

# **Zur Reduzierung des mehrwegebedingten GNSS-Trägerphasenmessfehlers durch Anwendung der Hilbert-Huang-Transformation auf Signalqualitätsparameter**

Von der Fakultät für Verkehrswissenschaften „Friedrich List“  
der Technischen Universität Dresden  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften  
**(Dr.-Ing.)**  
genehmigte Dissertation

von

**Angelika Hirrle**

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. O. Michler, Technische Universität Dresden  
Prof. Dr.-Ing. habil. L. Wanninger, Technische Universität Dresden

Tag der Einreichung: 11. April 2016  
Tag der Verteidigung: 24. März 2017

# Danksagung

Mein herzlicher Dank geht an erster Stelle an Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Hans-Joachim Jentschel, der mich als Doktorvater lange Zeit begleitet hat, die Betreuung aus gesundheitlichen Gründen jedoch abgeben musste. Und so danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Oliver Michler für die Bereitschaft, die Betreuung zu übernehmen und für die Möglichkeit, diese Arbeit an seinem Lehrstuhl fortführen und abschließen zu können. Des Weiteren möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Lambert Wanninger für die Übernahme des zweiten Gutachtens und die damit verbundene, fachliche Diskussion, sowie für die Bereitstellung der Daten danken.

Mein besonderer Dank gilt Frau Dr.-Ing. Evelin Engler, die den Anstoß für diese Arbeit gegeben hat und mir stets mit Rat und Tat zur Seite stand. Ihr und meinen weiteren Korrekturlesern Frau Dr.-Ing. Jamila Beckheinrich, Herrn Dr.-Ing. Holger Berndt, Herrn Dr.-Ing. Christian Rost und Herrn Dr.rer.nat. Stefan Schlüter möchte ich herzlich für die Zeit danken, die sie dieser Arbeit und den fachlichen Diskussionen gewidmet haben.

Sehr herzlich bedanke ich mich auch bei Herrn Dipl.-Ing. Alexander Merx vom GeoForschungszentrum Potsdam für die Unterstützung bei der Datenanalyse und dem damit einhergehenden, fachlichen Austausch.

Ein ebenso herzlicher Dank gilt meinen Lektorinnen Frau Katja Dannowski und Frau Juliane Schweickart für das akribische Lesen und die Hinweise, die zum sprachlichen Abrunden der Arbeit beigetragen haben.

Nicht zuletzt möchte ich meinen ehemaligen Kollegen danken. Ich hatte das Glück, stets mit Menschen zusammenarbeiten zu dürfen, mit denen ein reger, fachlicher Austausch stattgefunden hat, eingebettet in eine Atmosphäre, die geprägt war von einem sehr sozialen Miteinander.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Problemanalyse und spezielle Aufgabenstellung</b>	<b>4</b>
2.1	Grundlagen der satellitengestützten Positionsbestimmung . . . . .	4
2.1.1	Quantifizierung der Messgrößen . . . . .	5
2.1.2	Quantifizierungsfehler und ihre Ursachen . . . . .	12
2.1.3	Positionsbestimmung . . . . .	24
2.2	Die Mehrwegeausbreitung als dominante Ursache für Quantifizierungsfehler . .	27
2.2.1	Ursprung der Mehrwegeausbreitung . . . . .	28
2.2.2	Einfluss der Reflektoreigenschaften . . . . .	29
2.2.3	Quantifizierungsfehler . . . . .	40
2.2.4	Ansätze zur Detektion und Eliminierung des durch Mehrwegeausbreitung verursachten Messfehlers . . . . .	43
2.3	Lösungsidee und spezielle Aufgabenstellung . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Hilbert-Huang-Transformation</b>	<b>52</b>
3.1	Empirische Modenzerlegung . . . . .	52
3.1.1	Das Grundprinzip der EMD . . . . .	53
3.1.2	Der Siebprozess als zentrales Element der EMD . . . . .	54
3.1.3	Eigenschaften der EMD . . . . .	66
3.1.4	Testsignalanalyse - Fehlerabschätzung und Bewertungsansätze . . . . .	69
3.1.5	Weiterentwicklungen der EMD . . . . .	82
3.2	Berechnung instantaner Signalparameter . . . . .	85
3.2.1	Hilbert-Transformation und Konzept des analytischen Signals . . . . .	85
3.2.2	Das Normalisierungsschema als Grundlage für eine modifizierte Hilbert-Transformation . . . . .	88
3.2.3	Direkte Quadraturmethode . . . . .	90
3.2.4	Bewertung und Auswahl geeigneter Methoden . . . . .	91

<b>4</b>	<b>Adaption der Hilbert-Huang-Transformation für die Detektion von Mehrwegesignalen</b>	<b>92</b>
4.1	Auswahl und Bewertung optimaler Prozessparameter für die Hilbert-Huang-Transformation . . . . .	92
4.1.1	Auswahl von Testsignalen . . . . .	93
4.1.2	Auswahl optimaler HHT-Prozessparameter . . . . .	95
4.1.3	Bewertung des optimalen HHT-Prozessparametersatzes . . . . .	105
4.2	Festlegung der Schwellwerte für die Detektion von Mehrwegesignalen . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Anwendung der Hilbert-Huang-Transformation für die Bestimmung von Mehrwegesignalparametern - Auswertung eines Experimentaldatensatzes</b>	<b>125</b>
5.1	Experimentalaufbau und Datengrundlage . . . . .	126
5.2	Charakterisierung und Detektion der Mehrwegesignale . . . . .	127
5.2.1	Charakterisierung erwarteter Mehrwegesignale . . . . .	128
5.2.2	Detektion vorhandener Mehrwegesignale . . . . .	129
5.3	Analysen zum Mehrwert einer Korrektur des Mehrwegefehlers . . . . .	132
5.3.1	Auswertung im Beobachtungsraum . . . . .	133
5.3.2	Auswertung im Koordinatenraum . . . . .	136
5.3.3	Bewertung der Ergebnisse und Schlussfolgerung . . . . .	141
<b>6</b>	<b>Anwendung der Hilbert-Huang-Transformation für die Bestimmung von Mehrwegesignalparametern - Auswertung von Daten eines GNSS-Referenzstationsnetzwerkes</b>	<b>142</b>
6.1	Datengrundlage . . . . .	142
6.2	Analysen zum Mehrwert einer Korrektur des Mehrwegefehlers . . . . .	144
6.2.1	Auswertung im Beobachtungsraum . . . . .	146
6.2.2	Auswertung im Koordinatenraum . . . . .	148
6.2.3	Bewertung der Ergebnisse und Schlussfolgerung . . . . .	154
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>156</b>
<b>A</b>	<b>Satellitenavigation</b>	<b>A - 1</b>
A.1	Linearkombinationen von Beobachtungsgrößen . . . . .	A - 1
A.2	Troposphärenmodelle . . . . .	A - 8
<b>B</b>	<b>Elektrotechnische Grundlagen</b>	<b>A - 10</b>
B.1	Elektromagnetische Felder und Wellen . . . . .	A - 10
B.2	Antennen . . . . .	A - 11

<b>C</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>A - 13</b>
C.1	Begrifflichkeiten . . . . .	A - 13
C.2	Interpolation . . . . .	A - 13
C.3	Box-Whisker-Plot . . . . .	A - 16
C.4	Fehleranalyse . . . . .	A - 16
<b>D</b>	<b>Signaltheoretische Grundlagen</b>	<b>A - 18</b>
D.1	Signale und Eigenschaften . . . . .	A - 18
D.2	Stochastische Prozesse . . . . .	A - 20

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Prinzipskizze der gekoppelten Regelkreise für die Gewinnung von Code- und Trägerphasenmessung . . . . .	6
2.2	Darstellung der Korrelation der intern erzeugten Codes mit dem empfangenen Code . . . . .	9
2.3	Darstellung typischer $C/N_0$ -Werte . . . . .	23
2.4	Prinzip der Reflexion eines Signals . . . . .	28
2.5	Bestimmung der für eine Mehrwegeausbreitung minimal notwendigen Reflexionsfläche . . . . .	30
2.6	Schematische Darstellung des funktionalen Zusammenhanges verschiedener, die Mehrwegeausbreitung betreffender Parameter . . . . .	31
2.7	Schematische Darstellung der ersten Fresnel-Zone . . . . .	31
2.8	Schematische Darstellung eines Punktreflektors . . . . .	34
2.9	Darstellung der Komponenten der Reflexionskoeffizienten in Abhängigkeit der Elevation . . . . .	38
2.10	Überlagerung von direktem und reflektiertem Signal bei Mehrwegeausbreitung im Inphase-Quadratur-Diagramm . . . . .	42
3.1	Prinzipskizze der EMD . . . . .	54
3.2	Prinzipskizze des EMD-Siebprozesses . . . . .	55
3.3	Prinzip envelopebasierter Verfahren . . . . .	56
3.4	Einfluss der Bestimmung der Extremwerte auf die Korrektheit der IMF-Extraktion	57
3.5	Darstellung der Graphen rationaler Splines für unterschiedliche Tensionsparameter . . . . .	59
3.6	Prinzipskizze verschiedener Möglichkeiten zur Gewinnung der Einhüllenden am Intervallanfang . . . . .	61
3.7	Darstellung der Fine-to-Coarse-Nature der EMD . . . . .	70
3.8	Zerlegung von GWR-Datensätzen in IMF . . . . .	71
3.9	Filterbankstruktur der EMD . . . . .	73

3.10	Darstellung des Beat-Effektes . . . . .	76
3.11	EMD-Interpretation der Überlagerung zweier Signale in Abhängigkeit von deren Amplituden- und Frequenzverhältnisses . . . . .	78
3.12	Darstellung des Mode Mixing . . . . .	80
3.13	Prinzip der normalisierten Hilbert-Transformation . . . . .	89
4.1	Box-Whisker-Plots für die IMF-Anzahl aller Modellsignale ohne additives Rauschen . . . . .	99
4.2	Box-Whisker-Plots für die, auf die Signalenergie $E_x$ normierte Energie $E_{\Delta x}$ aller Modellsignale ohne additives Rauschen . . . . .	99
4.3	Box-Whisker-Plots für die Energie $E_{irr}$ aller Modellsignale ohne additives Rauschen . . . . .	100
4.4	Box-Whisker-Plots für die, auf die Signalenergie $E_x$ normierte Energie $E_{\Delta x}$ aller Modellsignale mit additivem Rauschen . . . . .	102
4.5	Box-Whisker-Plot der in Abbildung 4.4 dargestellten maximalen Werte von $E_{\Delta x}/E_x$ je Parametersatz . . . . .	102
4.6	Box-Whisker-Plots für die, auf die Energie $E_\epsilon$ des Rauschens normierte Energie $E_{irr}$ aller Modellsignale mit additivem Rauschen . . . . .	103
4.7	Box-Whisker-Plot der in Abbildung 4.6 dargestellten maximalen Werte von $E_{irr}/E_\epsilon$ je Parametersatz . . . . .	103
4.8	Box-Whisker-Plots für die Anzahl an Siebiterationen . . . . .	104
4.9	Box-Whisker-Plot der in Abbildung 4.8 dargestellten maximalen Werte der Siebiterationsanzahl je Parametersatz . . . . .	104
4.10	Maximal auftretende Amplituden- und Phasenfehler bei der Analyse aller Modellsignale mit $\sigma_\epsilon = 0$ . . . . .	107
4.11	Abweichung bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers in Abhängigkeit von der Phase und der Amplitude des Mehrwegesignals . . . . .	107
4.12	Fehler bei der Bestimmung der Amplituden der verrauschten Modellsignale . . . . .	108
4.13	Fehler bei der Bestimmung der Phasenlage der verrauschten Modellsignale . . . . .	109
4.14	Abweichung bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers in Abhängigkeit von der Phase und der Amplitude des Mehrwegesignals (0,90-Quantil, Einschwingzeit $0,1T_A$ ) . . . . .	110
4.15	Abweichung bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers in Abhängigkeit von der Phase und der Amplitude des Mehrwegesignals (0,90-Quantil, Einschwingzeit $0,25T_A$ ) . . . . .	110

---

4.16	Abweichung bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers in Abhängigkeit von der Phase und der Amplitude des Mehrwegesignals (0,95-Quantil, Einschwingzeit $0,25T_A$ ) . . . . .	111
4.17	Maximale Abweichung des Trägerphasenmessfehlers bei Auftreten zweier nicht verrauschter Mehrwegesignale in Abhängigkeit von deren Amplituden- und Frequenzverhältnis . . . . .	114
4.18	Abweichung des Trägerphasenmessfehlers bei Auftreten zweier verrauschter Mehrwegesignale in Abhängigkeit von deren Amplituden- und Frequenzverhältnis . . . . .	117
4.19	Quantilwerte der Leistung der verschiedenen IMF für unterschiedliche Standardabweichungen . . . . .	120
4.20	Medianwerte als Funktion der IMF für verschiedene Datensatzlängen . . . . .	121
4.21	0,99-Quantilwerte als Funktion der IMF für verschiedene Datensatzlängen . . . . .	122
5.1	Experimentalaufbau auf dem Parkplatz $P_1$ der Messe Dresden . . . . .	126
5.2	Mehrwegebehaftete Amplitudenwerte für verschiedene Stationshöhen und Trägerfrequenzen . . . . .	130
5.3	Zerlegung der in Abbildung 5.2 dargestellten GPS L1-Amplitudenwerte des PRN 7 der Station 1433 in ihre IMF und einen Trend . . . . .	131
5.4	Residuen der Doppeldifferenz bei Verwendung der Stationen 5424 und 1433 sowie der Satelliten mit der PRN 7 und 8. . . . .	133
5.5	Residuen der Doppeldifferenz bei Verwendung der Stationen 5428 und 1433 sowie der Satelliten mit der PRN 7 und 8 . . . . .	135
5.6	Basislinienauswertung der freien Station 1433 und der festgesetzten Station 5428 bei Verwendung von GPS L1-Beobachtungen . . . . .	140
C.1	Box-Whisker-Plot nach [Tuk94] . . . . .	A-16



# Tabellenverzeichnis

2.1	Kategorisierung der verschiedenen Möglichkeiten, Effekte durch Mehrwegeausbreitung zu verhindern, zu verringern und zu eliminieren. . . . .	49
4.1	Zu modellierende Parameter der Testsignale . . . . .	94
4.2	Kombinationen von Parametern rationaler Splines . . . . .	98
5.1	Stationen des Experimentalaufbaus . . . . .	127
5.2	Standardabweichung der Residuen der doppelten Differenzen bei Verwendung der GPS L1-Beobachtungen in der statischen Basislinienauswertung . . . . .	134
5.3	Standardabweichung der Residuen der doppelten Differenzen bei Verwendung der GPS L1- und L2-Beobachtungen in der statischen Basislinienauswertung . . . . .	136
5.4	Abweichung der a posteriori Positionen von der a priori Position bei der statischen Basislinienauswertung bei Verwendung von GPS L1-Beobachtungen . . . . .	137
5.5	Abweichung des Mittelwertes der Residuen der Einzelepochenlösungen von der a priori Position bei der kinematischen Basislinienauswertung bei Verwendung von GPS L1-Beobachtungen . . . . .	138
5.6	Standardabweichung der Residuen der Einzelepochenlösungen bei der kinematischen Basislinienauswertung bei Verwendung von GPS L1-Beobachtungen . . . . .	139
5.7	Standardabweichung der Residuen der Einzelepochenlösungen bei der kinematischen Basislinienauswertung bei Verwendung der GPS L1- und L2-Beobachtungen . . . . .	141
6.1	SAPOS-Stationen . . . . .	143
6.2	Gerundete Basislinienlänge zwischen den SAPOS-Stationen . . . . .	145
6.3	Standardabweichung der Residuen der doppelten Differenzen bei ausschließlicher Verwendung von Satelliten des GPS in der statischen Basislinienauswertung . . . . .	147
6.4	Standardabweichung der Residuen der doppelten Differenzen für die GPS-GLO-NASS-Lösung in der statischen Basislinienauswertung . . . . .	147

6.5	Standardabweichung der Einzelepochenresiduen bei ausschließlicher Verwendung von GPS-Beobachtungen mit elevationsabhängiger Gewichtung bei der Positionsbestimmung . . . . .	150
6.6	Standardabweichung der Einzelepochenresiduen bei ausschließlicher Verwendung von GPS-Beobachtungen ohne elevationsabhängiger Gewichtung bei der Positionsbestimmung . . . . .	151
6.7	Standardabweichung der Residuen der doppelten Differenzen und der Einzelepochenresiduen für eine GPS- und eine GPS-GLONASS-Lösung . . . . .	153

# Verzeichnis der Abkürzungen und Formelzeichen

## Abkürzungen

BOC	Binary Offset Carrier
BPSK	Binary Phase Shift Keying
C/A	Coarse Acquisition
CEEMD	Complementary Ensemble Empirical Mode Decomposition
CEEMDAN	Complementary Ensemble Empirical Mode Decomposition with Adaptive Noise
CODE	Center for Orbit Determination in Europe
DD	Double Difference
DQ	direkte Quadraturmethode
DLL	Delay Locked Loop
GLONASS	GLobalnaja NAWigazionaja Sputnikowaja Sistema
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
GWR	Gaußsches Weißes Rauschen
E	Early-Zweig
EEMD	Ensemble Empirical Mode Decomposition
EMD	Empirical Mode Decomposition
ESOC	European Space Operations Center
EUV	extrem ultraviolett
fGn	fractional Gaussian noise
GMF	Global Mapping Function
GPT	Global Pressure and Temperature Model
HHT	Hilbert-Huang-Transformation

HT	Hilbert-Transformation
I	Inphase-Arm
IGS	International GNSS-Service
IMF	Intrinsic Mode Function
L	Late-Zweig
LHCP	Left Hand Circular Polarized
L1,L2	Frequenzbänder, in denen Navigationssatelliten arbeiten
L3	ionosphärenfreie Linearkombination
NADA	Noise Assisted Data Analysis
NCO	Numerical Controlled Oscillator
NEMD	Noise Modulated Empirical Mode Decomposition
NHT	normalisierte Hilbert-Transformation
NLOS	Non Line of Sight
P	Prompt-Zweig
PCO	Phase Center Offset
PCV	Phase Center Variations
PDE	Partial Differential Equation
PLL	Phase Locked Loop
PRN	Pseudo Random Noise
PSD	Power Spectrum Density
Q	Quadratur-Arm
RHCP	Right Hand Circular Polarized
RINEX	Receiver INdependent EXchange Format
RMS	Root Mean Square
RTK	Real Time Kinematic
SAPOS	SATellitenPOSitionierungsdienst der deutschen Landvermessung
SD	Single Difference
SWACI	Space Weather Application Center - Ionosphere
TEC	Total Electron Content

## Formelzeichen

$a, b$	große und kleine Halbachse einer Ellipse
$a_i$	Amplitude von $x_i$
$a_V$	Amplitudenverhältnis
$a_x$	Amplitude von $x$

$a_S$	Modenamplitude im Mittelwert-Kriterium
$A$	Amplitudenfunktion bei der NHT
$A_C$	Amplitude des Trägersignals
$A_D$	Amplitude des direkten Trägersignals
$A_M$	Amplitude des Mehrwegesignals
$A_{A_W}$	notwendige Reflexionsfläche
$A_k$	Parameter eines rationalen Splines
$A_{i,f,R}^k$	Messfehler durch Antennenphasenexzentrizitäten bei der Codemes- sung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$ auf der Frequenz $f$
$A_{i,f,\Phi}^k$	Messfehler durch Antennenphasenexzentrizitäten bei der Trägerpha- senmessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$ auf der Frequenz $f$
$az_R$	Azimut des Reflektors
$az_S$	Azimut des Satelliten
$b_{PSD}$	relative Bandbreite des Leistungsdichtespektrums
$B$	Trägersignal modulierender PRN-Code
$B_k$	Parameter eines rationalen Splines
$B_{M1}, B_{M2}$	konstante Fehlerterme
$B_N$	Rauschbandbreite
$c$	Konstante
$c_0$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
$c_1, c_2$	Schwellwerte
$C$	Signalleistung des unmodulierten Trägersignals
$C_k$	Parameter eines rationalen Splines
$C/N_0$	Trägersignal-zu-Rauschleistungsichte-Verhältnis
$d$	Länge einer Teilstrecke zwischen den Brennpunkten eines Ellipsoiden
$d_H$	horizontaler Abstand des Reflektors von der Empfangsantenne
$d_C$	Abstand zwischen je zwei Korrelatoren des E-, P- und L-Zweiges
$d_1, d_2$	Teilstrecken des Umwegsignals
$D$	Trägersignal modulierende Navigationsnachricht
$D_k$	Parameter eines rationalen Splines
$df$	Abstand zweier Frequenzen im Spektrum
$dt$	Schrittweite
$dN, dO, dh$	Abweichung zweier Positionen in Nord-, Ost- und Höhenkomponente
$e, e_i$	Spline-Funktionen
$e_o, e_u$	obere und untere Einhüllende
$E_x^T$	Energie des diskreten Signals $x$ im Intervall $T$

$E_{\Delta x}, E_{\varepsilon}, E_{irr}$	Energie von $\Delta x$ , von $\varepsilon$ bzw. der irrelevanten IMF
$E_{\parallel,d}$	Feldstärkevektor der direkten Welle in der Einfallsebene
$E_{\parallel,r}$	Feldstärkevektor der reflektierten Welle in der Einfallsebene
$E_{\perp,d}$	Feldstärkevektor der direkten Welle senkrecht zur Einfallsebene
$E_{\perp,r}$	Feldstärkevektor der reflektierten Welle senkrecht zur Einfallsebene
$el$	Elevation des Satelliten in allgemeiner Darstellung
$el_R$	Elevation des Reflektors
$el_S$	Elevation des Satelliten
$f, f_1, f_{L1}, f_2, f_{L2}, f_{Li}$	Frequenz
$f_{IF}$	Zwischenfrequenz
$f_m$	Mittelfrequenz
$f_o$	obere Grenzfrequenz
$f_s$	Abtastfrequenz
$f_u$	untere Grenzfrequenz
$F$	Trägersignal bei der NHT
$F_i^k$	Auswirkung relativistischer Effekte bei der Code- und Trägerphasenmessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$
$F_L$	Filterlänge
$G_i^k$	Messfehler auf Grund geodynamischer Prozesse bei der Code- und Trägerphasenmessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$
$h$	Höhe
$H$	Hurst-Komponente
$H_{i,f,R}$	instrumentelle Laufzeitverzögerung des Codes auf dem Trägersignal mit der Frequenz $f$ im Empfänger $i$
$H_{i,f,\Phi}$	instrumentelle Laufzeitverzögerung des Trägersignals mit der Frequenz $f$ im Empfänger $i$
$H_{f,R}^k$	instrumentelle Laufzeitverzögerung des Codes auf dem Trägersignal mit der Frequenz $f$ im Satellit $k$
$H_{f,\Phi}^k$	instrumentelle Laufzeitverzögerung des Trägersignals mit der Frequenz $f$ im Satellit $k$
$\mathcal{H}$	Hilbert-Transformation
$i_E$	Korrelationswert im Early-Zweig des Inphase-Arms
$I_E$	Early-Zweig im Inphase-Arm
$i_L$	Korrelationswert im Late-Zweig des Inphase-Arms
$I_L$	Late-Zweig im Inphase-Arm
$i_P$	Korrelationswert im Prompt-Zweig des Inphase-Arms

$I_P$	Prompt-Zweig im Inphase-Arm
$I_{i,f}^k$	ionosphärenbedingter Messfehler bei der Code- und Trägerphasenmessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$ auf der Frequenz $f$
$I_1, I_2$	ionosphärenbedingter Messfehler auf der Trägerfrequenz L1 bzw. L2
$I_{n,m}$	ionosphärenbedingter Messfehler in der Linearkombination
$k_a, k_f, k_p$	Faktoren bei der Festlegung der Testsignale
$k_A$	Anzahl der Abtastwerte
$K_{ij}^k$	Fehler in der Single Difference auf Grund von Fehlern in den Koordinaten der Referenzstation
$L_2(\mathbb{R})$	Raum der quadratintegrierbaren Funktionen
$m_{min}$	kleinste realisierte Anzahl an IMF von $j$ Zerlegungen
$m_y$	Mittelwert von $y$
$m_y^k$	$k$ -te Iterierte von $m_y$ im Sieb-Prozess
$m_{50}^{N_A, \sigma_\varepsilon=1}$	Anstieg des Graphen der 0.5-Quantilfunktion der Rauschleistung mit $\sigma_\varepsilon = 1$
$m_{99}^{N_A}$	Anstieg des Graphen der 0.99-Quantilfunktion der Rauschleistung
$M$	Menge der Stützpunkte eines Splines
$M_{i,f,R}^k$	Messfehler bei der Codemessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$ auf der Frequenz $f$ durch Signalbeugung und -mehrwegeausbreitung
$M_{i,f,\Phi}^k$	Messfehler bei der Trägerphasenmessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$ auf der Frequenz $f$ durch Signalbeugung und -mehrwegeausbreitung
$n_e$	Elektronendichte
$m_{50}^{N_A, \sigma_\varepsilon=1}$	Ordinatenschnittpunkt des Graphen der 0.5-Quantilfunktion der Rauschleistung mit $\sigma_\varepsilon = 1$
$n_{99}^{N_A}$	Ordinatenschnittpunkt des Graphen der 0.99-Quantilfunktion der Rauschleistung
$\vec{n}$	Normalenvektor
$N$	Rauschleistung
$N_0$	Rauschleistungsdichte
$N_A$	Anzahl an Abtastpunkten
$N_{i,f}^k$	Phasenmehrdeutigkeiten bei der Trägerphasenmessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$ auf der Frequenz $f$
$N_1, N_2$	Phasenmehrdeutigkeiten bei der Trägerphasenmessung auf L1 bzw. L2
$N_{n,m}$	Phasenmehrdeutigkeit in der Linearkombination
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen

$O_i^k$	Orbitfehler bei der Code- und Trägerphasenmessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$
$OI_i$	Orthogonalitätsindex
$p$	Tensionsparameter des rationalen Splines $S_p$
$p_{\frac{c}{N_0}}$	Proportionalitätsfaktor
$p_A$	Amplitudendichtefunktion
$P, P_i$	Leistung
$P_{i,k}$	Leistung der $i$ -ten IMF der $k$ -ten Realisierung von GWR
$\mathcal{P}$	Cauchy'scher Hauptwert
$q_E$	Korrelationswert im Early-Zweig des Quadratur-Arms
$q_L$	Korrelationswert im Late-Zweig des Quadratur-Arms
$q_P$	Korrelationswert im Prompt-Zweig des Quadratur-Arms
$\overline{q_P^2}$	quadratischer Mittelwert von $q_P$
$Q_E$	Early-Zweig im Quadratur-Arm
$Q_f$	Auflösung im Spektrum
$Q_L$	Late-Zweig im Quadratur-Arm
$Q_P$	Prompt-Zweig im Quadratur-Arm
$Q_{50}^{\sigma_\varepsilon}$	das von $\sigma_\varepsilon$ abhängige 0.5-Quantil der Rauschleistung
$Q_{50}^{norm}$	das auf $Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}$ normierte 0.5-Quantil der Rauschleistung
$Q_{99}^{\sigma_\varepsilon}$	das von $\sigma_\varepsilon$ abhängige 0.99-Quantil der Rauschleistung
$r$	Radius
$r_p$	Kondition für die Modellierung der Splines an den Intervallenden
$r_1, r_2$	Abstand eines Punktes auf einem Ellipsoid zum ersten bzw. zweiten Brennpunkt
$r_s$	Referenzsignal
$r_t$	während der EMD extrahierter Trend
$\vec{r}_R$	Richtungsvektor zwischen Empfangsantenne und Reflektor
$\vec{r}_S$	Richtungsvektor zwischen Empfangsantenne und Satellit
$R$	Autokorrelationsfunktion
$R_C, R_{i,f}^k$	aus der Codemessung auf dem Trägersignal mit der Frequenz $f$ berechnete Entfernung zwischen dem Empfänger $i$ und dem Satelliten $k$
$R_{IF}$	von der Ionosphäre unabhängiger Anteil der Codebeobachtungen
$R_1, R_2$	Codebeobachtung auf der Trägerfrequenz L1 bzw. L2
$R_{n,m}$	Linearkombination von Codebeobachtungen
$R_\varepsilon$	Anzahl an Realisierungen von GWR
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen



$s$	empfangenes Trägersignal
$s_k$	$k$ -te Teilfunktion des Splines $S_P$
$s_x$	Signal innerhalb des EMD-Prozesses
$s_E$	Early-Replik
$s_{IQ}$	Mischsignal im Inphase- und Quadratur-Arm
$s_{IQ,E}$	Mischsignal im Early-Zweig des Inphase- und Quadratur-Armes
$s_{IQ,L}$	Mischsignal im Late-Zweig des Inphase- und Quadratur-Armes
$s_{IQ,P}$	Mischsignal im Prompt-Zweig des Inphase- und Quadratur-Armes
$s_L$	Late-Replik
$s_P$	Prompt-Replik
$S$	Signalleistung des mit Code und Navigationsnachricht modulierten Trägersignals
$S_i$	Leistungsdichtespektrum der $i$ -ten IMF für Rauschprozesse
$S_H$	Leistungsdichtespektrum von fGn
$S_I, S_{I,fix}$	Anzahl an Iterationen im Sieb-Prozess
$S_P$	Spline
$S_{i,H}$	Leistungsdichtespektrum der $i$ -ten IMF für fGn
$SD_i$	Abstand zweier Funktionen
$T, \tilde{T}$	Analyseintervall
$T_i$	mittlere Periodendauer
$T_s$	Abtastperiode
$T_A$	Länge des Analyseintervalls
$T_i^k$	troposphärenbedingter Messfehler bei der Code- und Trägerphasenmessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$
$u$	Umwegsignal
$w^k$	$k$ -te Realisierung von Weißem Rauschen
$x$	Signal
$x_i$	$i$ -te, im Signal $x$ enthaltene Monokomponente
$x^k$	$k$ -te Realisierung eines von Weißem Rauschen überlagerten Signal $x$
$x_i^k$	$i$ -te IMF der $k$ -te Realisierung eines, von Weißem Rauschen überlagerten Signals $x$
$x_i^{rel}$	relevante IMF
$x_{ij}$	$i$ -te IMF der $j$ -ten Zerlegung
$\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$	kartesische Koordinaten des Empfängers $i$
$\vec{x}^k = (x^k, y^k, z^k)$	kartesische Koordinaten des Satelliten $k$
$\tilde{x}$	Signal

$X$	Fourier-Transformierte von $x$
$X_1, X_2$	Beobachtungsgröße auf der Trägerfrequenz L1 bzw. L2
$X_{n,m}$	Linearkombination von Beobachtungsgrößen
$y$	Signal innerhalb des Sieb-Prozesses der EMD
$y_m$	zeitvarianter Mittelwert von $y$
$y^k$	$k$ -te Iterierte von $y$ im Sieb-Prozess
$y_z$	Imaginärteil des analytischen Signals $z$
$y_N$	normiertes Signal
$y_{N,i}$	normiertes Signal im $i$ -ten Iterationsschritt
$z$	analytisches Signal
$z_i$	Imaginärteil von $z$
$z_r$	Realteil von $z$
$Z$	Fourier-Transformierte von $z$
$\alpha$	Verhältnis zwischen Amplitude des Mehrwegesignals und des direkten Trägersignals
$\alpha_i$	Verhältnis zwischen Amplitude des $i$ -ten Mehrwegesignals und des direkten Trägersignals
$\alpha_f$	quadriertes Frequenzverhältnis
$\alpha_S$	Quantil im Mittelwert-Kriterium
$\beta_H$	Skalierungsfaktor für die Amplitudendichtefunktion bei fGn
$\delta t_i$	Uhrenfehler des Empfängers $i$
$\delta t^k$	Uhrenfehler des Satelliten $k$
$\Delta n$	Phasendifferenz zwischen empfangenem und intern erzeugtem Code
$\Delta n + \delta_M$	Phasendifferenz zwischen empfangenem und intern erzeugtem Code bei Mehrwegeausbreitung
$\Delta x$	Abweichung zwischen Modellsignal und relevanter IMF
$\Delta P_{12}$	Unterschied in der Leistung von erster und zweiter IMF einer Zerlegung von GWR
$\Delta\alpha, \Delta\alpha_i, \Delta\theta, \Delta\theta_i$	Fehler bei der Bestimmung von $\alpha, \alpha_i, \theta, \theta_i$
$\Delta\phi$	Trägerphasenmessfehler bei Mehrwegeempfang
$\Delta\tau$	Laufzeitverzögerung
$\Delta(\Delta\phi)$	Abweichung bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers
$\gamma, \gamma'$	Einfalls- und Ausfallswinkel
$\epsilon$	Genauigkeitsschranke für den Abbruch des Sieb-Prozesses der EMD
$\varepsilon$	Gaußsches Weißes Rauschen
$\varepsilon_r$	Dielektrizitätszahl

$\varepsilon_{i,f,R}^k$	zufälliger Messfehler bei der Codemessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$ auf der Frequenz $f$
$\varepsilon_{i,f,\Phi}^k$	zufälliger Messfehler bei der Trägerphasenmessung zwischen Satellit $k$ und Empfänger $i$ auf der Frequenz $f$
$\varepsilon_R, \varepsilon_\Phi$	zufälliger Messfehler bei der Code- bzw. Trägerphasenbeobachtung
$\varepsilon_{n,m}$	zufälliger Messfehler in der Linearkombination
$\widehat{\varepsilon}_1, \widehat{\varepsilon}_2$	Fehlerterme bei der Bestimmung des Mehrwegeanteils in den Codebeobachtungen
$\zeta_1, \zeta_2$	Hilfsgrößen
$\eta_A$	Dämpfungsfaktor mit Bezug zur Richtcharakteristik der Antenne
$\eta_D$	Dämpfungsfaktor auf Grund von Depolarisation
$\eta_E$	Wert für die Korrelation des GWR $\varepsilon$ mit der Early-Code-Replik im Inphase-Arm
$\eta_F$	Dämpfungsfaktor auf Grund von Freiraumausbreitung
$\eta_L$	Wert für die Korrelation des GWR $\varepsilon$ mit der Late-Code-Replik im Inphase-Arm
$\eta_P$	Wert für die Korrelation des GWR $\varepsilon$ mit der Prompt-Code-Replik im Inphase-Arm
$\eta_R$	Dämpfungsfaktor auf Grund von Reflexion
$\eta_{\parallel}$	Verhältnis von $E_{\parallel,r}$ zu $E_{\parallel,d}$
$\eta_{\perp}$	Verhältnis von $E_{\perp,r}$ zu $E_{\perp,d}$
$\theta$	relative Phasenlage des Mehrwegesignals gegenüber dem direkten Trägersignal
$\theta_i$	relative Phasenlage des $i$ -ten Mehrwegesignals gegenüber dem direkten Trägersignal
$\theta_{S1}, \theta_{S2}$	Schwellwerte im Mittelwert-Kriterium
$\kappa$	auf den 0.5-Quantilwert normierter 0.99-Quantilwert
$\lambda$	Wellenlänge
$\lambda_f$	Wellenlänge der Trägerfrequenz $f$
$\lambda_1, \lambda_{L1}, \lambda_2, \lambda_{L2}$	Wellenlänge der Trägerfrequenz L1 bzw. L2
$\lambda_{n,m}$	Wellenlänge der Linearkombination
$\mu_r$	Permeabilitätszahl
$\nu$	Winkel $\chi$ zu $180^\circ$ ergänzender Winkel
$\xi$	Basis des Logarithmus
$\xi_E$	Wert für die Korrelation des GWR $\varepsilon$ mit der Early-Code-Replik im Quadratur-Arm

$\zeta_L$	Wert für die Korrelation des GWR $\varepsilon$ mit der Late-Code-Replik im Quadratur-Arm
$\zeta_P$	Wert für die Korrelation des GWR $\varepsilon$ mit der Prompt-Code-Replik im Quadratur-Arm
$\rho$	Skalierungsfaktor für das Leistungsdichtespektrum
$\rho_H$	Skalierungsfaktor für das Leistungsdichtespektrum von fGn
$\rho_{i,f}^k$	geometrische Entfernung zwischen dem Empfänger $i$ und dem Satelliten $k$
$\sigma$	elektrische Leitfähigkeit
$\sigma_h$	Standardabweichung der Oberflächenrauigkeit
$\sigma_x$	Standardabweichung der Funktion $x$
$\sigma_{n,m}$	Standardabweichung des Rauschens in der Linearkombination
$\sigma_R, \sigma_{\bar{R}}$	Standardabweichung der (geglätteten) Codebeobachtungen
$\sigma_S$	Schwellwert im Mittelwert-Kriterium
$\sigma_\varepsilon$	Standardabweichung des Rauschens
$\sigma_\varepsilon^k$	Standardabweichung des Rauschens der $k$ -ten Realisierung
$\phi$	Phasendifferenz
$\phi_0$	Phasenlage des Referenzsignals
$\varphi_0$	Phasenlage zum Zeitpunkt $t = 0$
$\phi_i$	Phasenlage von $x_i$
$\phi_C$	Phasenlage des Trägersignals
$\phi_D$	Phasenlage des direkten Trägersignals
$\Phi, \Phi_{i,f}^k$	aus der Trägerphasenmessung des Trägersignals mit der Frequenz $f$ berechnete Entfernung zwischen dem Empfänger $i$ und dem Satelliten $k$
$\Phi_{IF}$	von der Ionosphäre unabhängiger Anteil der Trägerphasenbeobachtungen
$\Phi_{n,m}$	Linearkombination der Trägerphasenbeobachtungen
$\chi$	Winkel zwischen $\vec{r}_R$ und $\vec{r}_S$
$\omega$	Kreisfrequenz
$\omega_i$	Kreisfrequenz von $x_i$
$\omega_{IF}$	zur Zwischenfrequenz gehörende Kreisfrequenz
$\Delta$	Single Difference Operator
$\nabla\Delta$	Double Difference Operator
$\partial, d$	Differentialoperatoren
$\mathbb{E}$	Erwartungswert-Operator

# Kapitel 1

## Einleitung

In verschiedensten, verkehrswissenschaftlich relevanten Bereichen werden Informationen globaler Navigationssatellitensysteme (kurz: *GNSS*) bei der Positionsbestimmung von Verkehrsteilnehmern verwendet. Abhängig von der geforderten Qualität der Position sind dafür Code- und/oder Trägerphasenmessungen des Empfängers selbst sowie gegebenenfalls zusätzlich erforderlicher *GNSS*-Empfangsstationen auszuwerten. Der Grund für die Notwendigkeit der Nutzung unterschiedlicher Messgrößen und Auswertungsstrategien ist der Einfluss diverser Fehlerquellen, die zu einer Verfälschung der Code- und Trägerphasenmessungen und damit der Position führen und deren Effekte es daher zu reduzieren bzw. zu eliminieren gilt. Im Verkehrswesen stellt insbesondere die Mehrwegeausbreitung der *GNSS*-Signale eine Fehlerquelle von großer Bedeutung dar, da die Positionsbestimmung oftmals in Umgebungen erfolgt, die durch eine Vielzahl von die Ausbreitung der Signale beeinflussenden Objekten gekennzeichnet sind.

Erfolgt die Positionsbestimmung codebasiert, ist der Mehrwegefehler in den Codemessungen ein die Genauigkeit einschränkender Faktor und somit zu reduzieren bzw. zu eliminieren. Bei Auswertung der Trägerphasenmessungen gilt dies dementsprechend für den in ihnen enthaltenen Mehrwegefehler. Welche Auswertungsstrategie verfolgt wird, hängt u.a. von der zu gewährleistenden Genauigkeit ab. Je nach Anwendung reichen die Anforderungen dabei vom Meter- bis in den Zentimeter-Bereich. Da die Entwicklung insbesondere für die Verkehrsträger Straße und Wasser, bei denen traditionell der Mensch die Verantwortung für das Führen des Fahrzeuges trägt, hin zu einer Automatisierung, auch von sicherheitskritischen Anwendungen geht, nimmt sowohl die Bedeutung als auch die Notwendigkeit einer hoch genauen Positionsbestimmung stetig zu. Für die bereits heute weit verbreitete Navigation und Routenführung der Fahrzeuge sind, sowohl im Straßen- als auch im maritimen Verkehr, Genauigkeiten von einigen Metern zulässig ([FDR14], [IMO02]). Auch Anwendungen wie die Navigation im Ha-

fenbereich oder die spurgenaue Ortung, die bereits eine Genauigkeit von einem Meter (0,95-Quantil) erfordern ([IMO02], [FON08]), können realisiert werden ([EPo15]). Zukünftig werden jedoch Genauigkeiten zu gewährleisten sein, die im Dezimeter-Bereich liegen, so zum Beispiel für das automatische Anlegen von Schiffen ([IMO02]) oder die Kollisionsvermeidung von hoch- und vollautomatisierten Fahrzeugen im Straßenverkehr ([FDR14], [EPo15]). Eine weitere Anwendung mit noch höheren Anforderungen, bei der die Mehrwegeausbreitung und die durch sie induzierten Fehler eine große Rolle spielen, stellt die reine GNSS-basierte Positionbestimmung von automatisch gesteuerten Portalkränen in Güterumschlagplätzen, wie sie im Hafen von Kwangyang/Südkorea erprobt worden ist ([Kim+03]), dar. Die zu gewährleistende Genauigkeit für die in Echtzeit bereitzustellende Position der sich bewegenden Kräne liegt bei 1,5 cm, 0,95-Quantil ([KLK02]).

Von entscheidender Bedeutung für die Erreichung derart hoher Anforderungen an die Genauigkeit der Positionsbestimmung ist es demnach, die Fehler, insbesondere die Effekte der im Verkehrswesen nicht vermeidbaren Mehrwegeausbreitung zu detektieren und zu eliminieren. Aus dieser Motivation heraus ergibt sich der folgende Aufbau für die vorliegende Arbeit.

In Kapitel 2 werden, ausgehend von der Darstellung der Gewinnung der für die satellitengestützte Positionsbestimmung benötigten Messgrößen und deren genauigkeitsbeeinflussende Faktoren, die besondere Bedeutung der Mehrwegeausbreitung sowie ihre Charakteristika diskutiert. Aufbauend auf den bisher in der Literatur vorgestellten Ansätzen für die Detektion und Eliminierung des durch die Mehrwegeausbreitung verursachten Messfehlers, wird als Strategie dieser Arbeit die Anwendung der Hilbert-Huang-Transformation auf die vom Empfänger bereitgestellten  $C/N_0$ -Werte für die Bestimmung der Mehrwegesignalparameter mit daran anschließender Berechnung des Fehlers und seiner Korrektur in den Trägerphasenmessungen herausgearbeitet. Die eingesetzte Hilbert-Huang-Transformation ist eine rein datengetriebene, durch einen iterativ arbeitenden Algorithmus beschriebene Methode. Sie wird in der Literatur zum einen hinsichtlich der Beiträge zu ihrer (bisher nur in Ansätzen vorhandenen) fundierten mathematischen Beschreibung, zum anderen bezüglich ihrer Anwendung zur Signalanalyse in den verschiedenen Fachgebieten diskutiert. Der Einsatz der Methode innerhalb der oben skizzierten Strategie ist hingegen sowohl in der Idee als auch in der Umsetzung neuartig.

Der Anwendung der Hilbert-Huang-Transformation geht mit Kapitel 3 zunächst eine Vorstellung der Methode voraus, die den aktuellen Stand der Wissenschaft widerspiegelt. Sie beinhaltet die algorithmische Beschreibung sowie charakteristische Merkmale und Einsatzgrenzen

der Methode bei der Signalanalyse. Aufgezeigt wird, dass bei der Verwendung der Methode verschiedene Parameter festzulegen sind, die maßgeblich die Qualität der Ergebnisse bestimmen. Die Hilbert-Huang-Transformation muss demnach für die in dieser Arbeit diskutierte Anwendung adaptiert werden. Auf welcher Grundlage eine derartige Adaption erfolgen und welche Qualität bei der Bestimmung der Mehrwegesignalparameter erwartet werden kann, ist Gegenstand von Kapitel 4.

Im Anschluss an die Adaption der Methode für die Schätzung der Mehrwegesignalparameter soll nun der Mehrwert ermittelt werden, den die Korrektur des über diesen Weg bestimmten Trägerphasenmessfehlers generiert. In einem ersten Schritt wird diese Bewertung anhand der in Kapitel 5 vorgestellten Auswertung von realen Messdaten eines Experimentalaufbaus, der sich durch klar strukturierte Umgebungsbedingungen auszeichnet, vorgenommen. Auf Grund der dabei erzielten positiven Resultate werden darauf aufbauend Daten eines Referenzstationsnetzwerkes analysiert. Der Diskussion der bei dieser Analyse gewonnenen Ergebnisse widmet sich Kapitel 6. Für alle Datensätze wird eine Basislinienauswertung verfolgt, da dadurch eine rein die Effekte der Mehrwegeausbreitung betreffende Diskussion möglich ist. Dabei wird sowohl eine Bewertung im Beobachtungs- als auch im Koordinatenraum vorgenommen.

Die Arbeit schließt in Kapitel 7 mit einer Zusammenfassung und Bewertung der erzielten Ergebnisse sowie einem Ausblick auf sich daraus ableitende zukünftige Aufgaben.

## Kapitel 2

# Problemanalyse und spezielle Aufgabenstellung

Dieses Kapitel hat einleitenden Charakter und dient dazu, in die Thematik der satellitengestützten Positionsbestimmung einzuführen. Es werden offene Fragestellungen herausgearbeitet, für diese, unter Einbeziehung der aktuellen Literatur, eine Lösungsstrategie entwickelt und daraus eine konkrete Aufgabenstellung, die es zu bearbeiten gilt, abgeleitet. Dafür werden in Abschnitt 2.1 zunächst einige Grundlagen der satellitengestützten Positionsbestimmung zusammengestellt, wobei auf Grund des Stoffumfangs nur auf die für das Verständnis der vorliegenden Arbeit relevanten Aspekte eingegangen werden soll. Herausgearbeitet wird, dass insbesondere der Einfluss der Mehrwegeausbreitung als ein wichtiger, die Genauigkeit einschränkender Faktor zu diskutieren ist, da er, im Gegensatz zu Effekten anderer Fehlerquellen, nicht durch die Verwendung differentieller Verfahren eliminiert bzw. stark reduziert werden kann. Um Methoden zu entwickeln, die es ermöglichen, diesen, durch die Mehrwegeausbreitung verursachten Fehler (quantitativ) abzuschätzen, ist die Kenntnis über die sie charakterisierenden Parameter unabdingbar. Einen Überblick über diese gibt Abschnitt 2.2. Der daran anschließende Abschnitt 2.3 stellt die bisher in der Literatur diskutierten Ansätze zur Bestimmung des durch die Mehrwegeausbreitung verursachten Fehlers vor und leitet darauf aufbauend die in dieser Arbeit verfolgte Strategie ab.

### 2.1 Grundlagen der satellitengestützten Positionsbestimmung

Die satellitengestützte Positionsbestimmung basiert auf dem Prinzip der Trilateration. Die dafür benötigten Entfernungen zwischen den Satelliten und dem Empfänger werden über Laufzeitmessungen der Signale bestimmt. Die Gewinnung dieser als Beobachtungen bezeichneten Größen wird in Abschnitt 2.1.1 vorgestellt. Er beinhaltet auch die Darstellung einer vom



Empfänger ebenfalls bereitgestellten und im Verlauf der Arbeit verwendeten, wichtigen Größe, die die Signalqualität beschreibt: Das Trägersignal-zu-Rauschleistungsdichte-Verhältnis  $C/N_0$ . Verschiedene Ursachen führen zu einer Verfälschung der Laufzeitmessung und somit zu einer nicht korrekten Bestimmung der Beobachtungen. Diesen und den die Signalqualität beeinflussenden Fehlerquellen widmet sich Abschnitt 2.1.2. Viele der durch diverse Fehlerquellen hervorgerufenen Effekte lassen sich bei Verwendung der Beobachtungsgrößen eines weiteren Empfängers und der damit realisierbaren Basislinienauswertung verringern oder eliminieren und können damit zu einer höheren Positionsgenauigkeit führen. Vorgestellt wird dieses Verfahren in Abschnitt 2.1.3.

### 2.1.1 Quantifizierung der Messgrößen

Die vom Empfänger ausgegebenen Messgrößen sind zunächst einmal die GNSS-Beobachtungen. Darunter wird die Entfernung zwischen Satellit und Empfänger, bestimmt durch die Auswertung der Phasenlage des Codes (kurz: *Codemessung*), beziehungsweise die Entfernung zwischen Satellit und Empfänger, bestimmt durch die Auswertung der Phasenlage der Träger-schwingung (kurz: *Trägerphasenmessung*), verstanden. Die für die Berechnung dieser Entfernungen notwendigen Laufzeiten werden mit Hilfe von Regelkreisen ermittelt, indem intern erzeugte Repliken mit dem empfangenen Signal abgeglichen werden. Erläutert werden diese Verfahren in Abschnitt 2.1.1.1. Neben der Entfernung wird durch den Empfänger eine die Signalqualität beschreibende Messgröße bereitgestellt. Diese Messgröße ist für die Analyse des Einflusses der Mehrwegeausbreitung auf die Bestimmung der Trägerphase von großer Bedeutung (vgl. Abschnitt 2.2) und wird daher in Abschnitt 2.1.1.2 diskutiert.

#### 2.1.1.1 Quantifizierung der Code- und Trägerphasenbeobachtungen

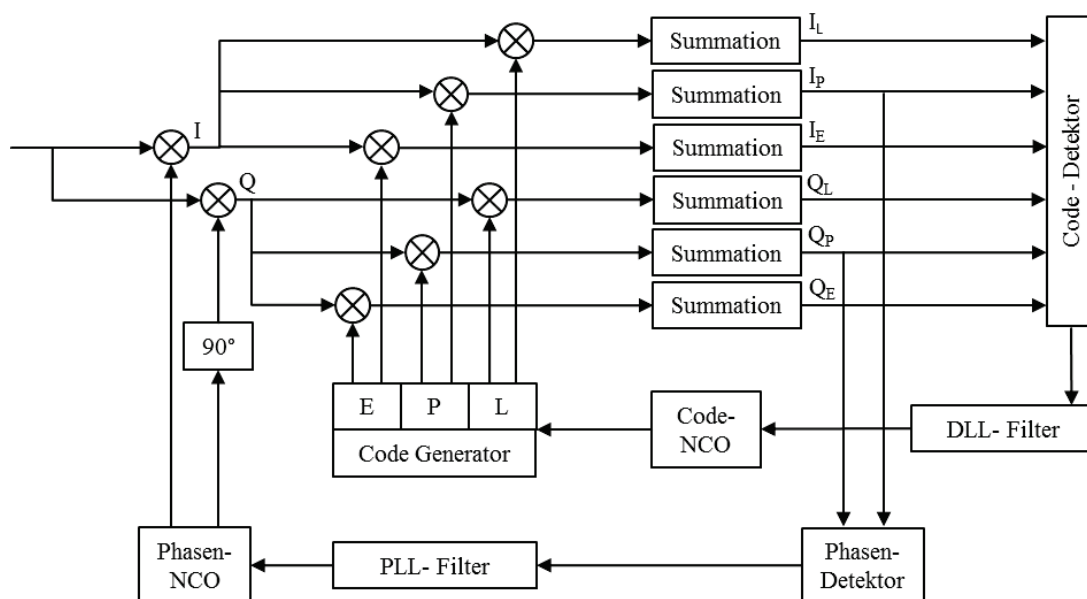
Die Bestimmung der Entfernung zwischen Satellit und Empfänger basiert auf der Bestimmung der Laufzeiten des Codes und des Trägersignals. Diese werden in miteinander gekoppelten Regelkreisen ermittelt: Die Laufzeit des Codes im Code-Regelkreis (engl. *Delay Locked Loop*, kurz: *DLL*), die Laufzeit des Trägers im Phasen-Regelkreis (engl. *Phase Locked Loop*, kurz: *PLL*). Vor der Verarbeitung in diesen Regelkreisen wird das empfangene Signal aus dem GHz-Bereich auf eine niedrigere Zwischenfrequenz  $f_{IF} = \omega_{IF}/2\pi$  im MHz-Bereich gemischt und digitalisiert. Bezeichnet dabei  $f_s$  die Abtastfrequenz und damit  $T_s = 1/f_s$  die Abtastschrittweite, lässt sich das Eingangssignal  $s$  als Produkt aus Code  $B$ , Navigationsmitteilung  $D$  und Trägerschwingung mit Amplitude  $A_C$  und Phasenlage  $\phi_C$  schreiben, dem additiv mittelwert-freies Gaußsches Weißes Rauschen  $\varepsilon$  mit Standardabweichung  $\sigma_\varepsilon$  überlagert ist (Gleichung 2.1). Die Abtastzeitpunkte sind dabei in der üblichen Schreibweise  $n = kT_s$  notiert. Die Verarbeitung

des Signals  $s$  in den Regelkreisen sei im Folgenden in Anlehnung an die ausführlichen Darstellungen in [Eis97] anhand der Prinzipskizze in Abbildung 2.1 erläutert. Für diese Erläuterungen ist es von Vorteil, das Signal  $s$  in seiner komplexen Darstellung nach Gleichung 2.2 zu verwenden.

$$s(n) = B(n)D(n)A_C \cos(\omega_{IF}n + \phi_C) + \varepsilon(n) \quad (2.1)$$

$$= \frac{1}{2}B(n)D(n)A_C \left[ e^{i(\omega_{IF}n + \phi_C)} + e^{-i(\omega_{IF}n + \phi_C)} \right] + \varepsilon(n) \quad (2.2)$$

Das Signal  $s$  wird im Inphase-Arm  $I$  mit einem intern erzeugten Referenzsignal gleicher Frequenz, aber abweichender Phasen  $\phi_0$ , im Quadratur-Arm  $Q$  mit eben diesem, jedoch um  $\pi/2$  phasenverschobenen Referenzsignal multipliziert. Beide Multiplikationen können, unter Verwendung der komplexen Darstellung, unabhängig voneinander in einer Gleichung erfasst werden (Gleichungen 2.3-2.5).



