt per Online-Auswertung des Lastprofils und unter Berücksichtigung der zuvor eingetragenen Wärmemengen über den gesamten Bewegungsbereich elementgenau zu bestimmen. Inwiefern dieses Vorgehen dann umsetzbar ist und sich auf den Aufwand auswirkt, ist entsprechend zu untersuchen.

Wie bei dem Anwendungsfall des Scheibenbremsen-Systems bereits erwähnt wurde, scheitert die Anwendbarkeit der Korrekturverfahren bei vielen, auch konduktionsfreien, strukturvariablen Problemen daran, dass die bewegte Last nicht die geforderten Eigenschaften bzgl. Geometrie (z. B. AKBARI [3]) und Uniformität (z. B. HAMRAOUI [38]) erfüllt. Die Entwicklung einer Methode zur Umwandlung einer Wärmequelle von einer beliebigen in eine den Korrekturverfahren zugängliche Form könnte daher ein sinnvoller Ansatzpunkt sein, um deren allgemeines Anwendungsspektrum signifikant zu vergrößern. Konkret könnte für diese Umwandlung der Umstand ausgenutzt werden, dass jede Wärmequelle aufgrund der Bewegung – bildlich gesprochen – eine Spur eingetragener Energie verursacht. Weil dadurch also die örtliche Form der ebenen Wärmequelle auf den niederdimensionalen Querschnitt der Spur surjektiv abgebildet wird, sollte es prinzipiell möglich sein, zu jeder beliebig geformten Wärmequelle eine zugehörige korrekturzugängliche Wärmequelle zu finden, welche dieselbe Wärmeeintragsspur nach sich zieht. Ob dieses Vorgehen auch im Fall eines relevanten konduktiven Wärmeaustauschs möglich ist, sollte ebenfalls untersucht werden.

Mit Blick auf eine konkrete Anwendung der Verfahren ist zudem auszuarbeiten, wie die Steuerung der Zeitschrittweite und die Applikation der einzelnen Korrekturen zu erfolgen hat, wenn – wie im Fall der seriellen oder parallelkinematischen Bewegungsumsetzung bei Werkzeugmaschinen – in dem abgebildeten System mehrere Strukturvariabilitäten vorhanden sind. Als ein erster Ansatz dafür wäre es z. B. denkbar, immer bis zu dem global gesehen nächsten Endpunkt zu fahren, die zugehörige Zeit als quasi virtuellen Endpunkt auch für die anderen Strukturvariabilitäten zu betrachten und mit den dadurch resultierenden Fahrteilzahlen die jeweiligen Korrekturingriffe zu steuern. Speziell mit Blick auf die Methodik der RUMHI-Korrektur ist allerdings zu

sehen, dass das konkrete Vorgehen für eine tatsächliche Umsetzung dieses Ansatzes noch tiefergehend auszuarbeiten ist.

Zuletzt soll noch einmal darauf hingewiesen werden, dass die entwickelten Korrekturverfahren die als NEUMANN-Randbedingung repräsentierte, bewegte Quelle derart verändern, dass die Energieeinträge in der zeitlich grob diskretisierten Simulation sowie der kontinuierlichen Referenz möglichst gleich sind. Damit sollte es prinzipiell möglich sein, die Verfahren auch zur Korrektur einer bewegten NEUMANN-Last innerhalb der Feldberechnungen anderer physikalischer Domänen anzuwenden, wobei allerdings die Trägheit des Felds ebenfalls eine Vernachlässigbarkeit des PTI-Einfluss erlauben muss. Ob dies tatsächlich so möglich ist bzw. noch weitere Voraussetzungen dafür zu erfüllen sind oder ob eine Anwendung durch die eventuell abweichende Ordnung der zugrundeliegenden PDGL oder durch andere Gründe doch verhindert wird, könnte in einer weiteren Bearbeitung des Themas mit dem Ziel einer noch allgemeineren Anwendbarkeit der Verfahren zur Effizienzsteigerung untersucht werden.

Literaturverzeichnis

- [1] *Richtlinie 2006/42/EG des Europäischen Parlaments und des Rates vom 17. Mai 2006 über Maschinen und zur Änderung der Richtlinie 95/16/EG (Neufassung)*. 2006. – Richtlinie
- [2] AGHDAM, A.B. ; KHONSARI, M.M.: Application of a thermodynamically based wear estimation methodology. In: *Journal of Tribology* 138 (2016), Nr. 4
- [3] AKBARI, M. ; SINTON, D. ; BAHRAMI, M.: Moving Heat Sources in a Half Space: Effect of Source Geometry. In: *ASME 2009 Heat Transfer Summer Conference collocated with the InterPACK09 and 3rd Energy Sustainability Conferences* American Society of Mechanical Engineers, 2009, S. 685–694
- [4] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag, 2015
- [5] ANSYS, INC. (Hrsg.): *ANSYS Mechanical APDL Theory Reference*. Release 15.0. Canonsburg, PA: ANSYS, Inc., 2013
- [6] ANSYS, INC. (Hrsg.): *ANSYS Mechanical APDL Thermal Analysis Guide*. Release 15.0. Canonsburg, PA: ANSYS, Inc., 2013
- [7] ARGYRIS, J. ; MLEJNEK, H.-P.: *Die Methode der finiten Elemente*. Vieweg & Sohn, 1986
- [8] ARNOLD, D.N. ; AWANOU, G.: The Serendipity Family of Finite Elements. In: *Foundations of Computational Mathematics* 11 (2001), S. 337–344
- [9] BAEHR, H.D. ; KABELAC, S.: *Thermodynamik: Grundlagen und technische Anwendungen*. Springer-Verlag, 2012
- [10] BAJER, C. ; DYNIEWICZ, B.: Space–time approach to numerical analysis of a string with a moving mass. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76 (2008), Nr. 10, S. 1528–1543