**Abbildung 2.1:** Prinzipskizze der gekoppelten Regelkreise für die Gewinnung von Code- und Trägerphasenmessung nach [Irs08]. Das empfangene Signal wird in der PLL mit einer intern erzeugten Trägerschwingung abgeglichen. Auf Grund der Abweichung in der Phasenlage der beiden Schwingungen wird im Phasendetektor ein Fehlersignal generiert, welches über das PLL-Filter die Frequenz des Oszillators (NCO) steuert, mit dem Ziel, die Abweichung zu minimieren. In der DLL wird das empfangene Signal mit intern erzeugten Code-Repliken korreliert. Hier wird auf Grund der Abweichung in der Codephase im Code-Detektor ein Fehlersignal generiert. Dieses steuert über das DLL-Filter die Frequenz des Oszillators (NCO), mit dem Ziel der Übereinstimmung von empfangenen Code und Prompt-Code ( $P$ -Zweig) im Inphase-Arm  $I$ .

$$s_{IQ}(n) = s(n)r_s(n) \quad (2.3)$$

$$= s(n)e^{i(\omega_{IF}n + \phi_0)} \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2}B(n)D(n)A_C e^{i(\phi_0 - \phi_C)} \left(1 + e^{i(2\omega_{IF}n + 2\phi_C)}\right) + \varepsilon(n)e^{i(\omega_{IF}n + \phi_0)} \quad (2.5)$$

Dieses, die beiden orthogonalen Signale des Inphase- und Quadratur-Arms umfassende Mischsignal  $s_{IQ}$  wird mit intern erzeugten, um den Abstand  $d_C$  versetzten Referenzcodes, der Early-Replik  $s_E$ , der Prompt-Replik  $s_P$  und der Late-Replik  $s_L$ , multipliziert (Gleichungen 2.6-2.8). Ähnlich dem Phasenunterschied  $\phi_0 - \phi_C$  zwischen empfangenem und intern generiertem Signal, existiert auch ein Unterschied  $\Delta n$  in der Phasenlage des eingehenden Codes und der Phasenlage der Repliken.

$$\begin{aligned} s_{IQ,E}(n) &= s_E(n)s_{IQ}(n) \\ &= B(n - \Delta n - d_C) \left[ B(n)D(n)A_C e^{i(\phi_0 - \phi_C)} \left(1 + e^{i(2\omega_{IF}n + 2\phi_C)}\right) + 2\varepsilon(n)e^{i(\omega_{IF}n + \phi_0)} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} s_{IQ,P}(n) &= s_P(n)s_{IQ}(n) \\ &= B(n - \Delta n) \left[ B(n)D(n)A_C e^{i(\phi_0 - \phi_C)} \left(1 + e^{i(2\omega_{IF}n + 2\phi_C)}\right) + 2\varepsilon(n)e^{i(\omega_{IF}n + \phi_0)} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} s_{IQ,L}(n) &= s_L(n)s_{IQ}(n) \\ &= B(n - \Delta n + d_C) \left[ B(n)D(n)A_C e^{i(\phi_0 - \phi_C)} \left(1 + e^{i(2\omega_{IF}n + 2\phi_C)}\right) + 2\varepsilon(n)e^{i(\omega_{IF}n + \phi_0)} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die sich anschließende Summation von jeweils  $k_A$  Funktionswerten der Mischsignale  $s_{IQ,E}$ ,  $s_{IQ,P}$  und  $s_{IQ,L}$  liefert Schätzwerte für die Autokorrelation  $R$  des eingehenden Codes mit den Repliken. Die Summation erfolgt dabei unter der Annahme, dass das Datenbit  $D$  über die  $k_A$  Summanden konstant +1 bzw. -1 ist und sich die periodischen Anteile, die mit der doppelten Frequenz ( $2\omega_i$ ) schwingen, zu Null summieren. Die nach der Summation in den sechs Armen  $I_E$ ,  $I_P$ ,  $I_L$ ,  $Q_E$ ,  $Q_P$  und  $Q_L$  vorliegenden Korrelationswerte ergeben sich demnach wie in den Gleichungen 2.9 bis 2.14 dargestellt.

$$I_E : i_E = \pm k_A A_C R(\Delta n - d_C) \cos(\phi_0 - \phi_C) + \eta_E \quad (2.9)$$

$$Q_E : q_E = \pm k_A A_C R(\Delta n - d_C) \sin(\phi_0 - \phi_C) + \xi_E \quad (2.10)$$

$$I_P : i_P = \pm k_A A_C R(\Delta n) \cos(\phi_0 - \phi_C) + \eta_P \quad (2.11)$$

$$Q_P : q_P = \pm k_A A_C R(\Delta n) \sin(\phi_0 - \phi_C) + \xi_P \quad (2.12)$$

$$I_L : i_L = \pm k_A A_C R(\Delta n + d_C) \cos(\phi_0 - \phi_C) + \eta_L \quad (2.13)$$

$$Q_L : q_L = \pm k_A A_C R(\Delta n + d_C) \sin(\phi_0 - \phi_C) + \xi_L \quad (2.14)$$

Die Werte  $\eta_E, \eta_P, \eta_L, \zeta_E, \zeta_P$  und  $\zeta_L$  bezeichnen dabei den Wert der Korrelationsfunktion des additiven Rauschens mit den Code-Repliken (Gleichungen 2.15 bis 2.20).

$$\eta_E = \sum_{k=1}^{k_A} 2B(kT_s - \Delta n - d_C)\varepsilon(kT_s) \cos(\omega_{IF}kT_s + \phi_0) \quad (2.15)$$

$$\zeta_E = \sum_{k=1}^{k_A} 2B(kT_s - \Delta n - d_C)\varepsilon(kT_s) \sin(\omega_{IF}kT_s + \phi_0) \quad (2.16)$$

$$\eta_P = \sum_{k=1}^{k_A} 2B(kT_s - \Delta n)\varepsilon(kT_s) \cos(\omega_{IF}kT_s + \phi_0) \quad (2.17)$$

$$\zeta_P = \sum_{k=1}^{k_A} 2B(kT_s - \Delta n)\varepsilon(kT_s) \sin(\omega_{IF}kT_s + \phi_0) \quad (2.18)$$

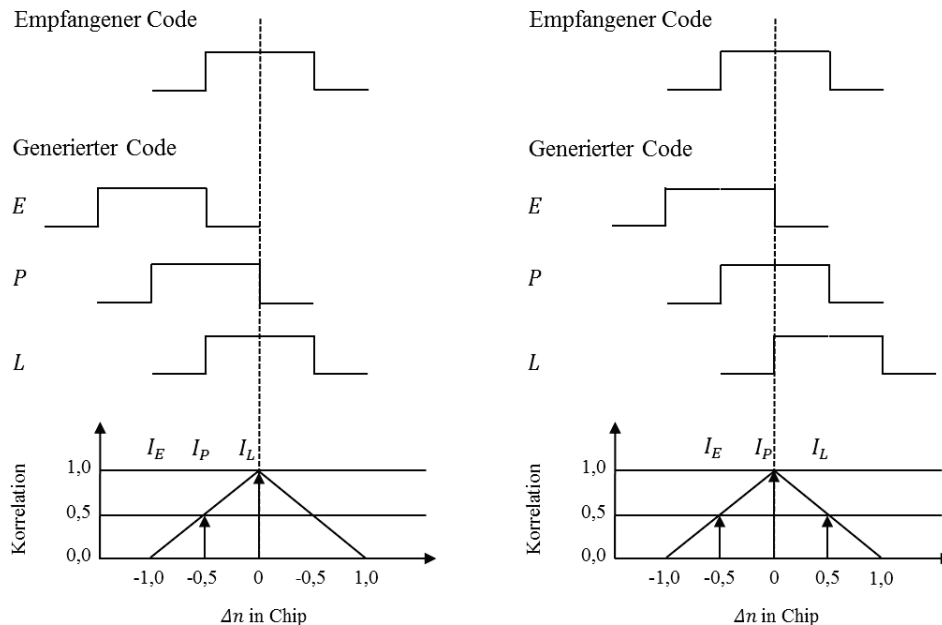
$$\eta_L = \sum_{k=1}^{k_A} 2B(kT_s - \Delta n + d_C)\varepsilon(kT_s) \cos(\omega_{IF}kT_s + \phi_0) \quad (2.19)$$

$$\zeta_L = \sum_{k=1}^{k_A} 2B(kT_s - \Delta n + d_C)\varepsilon(kT_s) \sin(\omega_{IF}kT_s + \phi_0) \quad (2.20)$$

Abbildung 2.2 zeigt schematisch die (auf den Maximalwert normierten) Korrelationswerte im Inphase-Arm. Besteht kein Codephasenunterschied  $\Delta n$  zwischen empfangenem Signal und Code-Repliken, ist die Korrelation der Prompt-Replik mit dem Code des empfangenen Signals am größten (Abbildung 2.2, rechts). Anderenfalls ist die Korrelation mit einer anderen Replik größer (Abbildung 2.2, links). Die Korrelationswerte (Gleichungen 2.9 bis 2.14) werden im jeweiligen Detektor des Phasen- bzw. Code-Regelkreises in einen funktionalen Zusammenhang gesetzt. Aufgabe ist es, ein Fehlersignal zu erzeugen, welches proportional zum Phasenunterschied  $\phi_0 - \phi_C$  bzw.  $\Delta n$  zwischen empfangenem Signal und intern erzeugten Referenzsignalen ist. Dieses Fehlersignal wird genutzt, um die Frequenz der Oszillatoren (engl. *Numerical Controlled Oscillator*, kurz: *NCO*) zu steuern, mit dem Ziel, intern Referenzsignale derart zu erzeugen, dass die jeweiligen Phasenunterschiede minimiert werden. Die Auslegung der jeweiligen Regelkreisfilter (PLL- bzw. DLL-Filter) entscheidet dabei maßgeblich über die Genauigkeit und Dynamik, mit der dieses Ziel erreicht wird.<sup>1</sup> Aus den durch dieses Nachführen der Referenzsignale bestimmten Phasenunterschieden (d.h. der zeitlichen Verschiebung zwischen dem empfangenen und den intern erzeugten Signalen) kann die Entfernung zwischen Satellit und Empfangsantenne abgeleitet werden. Sind die beiden Regelkreise gerastet, d.h. die Phasenunterschiede zwischen dem empfangenen Signal und den Repliken von Code und Trägersignal ausgeglichen, enthält der prompte Inphase-Arm  $I_P$  die reinen, binären Navigationsdaten  $D$ , die

<sup>1</sup> Für eine ausführliche Darstellung zur Auslegung der Detektoren und der Regelkreisfilter sei auf [Eis97] und [Pan10] verwiesen.

im Anschluss decodiert und ausgewertet werden können. Des Weiteren können die im prompten Inphase- und Quadraturarm ( $I_P$  und  $Q_P$ ) vorliegenden Korrelationswerte genutzt werden, um die Signalqualität quantitativ zu erfassen. Die Herleitung dieser Größe ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.



**Abbildung 2.2:** Darstellung der Korrelation (mit Korrelatorabstand  $d_C = 0,5$  Chip) der intern erzeugten Codes mit dem empfangenen Code nach [Bor07]: a) Late-Replik und empfangener Code haben die höchste Korrelation. Um das Ziel zu erreichen, die höchste Korrelation zwischen empfangenem Code und Prompt-Replik zu erreichen, müssen die intern erzeugten Codes verzögert werden. b) Prompt-Replik und empfangener Code haben die höchste Korrelation.

### 2.1.1.2 Quantifizierung der Signalqualität

Eine wichtige, vom Empfänger ausgegebene Kenngröße zur qualitativen Bewertung von GNSS-Messungen ist das Verhältnis von Signal- und Rauschleistung, kurz Signal-Rausch-Verhältnis. In der GNSS-Literatur dient dieser Begriff als Oberbegriff für verschiedene Definitionen. Es ist zu unterscheiden, ob das Signal-Rausch-Verhältnis auf der Leistung  $S$  des mit Code und Navigationsnachricht modulierten Signals (Signal-to-Noise-Ratio) oder der Leistung  $C$  des unmodulierten Signals (Carrier-to-Noise-Ratio) beruht. Die beiden Leistungen sollten sich nicht unterscheiden, da sich durch die Modulation des sinusförmigen Trägers mittels Phasenumtasung (engl. *Binary Phase Shift Keying*, kurz: *BPSK*) nur die Signalleistungsdichte, nicht jedoch

die Signalleistung selbst ändert. Sie unterscheiden sich dennoch geringfügig durch nachgeordnete Bandpassfilterungen zur Unterdrückung von Rausch- und Störsignalen in benachbarten Frequenzbereichen der GNSS-Signale, die im Fall der Bestimmung der Leistung des modulierten Signals in die Berechnung einbezogen werden (vgl. [BK04]). Die Signalleistung wird entweder auf die Rauschleistung  $N$  in Watt ( $S/N$  bzw.  $C/N$ ) oder die Rauschleistungsdichte  $N_0$  in Watt pro Hertz ( $S/N_0$  bzw.  $C/N_0$ ) bezogen. Welcher dieser Werte durch einen Empfänger ausgegeben wird, ist hersteller- und produktspezifisch. Grundlage für Aussagen in dieser Arbeit bildet das Trägersignal-zu-Rauschleistungsdichte-Verhältnis  $C/N_0$ . Dessen im Folgenden beschriebene Gewinnung während des Nachführens der Trägerphase in der PLL ist an die Herleitung in [Bad09] angelehnt. Dabei wird angenommen, dass die Regelkreise eingerastet, d.h. die Phasenunterschiede  $\phi_0 - \phi_C$  und  $\Delta n$  gleich Null sind.

**Bestimmung der Signalleistung.** Die mittlere Signalleistung wird mit den Werten des prompten Inphase-Armes  $I_P$  bestimmt. Der Wert, der hier im Fall eingerasteter Regelkreise bereitgestellt wird, ergibt sich nach Einsetzen von Gleichung 2.17 in Gleichung 2.11 zu:

$$i_P = \pm k_A A_C + \sum_{k=1}^{k_A} 2B(kT_s) \varepsilon(kT_s) \cos(\omega_{IF} kT_s + \phi_0) \quad (2.21)$$

Unter der Annahme, dass die Signalamplitude  $A_C$  deutlich größer ist als die Amplitude des überlagerten Rauschens, kann der zweite Term in Gleichung 2.21 vernachlässigt werden. Für die mittlere Leistung  $C$  des Trägersignals gilt<sup>2</sup> Gleichung 2.22 und damit nach Einsetzen von 2.21 in diese die Gleichung 2.23.

$$C = \frac{1}{2} A_C^2 \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{i_P}{k_A} \right)^2 \quad (2.23)$$

**Bestimmung der Rauschleistungsdichte.** Während die Signalleistung mit Signalwerten des prompten Inphase-Armes  $I_P$  berechnet wird, erfolgt die Bestimmung der Rauschleistung mit den Werten des promptem Quadratur-Armes  $Q_P$ . Diese Werte  $q_P$  ergeben sich durch Einsetzen von Gleichung 2.18 in Gleichung 2.12, wieder unter der Annahme eingerasteter Regelschleifen, zu:

$$q_P = \sum_{k=1}^{k_A} 2B(kT_s) \varepsilon(kT_s) \sin(\omega_{IF} kT_s + \phi_0) \quad (2.24)$$

<sup>2</sup> Für eine Herleitung dieses Zusammenhangs sei auf Anhang D.1 verwiesen.

Die mittlere Leistung  $N$  des mittelwertfreien Gaußschen Weißen Rauschens  $\varepsilon$  entspricht seiner Varianz  $\sigma_\varepsilon^2$  ([Mer10]). Um den Wert dieser Größe aus den Werten des prompten Quadratur-Armes zu gewinnen, wird der quadratische Mittelwert  $\overline{q_P^2}$  von  $q_P$  bestimmt, was gleichbedeutend mit der Berechnung des Erwartungswertes von  $q_P^2$  ist ([Hof98]). Unter Verwendung der Korrelationseigenschaften des Codes  $B$ , des Rauschens  $\varepsilon$  und des Trägersignals, sowie der Eigenschaften des Erwartungswert-Operators  $\mathbb{E}$  gilt:<sup>3</sup>

$$\overline{q_P^2} = \mathbb{E} \left\{ \left( 2 \sum_{k=1}^{k_A} B(kT_s) \varepsilon(kT_s) \sin(\omega_{IF} kT_s + \phi) \right)^2 \right\} \quad (2.25)$$

$$= \mathbb{E} \left\{ 4 \sum_{k=1}^{k_A} (B(kT_s) \varepsilon(kT_s) \sin(\omega_{IF} kT_s + \phi))^2 \right\} \quad (2.26)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{k_A} \mathbb{E} \{ \varepsilon^2(kT_s) \} \mathbb{E} \{ \sin^2(\omega_{IF} kT_s + \phi) \} \quad (2.27)$$

$$= 2k_A \sigma_\varepsilon^2 \quad (2.28)$$

Für die mittlere Rauschleistung  $N$  gilt nach Umstellen von Gleichung 2.28 demnach:

$$N = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\overline{q_P^2}}{2k_A} \quad (2.29)$$

Die mittlere Rauschleistung  $N$  bezogen auf die Rauschbandbreite  $B_N$  wird als Rauschleistungs-dichte  $N_0$  definiert, wobei als Rauschbandbreite die Breite des Frequenzbereiches bezeichnet wird, in dem Signalanteile das letzte Bandpass-Filter vor der Verarbeitung in der PLL passieren. Für die Rauschleistungsdichte  $N_0$  des Signals  $s$  gilt somit:

$$N_0 = \frac{N}{B_N} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{B_N} = \frac{\overline{q_P^2}}{2k_A B_N} \quad (2.30)$$

**Bestimmung des  $C/N_0$ .** Mit den so bestimmten Größen  $C$  und  $N_0$  lässt sich das Trägersignal-zu-Rauschleistungsdichte-Verhältnis  $C/N_0$  in Hz (Gleichung 2.31) bzw. in dBHz<sup>4</sup> (Gleichung 2.32) angeben.

$$\frac{C}{N_0} = \frac{i_P^2 B_N}{\overline{q_P^2} k_A} = p_{\frac{C}{N_0}} A_C^2 \quad (2.31)$$

$$\frac{C}{N_0} \frac{C}{N_0} / \text{Hz} = 10 \log_{10} \frac{C}{N_0} \text{dBHz} = (10 \log_{10} p_{\frac{C}{N_0}} + 20 \log_{10} A_C) \text{dBHz} \quad (2.32)$$

<sup>3</sup> Für eine ausführliche Herleitung sei auf Anhang D.1 verwiesen.

<sup>4</sup> Die Angabe in dBHz ist die üblicherweise Verwendete.

Das zweite Gleichheitszeichen in Gleichung 2.31 ergibt sich unter Beachtung der Gleichungen 2.22 und 2.23 sowie 2.30, wobei  $p_{\frac{C}{N_0}}$  als Proportionalitätsfaktor alle Faktoren ungleich  $A_C$  zusammenfasst. Das  $C/N_0$  ist demnach proportional zum Quadrat der Amplitude des Signals  $s$ , ein Zusammenhang, der insbesondere für das Ableiten von Mehrwegeparametern aus dem  $C/N_0$  von Bedeutung ist (vgl. Abschnitt 2.2). Es sei angemerkt, dass die für die Berechnung des Proportionalitätsfaktors benötigten Parameterwerte bzw. der Proportionalitätsfaktor selbst im Allgemeinen nicht bekannt sind. Um das  $C/N_0$  für die Analyse des Mehrwegeinflusses zu verwenden, werden demnach Empfänger benötigt, bei denen dieser Zusammenhang in Erfahrung gebracht werden kann, bzw. bei denen ein auf diesen Faktor normiertes  $C/N_0$  ausgegeben wird.

## 2.1.2 Quantifizierungsfehler und ihre Ursachen

Die Bestimmung der Entfernung zwischen Satellit und Empfänger beruht, wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, auf der Auswertung der Laufzeit des Signals. Unter realen Ausbreitungsbedingungen beeinflussen verschiedene Störgrößen diese Laufzeit, so dass die gemessene Laufzeit und die zur tatsächlichen geometrischen Entfernung gehörigen Laufzeit verschieden sind. Folglich unterscheiden sich auch die daraus ermittelte und die geometrische Entfernung voneinander. Der Unterschied kann als additive Überlagerung der durch die verschiedenen Störquellen verursachten Abweichungen modelliert werden. Dieses sogenannte Beobachtungsmodell wird in Abschnitt 2.1.2.1 vorgestellt. Neben einer fehlerbehafteten Laufzeitmessung verursachen verschiedene Quellen auch eine veränderte Signalstärke, die zum Verlust des Signalempfangs führen kann. Abschnitt 2.1.2.2 gibt einen Überblick über diese, die Signalstärke beeinflussende Quellen.

### 2.1.2.1 Quantifizierungsfehler bei der Code- und Trägerphasenbestimmung

Der Zusammenhang zwischen der aus der Code- bzw. Trägerphasenmessung für eine Frequenz  $f$  berechneten Entfernung  $R_{i,f}^k$  (in Metern) bzw.  $\Phi_{i,f}^k$  (in Metern) eines Empfängers  $i$  zu einem Satelliten  $k$ , der geometrischen Entfernung  $\rho_i^k$  (in Metern) sowie den durch diverse Störquellen verursachten anteiligen Messabweichungen lässt sich durch Beobachtungsmodelle (Gleichungen 2.33 und 2.34) beschreiben.<sup>5</sup>

$$R_{i,f}^k = \rho_i^k + c_0(\delta t_i + H_{i,f,R} - \delta t^k - H_{f,R}^k) + I_{i,f}^k + T_i^k + M_{i,f,R}^k + O_i^k + G_i^k + F_i^k + A_{i,f,R}^k + \varepsilon_{i,f,R}^k \quad (2.33)$$

<sup>5</sup> [Wan00] und [Xu03]



$$\begin{aligned}\Phi_{i,f}^k &= \rho_i^k + c_0(\delta t_i + H_{i,f,\Phi} - \delta t^k - H_{f,\Phi}^k) \\ &\quad - I_{i,f}^k + T_i^k + M_{i,f,\Phi}^k + O_i^k + G_i^k + F_i^k + A_{i,f,\Phi}^k + \lambda_f N_{i,f}^k + \varepsilon_{i,f,\Phi}^k\end{aligned}\quad (2.34)$$

mit

$$\rho_i^k = \sqrt{(x^k - x_i)^2 + (y^k - y_i)^2 + (z^k - z_i)^2} \quad (2.35)$$

$$= \|\vec{x}^k - \vec{x}_i\| \quad (2.36)$$

Die Modelle enthalten neben den unbekanntem Empfängerkoordinaten  $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$  und den Satellitenkoordinaten  $\vec{x}^k = (x^k, y^k, z^k)$ , den Empfänger- bzw. Satellitenuhrfehler  $\delta t_i$  bzw.  $\delta t^k$  (in Sekunden), die im Empfänger bzw. im Satelliten vorhandenen instrumentellen Laufzeitverzögerungen  $H_{i,f,R}$  und  $H_{i,f,\Phi}$  bzw.  $H_{f,R}^k$  und  $H_{f,\Phi}^k$  (ebenfalls in Sekunden), den ionosphärenbedingten Messfehler  $I_{i,f}^k$  (in Metern), den troposphärenbedingten Messfehler  $T_i^k$  (in Metern), Messfehler durch Signalbeugung und -mehrwegeausbreitung  $M_{i,f,R}^k$  und  $M_{i,f,\Phi}^k$  (in Metern), den Orbitfehler  $O_i^k$  (in Metern), den Messfehler durch geodynamische Prozesse  $G_i^k$  (in Metern), Auswirkungen relativistischer Effekte  $F_i^k$  (in Metern), Antennenphasenexzentrizitäten  $A_{i,f,R}^k$  und  $A_{i,f,\Phi}^k$  (in Metern), die Phasenmehrdeutigkeiten  $N_{i,f}^k \in \mathbb{R}$  sowie zufällige Messfehler  $\varepsilon_{i,f,R}^k$  und  $\varepsilon_{i,f,\Phi}^k$  (in Metern), die als Gaußsches Weißes Rauschen (kurz: GWR) angenommen werden. Ferner bezeichnet  $c_0$  (in Metern pro Sekunde) die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und  $\lambda_f$  (in Metern) die Wellenlänge der Trägerfrequenz. Die Indizes kennzeichnen die Abhängigkeit der jeweiligen Größe von Empfänger ( $i$ ), Satellit ( $k$ ), Frequenz ( $f$ ) und Messgröße ( $\{R, \Phi\}$ ). Die auftretenden Messfehler lassen sich in die Kategorien satellitenspezifisch, empfängerspezifisch und ausbreitungswegspezifisch einteilen und seien im Folgenden näher erläutert.

**Satellitenspezifische Messabweichungen.** Zu dieser Kategorie gehören Satellitenuhrfehler und Satellitenbahnabweichungen ( $\delta t^k$  und  $O_i^k$ ) sowie die instrumentellen Laufzeitverzögerungen  $H_{f,R}^k$  und  $H_{f,\Phi}^k$  im Satelliten. Um den Uhrfehler und die Satellitenbahn (*Orbit*) zu berechnen, können die in der Navigationsnachricht enthaltenen Parameter (*Broadcast-Ephemeriden*) genutzt werden. Alternativ stehen die auf der Homepage des Internationalen GNSS Service (kurz: IGS) bereitgestellten Parameter zur Verfügung ([IGS]). Diese Parameter werden von verschiedenen Analysezentren unter Nutzung einer Vielzahl von Stationen berechnet und kombiniert. Sie unterscheiden einander in Bezug auf Genauigkeit, Abtastintervalle und Latenz. Die Satellitenbahnabweichung  $O_i^k$  bei Verwendung der Broadcast-Ephemeriden<sup>6</sup> liegt nach [BSW14] bei 1,21 m für GPS und 2,53 m für GLONASS. Der Restfehler  $\delta t^k$  der Satellitenuhr<sup>7</sup>

<sup>6</sup> Gemeint ist hier der 3D-RMS-Fehler.

<sup>7</sup> Gemeint ist hier der RMS-Fehler.

beträgt nach Anwendung der Korrekturparameter aus der Navigationsnachricht laut [BSW14] 1,03 m für GPS und 2,06 m für GLONASS. Werden IGS-Produkte genutzt, können diese Restfehler stark reduziert werden. Die nach 12 bis 18 Tagen zur Verfügung stehenden finalen Orbits und Uhren haben eine Genauigkeit von 2,5 cm RMS (Orbit) und 75 ps<sup>8</sup> (Uhr) für GPS bzw. 3 cm RMS (Orbit) für GLONASS.<sup>9</sup> Nach [HB15] befindet sich derzeit ein IGS-Echtzeit-Service im Aufbau. Dieser hat zum Ziel, Orbits mit einer Genauigkeit von 5 cm und Uhrkorrekturen mit einer Genauigkeit von 0,3 ns, d.h. 9 cm in Echtzeit, bereitzustellen. Die momentane Qualität liegt nach [HB15] für die Orbits bei 5 cm (GPS) und 13 cm (GLONASS). Der Restfehler nach Anwendung der Uhrkorrekturen liegt bei 8 cm (GPS) und 24 cm (GLONASS). Zu beachten ist, dass sich die Messungen und die Broadcast-Ephemeriden auf das mittlere Antennenphasenzentrum beziehen. Hingegen ist für die vom IGS bereitgestellten Produkte das Massenzentrum des Satelliten der Bezugspunkt. Da sich diese beiden Zentren unterscheiden, ist (bei Verwendung der IGS-Produkte) diese Abweichung (engl. *phase center offset*, kurz: *PCO*) zu korrigieren. Die Korrekturen werden vom IGS bereitgestellt. [SR03] zeigen, dass das Phasenzentrum zudem variiert. Diese Antennenphasenzentrumsvariationen (engl. *phase center variations*, kurz: *PCV*) sind als Korrekturwerte ebenfalls in den vom IGS bereitgestellten Informationen enthalten.<sup>10</sup>

Es bleiben die instrumentellen Laufzeitverzögerungen  $H_{f,R}^k$  und  $H_{f,\Phi}^k$  zu diskutieren. Diese beschreiben die Spanne zwischen dem Zeitpunkt der Generierung der Signale und ihrem Sendezeitpunkt. Sie werden als Konstante (Bias) mit Unsicherheit modelliert ([GPS06]), wobei für unterschiedliche Codes und Signalfrequenzen unterschiedliche Werte gelten. Die Code-Biases werden als Bestandteil der Uhrkorrekturen bzw. als zusätzliche Parameterwerte bereitgestellt. Für die Unsicherheiten wird ein maximaler Wert von 3 ns gefordert ([GPS06]).<sup>11</sup> Da die Uhrkorrekturen auch auf die Phasenmessungen angewandt werden, scheidet sich die instrumentelle Laufzeitverzögerung aber von der der Code-Messungen unterscheidet, verbleiben in den Phasenmessungen Anteile der instrumentellen Laufzeitverzögerung. Diese zu modellieren wird beispielsweise in [Ban+08] diskutiert. Eliminiert werden können diese Fehleranteile bei Durchführung von Relativmessungen (vgl. Abschnitt 2.1.3).

<sup>8</sup> Eine Picosekunde ps entspricht in etwa 0,03 cm. Ein Fehler von 75 ps entspricht demzufolge ca. 2,25 cm.

<sup>9</sup> Uhrkorrekturen stehen für GLONASS nicht als kombiniertes IGS-Produkt zur Verfügung. Hier muss auf Korrekturen einzelner Analysezentren, wie das *European Space Operations Center* (kurz: *ESOC*) in Darmstadt oder das *Center of Orbit Determination in Europe* (kurz: *CODE*) in Bern zurückgegriffen werden.