- [11] BARBER, J.R.: Distribution of heat between sliding surfaces. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 9 (1967), Nr. 5, S. 351–354
- [12] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. 2. vollständig neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer-Verlag, 2002
- [13] BEITELSCHMIDT, M. ; GALANT, A. ; GROSSMANN, K. ; KAUSCHINGER, B.: Innovative Simulation Technology for Real-Time Calculation of the Thermo-Elastic Behaviour of Machine Tools in Motion. In: *Applied Mechanics and Materials* 794 (2015), S. 363–370
- [14] BLOK, H.: Theoretical study of temperature rise at surfaces of actual contact under oiliness lubricating conditions. In: *Proceedings of the general discussion on lubrication and lubricants* Bd. 2 London: IMechE, 1937, S. 222–235
- [15] BRECHER, C. ; BAKARINOW, K. ; NEUS, S. ; WENNEMER, M. ; FEY, M.: Thermische Simulation von Vorschubachskomponenten. In: *wt Werkstattstechnik online* 5 (2015), S. 156–160
- [16] BRECHER, C. ; FEY, M. ; NEUS, S. ; SHNEOR, Y. ; BAKARINOW, K.: Influences on the thermal behavior of linear guides and externally driven spindle systems. In: *Production Engineering* 9 (2015), Nr. 1, S. 133–141
- [17] BRECHER, C. ; KUNC, M.: Reibkraftmodellierung von Profilschienenführungen. In: *wt Werkstattstechnik online* 3 (2011), S. 328–338
- [18] BROCKMANN, M. ; KLOCKE, F. ; VESELOVAC, D.: Model and Method for the Determination and Distribution of Converted Energies in Milling Processes. In: GROSSMANN, K. (Hrsg.): *Thermo-energetic Design of Machine Tools*. Springer International Publishing, 2015 (Lecture Notes in Production Engineering), S. 27–34
- [19] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 19., völlig überarbeitete Auflage. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig und Verlag Nauka, Moskau, 1979
- [20] CARSLAW, H.S. ; JAEGER, J.C.: *Conduction of heat in solids*. Bd. 1. Oxford Science Publications, 1959

- [21] CASALINO, G. ; MORTELLO, M. ; CONTUZZI, N. ; MINUTOLO, F.M.C.: Finite element model for laser welding of titanium. In: *Procedia CIRP* 33 (2015), S. 435–440
- [22] CHANTRENNE, P. ; RAYNAUD, M.: Study of a Macroscopic Sliding Contact Thermal Model from Microscopic Models. In: *International journal of thermal sciences* 40 (2001), Nr. 7, S. 603–621
- [23] CRANK, J.: *The mathematics of diffusion*. Oxford university press, 1979
- [24] CRANK, J. ; NICOLSON, P.: A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. In: *Advances in Computational Mathematics* 6 (1996), Nr. 1, S. 207–226
- [25] DROSSEL, W.-G. ; BUCHT, A. ; OHSENBRÜGGE, C.: Modelling and Design of Systems for Active Control of Temperature Distribution in Frame Subassemblies. In: GROSSMANN, K. (Hrsg.): *Thermo-energetic Design of Machine Tools*. Springer International Publishing, 2015 (Lecture Notes in Production Engineering), S. 199–208
- [26] DUBBEL, H. ; BEITZ, W. ; KÜTTNER, K.-H.: *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag, 2013
- [27] EINSTEIN, A.: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: *Annalen der Physik* 322 (1905), Nr. 8, S. 549–560
- [28] FERZIGER, J.H. ; PERIĆ, M.: *Numerische Strömungsmechanik*. Springer-Verlag, 2008
- [29] FICK, A.: Ueber Diffusion. In: *Annalen der Physik* 170 (1855), Nr. 1, S. 59–86
- [30] FOURIER, J.: *Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier*. Chez Firmin Didot, père et fils, 1822
- [31] GERISCH, A. ; NAUMANN, A. ; WENSCH, J.: Defect corrected averaging for highly oscillatory problems. In: *Applied Mathematics and Computation* 261 (2015), S. 90–103

-
- [32] GRESHO, P.M. ; LEE, R.L.: Don't Suppress the Wiggles – They're Telling You Something! In: *Computers & Fluids* 9 (1981), Nr. 2, S. 223–253
- [33] GROSSMANN, K.: Thermo-Energetische Gestaltung von Werkzeugmaschinen. In: *Zeitschrift für Wirtschaftlichen Fabrikbetrieb* 107 (2012), Nr. 5
- [34] GROSSMANN, K. ; STÄDEL, C. ; GALANT, A. ; MÜHL, A.: Berechnung von Temperaturfeldern an Werkzeugmaschinen. In: *Zeitschrift für Wirtschaftlichen Fabrikbetrieb* 107 (2012), Nr. 6, S. 452–456
- [35] HAHN, D.W. ; ÖZİŞİK, M.N.: *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, Inc., 2012
- [36] HAIRER, E. ; NØRSETT, S.P. ; WANNER, G.: *Solving Ordinary Differential Equations I – Nonstiff Problems*. Second Revised Edition. Springer, 1993
- [37] HAIRER, E. ; WANNER, G.: *Solving Ordinary Differential Equations II – Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Second Revised Edition. Springer, 1996
- [38] HAMRAOUI, M. ; CHBIKI, M. ; LARAQI, N. ; ROSEIRO, L.: Analytical study of the temperature distribution in solids subjected to nonuniform moving heat sources. In: *Thermal Science* 17 (2013), Nr. 3, S. 687–694
- [39] HARTEN, U.: *Physik - Eine Einführung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-Verlag, 2014
- [40] HEISEL, U ; MAIER, W: Reduktion thermischer FEM-Simulationsmodelle. In: *wt Werkstattstechnik online* 1/2 (2012), S. 2–9
- [41] HERWIG, H. ; MOSCHALLSKI, A.: *Wärmeübertragung*. Springer-Verlag, 2014
- [42] HOU, Z.B. ; KOMANDURI, R.: General solutions for stationary/moving plane heat source problems in manufacturing and tribology. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 43 (2000), Nr. 10, S. 1679–1698
- [43] HU, J.: Modellierung und Simulation des thermischen Verhaltens einer Werkzeugmaschine mit der Finite-Elemente-Methode. In: *Berichte aus dem Produktionstechnischen Zentrum Berlin*. Fraunhofer Verlag, 2014
- [44] JAEGER, J.C.: Moving sources of heat and the temperature of sliding contacts. In: *J. and Proc. Roy. Soc. New South Wales* Bd. 76, 1942, S. 202

- [45] JOHNSON, C.: Error estimates and adaptive time-step control for a class of one-step methods for stiff ordinary differential equations. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 25 (1988), Nr. 4, S. 908–926
- [46] JUNGnickel, N.: Simulation des Thermischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen – Modellierung und Parametrierung. In: GROSSMANN, K. (Hrsg.): *Schriftenreihe des Lehrstuhls für Werkzeugmaschinen*. Selbstverlag, 2010
- [47] KAVETSKI, D. ; BINNING, P. ; SLOAN, S.W.: Adaptive backward Euler time stepping with truncation error control for numerical modelling of unsaturated fluid flow. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), Nr. 6, S. 1301–1322
- [48] KENNEDY, F.E.: Surface Temperatures in Sliding Systems – A Finite Element Analysis. In: *Journal of Tribology* 103 (1981), Nr. 1, S. 90–96
- [49] KENNEDY, F.E.: Thermal and thermomechanical effects in dry sliding. In: *Wear* 100 (1984), Nr. 1, S. 453–476
- [50] KENNEDY, F.E. ; COLIN, F. ; FLOQUET, A. ; GLOVSKY, R.: Improved techniques for finite element analysis of sliding surface temperatures. In: *Developments in Numerical and Experimental Methods Applied to Tribology : Proceedings of the 10th Leeds-Lyon Symposium on Tribology held at the Institut National des Sciences Appliquées, Lyon, France, 6th-9th September 1983* (2014), S. 138–150
- [51] KENNEDY, F.E. ; LU, Y. ; BAKER, I.: Contact temperatures and their influence on wear during pin-on-disk tribotesting. In: *Tribology International* 82 (2015), S. 534–542
- [52] KIM, C.-K.: Unstructured Finite Element Method for Transient Heat Conduction of Moving Heat Source. In: *JSME International Journal Series B: Fluids and Thermal Engineering* 48 (2005), Nr. 3, S. 618–623
- [53] KIM, S.-Y. ; LEE, A.-Y. ; OH, H.-R. ; LEE, M.-H.: Influence of Stress-strain on the Microstructural Change in the Metallic Glass and Metallic Glass Matrix Composite. In: *Applied Microscopy* 45 (2015), Nr. 2, S. 44–51
- [54] KNOTHE, K. ; WESSELS, H.: *Finite Elemente*. Springer-Verlag, 1991

-
- [55] KNUTH, Donald E.: *Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms*. 3rd. Addison-Wesley Professional, 1997
- [56] KNUTH, Donald E.: *Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms*. 3rd. Addison-Wesley Professional, 1998
- [57] KOLONITS, F.: Analysis of the temperature of the rail/wheel contact surface using a half-space model and a moving heat source. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* (2014)
- [58] KOMANDURI, R. ; HOU, Z.B.: Analysis of heat partition and temperature distribution in sliding systems. In: *Wear* 251 (2001), Nr. 1, S. 925–938
- [59] KOMANDURI, R. ; HOU, Z.B.: Thermal modeling of the metal cutting process – Part III: temperature rise distribution due to the combined effects of shear plane heat source and the tool-chip interface frictional heat source. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 43 (2001), Nr. 1, S. 89–107
- [60] KUANG, Z.-B. ; ATLURI, S.N.: Temperature field due to a moving heat source: a moving mesh finite element analysis. In: *Journal of Applied Mechanics* 52 (1985), Nr. 2, S. 274–280
- [61] KUHL, D.: Modellierung und Simulation von Mehrfeldproblemen der Strukturmechanik, Habilitation. In: *Institute for Structural Mechanics, Ruhr University Bochum, Bochum* (2005)
- [62] LANG, N. ; SAAK, J. ; BENNER, P.: Model order reduction for systems with moving loads. In: *at-Automatisierungstechnik* 62 (2014), Nr. 7, S. 512–522
- [63] LING, F.F. ; LAI, W.M. ; LUCCA, D.A.: *Fundamentals of surface mechanics: with applications*. Springer Science & Business Media, 2012
- [64] LIU, Y. ; BARBER, J.R.: Transient heat conduction between rough sliding surfaces. In: *Tribology Letters* 55 (2014), Nr. 1, S. 23–33
- [65] MANSOURI, M. ; KHONSARI, M.M.: Surface temperature in oscillating sliding interfaces. In: *ASME/STLE 2004 International Joint Tribology Conference* American Society of Mechanical Engineers, 2004, S. 1397–1408

-
- [66] MEISSNER, U. ; MENZEL, A.: *Die Methode der finiten Elemente*. Springer-Verlag, 1989
- [67] MIKHAILOV, M.D. ; ÖZİŞİK, M.N.: *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. New York : John Wiley & Sons, 1984
- [68] NARASIMHAN, T.N.: Fourier's heat conduction equation: History, influence, and connections. In: *Reviews of Geophysics* 37 (1999), Nr. 1, S. 151–172
- [69] NAUMANN, A. ; LANG, N. ; PARTZSCH, M. ; BEITELSCHMIDT, M. ; BENNER, P. ; VOIGT, A. ; WENSCH, J.: Computation of thermo-elastic deformations on machine tools a study of numerical methods. In: *Production Engineering* 10 (2016), S. 253–263
- [70] NESTMANN, S. ; ZÄH, M. ; REINHART, G.: Mittel und Methoden zur Verbesserung des thermischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen. In: *Mechatronik: Optimierungspotenzial der Werkzeugmaschine nutzen. Seminarberichte* (2006)
- [71] NEUGEBAUER, R. (Hrsg.): *Werkzeugmaschinen: Aufbau, Funktion und Anwendung von spanenden und abtragenden Werkzeugmaschinen*. Springer-Verlag, 2013
- [72] NEUGEBAUER, R. ; IHLENFELDT, S. ; ZWINGENBERGER, C.: An extended procedure for convective boundary conditions on transient thermal simulations of machine tools. In: *Production Engineering* 4 (2010), Nr. 6, S. 641–646
- [73] NGUYEN, N.T. ; OHTA, A. ; MATSUOKA, K. ; SUZUKI, N. ; MAEDA, Y.: Analytical solutions for transient temperature of semi-infinite body subjected to 3-D moving heat sources. In: *Supplement to the Welding Journal* 78 (1999), S. 265–274
- [74] OLSSON, H. ; ÅSTRÖM, K.J. ; CANUDAS DE WIT, C. ; GÄFVERT, M. ; LISCHINSKY, P.: Friction models and friction compensation. In: *European journal of control* 4 (1998), Nr. 3, S. 176–195
- [75] PADOVAN, J.: Transient finite-element analysis of conduction problems subject to variable-speed moving fields. In: *Numerical Heat Transfer* 4 (1981), Nr. 2, S. 147–158
- [76] PARTZSCH, M. ; BEITELSCHMIDT, M.: An arithmetic correction for avoiding non-uniform heat input distribution caused by translational motions within