<sup>10</sup> Die hier diskutierten PCO- und PCV-Werte sind im Modell Gleichung 2.33 bzw. 2.34 gemeinsam mit den die Empfangsantenne betreffenden Korrekturen in den Termen  $A_{i,f,R}^k$  und  $A_{i,f,\Phi}^k$  modelliert. Für weitere Erläuterungen zum Phasenzentrum sei auf Anhang B.2 sowie [LRT15] verwiesen.

<sup>11</sup> Dieser Wert ist ein  $2\sigma_\epsilon$ -Wert und entspricht ca. 90 cm.

**Empfängerspezifische Messabweichungen.** Zu dieser Gruppe gehören der Uhrfehler  $\delta t_i$ , die instrumentellen Laufzeitverzögerungen  $H_{i,f,R}$  und  $H_{i,f,\Phi}$  sowie die bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnten Antennenphasenexzentrizitäten  $A_{i,f,R}^k$  und  $A_{i,f,\Phi}^k$ . Der durch die Empfangsantenne verursachte Anteil an den Antennenphasenexzentrizitäten resultiert ebenfalls aus dem Unterschied zwischen physischem Referenzpunkt der Antenne und Phasenzentrum, sowie dessen winkelabhängiger und frequenzspezifischer Variation. Die daher benötigten Werte für PCO und PCV werden, wie im Fall der Satellitenantennen, für diverse Antennentypen vom IGS bereitgestellt.<sup>12</sup> Neben diesen, die Antenne betreffenden Abweichungen, werden die empfangenen Signale in den verschiedenen Bauteilen des Empfängers verzögert. Wie bereits im Abschnitt zu satellitenspezifischen Messwertabweichungen erörtert, liegen auch auf Seiten des Empfängers instrumentelle Laufzeitverzögerungen vor. Die Verzögerung, modelliert als Bias, ist für die zu verschiedenen Satelliten gehörenden Code-Messungen unterschiedlich. Der Anteil des Bias, der allen Messungen gemein ist, wird als Teil des Empfängeruhrfehlers  $\delta t_i$  geschätzt, es verbleibt jeweils der Anteil als Restfehler, in dem sich die Verzögerungen unterscheiden ([Ban+08]). Der Phasen-Bias wird hingegen als identisch für alle Satelliten, jedoch verschieden für verschiedene Frequenzen angenommen ([Ban+08]), so dass sich bei der Durchführung von Relativmessungen die Möglichkeit der Eliminierung bietet (vgl. Abschnitt 2.1.3).

**Ausbreitungswegspezifische Messabweichungen.** Neben den atmosphärisch bedingten Laufzeitverzögerungen und den daraus resultierenden Messfehlern zählen zu dieser Kategorie auch Messfehler, die auf Grund der unmittelbaren Empfängerumgebung entstehen. Um zunächst den durch die Atmosphäre hervorgerufenen Messfehler zu diskutieren, ist es zweckmäßig, sie in zwei Schichten, die Ionosphäre und die Troposphäre, zu unterteilen. Diese Unterteilung erfolgt auf Grund des verschiedenen Einflusses dieser Schichten auf die Ausbreitung der GNSS-Signale als elektromagnetische Wellen.<sup>13</sup> Nach einer Ausbreitung im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  tritt das Signal in einer Höhe von etwa 1000 km über der Erdoberfläche in die Ionosphäre<sup>14</sup> ein, bei etwa 40 km Höhe in die Troposphäre ([ME06]). In beiden, im Folgenden kurz zu charakterisierenden Schichten führen die dort jeweils vorhandenen Teilchen zur Refraktion, d.h. der Änderung der Geschwindigkeit des Signals in Betrag und Richtung. Die dadurch hervorgerufenen Laufzeitänderungen bewirken dann eine fehlerhafte Bestimmung der Entfernung.

---

<sup>12</sup> Für weiterführende Informationen sei auf Anhang B.2 sowie [LRT15] verwiesen.

<sup>13</sup> Je nach interessierenden Charakteristika (z.B. Temperatur, Magnetfeld) können auch andere Unterteilungen der Atmosphäre vorgenommen werden (vgl. [See03]).

<sup>14</sup> Teilweise umfasst der Begriff in der Literatur auch die Protonosphäre, die Schicht der Atmosphäre ab 1000 km.

Die Ionosphäre ist der Teil der Atmosphäre, in dem, neben Molekülen, zu einem geringen Prozentsatz freie Ladungsträger (Elektronen und Ionen) vorhanden sind.<sup>15</sup> Die Menge dieser Ladungsträger ist von deren Produktion und Verlust abhängig. In [Prö04] sind die dazugehörigen Vorgänge ausführlich beschrieben. So entstehen frei bewegliche Elektronen (und dementsprechend Ionen) primär durch Photoionisierung, d.h. das Aufspalten von Molekülen auf Grund solarer, extremer, ultravioletter Strahlung (kurz: *EUV-Strahlung*) und Röntgenstrahlung. Des Weiteren können in dieser Weise freigesetzte Elektronen eine so große Energie besitzen, dass sie Moleküle ionisieren bzw. diese zur Emission von EUV-Strahlung anregen, welche wiederum eine weitere Ionisierung hervorrufen kann. Neben der in die Ionosphäre eindringenden Strahlung können auch einfallende, hochenergetische Elektronen zu einer Ionisierung führen. Als vierte Möglichkeit der Erzeugung von Ladungsträgern sei der Ladungsaustausch genannt. Damit ist die chemische Reaktion gemeint, bei der Ionen eines Gases entstehen, während die eines anderen verschwinden.

Den hier genannten Varianten der Ladungsträgerproduktion stehen dieser, ihr entgegenwirkende Prozesse wie Rekombination und Ladungsaustausch gegenüber. Diese kurze Darstellung<sup>16</sup> der Entstehung und des Verschwindens freier Ladungsträger macht bereits deutlich, dass diese Prozesse von einer Vielzahl von Parametern abhängen, wie zum Beispiel dem Vorhandensein und der Intensität der Sonnenstrahlung sowie der Zusammensetzung und der Dichte der vorkommenden Gase. Es verwundert daher nicht, dass der Zustand der Ionosphäre räumlichen<sup>17</sup> und zeitlichen Schwankungen<sup>18</sup> unterliegt. Für den durch die Ionosphäre induzierten Entfernungsmessfehler  $I_{i,f}^k$  ist maßgeblich die Anzahl der Elektronen auf dem Ausbreitungsweg des Signals zwischen Satellit  $k$  und Empfänger  $i$  entscheidend. Die in die Berechnung eingehende Kenngröße ist der sogenannte *Total Electron Content* (kurz: *TEC*). Darunter wird die entlang des Signalweges integrierte Elektronendichte  $n_e$  nach Gleichung 2.37 verstanden.

$$TEC = \int_i^k n_e(l) dl \quad (2.37)$$

Der resultierende Entfernungsmessfehler  $I_{i,f}^k$ , dargestellt in Gleichung 2.38, ist proportional zum TEC und indirekt proportional zur Trägerfrequenz  $f$ . Er unterscheidet sich demnach für verschiedene Signalfrequenzen. Ferner ist er für Code- und Phasenmessung auf ein und der-

<sup>15</sup> Bezogen auf die Dichte der Moleküle beträgt die Dichte der Ionen nur 1% (vgl. [Klo96]). Die Summe der positiven (positive Ionen) und negativen Ladungsträger (Elektronen und negative Ionen) ist gleich [Prö04].

<sup>16</sup> Für eine ausführlichere Darstellung der Physik der Ionosphäre sei auf [Prö04] verwiesen.

<sup>17</sup> Damit ist sowohl die höhenabhängige als auch die Breitengradabhängige Anzahl an freien Ladungsträgern gemeint.

<sup>18</sup> Deutlich erkennbar sind Tag-Nacht-Unterschiede, jahreszeitliche Schwankungen sowie der Einfluss des Sonnenzyklus.

selben Trägerfrequenz gleich im Betrag, aber verschieden im Vorzeichen ([ME06]). Es sei angemerkt, dass Gleichung 2.38 eine Näherung erster Ordnung darstellt, bei der Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden. Diese Terme liegen in der Größenordnung von weniger als 1% des in Gleichung 2.38 gegebenen Fehlers, können jedoch bei hohen TEC-Werten im Bereich von bis zu einigen Dezimetern liegen [Klo96].<sup>19</sup>

$$I_{i,f}^k = c_0 \Delta\tau = \frac{40,3 \text{ TEC}}{f^2} \quad (2.38)$$

Stehen dem Nutzer GNSS-Signale auf zwei Frequenzen zur Verfügung, lässt sich der ionosphäreninduzierte Fehler erster Ordnung (Gleichung 2.38) eliminieren.<sup>20</sup> Es verbleibt ein Restfehler in der Größenordnung der Terme höherer Ordnung. Eine derartige Möglichkeit steht bei der Nutzung von nur einer Frequenz nicht zur Verfügung. Der Messfehler  $I_{i,f}^k$  muss in diesem Fall mittels Modellen abgeschätzt oder auf Grundlage bereitgestellter TEC-Werte berechnet werden. Für die Anwendung der Modelle werden die in der Navigationsnachricht gesendeten Parameter genutzt.<sup>21</sup> TEC-Werte werden beispielsweise über das *Space Weather Application Center - Ionosphere* (kurz: *SWACI*) [SWA] oder den IGS [IGS] bereitgestellt. Allen Varianten ist gemein<sup>22</sup>, dass sich der aus den Parametersätzen bzw. TEC-Werten berechnete Messfehler  $I_{i,f}^k$  als Zenitverzögerung<sup>23</sup> versteht. Da Signale von Satelliten in geringeren Elevationen einen längeren Weg durch die Ionosphäre zurücklegen, ist die tatsächlich verursachte Verzögerung größer. Dieser Tatsache wird Rechnung getragen, indem die berechnete Zenitverzögerung mit einer elevationsabhängigen Gewichtungsfunktion<sup>24</sup> (engl. *mapping function*) multipliziert wird. In [Min+14] wird eine Übersicht gängiger Modelle und Services gegeben und diese anhand erreichbarer Positionsergebnisse vergleichend diskutiert. Die besten Resultate werden dabei mit Zweifrequenzlösungen sowie der Verwendung der vom IGS bereitgestellten TEC-Werte erzielt. Für die Abschätzung des ionosphärischen Restfehlers können daher die in [IGS] angegebenen Genauigkeiten herangezogen werden. Demnach liegt der Restfehler bei Verwendung der TEC-Werte bei mindestens 0,32 m für GPS L1 und 0,54 m für GPS L2.<sup>25</sup> Eine weitere Möglichkeit, den Messfehler  $I_{i,f}^k$  zu verringern bzw. zu eliminieren, liegt in der Durchführung von Rela-

<sup>19</sup> Für die eingängige Herleitung von Gleichung 2.38 sei auf Fachliteratur wie z.B. [ME06] oder [Klo96] verwiesen.

<sup>20</sup> Für weitere Ausführungen sei dem Leser Anhang A.1 bzw. Fachliteratur wie [ME06] oder [Xu03] empfohlen.

<sup>21</sup> Dies sind Parameter für das Klobuchar-Modell bei GPS bzw. für das NeQuick-Modell bei Galileo.

<sup>22</sup> Eine Ausnahme bildet das NeQuick-Modell. Für eine Beschreibung des Modells sei auf [HLW08] verwiesen.

<sup>23</sup> Dieser so berechnete Fehler  $I_{i,f}^k$  gilt für Satelliten, die sich in einer Elevation von 90°, also direkt über dem Nutzer und somit im kürzesten Abstand von diesem befinden.

<sup>24</sup> Eine mögliche derartige Funktion wird in [ME06] vorgestellt.

<sup>25</sup> Die Genauigkeit wird in *TEC Units* (kurz: *TECU*) angegeben. Eine TEC Unit entspricht  $10^{16}$  Elektronen pro  $\text{m}^2$ . Dies entspricht nach Gleichung 2.38 einem Fehler von 0,16 m für GPS L1 und 0,27 m für GPS L2. Die Genauigkeit der IGS TEC-Werte wird mit 2-9 TECU angegeben.

tivmessungen (vgl. Abschnitt 2.1.3). Ändert sich die Elektronendichte sehr unregelmäßig und ungleichmäßig<sup>26</sup>, kann der durch sie verursachte Messfehler nicht mehr rein deterministisch erfasst werden und wird zusätzlich stochastisch als mittelwertfreies Gaußsches Weißes Rauschen modelliert ([WBH06]).

Im Gegensatz zur Ionosphäre befinden sich in der Troposphäre keine freien Ladungsträger. Hauptbestandteile sind trockene Gase (Stickstoff und Sauerstoff) sowie Wasserdampf. Dementsprechend lässt sich der durch die Troposphäre verursachte Entfernungsmessfehler  $T_i^k$  in einen trockenen und einen feuchten Anteil zerlegen. Der trockene Anteil ist für etwa 90% des Gesamtfehlers  $T_i^k$  verantwortlich. Er ist abhängig von Druck und Temperatur und folglich u.a. von Höhe, Jahreszeit und Breitengrad [ME06]. Die restlichen 10% werden durch den feuchten Anteil verursacht. Hier besteht neben einer Abhängigkeit von der Temperatur, eine Abhängigkeit vom Partialdruck des Wasserdampfes [ME06]. Sind diese Parameter (in Abhängigkeit von der Höhe) bekannt, können die beiden Anteile und somit  $T_i^k$  berechnet werden. Anderenfalls ist  $T_i^k$  über Modelle abzuschätzen. Dies kann unter Einbeziehung von Messdaten oder der Nutzung der Standardatmosphäre<sup>27</sup> erfolgen.

Bei der Berechnung von Trocken- und Feuchtanteil gilt, wie im Fall der Ionosphäre, dass jeweils eine Zenitverzögerung modelliert und diese dann in Abhängigkeit von der Elevation gewichtet wird. Ein Überblick über gängige Modelle für Trocken- und Feuchtanteil sowie mögliche Mapping-Funktionen wird in [ME06] und [Xu03] gegeben. Dabei gilt, dass der Trockenanteil stabil ist und daher unter Nutzung aktueller Luftdruckmessungen bis auf einen Restfehler von wenigen Millimetern<sup>28</sup> geschätzt werden kann. Der Feuchtanteil ist hingegen sehr variabel und daher schwieriger zu modellieren. Hier liegen die Restfehler bei Verwendung meteorologischer Daten bei mindestens 1-2 cm. Erfolgt die Berechnung der Fehleranteile auf Basis von Modellwerten, bleibt ein Restfehler von mindestens 5-10 cm<sup>29</sup>. Es besteht zudem die Möglichkeit, direkt Werte für die troposphärische Zenitverzögerung des IGS ([IGS]) zu nutzen. Diese stehen mit einer Verzögerung von wenigen Stunden bzw. einigen Wochen und einer Genauigkeit von 6 mm bzw. 4 mm zur Verfügung. Im Gegensatz zur Ionosphäre ist die Troposphäre kein dispersives Medium<sup>30</sup>. Der Messfehler  $T_i^k$  ist demnach auf Code- und Phasenmessungen und

---

<sup>26</sup> Dieser Effekt wird als Phasen-Szintillation bezeichnet.

<sup>27</sup> Die Standardatmosphäre ist eine Menge genormter Werte für Druck, Temperatur, Dichte und Luftfeuchte als Funktion der Höhe für die mittleren Breiten.

<sup>28</sup> [ME06]. Diese Angaben beziehen sich auf den Fehler in Zenitrichtung. Für geringere Elevation ist er größer.

<sup>29</sup> ebd. In [ME06] wird für eine Elevation von 5° ein Restfehler von 0,5-1 m angegeben.

<sup>30</sup> Damit ist gemeint, dass Signale verschiedener Trägerfrequenz keine unterschiedlichen Laufzeitverzögerungen erfahren.

für alle Trägerfrequenzen gleich groß und somit nicht, wie im Fall der Ionosphäre, über Linearkombination verschiedener Messgrößen eliminierbar. Es besteht jedoch die Möglichkeit, den Messfehler  $T_i^k$  durch Relativmessungen zu verringern bzw. zu eliminieren (vgl. Abschnitt 2.1.3).

Zu den umgebungsspezifischen Messfehlern zählen die durch Signalbeugung und -mehrwegausbreitung hervorgerufene Fehler  $M_{i,f,R}^k$  bzw.  $M_{i,f,\Phi}^k$  sowie Messabweichungen durch geodynamische Prozesse  $G_i^k$ . Ebenfalls in diese Gruppe gehört der durch relativistische Effekte verursachte Messfehler  $F_i^k$ . Dieser Fehler entsteht, da die Entfernungsbestimmung mittels GNSS-Signalen auf Zeitmessungen basiert und die dafür verwendeten Uhren in Satellit und Empfänger relativistischen Effekten unterliegen. Als Gründe hierfür gelten die Relativgeschwindigkeit von Satelliten- und Empfängeruhr, ihr Potenzialunterschied im Gravitationsfeld der Erde sowie die Erdrotation.<sup>31</sup> Der überwiegende Teil des Fehlers wird durch die Architektur des Systems kompensiert.<sup>32</sup> Ein weiterer Anteil lässt sich unter Nutzung der Orbit- und Erdrotationsparameter berechnen. Der verbleibende Restfehler liegt in der Größenordnung von wenigen Zentimetern [Ash03].

Neben diesen Effekten sind Einflüsse von geodynamischen Prozessen zu diskutieren. Damit sind Messabweichungen gemeint, die sich durch den Einfluss von Gezeiten und Ozeanauflasten ergeben. Der Einfluss der Gezeiten lässt sich dabei in einen permanenten, einen zeitabhängigen und einen durch die Polbewegung verursachten Anteil unterteilen. Die jeweiligen Anteile lassen sich durch Modelle, wie sie in [PL10] ausführlich dargestellt sind, berechnen. Ferner besteht die Möglichkeit, den Messfehler  $G_i^k$  durch Relativmessungen zu verringern bzw. zu eliminieren (vgl. Abschnitt 2.1.3).

Dies trifft nicht auf den durch die Signalbeugung und -mehrwegausbreitung verursachten Messfehler  $M_{i,f,R}^k$  bzw.  $M_{i,f,\Phi}^k$  zu, da die Effekte für Empfänger in unterschiedlichen Umgebungen nicht korrelieren. Die durch Signalbeugung, d.h. durch die Ablenkung des Signals an einem Objekt, verursachte Laufzeitverzögerung führt zu einem daraus resultierenden Messfehler in der Größenordnung von bis zu wenigen Dezimetern ([WFW00]). Er liegt damit unterhalb der Standardabweichung des Rauschens  $\varepsilon_{i,f,R}^k$  für Codemessungen und wird daher in diesem absorbiert.<sup>33</sup> Für die Auswertung der Trägerphasenmessungen ist er hingegen ein Genauigkeitseinschränkender Faktor. Wie in Abschnitt 2.1.2.2 ausgeführt, ist das  $C/N_0$  eine

---

<sup>31</sup> Eine Übersicht inklusive ausführlicher Herleitungen ist in [Ash96] zu finden.

<sup>32</sup> Dies betrifft die Veränderung der Frequenz der Oszillatoren im Satelliten [GPS06].

<sup>33</sup> In [ME06] werden als typische RMS-Fehler des Code-Rauschens 0,25-0,50 m angegeben.

Funktion der Entfernung, so dass der Einfluss der Beugung in dieser Größe sichtbar ist. In der Literatur finden sich daher Ansätze, über die Auswertung des  $C/N_0$  gebeugte Signale zu detektieren und die betreffenden Beobachtungen in der Positionsbestimmung geeignet (herab) zu gewichten.<sup>34</sup> Grundlage dafür bildet das sogenannte *SIGMA- $\epsilon$ -Modell* von [HB99], in dem eine  $C/N_0$ -abhängige Gewichtung der Beobachtungen vorgenommen wird, wobei keine explizite Berücksichtigung von Beugungseinflüssen erfolgt. Dieser Schritt erfolgt in der Erweiterung, dem *SIGMA- $\Delta$ -Modell* von [BHT99]. Dabei wird das gemessene  $C/N_0$  mit einem für eine bestimmte Empfänger-Antennen-Kombination geltenden Referenzwert verglichen und in Abhängigkeit der Differenz gewichtet. Die Auswertung von Testdatensätzen in [WFW00] zeigt eine deutliche Verringerung der Koordinatenstreuungen bei Verwendung des *SIGMA- $\Delta$ -Modells* gegenüber ungewichteter oder elevationsabhängig gewichteter Varianten, d.h. Varianten, in denen keine explizite Betrachtung der Signalbeugung erfolgt, an. Unbefriedigende Resultate ergeben sich jedoch beim Übergang vom Empfang des direkten Signals zum Empfang des gebeugten Signals ([WB00]). Eine als robuster und zuverlässiger bewertete Erweiterung des *SIGMA- $\Delta$ -Modells* auf Grundlage eines Fuzzy-Systems, das *SIGMA-F-Modells*, wird in [WB02] vorgestellt. Methoden für eine vollständige Elimination des durch Signalbeugung hervorgerufenen Messfehlers existieren bislang nicht.

Für die Diskussion der neben den Effekten der Signalbeugung in den Fehlertermen  $M_{i,f,R}^k$  und  $M_{i,f,\Phi}^k$  enthaltenen Anteile, die durch Mehrwegeausbreitung hervorgerufen werden, ist zu beachten, dass unter dem Begriff der Mehrwegeausbreitung oftmals zwei verschiedene Effekte zusammengefasst werden, die jedoch von ganz unterschiedlicher Natur sind ([Gro13a]): Zum einen der im ursprünglichen Wortsinn bezeichnete Empfang des Signals auf mehreren Wegen (direktes Signal und Reflexionen dieses Signals) und zum anderen der ausschließliche Empfang des reflektierten Signals (engl. *Non-Line-of-Sight Reception*, kurz: *NLOS-Empfang*). Durch das Fehlen des direkten Signals beim NLOS-Empfang ergeben sich veränderte Ansätze für die Behandlung des verursachten Fehlers. Dies begründet sich darin, dass alle Ansätze, die auf dem Abgleich von Effekten beruhen, die durch direktes und reflektiertes Signal hervorgerufen werden, in diesem Fall nicht angewandt werden können. Das Vorgehen bei der Behandlung von NLOS-Signalen besteht zunächst im Versuch ihrer Detektion<sup>35</sup> und im An-

<sup>34</sup> Einer Gewichtung liegt die Idee zugrunde, dass für Signale aus niedrigen Elevationen für die nicht im deterministischen Modell erfassten, als stochastisch modellierten Fehleranteile auf Grund des längeren Ausbreitungswegs eine größere Standardabweichung zu erwarten ist als für Signale aus hohen Elevationen. Die Gewichtung erfolgt üblicherweise in Abhängigkeit von der Elevation und/oder des  $C/N_0$  (vgl. [CL99], [GJ13], [TM13]).

<sup>35</sup> In [Gro+13] findet sich eine Übersicht zur Detektion von NLOS-Signalen verwendeten Methoden. Diese umfassen die  $C/N_0$ -Auswertung, den Einsatz spezieller Antennensysteme und zusätzlicher Informationsquellen zur Umgebungsmodellierung, wie Kamerasysteme oder 3D-Modelle, sowie die Kombination der Methoden.



schluss daran in ihrem Ausschluss bzw. ihrer Herabgewichtung bei der Positionsbestimmung mit einem zusätzlich eingeführten Faktor ([Pey+13] bzw. [TM13]) oder der Abschätzung der Differenzlänge zum direkten Signal mit anschließender Korrektur ([Bet+13]). Die hier im Zusammenhang mit NLOS-Signalen vorgestellten Methoden werden in der Literatur insbesondere in Zusammenhang mit der Navigation in urbanen Regionen diskutiert, da hier der Empfang derartiger Signale ein charakterisierendes Merkmal darstellt. Kennzeichnend für dieses Gebiet ist meist auch eine reine Auswertung der Code-Beobachtungen. Der Einfluss der Analyse von NLOS-Signalen auf eine trägerphasenbasierte Lösung wird daher in den entsprechenden Publikationen nicht diskutiert. Die Ansätze, die eine Verringerung bzw. Eliminierung des im eigentlichen Wortsinn gemeinten Mehrwegefehlers verfolgen, werden innerhalb des diesem Fehleranteil gewidmeten Abschnitts 2.2 diskutiert.

### 2.1.2.2 Quantifizierungsfehler bei der $C/N_0$ -Bestimmung

Wie im Fall der Entfernungsbestimmung soll auch bei der  $C/N_0$ -Bestimmung unter dem Quantifizierungsfehler die Abweichung zwischen erwartetem und real gemessenem Wert verstanden werden. Während bei ersterer der geometrische Abstand zwischen Satellit und Empfänger erwartet wird, sind dies beim  $C/N_0$  Werte, die eine ungehinderte Freiraumausbreitung des Signals, verbunden mit dem Einfluss des Antennengewinns der Sende- und Empfangsantennen, widerspiegeln, wobei letzterer die Werte des  $C/N_0$  dominiert. Wie im Folgenden näher erläutert wird, führen verschiedene Parameter zu einer Änderung dieser erwarteten Werte, so dass im  $C/N_0$  der Einfluss verschiedener Größen sichtbar wird. Da diese sich in ihren Charakteristika unterscheiden, kann versucht werden, durch eine geeignete Analyse des  $C/N_0$ , einzelne Fehleranteile zu separieren und die durch sie verursachten Verfälschungen der Entfernung zu schätzen und zu eliminieren. Ein derartiges Vorgehen ist, wie in Abschnitt 2.1.1.2 ausgeführt, beispielsweise bei der Schätzung des die Trägerphasenbestimmung verfälschenden Mehrwegefehlers  $M_{i,f,\Phi}^k$  erfolgsversprechend.

Im Folgenden werden die das  $C/N_0$  beeinflussenden Faktoren in Anlehnung an die Ausführungen in [ME06] diskutiert. Dabei ist zwischen denjenigen, die die Signalleistung und denjenigen, die die Rauschleistung beeinflussen zu unterscheiden. Es ist bei dieser Diskussion dabei ferner vorteilhaft, die Ausbreitung des Signals außerhalb und die Verarbeitung des Signals innerhalb des Empfängers getrennt zu betrachten.<sup>36</sup>

---

<sup>36</sup> Die Ausführungen in diesem Abschnitt dienen dazu, die Charakteristika der verschiedenen, das  $C/N_0$  beeinflussenden Faktoren zu skizzieren. Für Herleitungen und beispielhafte Rechnungen sei der Leser auf die Fachliteratur wie [ME06] verwiesen.

**Empfangene Signalleistung und empfängerexternes Rauschen.** Die empfangene Signalleistung ist von verschiedenen, im Nachfolgenden aufgeführten Parametern abhängig.<sup>37</sup> Es sind dies:

- die durch den Satelliten abgestrahlte Sendeleistung
- der Antennengewinn (Sendeantenne Satellit, Empfangsantenne Empfänger)
- die Entfernung zwischen Satellit und Empfänger (Freiraumdämpfung)
- die Absorption in Ionosphäre und Troposphäre (atmosphärische Dämpfung)
- ionosphärische Szintillationen
- die Mehrwegeausbreitung und Beugung des Signals

Die abgestrahlte Sendeleistung ist abhängig von der Baureihe und dem Betriebsalter des Satelliten. Der Antennengewinn von Sende- und Empfangsantenne ist elevationsabhängig. Gleiches gilt für die Freiraumdämpfung und die atmosphärische Dämpfung. Deren Elevationsabhängigkeit resultiert aus der elevationsabhängigen Länge des Ausbreitungsweges. Für ein Signal, welches nur als Funktion dieser Parameter beschrieben wird, gilt demnach: Je geringer die Elevation, desto geringer die Signalleistung. Typische Werte für das GPS liegen laut [ME06] zwischen -162.5 dBW für Satelliten in geringen Elevationen und -154.5 dBW für Satelliten im Zenit. Der Graph einer solchen Signalleistung über einen Satellitendurchgang ähnelt einer nach unten geöffneten Parabel.