- time-discrete thermal analyses. In: *ASME 2014 12th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis* American Society of Mechanical Engineers, 2014
- [77] PARTZSCH, M. ; BEITELSCHMIDT, M.: Efficient Simulation of the Heat Flux Input in Moving Contacts. In: *PAMM* 15 (2015), Nr. 1, S. 417–418
- [78] PARTZSCH, M. ; BEITELSCHMIDT, M.: Simulation of Pose-and Process-Dependent Machine Tool Models. In: *Thermo-energetic Design of Machine Tools*. Springer, 2015, S. 61–68
- [79] PARTZSCH, M. ; BEITELSCHMIDT, M. ; KHONSARI, M.M.: *A Method for Correcting a Moving Heat Source in Analyses with Coarse Temporal Discretization*. 2017. – Akzeptiert am 04.07.2017 in *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*
- [80] PLATO, R.: *Numerische Mathematik kompakt*. Springer, 2010
- [81] PUTZ, M. ; IHLENFELDT, S. ; KAUSCHINGER, B. ; NAUMANN, C. ; THIEM, X. ; RIEDEL, M.: Implementation and demonstration of characteristic diagram as well as structure model based correction of thermo-elastic tool center point displacements. In: *Journal of Machine Engineering* 16 (2016)
- [82] RAMESH, R. ; MANNAN, M.A. ; POO, A.N.: Error compensation in machine tools – a review: Part II: thermal errors. In: *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 40 (2000), Nr. 9, S. 1257–1284
- [83] REDDY, J.N. ; GARTLING, D.K.: *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC press, 2010
- [84] ROWE, K.G. ; BENNETT, A.I. ; KRICK, B.A. ; SAWYER, W.G.: In situ thermal measurements of sliding contacts. In: *Tribology International* 62 (2013), S. 208–214
- [85] RUST, W.: *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen*. Vieweg+Teubner, 2009
- [86] SALIMI, S. ; BAHEMAT, P. ; HAGHPANAHI, M.: A 3D transient analytical solution to the temperature field during dissimilar welding processes. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 79 (2014), S. 66–74

-
- [87] SCHWARZ, H.R.: *Numerische Mathematik*. 4., überarbeitete und erweiterte Auflage. B.G. Teubner, 1997
- [88] SCHWARZ, H.R. ; KÖCKLER, N.: *Numerische Mathematik*. 7., überarbeitete. Vieweg+Teubner, 2009
- [89] SKOLAUT, W. (Hrsg.): *Maschinenbau: Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium*. Springer Vieweg, 2015
- [90] SONG, M. ; KOVACEVIC, R.: Thermal modeling of friction stir welding in a moving coordinate system and its validation. In: *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 43 (2003), Nr. 6, S. 605–615
- [91] STOUT, R. ; BILLINGS, D.: Accuracy and Time Resolution in Thermal Transient Finite Element Analysis. In: *Proceedings of the 10th International ANSYS Conference and Exposition*, 2002. – April 22-24, 2002 in Pittsburgh, PA
- [92] STREHMEL, K. ; PODHAISKY, H. ; WEINER, R.: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Springer, 2012
- [93] STYNES, M.: Numerical methods for convection-diffusion problems or The 30 years war. In: *Proceedings of the 20th Biennial Conference on Numerical Analysis* (2003)
- [94] THIEM, X. ; GROSSMANN, K. ; MÜHL, A.: Structural Model-Based Correction of Thermo-elastic Machine Tool Errors. In: GROSSMANN, K. (Hrsg.): *Thermo-energetic Design of Machine Tools*. Springer International Publishing, 2015 (Lecture Notes in Production Engineering), S. 185–198
- [95] TUDOR, A ; KHONSARI, M.M.: Analysis of heat partitioning in wheel/rail and wheel/brake shoe friction contact: An analytical approach. In: *Tribology transactions* 49 (2006), Nr. 4, S. 635–642
- [96] VICK, B. ; FUREY, M.J.: A basic theoretical study of the temperature rise in sliding contact with multiple contacts. In: *Tribology International* 34 (2001), Nr. 12, S. 823–829
- [97] WALDROP, M.M.: The chips are down for MOORE’s law. In: *Nature News* 530 (2016), Nr. 7589

- [98] WILLNER, K.: *Kontinuums-und Kontaktmechanik: Synthetische und analytische Darstellung*. Springer-Verlag, 2003
- [99] WRIGGERS, P. ; MIEHE, C.: Contact Constraints within Coupled Thermomechanical Analysis – A Finite Element Model. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 113 (1994), Nr. 3, S. 301–319
- [100] WU, C.-H. ; KUNG, Y.-T.: Thermal analysis for the feed drive system of a CNC machine center. In: *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 43 (2003), Nr. 15, S. 1521–1528
- [101] YEVTUSHENKO, A.A. ; KUCIEJ, M.: One-dimensional thermal problem of friction during braking: The history of development and actual state. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55 (2012), Nr. 15, S. 4148–4153
- [102] ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, R.L.: *The Finite Element Method*. Bd. 1: The Basis. Fifth Edition. Butterworth-Heinemann, 2000
- [103] ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, R.L. ; NITHIARASU, P.: *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. Seventh Edition. Butterworth-Heinemann, 2014

A Zusätzliche Informationen

A.1 Relevante Formfunktion

Die Vernetzung der Modellgebiete in der Nähe des bewegungsrelevanten Kontaktbereichs erfolgt in den Rechnungen zur Verfahrensevaluation durch Hexaederelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen. In nicht-degenerierter Konfiguration besitzen diese Elemente $n_K = 20$ Knoten, sodass für rein thermische Analysen entsprechend $\bar{T}_e(t) \in \mathbb{R}^{n_K}$ vorliegt. Eine schematische Darstellung (nach ANSYS Theory [5]) ist in Abb. A.1 zu sehen.

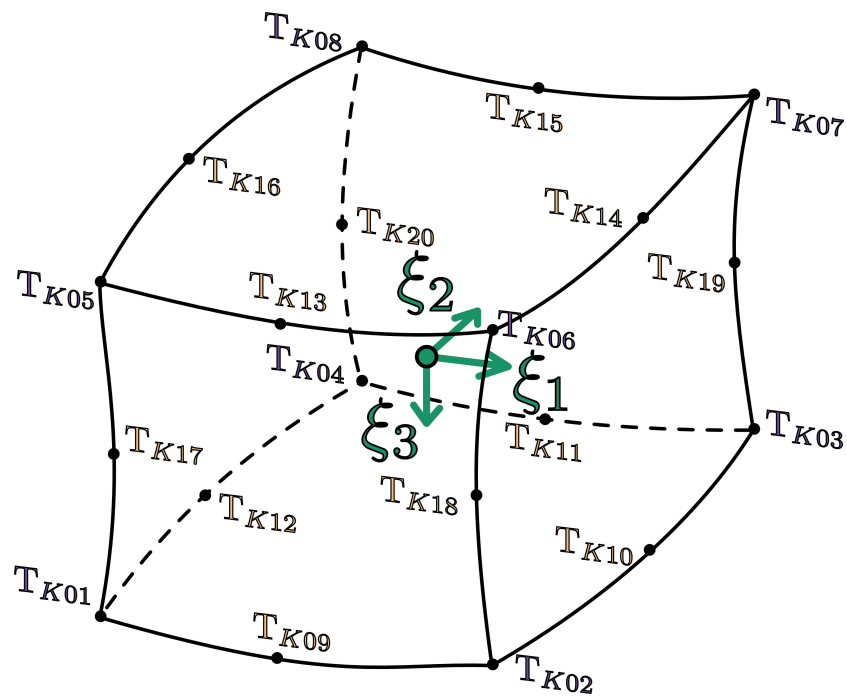


Abbildung A.1: Hexaederelement mit quadratischen Ansatzfunktionen

Die Knoten $K1 \dots K08$ werden als *Eckknoten* und die Knoten $K09 \dots K20$ als *Mittelknoten* bezeichnet.

Auf Basis des mittig platzierten Ursprungs der natürlichen Elementkoordinaten $\vec{\xi} = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^T \in [-1; +1]$ erfolgt die örtliche Diskretisierung innerhalb eines derartigen Elements durch die folgende Formfunktion (vgl. Gl. 2.16, S. 24):

$$\mathbf{T}(\vec{\xi}, t) = \mathbf{H}(\vec{\xi}) \bar{\mathbf{T}}_e(t) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3)(-\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - 2) \\ (1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3)(+\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - 2) \\ (1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3)(+\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 2) \\ (1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3)(-\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - 2) \\ (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(-\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - 2) \\ (1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)(+\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - 2) \\ (1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)(+\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - 2) \\ (1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3)(-\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - 2) \\ 2(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) \\ 2(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2)(1 + \xi_3) \\ 2(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3) \\ 2(1 - \xi_1)(1 - \xi_2^2)(1 + \xi_3) \\ 2(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) \\ 2(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3) \\ 2(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) \\ 2(1 - \xi_1)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3) \\ 2(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3^2) \\ 2(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3^2) \\ 2(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3^2) \\ 2(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3^2) \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{T}}_{K01}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K02}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K03}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K04}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K05}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K06}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K07}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K08}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K09}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K10}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K11}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K12}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K13}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K14}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K15}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K16}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K17}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K18}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K19}(t) \\ \bar{\mathbf{T}}_{K20}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

A.2 Weglassen der Mittelknoten

In Abb. A.2 (links oben) ist für ein strukturvariables Beispielproblem der resultierende Temperaturverlauf entlang eines auf der potentiellen Lastzone $\Gamma_{s,\bar{l}}$ liegenden Pfades unter Einbezug der Ergebnisse an den Mittelknoten zu sehen. Vor allem im Bereich $s \in [7\text{m}; 10\text{m}]$ ist die aus dem abgebildeten Problem bedingte Temperaturerhöhung durch örtliche Oszillationen überlagert, welche mittels eines Vergleichs mit den Ergebnissen einer örtlich feiner diskretisierten Analyse in Abb. A.2 (rechts oben) als numerische Artefakte¹ identifiziert werden können. Die letztendlich vorliegende Amplitude der Oszillationen hängt dabei von der Physik des Problems, der Höhe des Wärmeeintrags sowie der Schrittweite der zeitlichen Diskretisierung ab und kann – wie z. B. in PARTZSCH [77] – signifikante bzw. störende Ausmaße annehmen.

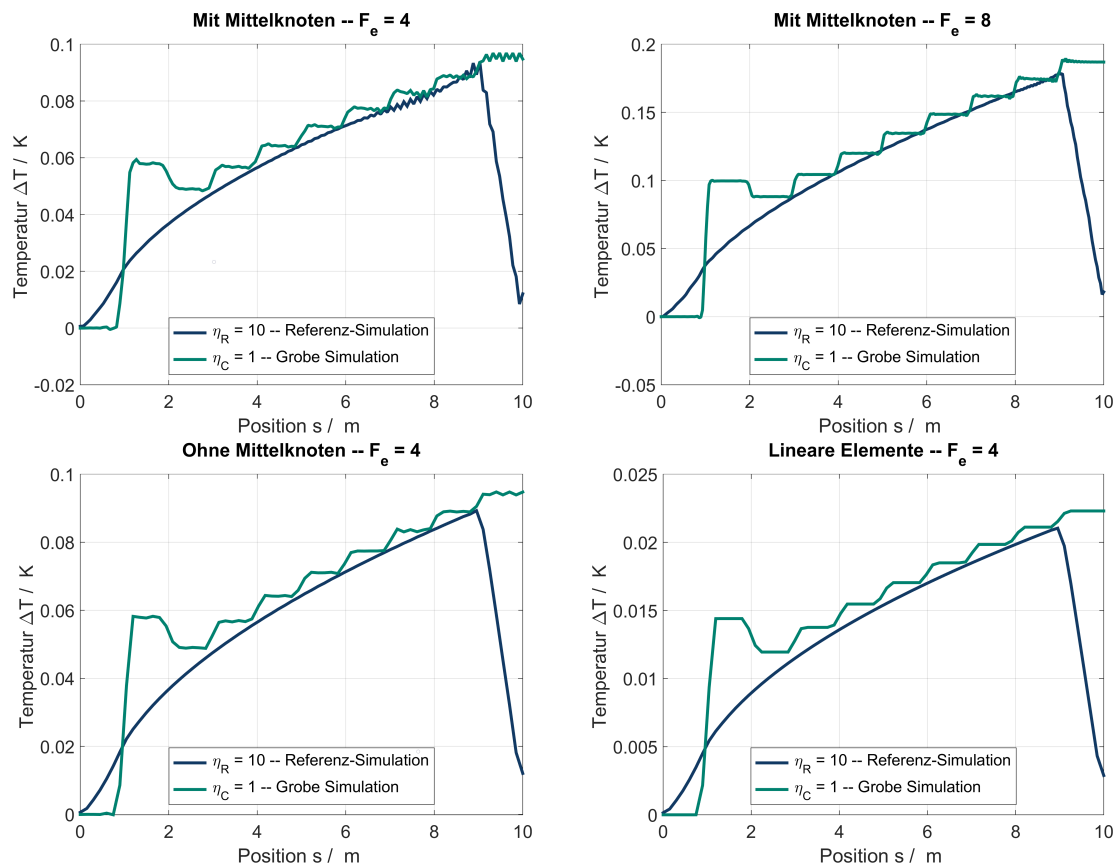


Abbildung A.2: Ergebnisse von Vergleichsanalysen zum Einfluss der Mittelknoten

¹Wird zudem in Abb. A.2 (rechts oben) genauer in den genannten Bereich $s \in [7\text{m}; 10\text{m}]$ geschaut, so sind auch darin derartige, allerdings deutlich geringere Oszillationen zu erkennen.

Wie Abb. A.2 (links unten) zu sehen ist, führt ein Weglassen der Resultate der Mittelknoten in der Ergebnispräsentation nun dazu, dass die auftretenden Oszillationen in dem dargestellten Temperaturverlauf nahezu verschwinden. Um nun in den Ergebnisdarstellungen dieser Arbeit nicht von den eigentlich interessierenden Sachverhalten – nämlich der Auswirkungen der Korrekturverfahren auf das resultierende Temperaturfeld – abzulenken, werden die Resultate an den Mittelknoten daher generell weggelassen.