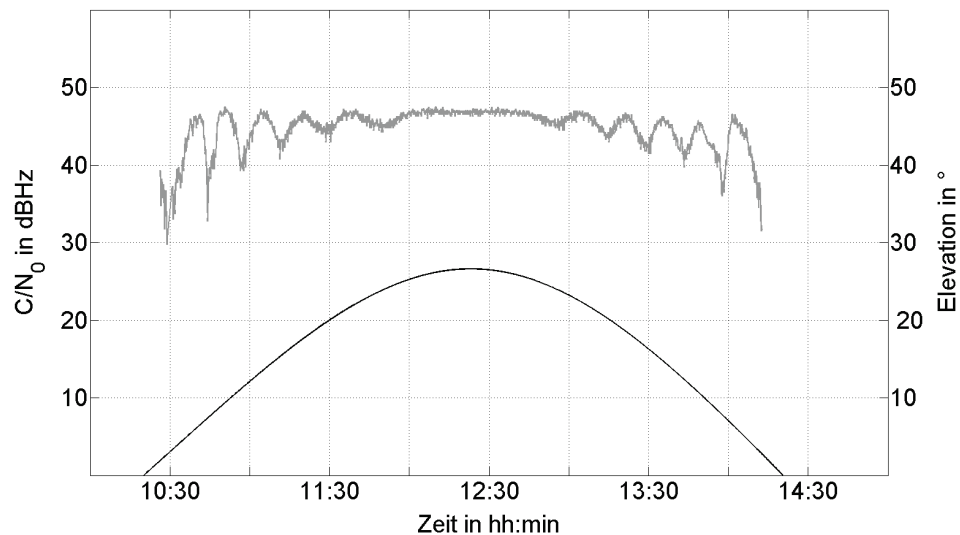
Dieser Verlauf kann zusätzlich von die Signalleistung beeinflussenden ionosphärischen und umgebungsbedingten Effekten überlagert sein. So kann eine stark variierende Elektronendichte der Ionosphäre neben Variationen in der Signalphase, den in Abschnitt 2.1.2.1 beschriebenen Phasen-Szintillationen, auch zu Änderungen in der Signalamplitude, sogenannten Amplituden-Szintillationen, führen. Wie im Fall der Phasen-Szintillationen gilt, dass diese Änderung stochastisch zu modellieren ist, wobei hier laut [WBH06] eine Nakagami-m-Verteilung angewandt werden kann. Hindernisse in der Umgebung des Empfängers können zusätzlich zu Mehrwegeausbreitung und Beugung des Signals führen. Bei der Mehrwegeausbreitung überlagern sich direktes und an den Hindernissen reflektierte Signale. Diese Überlagerung führt, wie ausführlich in Abschnitt 2.2 diskutiert, zu sinusförmigen Schwingungen. Demgegenüber wird bei der Beugung des Signals nur das direkte Signal empfangen, was jedoch einen längeren Ausbreitungsweg zurücklegt, damit einer größeren Freiraumdämpfung unterliegt und demzufolge

---

<sup>37</sup> Diese Darstellung ist an die Ausführungen in [BK04] angelehnt.

zu einer geringeren Amplitude führt. Das dem Signal überlagerte, empfängerexterne Rauschen resultiert aus der Sonnenstrahlung sowie der Wärmestrahlung der Erde. Typische Werte für die Rauschleistungsdichte liegen laut [ME06] bei ca.  $-208$  dB(W/Hz). Unter Einbeziehung der o.g. Werte für die Signalleistung ergeben sich für das  $C/N_0$  Werte in der Größenordnung zwischen  $45.5$  dBHz für Satelliten in geringer Elevation und  $53.5$  dBHz für Satelliten im Zenit.

**Empfängerinterne Signalverarbeitung.** Nach dem Empfang des (von additivem Rauschen überlagerten) Signals wird es in verschiedenen Verarbeitungsschritten sukzessiv gefiltert und verstärkt. Zu beachten ist, dass das Rauschen und das Signal selbst dabei der gleichen Verarbeitung unterworfen sind. Würde durch die Verarbeitung im Empfänger kein zusätzliches Rauschen hinzugefügt, bliebe das Verhältnis von Signalleistung und Rauschleistungsdichte gleich.<sup>38</sup> Das  $C/N_0$  am Ausgang der Antenne entspräche demnach dem  $C/N_0$ , welches in der PLL (Gleichung 2.31) bestimmt wird. Tatsächlich wird durch die empfängerinterne Verarbeitung zusätzliches Rauschen hinzugefügt und damit die Rauschleistungsdichte um etwa  $7$  dBHz erhöht. Typische Werte für das in der PLL gewonnene  $C/N_0$  liegen demnach laut [ME06] in der Größenordnung zwischen  $38.5$  dBHz für Satelliten in geringer Elevation und  $46.5$  dBHz für Satelliten im Zenit. Ein typischer  $C/N_0$ -Verlauf ist in Abbildung 2.3 dargestellt.



**Abbildung 2.3:** Darstellung des  $C/N_0$  (grau) und der Elevation (schwarz) des PRN 4, Station 1433 des Experimentalaufbaus (vgl. Kapitel 5). Deutlich erkennbar ist der parabelähnliche Verlauf auf Grund von Freiraumdämpfung und Antennengewinn sowie die sinusförmigen Anteile, verursacht durch Mehrwegeausbreitung (vgl. Abschnitt 2.2.2.2).

<sup>38</sup> Eine ausführliche Darstellung dazu findet der Leser in [ME06].

### 2.1.3 Positionsbestimmung

Grundlage für die Berechnung der Position eines einzelnen Empfängers  $i$  bilden die in den Gleichungen 2.33 und 2.34 gegebenen Beobachtungsmodelle. Ziel ist die möglichst exakte Bestimmung der darin enthaltenen Unbekannten: den Empfängerkoordinaten  $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ , dem Empfängeruhrfehler  $\delta t_i$  sowie, im Fall von Phasenmessungen, den Mehrdeutigkeiten  $N_{i,f}^k$ . Dafür ist es notwendig, die Messabweichungen quantitativ zu erfassen bzw. zu eliminieren. Dies kann durch die Anwendung von Modellen, Korrekturwerten und Linearkombinationen der Code- und Phasenmessung des Empfängers  $i$  innerhalb der in Abschnitt 2.1.2.1 diskutierten Genauigkeit realisiert werden. Wie ebenfalls angedeutet, lassen sich weitere Verbesserungen erzielen, wenn Entfernungsmessungen eines weiteren Empfängers hinzugezogen werden. Dies kann auf der Ebene von Code- und Phasenmessungen geschehen. Grund für die Verbesserungen ist die Korrelation einzelner Fehleranteile in den Messungen und die Möglichkeit ihrer damit verbundenen Eliminierung. Im Folgenden soll das Prinzip dieser differentiellen Verfahren erläutert werden. Verwendet werden bei diesen Verfahren einfache Differenzen (engl. *Single Difference*, kurz: *SD*) und doppelte Differenzen (engl. *Double Difference*, kurz: *DD*).

Unter einer einfachen Differenz wird die Differenz zwischen den Entfernungsmessungen zweier Empfänger  $i$  und  $j$  zu ein und demselben Satelliten  $k$  verstanden und mit dem Symbol  $\Delta$  gekennzeichnet. Modelliert wird sie als Differenz der in Gleichung 2.33 bzw. Gleichung 2.34 gegebenen Beobachtungsgleichungen. Einfache Differenzen können sowohl für Codemessungen (Gleichung 2.39) als auch für Trägerphasenmessungen (Gleichung 2.41) gebildet werden. Da der Satellitenuhrfehler  $\delta t^k$  in beiden Entfernungsmessungen  $R_{i,f}^k, R_{j,f}^k$  bzw.  $\Phi_{i,f}^k, \Phi_{j,f}^k$  identisch ist, wird er bei der jeweiligen Differenzbildung vollständig eliminiert. Dasselbe gilt für die instrumentellen Laufzeitverzögerungen  $H_{f,R}^k$  bzw.  $H_{f,\Phi}^k$ . Für alle anderen Fehleranteile gilt, dass sie, wenn nicht eliminiert, so doch reduziert werden, da nach der Differenzbildung nur noch die Unterschiede der Fehleranteile, ebenfalls gekennzeichnet durch das Symbol  $\Delta$ , in der Differenz enthalten sind (Gleichung 2.40 bzw. 2.42). Zu beachten ist jedoch, dass sich das Rauschen erhöht, da die Addition zweier unabhängiger GWR-Prozesse zu einer Addition der Varianzen führt ([Bro+05]). Die Anzahl der zu schätzenden Unbekannten bleibt unverändert, wobei, unter der Annahme bekannter Koordinaten eines Empfängers (hier  $\vec{x}_i$ ), nicht die absoluten Koordinaten  $\vec{x}_j$  des zweiten Empfängers zu bestimmen sind, sondern der Vektor zwischen den beiden Empfängern, die sogenannte Basislinie  $\Delta\vec{x}_{ij}$  nach Gleichung 2.46. Da die Koordinaten des als Referenzstation bezeichneten Empfängers  $i$  nicht fehlerfrei sind, wird ein zusätzlicher Fehlerterm  $K_{ij}$  eingeführt, der jedoch nur die absoluten Koordinaten des Empfängers  $j$ , nicht aber seine relative Position zum Empfänger  $i$  beeinflusst.

$$\Delta R_{ij,f}^k = R_{j,f}^k - R_{i,f}^k \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} &= \Delta \rho_{ij}^k + c_0(\Delta \delta t_{ij} + \Delta H_{ij,f,R}) + \Delta I_{ij,f}^k + \Delta T_{ij}^k + \Delta M_{ij,f,R}^k \\ &+ \Delta O_{ij}^k + \Delta G_{ij}^k + \Delta F_{ij}^k + \Delta A_{ij,f,R}^k + K_{ij} + \epsilon_{ij,f,R}^k \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\Delta \Phi_{ij,f}^k = \Phi_{j,f}^k - \Phi_{i,f}^k \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} &= \Delta \rho_{ij}^k + c_0(\Delta \delta t_{ij} + \Delta H_{ij,f,\Phi}) - \Delta I_{ij,f}^k + \Delta T_{ij}^k + \Delta M_{ij,f,\Phi}^k \\ &+ \Delta O_{ij}^k + \Delta G_{ij}^k + \Delta F_{ij}^k + \Delta A_{ij,f,\Phi}^k + \lambda_f \Delta N_{ij,f}^k + K_{ij} + \epsilon_{ij,f,\Phi}^k \end{aligned} \quad (2.42)$$

mit

$$\Delta \rho_{ij}^k = \rho_j^k - \rho_i^k \quad (2.43)$$

$$= \|\vec{x}^k - \vec{x}_j\| - \|\vec{x}^k - \vec{x}_i\| \quad (2.44)$$

$$= \|\vec{x}^k - \vec{x}_i - \Delta \vec{x}_{ij}\| - \|\vec{x}^k - \vec{x}_i\| \quad (2.45)$$

mit

$$\Delta \vec{x}_{ij} = \vec{x}_j - \vec{x}_i \quad (2.46)$$

Während die Verwendung von einfachen Differenzen zur Verringerung der einzelnen Fehleranteile führt, gelingt es bei der Verwendung von doppelten Differenzen, zusätzlich eine Unbekannte, die Summe aus Uhrfehler und instrumenteller Laufzeitverzögerung im Empfänger, zu eliminieren. Unter einer doppelten Differenz wird dabei die Differenz zweier einfacher Differenzen verstanden, wobei auch diese sowohl für Codemessungen (Gleichung 2.48) als auch für Phasemessungen (Gleichung 2.50) gebildet werden kann.

$$\nabla \Delta R_{ij,f}^{kl} = \Delta R_{ij,f}^k - \Delta R_{ij,f}^l \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} &= \nabla \Delta \rho_{ij}^{kl} + \nabla \Delta I_{ij,f}^{kl} + \nabla \Delta T_{ij}^{kl} + \nabla \Delta M_{ij,f,R}^{kl} + \nabla \Delta O_{ij}^{kl} \\ &+ \nabla \Delta G_{ij}^{kl} + \nabla \Delta F_{ij}^{kl} + \nabla \Delta A_{ij,f,R}^{kl} + \epsilon_{ij,f,R}^{kl} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\nabla \Delta \Phi_{ij,f}^{kl} = \Delta \Phi_{ij,f}^k - \Delta \Phi_{ij,f}^l \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} &= \nabla \Delta \rho_{ij}^{kl} - \nabla \Delta I_{ij,f}^{kl} + \nabla \Delta T_{ij}^{kl} + \nabla \Delta M_{ij,f,\Phi}^{kl} + \nabla \Delta O_{ij}^{kl} \\ &+ \nabla \Delta G_{ij}^{kl} + \nabla \Delta F_{ij}^{kl} + \nabla \Delta A_{ij,f,\Phi}^{kl} + \lambda_f \nabla \Delta N_{ij,f}^{kl} + \epsilon_{ij,f,\Phi}^{kl} \end{aligned} \quad (2.50)$$

mit

$$\nabla\Delta\rho_{ij}^{kl} = \Delta\rho_{ij}^l - \Delta\rho_{ij}^k \quad (2.51)$$

Um die Größenordnung der verbleibenden Restfehler, gekennzeichnet durch das Symbol  $\nabla\Delta$ , zu diskutieren, ist es sinnvoll, sie zu kategorisieren. Unterschieden werden Fehler, die von der Länge der Basislinie, d.h. entfernungsabhängig sind, und solche, die stationsabhängig sind ([Wan00]).

**Entfernungsabhängige Restfehler.** Je weiter zwei Empfänger voneinander entfernt sind, desto größer sind die Unterschiede im Ausbreitungsweg, die Fehleranteile in den Entfernungsmessungen dekorrelieren. Für die atmosphärischen Restfehler  $\nabla\Delta I_{ij,f}^{kl}$  und  $\nabla\Delta T_{ij}^{kl}$  können dabei keine allgemeingültigen Aussagen getroffen werden, da die Atmosphäre räumlichen Schwankungen unterliegt. In der Literatur finden sich allerdings Richtwerte für die Größenordnung. Der Restfehler  $\nabla\Delta I_{ij,f}^{kl}$  ist nach [PK96] direkt proportional zur Basislinienlänge (Gleichung 2.52). Für eine Basislinienlänge von 100 km betrüge der Restfehler  $\nabla\Delta I_{ij,f}^{kl}$  demnach 0.2 m. Laut [ME06] kann er diesen Wert bei aktiver Ionosphäre jedoch um das Fünffache übersteigen.

$$\nabla\Delta I_{ij,f}^{kl} \approx 2 \cdot 10^{-6} |\Delta\vec{x}_{ij}| \quad (2.52)$$

Der troposphärische Restfehler  $\nabla\Delta T_{ij}^{kl}$  ist nach [ME06] um eine Zehnerpotenz kleiner. Es ist jedoch zu beachten, dass die troposphärische Laufzeitverzögerung abhängig von der Stationshöhe ist. Für zwei sich in sehr unterschiedlichen Höhen<sup>39</sup> befindende Empfänger  $i$  und  $j$  können daher signifikante Unterschiede auftreten<sup>40</sup>. In diesem Fall ist es sinnvoll, einen diesen Effekt erfassenden Parameter als zusätzliche Unbekannte einzuführen, die bei der Positionsbestimmung mitzuschätzen ist<sup>41</sup>. Orbit-Restfehler  $\nabla\Delta O_{ij}^{kl}$  werden in der Literatur nicht explizit angegeben. Vielmehr lassen sich Angaben finden, inwiefern sich ein relativer Satellitenbahnfehler  $|O_i^k|/\rho_i^k$  auf den relativen Fehler  $|d|\Delta\vec{x}_{ij}||/|\Delta\vec{x}_{ij}|$  in der Basislinienbestimmung auswirkt. Da bei der Doppeldifferenzbildung wegen der hohen Korrelation der Orbitfehler ein Großteil dieses Fehlers eliminiert wird, liegt dieser Einfluss laut [Lar96] bei ca. 20% (Gleichung 2.53).

$$\frac{|d|\Delta\vec{x}_{ij}||}{|\Delta\vec{x}_{ij}|} \approx 0.2 \frac{|O_i^k|}{\rho_i^k} \quad (2.53)$$

Die Restfehler auf Grund geodynamischer Prozesse  $\nabla\Delta G_{ij}^{kl}$  sowie relativistischer Effekte  $\nabla\Delta F_{ij}^{kl}$  liegen in vernachlässigbarer Größenordnung.

<sup>39</sup> Ab 100 m (vgl. [Wan00]).

<sup>40</sup> In [ME06] wird für Satelliten in geringer Elevation ein Richtwert von 2-7 mm pro Meter Höhenunterschied angegeben.

<sup>41</sup> Für ausführlichere Erläuterungen sei auf [Wan00] verwiesen.

**Stationsabhängige Restfehler.** In diese Kategorie gehören die Restfehler in den Abweichungen vom Antennenphasenzentrum  $\nabla\Delta A_{ij,f,\Phi}^{kl}$  bzw.  $\nabla\Delta A_{ij,f,R}^{kl}$  sowie die Restfehler der durch Mehrwegeausbreitung verursachten Messabweichungen  $\nabla\Delta M_{ij,f,\Phi}^{kl}$  bzw.  $\nabla\Delta M_{ij,f,R}^{kl}$ . Wie bereits in Abschnitt 2.1.2.1 ausgeführt, stehen für eine Vielzahl von Antennentypen Korrekturwerte zur Verfügung. Bei Anwendung dieser, können die Restfehler  $\nabla\Delta A_{ij,f,\Phi}^{kl}$  bzw.  $\nabla\Delta A_{ij,f,R}^{kl}$  vernachlässigt werden. Dies trifft ebenfalls für Relativmessungen unter der Annahme gleicher Antennenphasenzentrumsfehler für Antennen gleicher Baureihe, gleicher Antennenausrichtung beider Stationen und kurzer Basislinien zu ([Wan00]).<sup>42</sup> Anderenfalls sind Antennenkalibrierungen vorzunehmen.<sup>43</sup> Die Messabweichungen, die durch Mehrwegeausbreitung verursacht werden, sind stark von der Umgebung abhängig. Daher sind die Fehler auf den Beobachtungen verschiedener Satelliten und Stationen unterschiedlich und lassen sich nicht durch Relativmessungen eliminieren. Welche Möglichkeiten es derzeit für eine Verringerung dieser Effekte gibt und inwiefern die Notwendigkeit weiterführender Ansätze besteht, sei im nachfolgenden Abschnitt 2.2 diskutiert.

## 2.2 Die Mehrwegeausbreitung als dominante Ursache für Quantifizierungsfehler

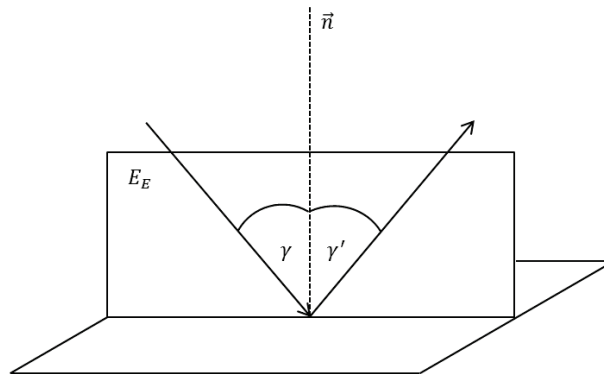
Werden an der Antenne des Empfängers sowohl das direkte Signal, als auch indirekte Signale, die durch die Reflexion des Signals an Objekten in der Umgebung der Empfangsantenne entstehen, empfangen, wird von einer Mehrwegeausbreitung des Signals gesprochen. Die Reflexion ist über das Ein-Strahl-Modell definiert (vgl. Abbildung 2.4). Es beschreibt das Zurückwerfen eines Strahles an der Grenzschicht, im Folgenden Reflexionsebene genannt, zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Materialeigenschaften<sup>44</sup>, wobei einfallender und ausfallender Strahl in einer Ebene  $E_E$ , der *Einfallsebene*, liegen. Diese wird durch den einfallenden Strahl und die Flächennormale  $\vec{n}$  der Reflexionsebene aufgespannt. Die Größe des Einfalls- und Ausfallswinkels ( $\gamma$  und  $\gamma'$ ) bezüglich der Flächennormale  $\vec{n}$  der Reflexionsebene ist identisch. Mögliche Ursachen für das Auftreten der Mehrwegeausbreitung von GNSS-Signalen werden in Abschnitt 2.2.1 vorgestellt. Ob jedoch tatsächlich eine Reflexion stattfindet und welche Änderungen die Signalparameter (Amplitude und Frequenz) erfahren, hängt von

<sup>42</sup> Wie bereits in Abschnitt 2.1.2.1 angemerkt, sind in den Parametern  $\nabla\Delta A_{ij,f,\Phi}^{kl}$  bzw.  $\nabla\Delta A_{ij,f,R}^{kl}$  Satelliten- und Empfangsantenneneffekte zusammengefasst. Für die Satellitenantennen stehen die Korrekturgrößen zur Verfügung und können stets genutzt werden. Auf sie bezieht sich auch die Beobachtungsgrößen- und Frequenzabhängigkeit. Die hier diskutierten Punkte beziehen sich auf die Empfangsantennen.

<sup>43</sup> Eine Zusammenstellung möglicher Verfahren ist in [Wan00] zu finden.

<sup>44</sup> Diese werden in den folgenden Abschnitten dargestellt und diskutiert.

verschiedenen Eigenschaften der Reflexionsebene ab. Diese werden in Abschnitt 2.2.2 erörtert. Für den Fall, dass es zu einer Mehrwegeausbreitung kommt, verursacht selbige Fehler bei der Bestimmung der Code- und Trägerphase sowie des  $C/N_0$  (vgl. Abschnitt 2.1.2). Wie diese quantitativ erfassbar sind, wird in Abschnitt 2.2.3 beschrieben. Der abschließende Abschnitt 2.2.4 widmet sich den bisher in der Literatur diskutierten Ansätzen zur Detektion und Eliminierung des durch die Mehrwegeausbreitung verursachten Quantifizierungsfehlers.



**Abbildung 2.4:** Prinzip der Reflexion eines Signals an der Grenzschicht zwischen zwei Materialien mit unterschiedlichen Eigenschaften, dargestellt anhand des Ein-Strahl-Modells. Im Fall einer Reflexion sind Einfallswinkel  $\gamma$  und Ausfallswinkel  $\gamma'$  gleich groß.

### 2.2.1 Ursprung der Mehrwegeausbreitung

Wird in Zusammenhang mit GNSS-Signalen von Mehrwegeausbreitung gesprochen, werden damit üblicherweise Reflexionen an Objekten in der Umgebung der Empfangsantenne verbunden. Da sich auf Grund der Satellitenbewegung die Geometrie zwischen Satellit, Empfänger und den die Reflexionen verursachenden Objekten ändert, handelt es sich bei der dadurch entstehenden Art von Mehrwegefehlern, wie in den folgenden Abschnitten erläutert, um einen zeitlich variablen Fehler. Zu erwähnen ist jedoch, dass daneben zum einen Mehrwegeeffekte durch Reflexion des Signals an Bauteilen sowohl im Satelliten als auch im Empfänger entstehen können. Zum anderen besteht die Möglichkeit von Signalreflexion am Satelliten. Letztgenannter Mehrwegeeinfluss kann bei Verwendung differentieller Verfahren und kurzer Basislinien eliminiert werden ([LRT15]).<sup>45</sup> Reflexionen an satelliten- und empfängerinternen Bauteilen verursachen einen zeitlich konstanten Fehler (engl. *offset*), da sich wegen der gleichbleibenden Geometrie die relative Phasenlage des reflektierten Signals zum direkten Signal nicht ändert. Für Reflexionen an Bauteilen im Satelliten werden derartige Offsets in den GPS-

<sup>45</sup> Dem liegt die Annahme zugrunde, dass der induzierte Mehrwegefehler in den Entfernungsmessungen beider Empfänger nahezu identisch ist.



Codebeobachtungen von [SD09] nachgewiesen, von [Kei02] Gleiches für Reflexionen an Bauteilen im Empfänger. Diese satelliten- und empfängerinternen Reflexionen sind nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Sie beschränkt sich vielmehr auf die Diskussion der im Ausbreitungsweg verursachten Reflexionen.

## 2.2.2 Einfluss der Reflektoreigenschaften

Im Gegensatz zu der in Abbildung 2.4 dargestellten Reflexion eines einzelnen Strahles, handelt es sich bei der Mehrwegausbreitung von GNSS-Signalen um die Reflexion eines Strahlenbündels. Um eine signifikante Reflexion<sup>46</sup> zu realisieren, sind durch einen Reflektor Anforderungen hinsichtlich der geometrischen Abmessungen der Reflexionsfläche (Abschnitt 2.2.2.1) zu erfüllen. Während die Größe der Reflexionsfläche über das Auftreten einer Mehrwegeausbreitung bestimmt, werden durch die Satellit-Reflektor-Empfänger-Anordnung sowie die Materialeigenschaften der Reflexionsfläche die Signalparameter festgelegt (Abschnitte 2.2.2.2 und 2.2.2.3). Die Art der Reflexion ist hingegen von der Oberflächenbeschaffenheit der Reflexionsfläche abhängig (Abschnitt 2.2.2.4).

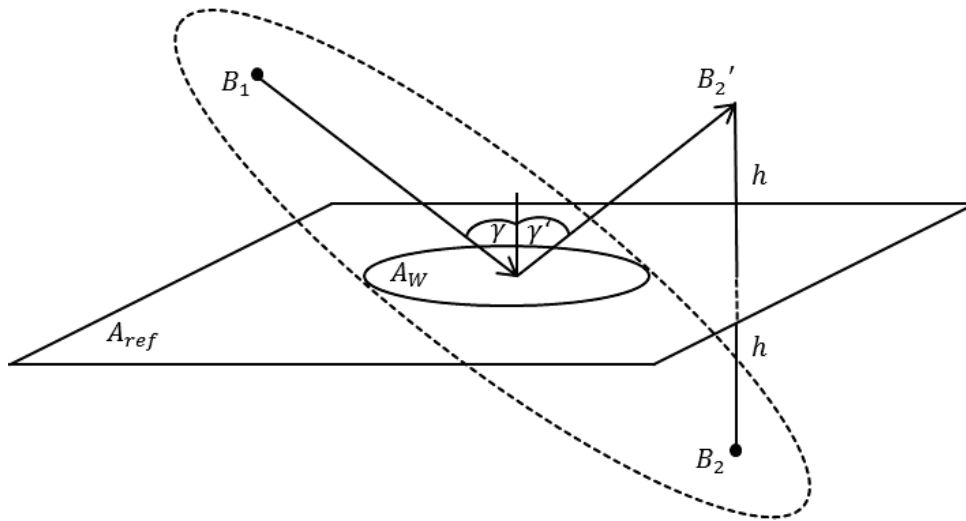
### 2.2.2.1 Geometrische Eigenschaften der Reflexionsfläche

Die für eine Reflexion minimal notwendige Reflexionsfläche  $A_W$  wird mithilfe der ersten Fresnel-Zone bestimmt. Darunter wird ein Rotationsellipsoid verstanden, in dessen Brennpunkten  $B_1$  und  $B_2$  sich Sender (hier der Navigationsatellit) und Empfänger (hier der Spiegelpunkt der Antenne des GNSS-Empfängers) befinden (vgl. Abbildung 2.5). In der ersten Fresnel-Zone wird der größte Anteil der Signalenergie übertragen. Für einen signifikanten Einfluss des reflektierten Signals auf die Signalverarbeitung im Empfänger muss diese Signalenergie bei der Reflexion übertragen werden. Die minimal notwendige Reflexionsfläche  $A_W$  ergibt sich demnach als Schnitt der ersten Fresnel-Zone mit der Reflexionsebene  $A_{ref}$ . Objekte mit Abmessungen, die geringer sind als die Abmessungen von  $A_W$  verursachen keine (signifikante) Reflexion. Als Schnittfläche eines Rotationsellipsoiden mit einer Ebene beschreibt  $A_W$  eine Ellipse mit Flächeninhalt  $A_{A_W}$  nach Gleichung 2.54.

$$A_{A_W} = \pi ab \quad (2.54)$$

Dabei bezeichnen  $a$  und  $b$  die große bzw. die kleine Halbachse der Ellipse. Sie können als Funktion von Elevationswinkel  $el = \gamma - 90^\circ$  und Empfängerhöhe  $h$  dargestellt werden.

<sup>46</sup> Die Signalenergie des reflektierten Signals muss hoch genug sein, um eine messbare Überlagerung von direktem und reflektiertem Signal zu gewährleisten.



**Abbildung 2.5:** Bestimmung der minimal notwendigen Reflexionsfläche  $A_W$  für eine Realisierung von Mehrwegeausbreitung. Diese Fläche ergibt sich als Schnitt der ersten Fresnel-Zone mit der Reflexionsebene  $A_{ref}$ .

Die Herleitung dieses funktionalen Zusammenhangs erfolgt unter Zuhilfenahme der Parameter der ersten Fresnel-Zone. Abbildung 2.6 veranschaulicht die dafür benötigten Größen. Die Halbachsen  $a$  und  $b$  der Reflexionsfläche  $A_W$  können direkt aus dem Radius  $r$  abgeleitet werden (vgl. Abbildung 2.6). Es gilt:

$$a \approx \frac{r}{\sin el} \quad (2.55)$$

$$b = r \quad (2.56)$$

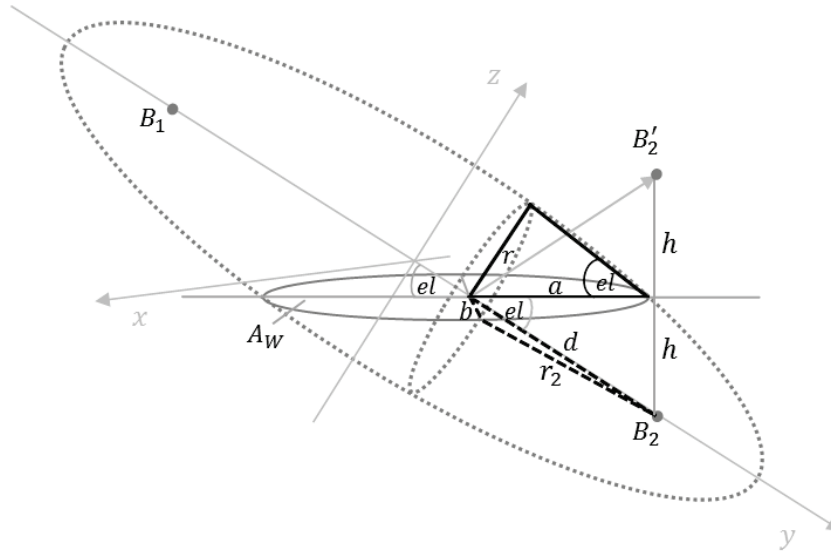
Für den Radius  $r$  eines Schnittkreises  $K$  von erster Fresnel-Zone und einer Ebene, deren Flächennormale die große Halbachse der ersten Fresnel-Zone ist, gilt:

$$r = \sqrt{\frac{\lambda r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \quad (2.57)$$

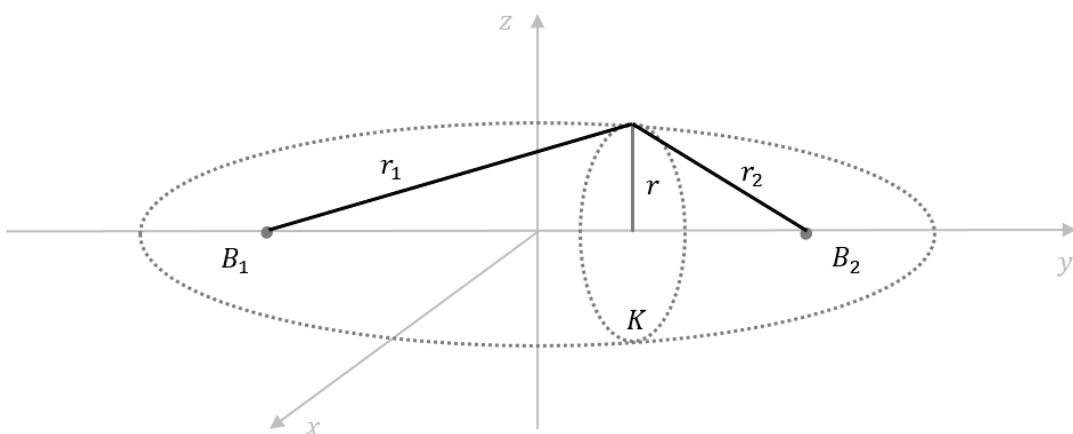
Dabei bezeichnen  $\lambda$  die Wellenlänge des Signals und  $r_1$  bzw.  $r_2$  die Abstände eines Punktes auf dem Schnittkreis zu den jeweiligen Brennpunkten (vgl. Abbildung 2.7). Unter der für GNSS-Signal-Reflexionen möglichen Annahme  $r_1 \gg r_2$ , vereinfacht sich Gleichung 2.57 zu:

$$r \approx \sqrt{\lambda r_2} \quad (2.58)$$

Ein funktionaler Zusammenhang zwischen  $r_2$  sowie Elevation  $el$  und Höhe  $h$  der Antenne des Empfängers lässt sich unter Verwendung der in Abbildung 2.6 dargestellten Dreiecksbeziehungen und dafür gültigen mathematischen Sätzen sowie den Gleichungen 2.56 und 2.58 darstellen.



**Abbildung 2.6:** Schematische Darstellung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Elevationswinkel  $el$  des Satelliten  $B_1$ , der Höhe  $h$  der Empfangsantenne  $B'_2$  und des Flächeninhaltes der für die Mehrwegeausbreitung minimal benötigten Reflexionsfläche. Sie beschreibt eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ .



**Abbildung 2.7:** Schematische Darstellung der ersten Fresnel-Zone, einem Rotationsellipsoiden mit Brennpunkten  $B_1$  und  $B_2$  und Querschnittsfläche  $K$  mit Radius  $r$ .

Es gilt:

$$r_2^2 = d^2 - b^2 \quad (2.59)$$

$$\approx \frac{h^2}{\sin^2 el} - \lambda r_2 \quad (2.60)$$

Unter Nutzung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen und Ausschluss der negativen Lösung ergibt sich für  $r_2$ :

$$r_2 \approx -\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{h^2}{\sin^2 el}} \quad (2.61)$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda^2 \sin^2 el + 4h^2} - \lambda \sin el}{2 \sin el} \quad (2.62)$$

Unter der Annahme, dass der Anteil des Terms  $\lambda \sin el$  gegenüber dem die Höhe enthaltenden Term vernachlässigt werden kann, gilt:

$$r_2 \approx \frac{h}{\sin el} \quad (2.63)$$

Für die Größe der Halbachsen  $a$  und  $b$  ergibt sich damit unter Verwendung der Gleichungen 2.55, 2.56, 2.58 und 2.63 wie in [Eis97] angegeben zu:

$$a \approx \sqrt{\frac{\lambda h}{\sin^3 el}} \quad (2.64)$$

$$b \approx \sqrt{\frac{\lambda h}{\sin el}} \quad (2.65)$$

Der Flächeninhalt der notwendigen Reflexionsfläche kann nach Einsetzen dieser Zusammenhänge in Gleichung 2.54 als Funktion der Empfangsantennenhöhe  $h$  und Satellitenelevation  $el$  geschrieben werden (Gleichung 2.66).

$$A_{A_w} \approx \frac{\pi \lambda h}{\sin^2 el} \quad (2.66)$$

Je größer der Elevationswinkel des Satelliten, desto kleiner wird die für eine signifikante Reflexion notwendige Fläche. So wird beispielsweise bei einer Empfangsantennenhöhe von 1 m bei niedrig stehenden Satelliten mit einem Elevationswinkel von  $20^\circ$  eine Fläche von ca.  $5 \text{ m}^2$  benötigt. Bei höher stehenden Satelliten mit einem Elevationswinkel von  $50^\circ$  beträgt die notwendige Fläche nur noch ca.  $1 \text{ m}^2$ . Gleichung 2.66 zeigt ebenfalls deutlich den proportionalen

Zusammenhang zwischen  $A_{Aw}$  und Höhe der Empfangsantenne  $h$ . Ist bei einem Elevationswinkel von  $20^\circ$  und einer Empfangsantennenhöhe von 1 m eine Fläche von ca.  $1 \text{ m}^2$  ausreichend für eine Reflexion, sind für  $h = 3 \text{ m}$  ca.  $15 \text{ m}^2$  erforderlich. Alle hier genannten Beispiele beziehen sich auf den Empfang eines GPS L1-Signals ( $\lambda \approx 0,19 \text{ m}$ ).

### 2.2.2.2 Satellit-Reflektor-Empfänger-Anordnung

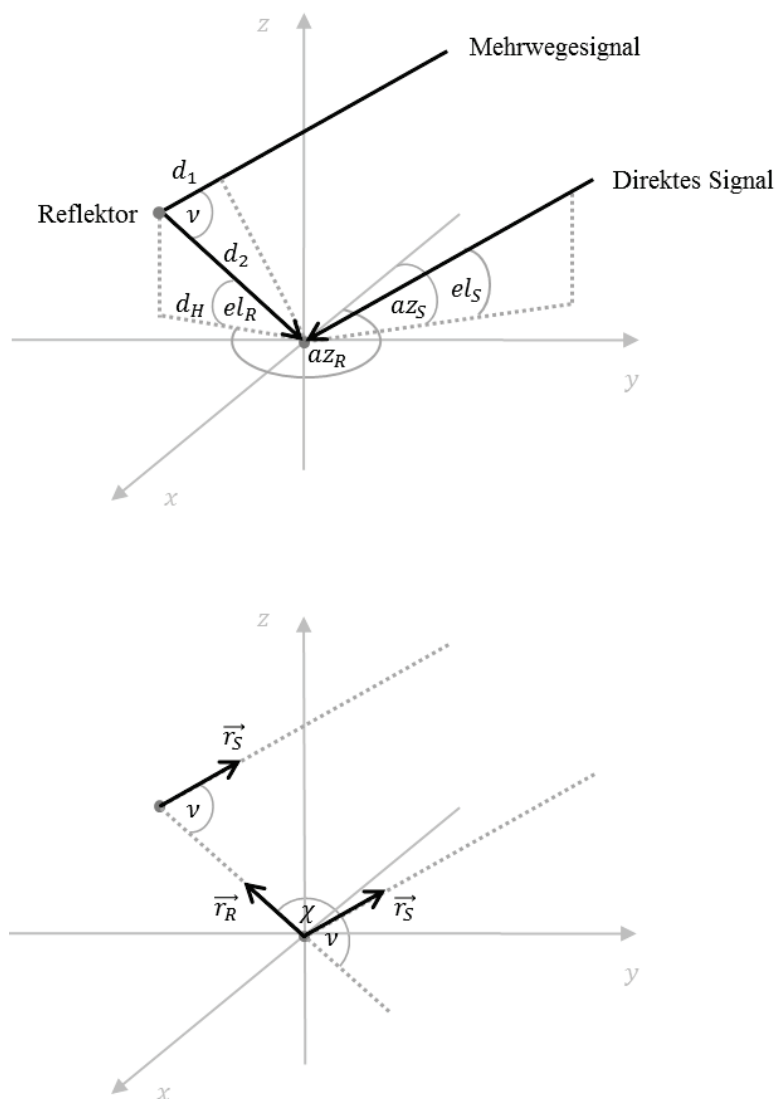
Die Geometrie zwischen Satellit, Reflexionsebene (kurz: Reflektor) und Empfangsantenne bestimmt die Umweglänge des Signals und damit verbunden die zum direkten Signal veränderte Phasenlage des reflektierten Signals, im Folgenden als Mehrwegesignal bezeichnet. Auf Grund der kontinuierlichen Veränderung dieser Geometrie sind auch die Signalfrequenzen von direktem und Mehrwegesignal sowie deren Verhältnis zueinander zeitvariant. Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen Satellit-Reflektor-Empfänger-Geometrie und den Parametern Phase und Frequenz des Mehrwegesignals quantitativ erfasst werden. Dabei interessieren nicht die absoluten Werte, sondern der Unterschied zu den entsprechenden Parametern des direkten Signals (kurz: relative Phase, relative Frequenz). Für die Beschreibung des Zusammenhangs werden die beiden genannten Parameter als Funktion von Elevations- und Azimutwinkeln (kurz: Elevation und Azimut) von Satellit und Reflektor dargestellt. Für die Herleitung dieses funktionalen Zusammenhanges wird das in Abbildung 2.8 dargestellte Modell des Punktreflectors<sup>47</sup> genutzt. Der durch das Mehrwegesignal gegenüber dem direkten Signal zurückgelegte (zeitvariante) Umweg  $u$  in m beträgt:

$$u(t) = d_1(t) + d_2 = d_2(\cos \nu(t) + 1) \quad (2.67)$$

Um den Winkel  $\nu$  als Funktion der Elevationen und Azimute von Satellit und Reflektor darzustellen, sind in einem ersten Schritt deren Richtungsvektoren in sphärischen Koordinaten (Azimut und Elevation) anzugeben. Mit diesen Vektoren lässt sich der Winkel  $\nu$ , wie in Abbildung 2.8 veranschaulicht, aus dem von ihnen eingeschlossenen Winkel  $\chi$  ableiten. Für den Richtungsvektor  $\vec{r}_S$  des Satelliten bzw. den Richtungsvektor  $\vec{r}_R$  des Reflektors gilt:

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} -\cos el_S(t) \cos az_S(t) \\ \cos el_S(t) \sin az_S(t) \\ \sin el_S(t) \end{pmatrix} \quad \vec{r}_R = \begin{pmatrix} -\cos el_R \cos az_R \\ \cos el_R \sin az_R \\ \sin el_R \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

<sup>47</sup> Der Punktreflektor ist ein theoretisches Konstrukt, welches ein einfallendes Signal in alle Richtungen reflektiert.



**Abbildung 2.8:** Schematische Darstellung eines Punktreflektors. Dabei sind aus Gründen der Übersichtlichkeit die für die Herleitung der Mehrwegesignalparameter benötigten Größen in zwei separaten Abbildungen visualisiert. Während in der oberen Abbildung die Beträge von Winkeln und Vektoren im Vordergrund stehen, werden in der unteren Abbildung insbesondere vektorielle Richtungen betrachtet.

Der von diesen Vektoren eingeschlossene Winkel  $\chi$  berechnet sich nach [Bro+05] zu:

$$\cos \chi(t) = \frac{\vec{r}_S \vec{r}_E}{|\vec{r}_S| |\vec{r}_E|} \quad (2.69)$$

Nach Einsetzen der Vektoren aus 2.68 in 2.69 und einigen Umformungen gilt:

$$\cos \chi(t) = \cos el_S(t) \cos el_R \cos(az_S(t) - az_R) + \sin el_S(t) \sin el_R \quad (2.70)$$

Daraus folgt für den Winkel  $\nu$ :<sup>48</sup>

$$\cos \nu(t) = -\cos el_S(t) \cos el_R \cos(az_S(t) - az_R) - \sin el_S(t) \sin el_R \quad (2.71)$$

Nach Einsetzen von Gleichung 2.71 in 2.67 und der in Abbildung 2.8 veranschaulichten Beziehung zwischen Elevation des Reflektors  $el_R$ , horizontalem Abstand zwischen Reflektor und Empfangsantenne  $d_H$  und Schräg Entfernung zwischen Reflektor und Empfangsantenne  $d_2$  gilt:

$$u(t) = \frac{d_H}{\cos el_R} (1 - \cos el_S(t) \cos el_R \cos(az_S(t) - az_R) - \sin el_S(t) \sin el_R) \quad (2.72)$$

Für ein Signal mit Wellenlänge  $\lambda$  verursacht ein Umweg mit Länge  $u$  eine zum direkten Signal verschobene relative Phasenlage  $\theta$  in rad: Die relative Phase des Mehrwegesignals nach Gleichung 2.73.

$$\theta(t) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d_H}{\cos el_R} (1 - \cos el_S(t) \cos el_R \cos(az_S(t) - az_R) - \sin el_S(t) \sin el_R) \quad (2.73)$$

Aus Gleichung 2.73 lässt sich die relative Kreisfrequenz  $\omega$  des Mehrwegesignals als zeitliche Ableitung der relativen Phase und daraus die relative Frequenz  $f = \omega/2\pi$  des Mehrwegesignals gewinnen.

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{d_H}{\lambda \cos el_R} & \left( \cos el_R \cos(az_S(t) - az_R) \sin el_S(t) \frac{\partial el_S(t)}{\partial t} \right. \\ & + \cos el_R \sin(az_S(t) - az_R) \cos el_S(t) \frac{\partial az_S(t)}{\partial t} \\ & \left. - \sin el_R \cos el_S(t) \frac{\partial el_S(t)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

### 2.2.2.3 Materialeigenschaften der Reflexionsfläche

Während die Satellit-Reflektor-Empfänger-Geometrie die relative Phase und Frequenz des Mehrwegesignals festlegt, wird durch die Materialeigenschaften des Reflektors die Amplitude des

<sup>48</sup> Für diese Umformung wurde genutzt, dass  $\nu = 180^\circ - \chi$  und daher  $\cos \chi = -\cos \nu$  (vgl. Abbildung 2.8).

Mehrwegesignals  $A_M$  und damit ihre Relation zur Amplitude des direkten Signals  $A_D$  mitbestimmt. Diese relative Amplitude  $\alpha = A_M/A_D$  kann als Funktion von vier Dämpfungsfaktoren nach Gleichung 2.75 geschrieben werden ([Eis97]), wobei nur zwei der vier Faktoren materialabhängig sind.

$$\alpha = \eta_F \eta_R \eta_D \eta_A \quad (2.75)$$

Es bezeichnen  $\eta_F$  die Freiraumdämpfung des Mehrwegesignals bezogen auf die Freiraumdämpfung des zugehörigen direkten Signals,  $\eta_R$  den Reflexionskoeffizienten, der die Dämpfung durch die Signalreflexion widerspiegelt,  $\eta_D$  die Dämpfung durch Depolarisation, sowie  $\eta_A$  den Dämpfungsfaktor mit Bezug zur Richtcharakteristik der Antenne. Die Größenordnung dieser vier Faktoren sei im Folgenden diskutiert.

**Einfluss der Freiraumdämpfung.** Da selbst bei maximal zulässigen Umweglängen von 450 m<sup>49</sup>  $\eta_F \approx 1$  gilt, kann dieser Faktor vernachlässigt werden.

**Dämpfung durch Reflexion.** GNSS-Signale sind elektromagnetische Wellen mit rechtsdrehender Zirkularpolarisation (engl. *right hand circular polarized*, kurz: *RHCP*), welche durch die Überlagerung zweier orthogonaler, linear polarisierter Wellen erzeugt werden.<sup>50</sup> Um den Einfluss einer Reflexion auf die RHCP-Welle und damit das GNSS-Signal beschreiben zu können, müssen die beiden linear polarisierten Wellen, d.h. die sie repräsentierenden Feldstärkevektoren des elektrischen Feldes (im Folgenden Komponenten genannt), getrennt voneinander betrachtet werden. Dafür wird der Feldstärkevektor, der in der Einfallsebene  $E_E$ <sup>51</sup> liegt, mit  $E_{\parallel}$ , derjenige, der senkrecht darauf steht, mit  $E_{\perp}$  bezeichnet. Trifft das sich im Freiraum ausbreitende GNSS-Signal auf die Oberfläche eines Objektes mit davon abweichenden Materialeigenschaften<sup>52</sup>, wird nur ein Teil der Signalleistung reflektiert. Ein anderer Teil wird in das Objekt transmittiert. Das Verhältnis zwischen der Feldstärke der reflektierten und der direkten (einfallenden) Welle, auch als Reflexionskoeffizient bezeichnet, ergibt sich, getrennt für die beiden Komponenten, nach [BS87] zu:

$$\eta_{\parallel} = \frac{E_{\parallel,r}}{E_{\parallel,d}} = \frac{Y^2 \sin el - \sqrt{Y^2 - \cos^2 el}}{Y^2 \sin el + \sqrt{Y^2 - \cos^2 el}} \quad (2.76)$$

$$\eta_{\perp} = \frac{E_{\perp,r}}{E_{\perp,d}} = \frac{\sin el - \sqrt{Y^2 - \cos^2 el}}{\sin el + \sqrt{Y^2 - \cos^2 el}} \quad (2.77)$$

<sup>49</sup> Umweglängen von 450 m entsprechen 1.5 Code-Chips des C/A-Codes. Signale, die in der DLL mehr als 1.5 Code-Chips verzögert sind, werden automatisch unterdrückt ([ME06]).

<sup>50</sup> Für nähere Erläuterungen dazu sein auf Anhang B.1 verwiesen.

<sup>51</sup> Vgl. Abbildung 2.4.

<sup>52</sup> Gemeint sind elektrische und magnetische Eigenschaften. Nähere Erläuterungen sind in B.1 zu finden.



mit

$$Y = \sqrt{\frac{\varepsilon_r + i60\lambda\sigma}{\mu_r}} \quad (2.78)$$

Dabei wird der Index  $d$  für die direkte, der Index  $r$  für die reflektierte Welle verwendet. Der Index  $\parallel$  kennzeichnet die Zugehörigkeit zur parallelen, der Index  $\perp$  die zur senkrechten Komponente. Die (komplexen) Reflexionskoeffizienten  $\eta_{\parallel}$  und  $\eta_{\perp}$  sind demnach abhängig von der Elevation  $el$  des GNSS-Signals, ihrer Wellenlänge  $\lambda$  sowie von den physikalischen Eigenschaften des Reflektors, der Dielektrizitätszahl  $\varepsilon_r$ , der Permeabilitätszahl  $\mu_r$  und der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$  in  $(\Omega\text{m})^{-1}$ . Der Reflexionskoeffizient  $\eta_R$  kann aus den Reflexionskoeffizienten  $\eta_{\parallel}$  und  $\eta_{\perp}$  nach Gleichung 2.79 berechnet werden ([Eis97]).

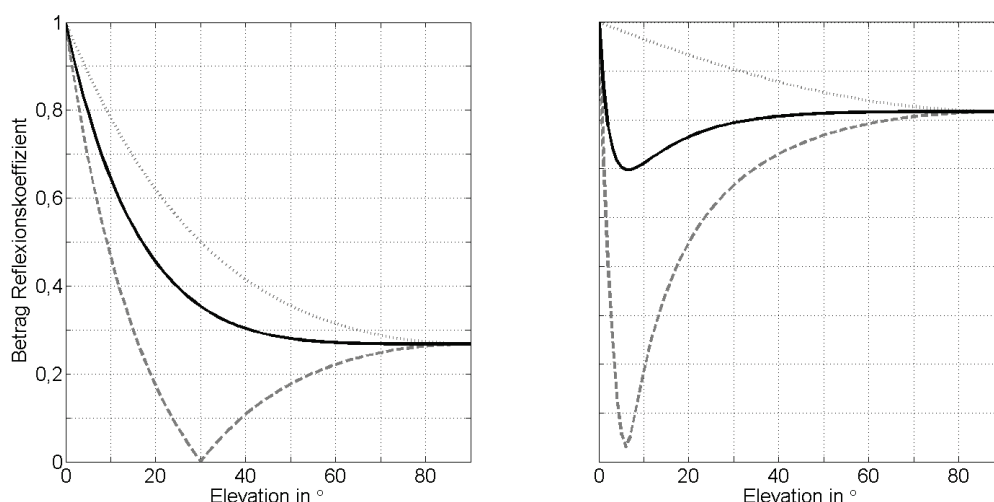
$$\eta_R = \sqrt{0.5(|\eta_{\parallel}|^2 + |\eta_{\perp}|^2)} \quad (2.79)$$

Abbildung 2.9 zeigt zwei aus [Eis97] entnommene Beispiele<sup>53</sup>, links die Beträge der Reflexionskoeffizienten für eine Reflexion an üblichen Baustoffen (trockene Oberfläche mit geringer elektrischer Leitfähigkeit,  $\varepsilon_r = 3$ ,  $\sigma = 10^{-4} (\Omega\text{m})^{-1}$ ,  $\mu_r = 1$ ), rechts für eine Reflexion an der Meeresoberfläche (feuchte Oberfläche mit hoher elektrischer Leitfähigkeit,  $\varepsilon_r = 80$ ,  $\sigma = 4 (\Omega\text{m})^{-1}$ ,  $\mu_r = 1$ ).<sup>54</sup> Beiden gemein ist, dass der Betrag des Reflexionskoeffizienten für die senkrechte Komponente  $\eta_{\perp}$  (grau, Punkt) mit steigender Elevation abnimmt, wobei der Gradient im ersten Fall deutlich steiler ausgeprägt ist. Für die parallele Komponente  $\eta_{\parallel}$  (grau, Strich) gilt ein solcher Zusammenhang bis zu einem bestimmten Winkel, dem sogenannten Brewster-Winkel. Darunter wird der Winkel verstanden, bei dem der Reflexionskoeffizient sein Minimum annimmt. Der Wert des Brewster-Winkels ist vom jeweiligen Material abhängig. Für größere Elevationswinkel nimmt der Betrag des Reflexionskoeffizienten  $\eta_{\parallel}$  wieder zu. In der Überlagerung dieser Beträge nach Gleichung 2.79 führt dies zu einem Reflexionskoeffizienten  $\eta_R < 1$  (schwarz, Linie).

**Dämpfung durch Depolarisation.** In Abbildung 2.9 ist deutlich zu erkennen, dass senkrechte und parallele Komponenten unterschiedlich stark gedämpft werden und damit das Verhältnis ihrer Amplituden verändert wird. Dies hat zur Folge, dass sich die Polarisation ändert. Eine zirkulare Polarisation setzt gleiche Amplituden der beiden Komponenten voraus. Verschiebt sich

<sup>53</sup> Eine umfangreiche Übersicht über Dielektrizitätszahl und elektrischer Leitfähigkeit verschiedener, für GNSS-Signale relevanter Reflektormaterialien findet der Leser in [LRT15].

<sup>54</sup> Hier und im Folgenden gilt, dass bei gleicher Einheit und Skalierung bei neben- und übereinander angeordneten Grafiken Achsenbeschriftungen nur an den äußeren Achsen angetragen werden.



**Abbildung 2.9:** Beträge der Reflexionskoeffizienten der senkrechten Komponente (grau, Punkt), der parallelen Komponente (grau, Strich), sowie der RHCP-Welle (schwarz, Linie) in Abhängigkeit der Elevation. Links: Werte für trockene Oberflächen mit geringer elektrischer Leitfähigkeit ( $\epsilon_r = 3, \sigma = 10^{-4} (\Omega\text{m})^{-1}, \mu_r = 1$ ). Rechts: Meeresoberfläche ( $\epsilon_r = 80, \sigma = 4 (\Omega\text{m})^{-1}, \mu_r = 1$ ).

das Verhältnis zugunsten einer der Komponenten, geht die zirkulare Polarisation in eine elliptische über. Im Fall der Baustoffe (Abbildung 2.9, links) beträfe dies zunächst den Bereich bis zu  $30^\circ$  Elevation. An diesem Punkt wird die parallele Komponente vollständig in den Reflektor transmittiert, es liegt nur noch eine einzige, die senkrechte Komponente vor. Die reflektierte Welle ist demnach nicht mehr zirkular, sondern nur noch linear polarisiert. Für Elevationswinkel größer  $30^\circ$  nimmt der Wert des Reflexionskoeffizienten der parallelen Komponente wieder zu, es liegt erneut eine elliptische Polarisation vor. Hinzu kommt jedoch, dass sich nicht nur der Betrag, sondern auch die Phasenlage der parallelen Komponente in der Nähe des Brewster-Winkels um  $180^\circ$  ändert.<sup>55</sup> Das hat zur Folge, dass für Elevationen, die größer als dieser Winkel sind, eine zirkulare Polarisation mit Drehrichtung im Uhrzeigersinn aus Sicht der Empfangsantenne (engl. *left hand circular polarized*, kurz: *LHCP*) vorliegt. GNSS-Antennen sind jedoch auf den Empfang von Signalen mit RHCP-Eigenschaft ausgelegt. Trägerwellen mit anderen Polarisations-eigenschaften werden stark gedämpft empfangen. Für eine ausführlichen Darstellung und Herleitung der für die Berechnung des Dämpfungsfaktors  $\eta_D$  benötigten Größen sei an dieser Stelle auf [Alb+95] und [Eis97] verwiesen. Es sei jedoch angemerkt, dass auch  $\eta_D$  mit zunehmender Elevation (in Abhängigkeit des Reflektormaterials) Werte annimmt, die deutlich kleiner als eins sind.