Zur Erläuterung der konkreten Problemursache wird zunächst erwähnt, dass die in Abb. A.2 dargestellten Ergebnisse ein Teil des Temperaturfelds von Ω_s am Ende der Bewegung einer $l_b = 1\text{m}$ -langen Wärmequellen von $s = 0$ bis $s = 9\text{m}$ sind, Ω_b also gerade den Abschnitt $s \in [9\text{m}; 10\text{m}]$ bedeckt. In Abb. A.2 (links oben) ist dabei zu sehen, dass die Oszillationen vor allem beiderseits der aktuellen Grenze zwischen bedeckten und unbedeckten Bereich auftreten und zwar sowohl in der groben als auch in der Referenzanalyse. Als Ursache lässt sich daher identifizieren, in welcher Weise die Abbildung eines örtlichen Lastsprungs durch die gewählte Ortsdiskretisierung erfolgt. Genauer gesagt fordern die notwendigen Übergangsbedingungen bei der Assemblierung der quadratischen, finiten Elemente eine ausgeglichene Wärmebilanz an den Knoten (siehe Gl. 2.18, S. 26) und damit eine Stetigkeit sowohl in der Feld- ($\hat{=} T(\vec{x})$) als auch in der Flussgröße ($\hat{=} q(\vec{x}) = f(\nabla T(\vec{x}))$), vgl. Gl. 2.7, S. 18). Die notwendige Kontinuität des Temperaturgradienten an den Elementgrenzen führt letztendlich zu einem Aufschwingen der quadratischen Ansatzfunktionen und damit zu den beobachteten Oszillationen. Alternativ lässt sich diese Ursache an dem resultierenden Temperaturfeld bei der Verwendung linearer Elemente in Abb. A.2 (rechts unten) bestätigen, da in diesem – aufgrund der ausschließlichen Forderung nach Temperaturstetigkeit – keine Oszillationen festzustellen sind.

A.3 PreL1-Manipulation

In Abb. A.3 sind die Verfahrensschaubilder am Anfang einer diskret mit $\eta_G = 5/4$ umgesetzten Bewegung sowie einer ebenfalls diskret mit $\eta_R = 5$ ermittelten Referenz zu sehen. Die Prozedur einer impliziten, transienten Integration – speziell die Notwendigkeit eines konkreten Zeitabstands zu einem vorherigen Lastschritt (siehe Gl. 2.19, S. 26) – zieht es dabei nach sich, dass zur Ermittlung des ersten, tatsächlich transient berechenbaren Feldzustands $\bar{T}(t_{L_n})$ zunächst ein Zeitschritt unternommen werden muss. Zum eigentlichen Beginn $t_{L_0} = t_A$ der abzubildenden Bewegung, an dem sich die Wärmequelle in Abb. A.3 an der jeweils gestrichelt dargestellten Position $s(t_{L_0}) = s_A$ befindet, wird daher lediglich die Anfangsbedingung des Problems umgesetzt, d.h., es wird $\bar{T}(t_{L_0}) = \bar{T}_0$ per Definition oder über die Berechnung eines statischen Gleichgewichts festgelegt.

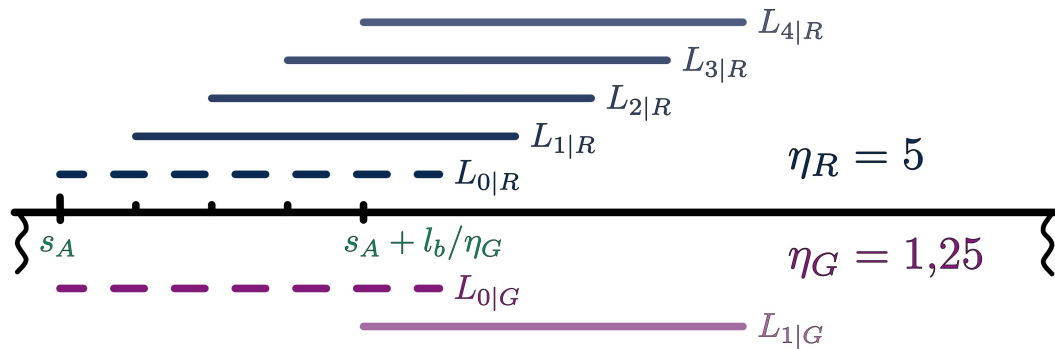


Abbildung A.3: Verschaubilder zu Beginn einer Analyse

Für den Vergleich der Ergebnisse aus Referenz und grober Analyse ist es nun hinderlich, dass letztere – wie in Abb. A.3 dargestellt – prinzipbedingt nicht dazu in der Lage ist, ebenfalls jene Wärmemengen abzubilden, welche durch die Referenz in Lastschritten mit $t_{L_i|R} < t_{L_1|G}$ in Abschnitte außerhalb von $s \in [s_{L_1|G}; s_{L_1|G} + l_b]$ eingebracht wurden. Bei vergleichenden Analysen mit $\eta_R/\eta_G \in \mathbb{N}$ betrifft dies die Wärmeeinträge der Schritte $L_{1|R}$ bis $L_{\eta_R/\eta_G-1|R}$ in den Abschnitt $s \in [s_A; s_A + l_b/\eta_G]$.

Die Wärmeeintragsfelder der G -Analysen werden nun durch eine vorsätzliche Manipulation von dieser systematischen Abweichung befreit, um so eine davon ungestörte Evaluierung der Korrekturmaßnahmen zu ermöglichen. Dies geschieht durch manuelles Hinzufügen jener Wärmeeinträge, welche gegenüber der Referenz fehlen. Entsprechend Abb. A.3 können diese anhand der Referenz-Heatmap im Bereich $s < s_{L_1|G} = s_A + l_b/\eta_G$ identifiziert werden. Im Fall von $\eta_G > 1$ ziehen die nichtabgebildeten Lastschritte der R -Analyse auch fehlende Wärmemengen in Bereichen $s > s_{L_1|G}$ nach sich, welche in der

groben Simulation hypothetisch durch einen Lastschritt L_0 repräsentiert wären. Für eine energetisch korrekte pre- L_1 -Manipulation einer groben Analyse ist der fehlende Wärmeeintrag formal daher wie folgt einzubringen:

$$[s_A; s_A + l_b] Q_{G, \text{pre-}L_1}(\eta_G) = \eta_G \cdot [s_A; s_A + l_b / \eta_G] Q_R(\eta_R) \quad (\text{A.2})$$

In Abb. A.4 sind nun die Auswirkung der pre L_1 -Manipulation beispielhaft in dem Wärmeeintragsfeld der beschleunigten Bewegung aus Abb. 6.9 rechts (S. 106) zu sehen, welches für ein $\eta_G = 2$ berechnet wurde. Neben den Δs -bezogenen Wärmen ist in der Legende zudem der Gesamtwärmeeintrag im unteren Endbereich dargestellt.