<sup>55</sup> Nähere Ausführungen sowie zahlreicher Abbildungen für diverse Reflektormaterialien finden sich in [Eis97].

**Einfluss der Richtcharakteristik der Empfangsantenne.** Typische Richtcharakteristiken<sup>56</sup> für GNSS-Empfangsantennen werden in [LRT15] vorgestellt und diskutiert. So ist laut [LRT15] das Richtdiagramm üblicherweise rotationssymmetrisch (bezogen auf die lotrechte Achse), d.h. unabhängig von der azimutalen Richtung. Hingegen werden elektromagnetische Wellen in Abhängigkeit ihrer Elevation unterschiedlich stark gedämpft. Während Signale von Satelliten mit einer Elevation von  $90^\circ$  ungedämpft empfangen werden (0 dB Dämpfung), nimmt die Dämpfung mit abnehmender Elevation zu. So beträgt beispielsweise die Amplitude der empfangenen Feldstärke für Satellitensignale aus einer Elevation von  $10^\circ$  nur noch ca. 30% der tatsächlichen Amplitude des Feldstärkevektors der elektromagnetischen Welle, was einer Dämpfung von ca. 10 dB entspricht. Durch Reflexion der elektromagnetischen Wellen am Boden, ist es möglich, dass die Antenne auch GNSS-Signale mit einer Elevation unterhalb von  $0^\circ$  erreichen. Diese erfahren eine Dämpfung von ca. 20 dB, sodass die Amplitude der empfangenen Feldstärke nur noch ca. 10% der tatsächlichen Amplitude des Feldstärkevektors der elektromagnetischen Welle entspricht. Diese hier angegebenen Werte gelten für RHCP-Signale. Signale anderer Polarisation werden sehr viel stärker gedämpft. So beträgt beispielsweise für LHCP-Signale die Dämpfung für alle Elevationen mindestens 15 dB.<sup>57</sup>

Es kann, nach Diskussion aller für die Berechnung der relativen Mehrwegeamplitude  $\alpha$  relevanten Faktoren nach Gleichung 2.75, festgehalten werden, dass  $\alpha$  in Abhängigkeit der Elevation des Satelliten und der Materialeigenschaften des Reflektors Werte annimmt, die deutlich kleiner als eins sind. So wird beispielsweise in [Eis97] ausgeführt, dass allein das Produkt aus  $\eta_R$  und  $\eta_D$  für alle in Zusammenhang mit GNSS-Signalen relevanten Reflektormaterialien als  $< 0.5$  für Elevationen  $> 20^\circ$  betrachtet werden kann. Je nach Einfallswinkel der reflektierten GNSS-Signale kann dieser Wert auf Grund der Richtcharakteristik der Antenne noch deutlich geringer ausfallen.

#### 2.2.2.4 Oberflächenbeschaffenheit der Reflexionsfläche

Mit den Ausführungen der vorangegangenen Abschnitte 2.2.2.2 und 2.2.2.3 können, unter der Annahme der Gültigkeit des Ein-Strahl-Modells, alle Signalparameter (Amplitude, Frequenz und Phase) eines reflektierten Signals bestimmt und dieses somit charakterisiert werden. Wie bereits erwähnt, handelt es sich im Fall der GNSS-Signalen jedoch um ein Strahlenbündel. Ist die Oberfläche des Reflektors *genügend glatt*, gelten für alle Strahlen die gleichen Reflexionsbedingungen und die reflektierten Signale können durch dieselben Signalparameter beschrieben werden. Ist die Oberfläche hingegen sehr *uneben*, besitzt sie an jedem Punkt eine andere

---

<sup>56</sup> Für die Begriffserklärung und weiterführende Erläuterungen sei auf Anhang B.2 verwiesen.

<sup>57</sup> Alle in diesem Abschnitt diskutierten Werte sind [LRT15] entnommen.

Tangentialebene<sup>58</sup>. Die Strahlen des Bündels treffen somit in unterschiedlichen Winkeln auf die Oberfläche, was zur Folge hat, dass sich auch die Ausfallswinkel der reflektierten Strahlen und die Signalparameter unterscheiden, da diese Funktionen der Einfallswinkel sind (vgl. Abschnitt 2.2.2.2 und 2.2.2.3). Durch diese Streuung erreicht demnach nur ein Teil des Strahlenbündels und damit auch nur ein Teil der in den reflektierten Signalen enthaltenen Leistung die Empfangsantenne. Diese Leistung ist jedoch entscheidend dafür, dass das Mehrwegesignal einen signifikanten Einfluss auf die Verarbeitung des empfangenen Signalgemisches<sup>59</sup> in den Regelschleifen hat.

Für die Entscheidung, ob eine Oberfläche als glatt oder uneben bezeichnet werden kann, wird das Rayleigh-Kriterium herangezogen. Es stellt einen Zusammenhang zwischen dem Elevationswinkel und der Wellenlänge des Signals sowie der Standardabweichung  $\sigma_h$  der Oberflächenrauigkeit<sup>60</sup> her und besagt, dass eine Oberfläche als glatt gilt, wenn folgende Ungleichung gilt:

$$\sigma_h \leq \frac{\lambda}{8 \sin \epsilon l} \quad (2.80)$$

Laut [GW98] stimmt die mit folgender Ungleichung gegebene und als Fraunhofer-Kriterium bekannte Modifikation des Rayleigh-Kriteriums jedoch besser mit experimentellen Ergebnissen überein:

$$\sigma_h \leq \frac{\lambda}{32 \sin \epsilon l} \quad (2.81)$$

Gilt die Oberfläche des Reflektors je nach Wahl eines der in den Gleichungen 2.80 und 2.81 dargestellten Kriterien als uneben, kann nicht mehr von gerichteter Reflexion ausgegangen werden und das Mehrwegesignal nicht mehr mit den in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten deterministischen Verfahren beschrieben werden. Vielmehr kommen stochastische Verfahren zur Anwendung. Da sich die Ausführungen in dieser Arbeit auf die deterministische Beschreibung der Mehrwegesignale beschränkt, sei der Leser für ausführliche Erläuterungen zu stochastischen Verfahren auf weiterführende Literatur wie beispielsweise [BS87] verwiesen.

### 2.2.3 Quantifizierungsfehler

Bei auftretender Mehrwegeausbreitung wird in den Regelschleifen des Empfängers nicht das direkte, sondern das Signalgemisch aus direktem und reflektierten Signalen ausgewertet. Dies

---

<sup>58</sup> Das ist die Ebene, auf die Einfallswinkel und Ausfallswinkel bezogen werden.

<sup>59</sup> Gemeint ist die Überlagerung von direktem und den reflektierten Signalen.

<sup>60</sup> Ist die Oberfläche durch eine Höhenfunktion beschrieben, gibt die Standardabweichung  $\sigma_h$  der Oberflächenrauigkeit die mittlere Abweichung der Höhe gegenüber dem Funktionsmittelwert an (vgl. [GW98]).

führt zur Bestimmung einer Code- bzw. Trägerphasenlage, die von derjenigen abweicht, die sich bei alleiniger Auswertung des direkten Signals ergäbe. Somit unterscheiden sich auch die daraus abgeleiteten Entfernungen  $R_{i,f}^k$  bzw.  $\Phi_{i,f}^k$  zwischen Satellit und Empfänger. Der Unterschied wird bei der Modellierung in den Termen  $M_{i,f,R}^k$  bzw.  $M_{i,f,\Phi}^k$  erfasst (Gleichung 2.33 bzw. 2.34).

### 2.2.3.1 Codephasenmessfehler

Die Phasenlage  $\Delta n$  des Codes wird in der DLL unter Verwendung der Werte der Early-, Prompt- und Late-Korrelatoren bestimmt (Abschnitt 2.1.1.1). Unter mehrwegefreien Empfangsbedingungen wird ausschließlich der Code des direkten Signals mit den internen Repliken korreliert und die Korrelationswerte im Diskriminator in einen funktionalen Zusammenhang gesetzt, anhand dessen die Phasenlage  $\Delta n$  und damit die Laufzeit des Codes bestimmt werden kann. Im Fall von Mehrwegeausbreitung führt die Überlagerung des direkten mit den reflektierten Signalen zu einer Abweichung  $\delta_M$  von der Phasenlage  $\Delta n$  des empfangenen Signals und damit zu Korrelationswerten der Early-, Prompt- und Late-Korrelatoren, die von den Werten, die bei mehrwegefreiem Empfang gewonnen werden, abweichen, sodass aus dem mittels dieser Werte berechneten Diskriminatorsausgangs die Phasenlage  $\Delta n + \delta_M$  anstelle der Phasenlage  $\Delta n$  bestimmt wird. Die daraus abgeleitete Entfernungsmessung zwischen Satellit und Empfangsantenne ist demnach um den daraus resultierenden Codemehrwegefehler  $M_{i,f,R}^k$  verfälscht. Die bisher in der Literatur vorgestellten Verfahren zur Abschätzung dieses Fehlers werden in Abschnitt 2.2.4 diskutiert.

### 2.2.3.2 Trägerphasenmessfehler

Wie in Abschnitt 2.1.1.1 beschrieben, erfolgt in der PLL die Bestimmung der Phasenlage des Eingangssignals. Dieses Eingangssignal stellt bei auftretender Mehrwegeausbreitung, eine Überlagerung von direktem Signal und den reflektierten Signalen dar. Mathematisch kann eine solche Überlagerung als Vektoraddition aufgefasst werden. Abbildung 2.10 veranschaulicht den so entstehenden Zusammenhang zwischen dem in der PLL nachgeführten Signal, repräsentiert durch den Vektor mit Amplitude  $A_C$  und Phase  $\phi_C$  in rad und den im einfachsten Fall vorhandenen Summanden: Dem direkten Signal, repräsentiert durch den Vektor mit Amplitude  $A_D$  und Phase  $\phi_D$  in rad und einem einzigen Mehrwegesignal, repräsentiert durch den Vektor mit Amplitude  $A_M$  und relativer Phase  $\theta$  in rad. Deutlich wird, dass durch das Nachführen des zusammengesetzten Signals anstelle des direkten Signals ein Trägerphasenmessfehler  $\Delta\phi$  in rad entsteht, welcher bei unterlassener Korrektur den in Gleichung 2.34 aufgeführten Fehler  $M_{i,f,\Phi}^k$  verursacht. Gelingt es hingegen, den Trägerphasenmessfehler  $\Delta\phi$  zu bestimmen, kann

eine Fehlerkorrektur vorgenommen werden. Diese Bestimmung kann, bei Kenntnis der Signalparameter der beteiligten Signale, unter Nutzung des in den Gleichungen 2.82 und 2.83 dargestellten Zusammenhanges erfolgen.

$$\tan \Delta\phi = \frac{\zeta_2}{A_D + \zeta_1} = \frac{A_M \sin \theta}{A_D + A_M \cos \theta} = \frac{\alpha A_D \sin \theta}{A_D + \alpha A_D \cos \theta} = \frac{\alpha \sin \theta}{1 + \alpha \cos \theta} \quad (2.82)$$

$$\Delta\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\alpha \sin \theta}{1 + \alpha \cos \theta} \right) \quad (2.83)$$

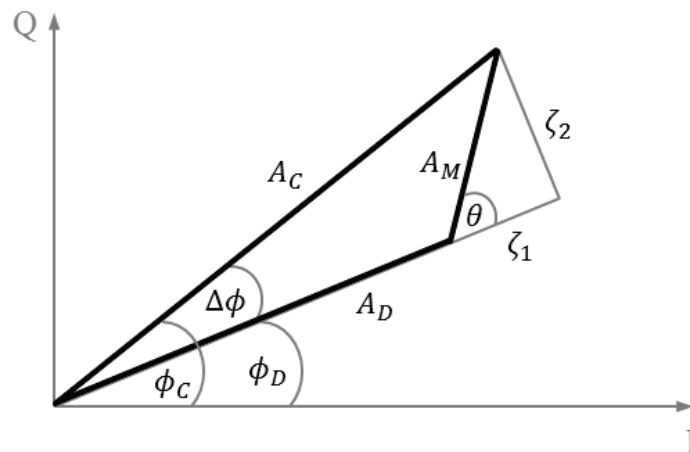
Treten statt eines einzelnen Mehrwegesignals  $n$  Mehrwegesignale auf, lässt sich zeigen, dass der in Gleichung 2.84 dargestellte, funktionale Zusammenhang zwischen Trägerphasenmessfehler  $\Delta\phi$  und den Signalparametern besteht, wobei der Index  $i$  die relative Amplitude und Phase des  $i$ -ten Mehrwegesignals kennzeichnet.

$$\Delta\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \sin \theta_i}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos \theta_i} \right) \quad (2.84)$$

Der durch den Phasenmessfehler  $\Delta\phi$  verursachte Entfernungsmessfehler  $M_{i,f,\Phi}^k$  (Gleichung 2.34) ergibt sich im Anschluss unter Verwendung der Wellenlänge  $\lambda$  der Trägerschwingung zu:

$$M_{i,f,\Phi}^k = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \lambda \quad (2.85)$$

In der Literatur diskutierte Verfahren zur Bestimmung des Phasenmessfehler  $\Delta\phi$  werden in Abschnitt 2.2.4 vorgestellt.



**Abbildung 2.10:** Darstellung der Überlagerung von direktem und reflektiertem Signal bei Mehrwegenausbreitung im Inphase-Quadratur-Diagramm. Nachgeführt wird in der PLL anstelle des direkten Signals mit Amplitude  $A_D$  und Phase  $\phi_D$  das Signal mit Amplitude  $A_C$  und Phase  $\phi_C$ , wodurch ein Trägerphasenmessfehler von  $\Delta\phi$  entsteht.

### 2.2.3.3 Amplitudenmessfehler

Wie in Abschnitt 2.1.1.2 ausgeführt, wird die Amplitude des Eingangssignals während seiner Verarbeitung in der PLL erfasst. Bei auftretender Mehrwegeausbreitung ist dies nicht die Amplitude  $A_D$  des direkten Signals, sondern die Amplitude  $A_C$  des Signalgemisches aus direktem und reflektiertem Signal (Abbildung 2.10). Dieser Wert liegt dann dem nach Gleichung 2.32 ermittelten und vom Empfänger bereitgestellten  $C/N_0$  zugrunde. Da die Amplitude  $A_C$  als Funktion der Signalparameter von direktem und reflektiertem Signal dargestellt werden kann<sup>61</sup> (Gleichung 2.86), gilt Gleiches auch für das  $C/N_0$ .

$$A_C^2 = A_D^2 + A_M^2 + 2A_D A_M \cos \theta \quad (2.86)$$

Dieser Zusammenhang kann genutzt werden, um die Mehrwegesignalparameter aus den vorliegenden  $C/N_0$ -Werten abzuleiten und so den Trägerphasenmessfehler  $\Delta\phi$  und den daraus resultierenden Entfernungsmessfehler  $M_{i,f,\Phi}^k$  (Gleichung 2.34) zu bestimmen. Für die dazu bisher in der Literatur diskutierten Ansätze sei auf Abschnitt 2.2.4 verwiesen.

## 2.2.4 Ansätze zur Detektion und Eliminierung des durch Mehrwegeausbreitung verursachten Messfehlers

Die Lösungsansätze zur Detektion und Eliminierung des durch Mehrwegeausbreitung verursachten Messfehlers lassen sich nach [Wan00] in drei Kategorien unterteilen, wobei als Bezugspunkt die Signalverarbeitung im Empfänger dient. Tabelle 2.1 am Ende dieses Abschnittes gibt einen Überblick über diese Kategorien und den ihnen zugeordneten Möglichkeiten der Beeinflussung von Effekten der Mehrwegeausbreitung.

### 2.2.4.1 Empfängerexterne Ansätze

Unter dieser Kategorie, in Tabelle 2.1 als *empfängerextern* bezeichnet, werden alle die Ansätze zusammengefasst, die den Einfluss der Mehrwegeausbreitung vor der eigentlichen Signalverarbeitung verringern sollen. Dazu zählen eine geeignete, d.h. mehrwegearme Standortwahl des Empfängers sowie die Verwendung von Antennen mit günstigem Antennendesign. Darunter ist zum einen eine Richtcharakteristik gemeint, die Signale mit von RHCP abweichender Polarisation sowie Signale aus niedrigen Elevationen stark dämpft. Zum anderen fallen darunter zusätzlich verwendete Elemente wie große Antennengrundplatten und Choke-Ringe, die das Empfangen von Signalen unterhalb der Horizontlinie verhindern sollen. In [NEJ11] wird

<sup>61</sup> Dieser funktionale Zusammenhang lässt sich unter Verwendung des Kosinussatzes für Dreiecke aus den in Abbildung 2.10 skizzierten Beziehungen der die Signale repräsentierenden Vektoren herleiten.

ferner gezeigt, dass ein zusätzlicher Einsatz von mikrowellenabsorbierendem Material einen Mehrwert generiert. Dessen ungeachtet ist bei den Grundplatten die an den Plattenrändern auftretende Signalbeugung und (wie auch bei Choke-Ring-Elementen) die fehlende Wirksamkeit bei reflektierten Signalen aus größeren Elevationen als nachteilig anzusehen.<sup>62</sup>

#### 2.2.4.2 Empfängerinterne Ansätze

Diese Kategorie beinhaltet die *empfängerinternen* Ansätze, d.h. die Ansätze, die die eigentliche Signalverarbeitung im Empfänger betreffen: Gemeint sind die Signalstruktur sowie die Anzahl und Eigenschaften der Korrelatoren in Verbindung mit geeigneten Diskriminatoren. Beide Ansätze haben die Verringerung des Mehrwegefehlers auf den Codebeobachtungen zum Ziel. Hinsichtlich der Signalstruktur führt einerseits eine höhere Bitrate der Codes auf Grund der dadurch zur Verfügung stehenden kürzeren Korrelatorabstände (in s) zu einem geringeren Mehrwegeeinfluss ([vDie14]). Andererseits variieren bei verschiedenen Modulationsarten auf Grund der unterschiedlichen Charakteristiken ihrer Autokorrelationsfunktionen und der damit verbundenen Eigenschaften im Tracking-Prozess die Maximalwerte erreichbarer Mehrwegefehler. So können bei Verwendung von *Binary Offset Carrier (BOC)*-modulierten Signalen, in Abhängigkeit der Wahl des Korrelatorabstandes, deutlich geringere obere Schranken für diese Werte realisiert werden, als bei Verwendung von *Binary Phase Shift Keying (BPSK)*-modulierten Signalen ([Che+14]).

Ein erster Ansatz zur Reduzierung des Mehrwegeeinflusses durch Modifikation des Korrelators stellt die Verringerung der Verschiebung der Code-Repliken dar. Dieser sogenannte enge Korrelator (engl. *Narrow Correlator*) wird in [vDFF92] vorgestellt. Ein zweiter Ansatz besteht in der Erhöhung der Anzahl der Korrelatoren und der damit verbundenen Möglichkeit, die gestiegene Anzahl an Korrelationswerten zu nutzen, um die durch Mehrwegeausbreitung verursachte zusätzliche Laufzeitverzögerung zu bestimmen oder aber zunächst Anzahl und Signalparameter vorhandener Mehrwegesignale zu schätzen und zu eliminieren. Der letztere Ansatz, bekannt als *Multipath Estimating Delay Locked Loop* wird in [Tow+95b] und [Tow+95a] vorgestellt.<sup>63</sup> Ungeachtet der großen Bedeutung dieser Verfahren sowie der darauf basierenden Weiterentwicklungen für die Reduktion des durch Mehrwegeausbreitung hervorgerufenen Fehleranteils ist festzuhalten, dass dieser, insbesondere bei kurzen Umweglängen kleiner 30 m, nicht vollständig eliminiert werden kann ([SSN13]).

---

<sup>62</sup> Vgl. dazu die Anmerkungen in [Wan00] und [SSN13]. Für Erläuterungen zu verschiedenen Ausführungen von GNSS-Antennen sei auf [LRT15] verwiesen.

<sup>63</sup> Eine umfangreiche Übersicht und detaillierte Erläuterungen zu den verschiedenen Varianten der Korrelatorauslegung inklusive vergleichender Analysen sind in [Irs08] zu finden.



### 2.2.4.3 Weiterverarbeitung der Beobachtungen

In diese letzte Kategorie gehören all jene Ansätze, die durch die Weiterverarbeitung der Messgrößen im Anschluss an die Signalverarbeitung eine Verringerung des durch die Mehrwegeausbreitung verursachten Messfehlers zu erzielen versuchen. Während ein Teil der Ansätze auf die unterschiedliche Gewichtung zur Verfügung stehender Beobachtungen bei der Positionsbestimmung fokussiert, beruht ein anderer Teil darauf, den Mehrwegefehler zu schätzen.

**Gewichtungsansätze.** Wie in Abschnitt 2.1.2.1 erwähnt, erfolgt eine Gewichtung meist unabhängig von einem bestimmten Fehleranteil elevations- und/oder  $C/N_0$ -abhängig. In Zusammenhang mit einer expliziten Reduzierung des Einflusses der Mehrwegeausbreitung wird in der Literatur insbesondere die Verwendung einer  $C/N_0$ -basierten Gewichtung für die Codebeobachtungen diskutiert ([TM13] und [Gro+13]). Dies ist (theoretisch) möglich, da die extremalen Mehrwegefehler  $M_{i,f,R}^k$  mit den extremalen Signalamplituden und damit extremalen  $C/N_0$ -Werten zusammenfallen.<sup>64</sup> In [Bil06] wird jedoch gezeigt, dass in der Praxis nur wenige Empfänger  $C/N_0$ -Werte ausgeben, die diesen theoretischen Zusammenhang widerspiegeln. Im Gegensatz zu den Codebeobachtungen treten extremale  $C/N_0$ -Werte bei relativen Phasen  $\theta = 0$  ( $C/N_0$  maximal) und  $\theta = \pi$  ( $C/N_0$  minimal) auf. In beiden Fällen ist der resultierende Mehrwegefehler  $M_{i,f,\Phi}^k = 0$  (vgl. Abbildung 2.10). Eine  $C/N_0$ -abhängige Gewichtung der Phasenbeobachtungen ist daher ungeeignet.

**Schätzung des Mehrwegefehlers.** Neben den verschiedenen Gewichtungsansätzen werden in der Literatur Möglichkeiten diskutiert, den durch die Mehrwegeausbreitung verursachten Messfehler zu schätzen und zu eliminieren. Dabei kommen zum einen Varianten zum Einsatz, die, zusätzlich zu den Beobachtungen der Station selbst, Informationen anderer Stationen und Sensoren nutzen, zum anderen werden Varianten beschrieben, die ausschließlich Daten der Station verwenden. Zu den erstgenannten Varianten zählt die Nutzung von Umgebungsmodellen für das Detektieren von Mehrwegefehlern in den Codebeobachtungen wie sie in [Bra+07] vorgestellt werden.

Des Weiteren werden Beobachtungen zusätzlicher Stationen verwendet, um den Mehrwegefehler in den Phasenbeobachtungen sowie seinen Einflusses auf die Koordinaten abzuschätzen. Basis einer derartigen Auswertung bilden entweder doppelt differenzierte Beobachtungen der Trägerphase oder die Koordinatenreihen selbst. In [WM00] werden Daten eines Stationsnetzwerkes analysiert. Die Vielzahl an möglichen Kombinationen von Stationen und Satelliten

<sup>64</sup> Eine ausführliche Herleitung dieses Zusammenhanges ist in [Bil06], [BD97] oder [Gro13b] zu finden.

für doppelt differenzierte Beobachtungen erlaubt das Detektieren und Abschätzen eventuell vorhandener Mehrwegefehler in den Phasenbeobachtungen. Zahlreiche Ansätze beschränken sich hingegen auf die Entwicklung von Methoden für die Detektion und Eliminierung des Mehrwegefehlers für Anordnungen, bei denen Beobachtungen lediglich zweier Stationen zur Verfügung stehen. Ein Teil der Ansätze basiert auf der Analyse der doppelt differenzierten Beobachtungen, wobei Analyseverfahren zum Einsatz kommen, die eine Zerlegung des Signals in Signalanteile verschiedener Skalen bzw. Frequenzbereiche realisieren. So wird in [SM04], [SR05], [EEE08], [dSou+08] und [EEE09] die Wavelet-Analyse vorgeschlagen und jeweils kurze Sequenzen von Testdaten analysiert. Die vorgestellten Ansätze unterscheiden sich nur in der Wahl des genutzten Wavelets und des Schwellwertes für die Festlegung, welcher Signalanteil den Mehrwegefehler enthält. Anstelle der Wavelets kommt auch die in dieser Arbeit vorgestellte empirische Modenzerlegung (EMD) zur Anwendung. In [HW08a] werden Doppeldifferenzresiduen mittels EMD in Teilsignale (IMF) zerlegt und Mehrwegesignale, resultierend aus gerichteter Reflexion<sup>65</sup>, detektiert. Die Autoren machen jedoch weder Angaben zu den genutzten EMD-Parametern, noch zu der Datenbasis, auf deren Grundlage entschieden wird, welche der IMF als Mehrwegesignale identifiziert werden. Vergleichbares gilt für den in [WWR09] vorgestellten EMD-basierten Ansatz. Zwar wird hier die Gewinnung des Schwellwertes aus Datenlänge und Streuung der Daten diskutiert, Angaben zur Gewinnung der Daten, zur Charakterisierung des erwarteten Mehrwegefehlers und zu einer konkreten EMD-Implementierung werden jedoch nicht angegeben. Neben der signalanalytischen Behandlung der doppelt differenzierten Beobachtungen bzw. der Doppeldifferenzresiduen werden in einigen Veröffentlichungen Wavelet- und EMD-Analyse auf die Koordinatenreihen angewandt. In [ElG09] werden die Koordinatenreihen mittels Wavelet-Analyse zerlegt und vor der erneuten Zusammensetzung der jeweiligen Reihe der Signalanteil eliminiert, der mit einem Signal einer im Voraus bekannten Frequenz korreliert. In [BZZ10] werden Koordinatenreihen mittels EMD-Analyse zerlegt und ebenfalls Signalanteile eliminiert.<sup>66</sup>

Eine Möglichkeit den Mehrwegefehler zu schätzen, wenn keine zusätzlichen Daten anderer Stationen und Sensoren verwendet werden, besteht darin, statt einer einzigen Antenne, ein Antennen-Array zu nutzen ([RCF98], [FS01]). Ein derartiger Aufbau beruht auf der Idee, dass auf Grund der räumlichen Nähe der Antennen, die von ihnen empfangenen Mehrwegesignale stark korrelieren, so dass deren Signalparameter unter Einbeziehung der bekannten Geometrie

---

<sup>65</sup> Eine gerichtete Reflexion wird in dieser Veröffentlichung nicht explizit diskutiert, lässt sich allerdings auf Grund der sinusförmigen Anteile in den dargestellten Daten vermuten.

<sup>66</sup> In beiden die Analyse der Koordinatenreihen betreffenden Veröffentlichungen sind konkrete Einschätzungen zu den erzielten Ergebnissen aus der nur vage gegebenen Darstellung der Methoden und Testsignale nahezu unmöglich.

der Antennen zueinander geschätzt werden können. Anhand dieser Parameter kann der Phasenmehrwegefehler berechnet werden. In einer Basislinienauswertung<sup>67</sup> von Testdaten kann bei Verwendung der so bestimmten Fehler eine bis zu 70% geringere Standardabweichung in der Position nachgewiesen werden ([Ray99]).