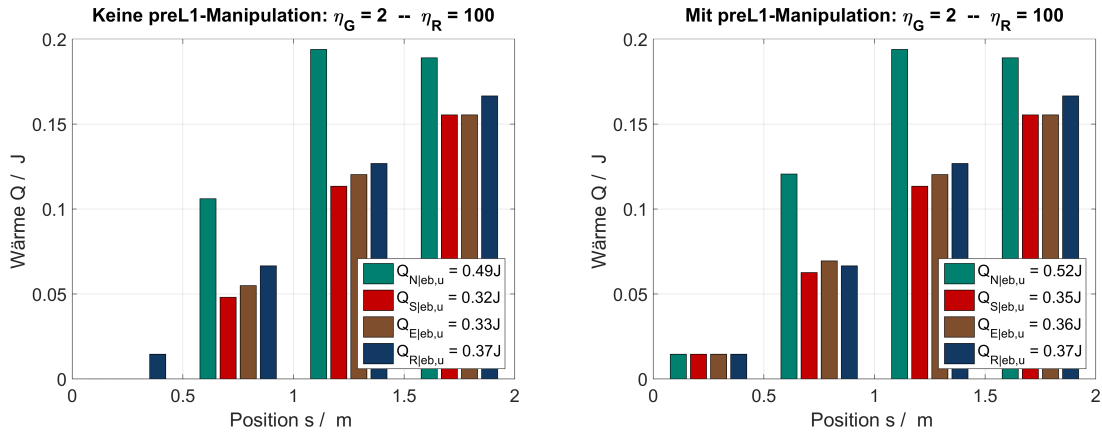


Abbildung A.4: Auswirkung der PreL1-Manipulation auf die Wärmeeintragsfelder

Abb. A.4 links verdeutlicht das Problem des komplett fehlenden Wärmeeintrags bei groben Analysen im Bereich $s < s_A + l_b / \eta_G$; also in $s \in [0; 0,5\text{ m}]$. Das quantitative Ausmaß der fehlenden Wärme ist dabei von dem abgebildeten, bewegten Lastprofil abhängig.

Das Anwenden der pre L_1 -Manipulation in Abb. A.4 rechts gleicht nun die Abweichung zwischen den G -Analysen und der Referenz in $s \in [0; 0,5\text{ m}]$ vollständig aus und trägt – da mit $\eta_G = 2 \in \mathbb{N}$ simuliert wird – denselben Betrag an Wärme in den anderen Bereich des Belastungsendes $s \in [0,5\text{ m}; 1\text{ m}]$ ein. An der Legende ist zu sehen, dass die Gesamtwärmeeinträge dadurch um $2 \cdot [0; 0,5\text{ m}] Q_R \approx 2 \cdot 1,5\text{ J}$ steigen und sich die korrigierten Analysen der Referenz annähern.

A.4 Endbereich-Korrektur bei doppelter Beeinträchtigung

Eine durch das hyperbolisch abfallende $q_{corr}(t)$ (vgl. Abb. 6.7, S. 101) bedingte Beeinträchtigung der standard-korrigierten Wärmelast $q_S(t)$ (vgl. Abb. 6.6, S. 98) liegt vor, wenn sich die zum Lastschritt t_{L_n} aktuelle Verschiebung $s(t_{L_n})$ innerhalb eines der Bewegungsenden des aktuellen Bewegungsabschnitts (vgl. Abb. 6.5, S. 97) befindet. Im Fall nahe beieinander liegender Endpunkte – genauer wenn $|s_E - s_A| < 2l_b$ – kommt es allerdings zu einer Überlappung der Bewegungsenden und damit zu der Möglichkeit, dass eine Beeinträchtigung von $q_S(t)$ durch beide Endpunkte – also doppelt – vorliegt. Eine derartige Situation ist in Abb. A.5 dargestellt, in welcher der Endpunkt der Bewegung s_E vergleichsweise nahe (vgl. Abb. 6.3, S. 93) neben deren Anfangspunkt s_A liegt.

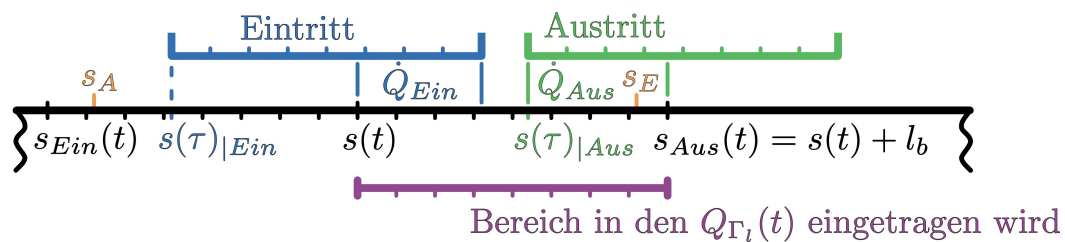


Abbildung A.5: Position der Lastzone bei doppelter Beeinträchtigung

Die Herleitung der Endbereich-Korrektur in einem derartigen Fall erfolgt nun vollkommen analog zu dem im Hauptteil vorgestellten Vorgehen bei einfacher Beeinträchtigung (vgl. Gl. 6.9 bis Gl. 6.17, beginnend S. 100). Der Ausgangspunkt ist dabei die analytische Beschreibung des Wärmeeintragsprozesses $Q_{\Gamma_l}(t)$ beim Vorliegen eines konstanten, bewegten Lastprofils $[s(t) = v_K t; q_N(t) = q_K]$ (vgl. Gl. 6.9). Wie in Abb. A.5 zu sehen ist, ist bei doppelter Beeinträchtigung $s_A > s_{Ein}(t)$ und $s_E < s_{Aus}(t)$, womit weder Ein- noch Austrittsphase vollständig im gegebenen Bewegungsprofil mit $s(t) \in [s_A = s(t_A); s_E = s(t_E)]$ enthalten sind. Die in Gl. 6.3 (S. 93) auftretende Fallun-

terscheidung ist daher nicht notwendig, sodass sich $Q_{\Gamma_l}(t)$ direkt wie folgt ausdrücken lässt:

$$\frac{Q_{\Gamma_l}(t)}{q_K w} = \int_{t_A}^t [s(\tau) + l_b - s(t)] d\tau + \int_t^{t_E} [s(t) + l_b - s(\tau)] d\tau$$

wobei $\begin{pmatrix} s(\tau) \\ s(t) \end{pmatrix} = v_K \begin{pmatrix} \tau \\ t \end{pmatrix} - v_K t_A + d_A$

sodass $\begin{aligned} s(\tau) + l_b - s(t) &= v_K(\tau - t) + l_b \\ s(t) + l_b - s(\tau) &= v_K(t - \tau) + l_b \end{aligned}$

womit $\frac{Q_{\Gamma_l}(t)}{q_K w} = -\frac{1}{2}(t_A - t)[v_K(t_A - t) + 2l_b] - \frac{1}{2}(t_E - t)[v_K(t_E - t) - 2l_b]$ (A.3)

Weiterhin ergibt sich die maximale Diskretisierung $\eta_{max}(t)$ bzw. die zugehörige Zeitschrittweite $\eta_{max}(t)$ aus dem geringsten Abstand zu einem der Endpunkte (vgl. Gl. 6.10, S. 100). Damit wird für die analytische Beschreibung wieder eine Fallunterscheidung notwendig:

$$\eta_{max}(t) = \begin{cases} \frac{l_b}{v_K(t-t_A)} & \text{wenn } s(t) < \frac{s_A+s_E}{2} \rightarrow \text{im Folgenden kurz: } s_A\text{-Fall} \\ \frac{l_b}{v_K(t_E-t)} & \text{wenn } s(t) \geq \frac{s_A+s_E}{2} \rightarrow \text{im Folgenden kurz: } s_E\text{-Fall} \end{cases}$$

und $\Delta t_{max}(t) = \begin{cases} (t - t_A) & \text{im } s_A\text{-Fall} \\ (t_E - t) & \text{im } s_E\text{-Fall} \end{cases}$ (A.4)

Damit ergibt sich die Korrekturwärmestromdichte $q_{crr}(t)$ für beide Fälle entsprechend deren Vorschrift aus Gl. 6.8 (S. 95) zu:

$$\begin{aligned} \frac{q_{crr}(t)}{q_K} &= \frac{1}{l_b w} \frac{Q_{\Gamma_l}(t)/q_K}{\Delta t_{max}(t)} - \eta_{max}(t) \\ &= \begin{cases} \left[\frac{v_K}{2l_b}(t_A - t) + 1 \right] - \frac{t_E - t}{t - t_A} \left[\frac{v_K}{2l_b}(t_E - t) - 1 \right] - \frac{l_b}{v_K} \frac{1}{t - t_A} & \text{im } s_A\text{-Fall} \\ \frac{t - t_A}{t_E - t} \left[\frac{v_K}{2l_b}(t_A - t) + 1 \right] - \left[\frac{v_K}{2l_b}(t_E - t) - 1 \right] - \frac{l_b}{v_K} \frac{1}{t_E - t} & \text{im } s_E\text{-Fall} \end{cases} \\ &= \left([v_K(t_A - t) + l_b]^2 + [v_K(t - t_E) + l_b]^2 \right) \cdot \begin{cases} 1/[2l_b v_K(t_A - t)] & \text{im } s_A\text{-Fall} \\ 1/[2l_b v_K(t - t_E)] & \text{im } s_E\text{-Fall} \end{cases} \end{aligned}$$
 (A.5)

Während der Simulation des konstanten, bewegten Lastprofils lassen sich die Zeiten der Endpunkte t_A und t_E alternativ über die aktuelle Lastschrittzeit t_{L_n} sowie den

bekannten Schrittabständen $\tilde{i}_A = |s(t_{L_n}) - s_A|/\Delta s \in \mathbb{N}$ und $\tilde{i}_E = |s(t_{L_n}) - s_E|/\Delta s \in \mathbb{N}$ ausdrücken. Mit der aktuellen Fahrteilzahl η ergibt sich für die Zeiten:

$$t_A = t_{L_N} - \tilde{i}_A \frac{1}{\eta} \frac{l_b}{v_K} \quad \text{und} \quad t_E = t_{L_N} + \tilde{i}_E \frac{1}{\eta} \frac{l_b}{v_K} \quad (\text{A.6})$$

Eine Auswertung der Korrekturwärmestromdichte aus Gl. A.5 zum Zeitpunkt t_{L_n} ergibt damit:

$$\frac{q_{corr}(t_{L_n})}{q_K} = \left([\eta - \tilde{i}_A]^2 + [\eta - \tilde{i}_E]^2 \right) \cdot \begin{cases} -1/[2\eta\tilde{i}_A] & \text{im } s_A\text{-Fall} \\ -1/[2\eta\tilde{i}_E] & \text{im } s_E\text{-Fall} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Damit kann nun die standard-korrigierte Wärmestromdichte $q_S(t_{L_n})$ (vgl. Gl. 6.8) und im Weiteren die durch den Lastschritt in einem Δs -langen Abschnitt eingebrachte Wärme ${}_{A,L_{\tilde{i}_A|\tilde{i}_E}}Q_S(\eta)$ (vgl. Gl. 6.12) beschrieben werden. Unter Einführen eines $\tilde{i}_M := \min[\tilde{i}_A, \tilde{i}_E]$, auf dessen Bestimmung die Fallunterscheidung verlagert wird, ergibt sich:

$${}_{A,L_{\tilde{i}_A|\tilde{i}_E}}Q_S(\eta) = q_K w \frac{1}{\eta^2} \frac{l_b^2}{v_K} \left[1 + \frac{1}{\eta} \left(\frac{(\eta - \tilde{i}_A)^2 + (\eta - \tilde{i}_E)^2}{-2\eta\tilde{i}_M} \right) \right] \quad (\text{A.8})$$

Die korrekterweise einzubringende Wärme ergibt sich nun wieder² aus einer Δt -langen Wirkdauer des originalen q_K . Der gesuchte Korrekturfaktor ergibt sich also direkt aus dem Reziproken jenes Faktors in Gl. A.8, mit dem der Kern $(q_K w l_b^2) / (\eta^2 v_K)$ skaliert wird:

$${}_{L_{\tilde{i}_A|\tilde{i}_E}}C_E(\eta) = \frac{2i_M\eta^2}{2i_M\eta^2 - (\eta - i_A)^2 - (\eta - i_E)^2}$$

mit $i_M = \min[i_A, i_E] \stackrel{!}{>} 0$ und $\begin{bmatrix} i_A \\ i_E \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \tilde{i}_A \\ \tilde{i}_E \end{bmatrix} & \text{falls } \begin{bmatrix} \tilde{i}_A \\ \tilde{i}_E \end{bmatrix} \leq \eta \\ \eta & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.9})$

Durch die Einführung der entsprechend Gl. A.9 abgeleiteten Größen i_A , i_E und i_M kann dieser Korrekturfaktor ebenfalls in Fällen ohne oder mit einfacher Endbereich-Beeinträchtigung angewandt werden.

²Vgl. dazu die Erläuterungen zur Endbereich-Korrektur des Abschnitts A_η im Fall $\eta \notin \mathbb{N}$ auf S.105.