Wird der Empfänger an nur einer Antenne betrieben, liegt der Schwerpunkt bei der Bestimmung des Mehrwegefehlers auf einer geschickten Kombination der verfügbaren Beobachtungen und  $C/N_0$ -Werte. Mögliche Ansätze richten sich nach der Anzahl der verfügbaren Frequenzen, der Art der Beobachtungen und der Länge des Beobachtungszeitraumes. Stehen Code- und Phasenbeobachtungen auf zwei Frequenzen zur Verfügung, lässt sich der Mehrwegefehler auf den Codebeobachtungen berechnen.<sup>68</sup> Stehen Code- und Phasenbeobachtungen nur einer Frequenz zur Verfügung, kann eine Code-Glättung (engl. *Code Smoothing*) durchgeführt werden. Der Mehrwegefehler auf den Codebeobachtungen wird dabei nicht berechnet, sondern lediglich tiefpassgefiltert.<sup>69</sup>

Eine weitere Möglichkeit, Einflüsse der Mehrwegeausbreitung zu detektieren, basiert auf der Tatsache, dass sich (für statische Empfänger und eine unveränderte Empfängerumgebung) die Satelliten-Empfänger-Reflektor-Konstellation periodisch wiederholt.<sup>70</sup> Die dadurch hervorgerufenen Mehrwegesignaturen sind unter anderem in den Residuen der Doppeldifferenzen sichtbar. In [WRC09] werden diese analysiert und die sich mit der Konstellationsperiode wiederholenden, charakteristischen Signalanteile als mehrwegebasiert identifiziert. In [Zho+08] und [ElG09] findet hingegen eine Analyse der Koordinatenreihen statt. Dafür werden diese zunächst mittels Wavelet-Analyse in Teilsignale zerlegt. Wie auch im Fall der Doppeldifferenzresiduen werden daran anschließend diejenigen unter ihnen als Mehrwegeanteile identifiziert, die im Zeitversatz der Konstellationsperiode eine starke Korrelation aufweisen.

Den Zusammenhang zwischen Phasenmehrwegefehler und Signalamplitude (vgl. Abschnitt 2.2.3.2) machen sich all jene Ansätze zu Nutze, die auf Basis der vom Empfänger bereitgestellten  $C/N_0$  Mehrwegesignalparameter schätzen und basierend auf ihnen den Phasenmehrwegefehler bestimmen. Voraussetzung ist dabei stets, dass die  $C/N_0$ -Werte repräsentativ sind, d.h.,

---

<sup>67</sup> Die Länge der Basislinie beträgt 500 m.

<sup>68</sup> In [Roc+95] ist eine ausführliche Herleitung zu finden. Eine kurze Zusammenfassung findet sich in Anhang A.1.

<sup>69</sup> Nähere Erläuterungen finden sich in Anhang A.1.

<sup>70</sup> Die Periode wird in Sterntagen angegeben und unterscheidet sich für die verschiedenen Satellitensysteme. Sie beträgt für GPS einen, für Beidou sieben, für GLONASS acht und für GALILEO 10 Sterntage ([Gro13b]). Diese Angaben sind Richtwerte. Die tatsächliche Periode weicht von diesen Werten in der Größenordnung von bis zu 10 s ab ([SSN13]), kann aber über Modelle, wie sie beispielsweise in [AL07] vorgestellt werden, berechnet werden.

dass sie die in Abbildung 2.10 sowie die in den Gleichungen 2.82 bis 2.84 dargestellten Zusammenhänge widerspiegeln. Dass dies nur auf wenige Empfänger zutrifft, wird in [Bil06] und [BAL07] gezeigt.

Erste Ansätze, wie eine Auswertung der  $C/N_0$ -Werte gestaltet sein kann, werden in [ACM94] und darauf aufbauend in [ACM96] und [CA98] diskutiert. Unter der Voraussetzung der Stationarität der Mehrwegesignale (konstante Amplitude und Frequenz), der Modellierung der Amplitude des direkten Signals als Polynom dritten Grades<sup>71</sup> sowie Kenntnis über die Antennencharakteristik, werden in [ACM94] und [ACM96] zunächst Anzahl und Frequenz der Mehrwegesignale mittels Lomb-Periodogramm<sup>72</sup> geschätzt. Über einen Least-Squares-Ansatz werden in einem zweiten Schritt Amplitude und Phase der Signale bestimmt. In [CA98] wird dieser Ansatz derart modifiziert, dass die Forderung nach Stationarität fallengelassen werden kann. Es sind nun auch zeitvariante Frequenzen und Amplituden zugelassen, die, wie auch in [ACM94] und [ACM96], in aufeinander folgenden Schritten geschätzt werden, wobei für die Schätzung der Frequenzen nun adaptive Kerbfilter<sup>73</sup> zum Einsatz kommen. In [RA99] werden die  $C/N_0$ -Werte genutzt, um zunächst die Lage des Reflektors, die daraus resultierende Umweglänge und die Amplitude des Mehrwegesignals, sowie die Amplitude des direkten Signals in einem iterativen Least-Squares-Verfahren zu bestimmen. Dann erfolgt unter Verwendung dieser Informationen die Berechnung des Trägerphasenmessfehlers. Die Autoren in [BLA03] verfolgen eine ähnliche Strategie, wie die Autoren in [ACM94] und [ACM96]. Zunächst werden Anzahl und Frequenzen der Mehrwegesignale bestimmt, in diesem Fall unter Verwendung eines Periodogramms. Danach erfolgt die Bestimmung der Amplituden und Phasen mittels Least-Squares-Ansatz.<sup>74</sup> In [BL07] werden nach der Modellierung des direkten Signals als Polynom höherer Ordnung<sup>75</sup> und Entfernung des dadurch verursachten Anteils aus den  $C/N_0$ -Werten mittels Wavelet-Analyse Anzahl und Frequenzen der enthaltenen Mehrwegesignale geschätzt. In [BLA08] werden dann in einem weiteren Schritt Amplitude und Phasen mittels Least-Squares-Verfahren bestimmt und der Trägerphasenmehrwegefehler berechnet. In einer Basislinienauswertung von Testdaten zeigt sich ein um 31% geringerer RMS-Wert der DD-Residuen, verglichen mit dem RMS-Wert bei Verwendung unkorrigierter Daten.

---

<sup>71</sup> Eine Begründung für diese Wahl bleiben die Autoren dem Leser schuldig.

<sup>72</sup> Hierbei handelt es sich um eine Least-Squares-Schätzung der im Signal enthaltenen trigonometrischen Funktionen. Eine ausführliche Beschreibung des Algorithmus ist in [Van69] und darauf aufbauend in [Lom76] zu finden.

<sup>73</sup> Für eine algorithmische Beschreibung sei auf [NP86] verwiesen.

<sup>74</sup> Die Autoren beschreiben ihr Vorgehen nur qualitativ. Eine genaue Umsetzung wird nicht erläutert. Angemerkt sei, dass die Parameter hier nicht als Funktion der Zeit, sondern als Funktion von  $\sin el$  untersucht werden, was im Fall ausschließlich horizontaler Reflektoren durchaus sinnvoll erscheint (vgl. Gleichungen 5.9 und 5.10).

<sup>75</sup> Vorgeschlagen wird, ohne Begründung, ein Polynom der Ordnung 3 bis 15.

Der in [Ros11] vorgestellte Ansatz basiert zunächst ebenso auf der Modellierung des direkten Signalanteils als Polynom höherer Ordnung. Unter der Voraussetzung des Vorhandenseins eines einzigen Reflektors, dessen Abstand zur Empfangsantenne zudem bekannt ist, werden die Mehrwegesignalparameter dann jedoch nicht mittels spektraler bzw. auf Least-Squares beruhender Analyseverfahren geschätzt, um daraus den Trägerphasenmessfehler zu berechnen. Vielmehr wird unter Verwendung der bekannten und in den Gleichungen 2.74, 2.83 und 2.86 gegebenen Zusammenhänge eine direkte Berechnung des Trägerphasenmessfehlers ermöglicht. Durch die Anwendung des Verfahrens auf Daten eines Experimentalaufbaus (vgl. Kapitel 5) sowie ausgewählter SAPOS-Stationen (vgl. Kapitel 6) können die Standardabweichungen der Doppeldifferenzresiduen und der Koordinatenkomponenten teilweise um bis zu 38% (Experimentalaufbau) bzw. 13% (SAPOS-Stationen) verringert werden.

**Tabelle 2.1:** Kategorisierung der verschiedenen Möglichkeiten, Effekte durch Mehrwegeausbreitung zu verhindern, zu verringern und zu eliminieren.

Kategorie	Möglichkeiten	Varianten
empfängerextern	Standortwahl Antennendesign	Richtcharakteristik Zusätzliche Hardware
empfängerintern	Signalstruktur Korrelatoren	Anzahl Anordnung
Weiterverarbeitung der Beobachtungen	Gewichtung  Schätzung des Mehrwegefehlers	Abhängig von Elevation Abhängig von $C/N_0$ Abhängig von Elevation und $C/N_0$  Multi-Stationen-basiert Umgebungsmodell-basiert Multi-Antennen-basiert Linearkombination-basiert Konstellation-basiert $C/N_0$ -basiert

## 2.3 Lösungsidee und spezielle Aufgabenstellung

Der in dieser Arbeit entwickelte Ansatz zur Verringerung des durch Mehrwegeausbreitung hervorgerufenen Fehleranteils beruht auf der Annahme, dass weder auf die Festlegung des Standortes noch auf die konkrete Auslegung der Hardware (spezielles Antennen- und Empfängerdesign) Einfluss genommen werden kann bzw. soll, sodass sich die Ideenfindung auf die Weiterverarbeitung der Beobachtungen konzentriert (vgl. Tabelle 2.1). Auf Grund der in Zukunft standardmäßig auch für zivile Nutzer zur Verfügung stehenden Code- und Phasenbeobachtungen auf mehreren Frequenzen kann davon ausgegangen werden, dass der Mehrwegefehler auf den Codebeobachtungen über die Bildung geeigneter Linearkombinationen abgeschätzt wird. Es bleibt also die Aufgabe der Entwicklung geeigneter Verfahren für die Behandlung des Mehrwegefehlers auf den Phasenbeobachtungen, wobei Varianten geeigneter Gewichtungen oder seiner Abschätzung in Frage kommen.

Wie bereits in Abschnitt 2.2.4.3 ausgeführt, sind sowohl elevations- als auch  $C/N_0$ -basierte Gewichtsansätze nur bedingt bzw. nicht geeignet, sodass die Aufgabe der Schätzung des Mehrwegefehlers fokussiert wird. Da nicht davon ausgegangen werden kann, dass stets zusätzliche Daten weiterer Stationen oder Umgebungsmodelle zur Verfügung stehen, soll eine gänzlich autonome Behandlung des Mehrwegefehlers anhand der vom Empfänger bereitgestellten Daten möglich sein, wobei eine echtzeitfähige Strategie angestrebt wird. Von den in Tabelle 2.1 vorgestellten Varianten verbleiben demnach die  $C/N_0$ -basierten Schätzmethoden als vielversprechender Ansatz für die Bestimmung des Phasenmehrwegefehlers, repräsentative  $C/N_0$ -Werte vorausgesetzt.

Die bisherigen Realisierungen der  $C/N_0$ -basierten Schätzmethoden besitzen jedoch, neben dem nachgewiesenen Potenzial einer deutlichen Verringerung des Mehrwegefehlers, einige Schwächen. So werden für die Bestimmung des direkten Signals Kenntnisse der Antennencharakteristik benötigt oder aber die  $C/N_0$ -Werte eines vollständigen Satellitendurchgangs, um es als Polynom höherer Ordnung zu modellieren. Des Weiteren werden, um die Voraussetzungen für die Verwendung diverser Signalanalyseverfahren zu schaffen, möglicherweise nicht zutreffende Annahmen zur Stationarität oder Linearität der Mehrwegesignale getroffen, wodurch die unter diesen Umständen gewonnenen Ergebnisse zu hinterfragen sind. Wünschenswert wäre demnach eine Methode, die diese a priori Informationen nicht verwendet und demnach das Potenzial besitzt, beliebige Mehrwegesignaturen echtzeitnah detektieren und auswerten zu können. Eine Methode, die diesen Anforderungen genügt, ist die Hilbert-Huang-Transformation. Da sie rein datengetrieben arbeitet und auf keiner analytischen, sondern ledig-

lich einer rein qualitativen Beschreibung basiert, besteht die Notwendigkeit einer umfassenden Analyse mit anschließender Adaption für die Bestimmung des Trägerphasenmehrwegefehlers sowie einer Beschreibung vorhandener Einsatzgrenzen. Dies soll anhand der Auswertung synthetischer Daten realisiert werden, da so idealisierte Signalkomponenten simuliert werden können und eine Abschätzung der maximal erreichbaren Ergebnisse vorgenommen werden kann.

Es ist ferner festzuhalten, dass die in der Literatur vorgestellten Ansätze vielfach ausschließlich anhand einer synthetischen oder sehr geringen Datenbasis vorgestellt werden. Oftmals wird zudem lediglich die Detektion einer Mehrwegesignatur nachgewiesen, nicht aber ein daraus eventuell resultierender Einfluss auf die Positionsbestimmung als solche. Eine systematische Datenanalyse, auch von unter realen Bedingungen aufgenommenen Messdaten, inklusive dem Vergleich korrigierter und nicht korrigierter Beobachtungen und zugehöriger Ergebnisse der Positionsbestimmung, ist jedoch für die Bewertung einer verwendeten Signalanalysemethode unabdingbar. Daher soll die Hilbert-Huang-Transformation nach ihrer Adaption für die Detektion von Mehrwegesignaturen und der Abschätzung des dadurch verursachten Trägerphasenmessfehlers in einer ersten Untersuchung auf Daten eines Experimentalaufbaus angewandt werden. Dies hat den Vorteil, dass die Umgebung so gewählt werden kann, dass die erwarteten Mehrwegesignalparameter und daraus resultierende Messfehler bekannt sind und somit eine erste Bewertung der Methode auf Basis eines Vergleichs zwischen erwarteten und tatsächlich realisierten Ergebnissen erfolgen kann. In einem zweiten Schritt soll die Hilbert-Huang-Transformation auf Daten von Stationen angewandt werden, die unter realen Bedingungen arbeiten, d.h. deren Umgebung nicht durch einen frei wählbaren Experimentalaufbau bestimmt wird. Um zu gewährleisten, dass tatsächlich das Potenzial einer Mehrwegefehlerkorrektur untersucht wird, sollen die durch andere Fehlerquellen verursachten Messfehler möglichst ausgeschlossen werden. Dafür bietet sich eine Basislinienauswertung an, wobei sowohl die Residuen der doppelten Differenzen als auch die Koordinatenreihen selbst bei Verwendung korrigierter und nicht korrigierter Phasenbeobachtungen vergleichend analysiert werden.

## Kapitel 3

# Hilbert-Huang-Transformation

Die Hilbert-Huang-Transformation (kurz: *HHT*) ist eine von Huang et al. in [Hua+98] veröffentlichte Analysemethode für Signale, die es ermöglicht, deren instantane Parameter zu bestimmen. Daher ist sie insbesondere für die Analyse von Signalen mit zeitvarianten Amplituden und Frequenzen von Interesse. In einem ersten Schritt wird das zu analysierende Signal mittels der Empirischen Modenzerlegung in Monokomponenten<sup>1</sup> zerlegt. Dieser Schritt ist notwendig, um die Voraussetzungen für die sich in einem zweiten Schritt anschließende Hilbert Transformation zu erfüllen, mittels der die Bestimmung der instantanen Signalparameter umgesetzt wird. Die Abschnitte 3.1 und 3.2 stellen die Empirische Modenzerlegung und die Hilbert-Transformation mit ihren bisher bekannten Modifikationen vor. Ferner enthalten die Abschnitte jeweils die bisher in der Literatur publizierten Ergebnisse diverser Testsignalanalysen, die zudem im Kontext dieser Arbeit interpretiert werden.

### 3.1 Empirische Modenzerlegung

Die Empirische Modenzerlegung (engl. *Empirical Mode Decomposition*, kurz: *EMD*) ist ein datengetriebener Algorithmus, mittels dessen die einzelnen Monokomponenten iterativ bestimmt werden. Datengetrieben meint dabei, dass im Gegensatz zu bekannten Signalanalysemethoden wie der Fourier- oder der Wavelet- Transformation keine a priori Basis (trigonometrische Funktionen oder Wavelets) festgelegt ist, sondern allein durch die zu analysierenden Daten selbst generiert wird. Zunächst stellt Abschnitt 3.1.1 die prinzipielle Funktionsweise des Algorithmus vor. Daran anschließend geht Abschnitt 3.1.2 auf das Kernstück der Empirischen Modenzerlegung, den Siebprozess (engl. *Sifting*) ein, in welchem die einzelnen Monokomponenten aus dem Signal gewonnen (ausgesiebt) werden. Die aus der Definition des EMD-Algorithmus resultierenden Eigenschaften der Methode werden in Abschnitt 3.1.3 diskutiert.

---

<sup>1</sup> Monokomponenten sind Signale, die sich als Funktion einer einzigen Frequenz darstellen lassen.



Fehlerabschätzung und Kriterien für die Qualitätsbewertung des Algorithmus, wie sie anhand von Testsignalen in der Literatur diskutiert werden, sind in Abschnitt 3.1.4 zusammengestellt. Auf Grund der daraus gewonnenen Erkenntnisse hinsichtlich der Limitierungen der Methode zur Bestimmung der Monokomponenten sind von verschiedenen Autoren Erweiterungen der EMD entwickelt und publiziert worden. Diesen widmet sich Abschnitt 3.1.5.

### 3.1.1 Das Grundprinzip der EMD

Ausgehend von dem Ziel, ein Signal in Monokomponenten zu zerlegen und damit die Grundlage zu schaffen, aussagekräftige instantane Signalparameter bestimmen zu können<sup>2</sup>, wählen Huang et al. für ein zu analysierendes Signal  $x$  den in Gleichung 3.1 dargestellten Modellansatz<sup>3</sup>.

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) + r_t(t) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{i=1}^n a_i(t)e^{j\omega_i(t)t}\right\} + r_t(t) \quad (3.1)$$

Das Signal  $x$  wird als additive Überlagerung von endlich vielen Signalen  $x_i$  mit zeitvarianten Amplituden  $a_i$  und Frequenzen  $\omega_i$  sowie einer Funktion mit maximal einem Extremum, dem Trend  $r_t$ , modelliert. Die Signale  $x_i$  sind Monokomponenten. Sie sind somit zu jedem Zeitpunkt  $t$  Funktion von lediglich einer Frequenz  $\omega_i \neq 0$ . Ausgehend von diesem Modellansatz definieren Huang et al. eine Klasse von Funktionen, die sogenannten Intrinsic Modenfunktionen (engl. *Intrinsic Mode Functions*, kurz: *IMF*) wie folgt:

**Definition (IMF).** Eine IMF ist eine Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Anzahl der Extrema ist gleich der Anzahl der Nullstellen oder unterscheidet sich von ihr um höchstens eins.
- An jedem Punkt im Definitionsbereich ist der Mittelwert der oberen und unteren Einhüllenden,  $e_o$  und  $e_u$ <sup>4</sup>, (engl. *upper and lower envelope*) der Funktion gleich Null.

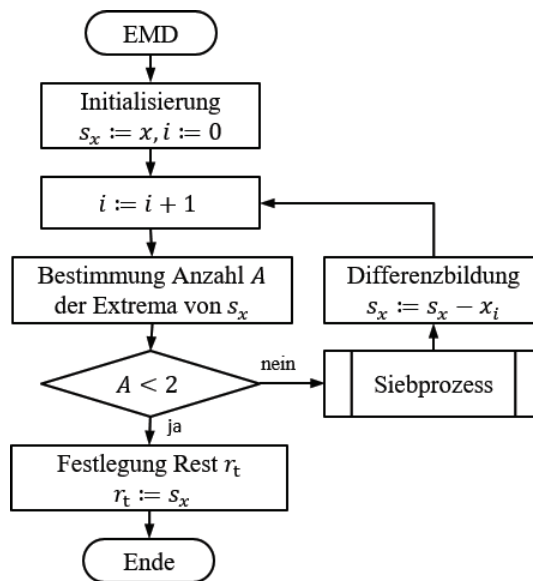
Die Bedingungen führen dazu, dass weder Oberwellen (Bedingung 1) noch ein Gleichanteil (Bedingung 2) zugelassen werden. Nach o.g. Definition gehören die  $x_i$  zur Klasse der IMF. Die Zerlegung eines gegebenen Signals  $x$  in diese ist Ziel der von Huang et al. entwickelten EMD. Sie extrahiert die  $x_i$  iterativ aus dem Signal  $x$ . Das Funktionsprinzip des Algorithmus ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Der Algorithmus wird mit dem zu analysierenden Signal  $x$  initialisiert.

<sup>2</sup> Eine ausführliche Begründung dieser Behauptung wird in Abschnitt 3.2 gegeben.

<sup>3</sup> [Hua+98].

<sup>4</sup> Eine obere bzw. untere Einhüllende  $e_o$  bzw.  $e_u$  ist eine Funktion, für die gilt:  $\forall t : x_i(t) \leq e_o(t)$  bzw.  $x_i(t) \geq e_u(t)$ . Dabei tritt die Gleichheit in den Maxima bzw. Minima der Funktion  $x_i$  ein.

Besitzt die Funktion mindestens zwei Extrema, wird in einem Siebprozess (vgl. Abschnitt 3.1.2) die erste IMF  $x_1$  gewonnen. Diese wird von dem zu analysierenden Signal subtrahiert. Die Differenz ist das nun zu analysierende Signal. Besitzt es mindestens zwei Extrema, wird die zweite IMF  $x_2$  ausgesiebt. Iterativ werden in dieser Weise alle IMF  $x_i$  gewonnen. Der Algorithmus endet, wenn das zu analysierende Signal weniger als zwei Extrema besitzt. Als Ergebnis liegen die  $n$  IMF  $x_i$  sowie der Trend  $r_t$  vor und damit die Zerlegung des Signals in Monokomponenten mit zeitvarianten Amplituden und Frequenzen und einen Trend.



**Abbildung 3.1:** Prinzipielle Funktionsweise der EMD. Der Siebprozess als Teilprozess der EMD ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

### 3.1.2 Der Siebprozess als zentrales Element der EMD

Das Aussieben einer IMF als Teilprozess der EMD ist ebenfalls ein iterativer Algorithmus. Seine Funktionsweise ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Der Algorithmus wird mit dem zu analysierenden Signal initialisiert. Erfüllt das Signal nach Subtraktion seines Mittelwertes die Kriterien einer IMF, endet der Algorithmus mit Ausgabe dieses Signals als IMF. Anderenfalls werden die o.g. Berechnungen solange durchgeführt, bis die Kriterien erfüllt sind. Aus dieser Darstellung heraus ergeben sich zwei Fragestellungen: Die erste betrifft das Wie der Bestimmung des Mittelwertes. Dieser wird nicht als globale Konstante angenommen, sondern vielmehr als lokale, zeitvariante Größe interpretiert. Global bedeutet, dass der Mittelwert  $\bar{x}_i$  aus den Funktionswerten  $y(t) \forall t \in \tilde{T}$ , mit  $\tilde{T}$  Analyseintervall, berechnet wird, und damit eine konstante Funktion  $y_m$  mit  $y_m(t) = \bar{y} \forall t \in \tilde{T}$  als Mittelwert der Funktion  $y$  auf  $\tilde{T}$  definiert werden kann. Lokal meint hingegen, dass der Mittelwert auf jedem Teilintervall  $I$  von  $\tilde{T}$  bestimmt wird und somit

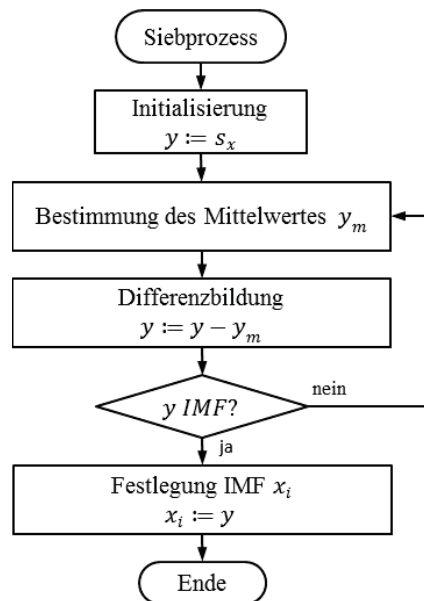


Abbildung 3.2: Prinzipielle Funktionsweise des Siebprozesses als Teilprozess der EMD.

die Funktion  $y_m$  mit  $y_m(t) = \overline{y(t)}$  als lokaler, zeitvarianter Mittelwert von  $x_i$  angesehen werden kann. Die zweite zu erörternde Fragestellung ist die eines implementierbaren Abbruchkriteriums für den Siebprozess, sprich der Überprüfung der Zugehörigkeit des Signals  $y$  nach Subtraktion der Funktion  $y_m$  zur Klasse der IMF. Während die Beantwortung der ersten Fragestellung keine Schwierigkeiten bereitet, ist die Beantwortung der zweiten Fragestellung nicht trivial. Die folgenden Abschnitte stellen die dazu bisher in der Literatur diskutierten Ideen vor.

### 3.1.2.1 Bestimmung des Mittelwertes

Die Verfahren für die Bestimmung des Mittelwertes  $y_m$  lassen sich in zwei Kategorien unterteilen. Die erste Kategorie (envelopebasierte Verfahren) fasst Ansätze zusammen, die auf der Bestimmung von oberen und unteren Einhüllenden, basierend auf Interpolation zwischen den Extremwerten, beruhen. Damit finden sich hier die Verfahren, die auf Variationen der von Huang et al. in [Hua+98] vorgeschlagenen Berechnungen setzen und damit dicht an der IMF-Definition bleiben. Ansatz der Verfahren der zweiten Kategorie ist die Vermeidung der Interpolation und damit verbundener Probleme.

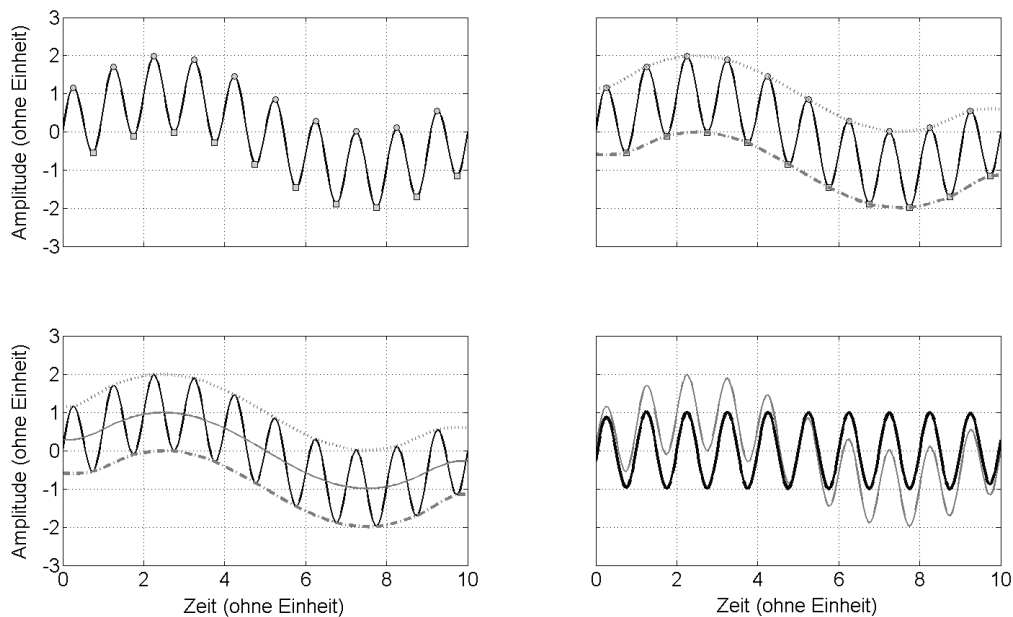
**Envelopebasierte Verfahren.** Das Grundprinzip dieser Verfahren ist in [Hua+98] beschrieben und in Abbildung 3.3 visualisiert. Nach der Bestimmung der Maxima und Minima des Signals  $y$  (oben links) bilden diese die Stützstellen für die Interpolationsfunktionen<sup>5</sup>  $e_o$  bzw.  $e_u$ , die für

<sup>5</sup> Eine ausführliche Darstellung zu Interpolationsfunktionen findet sich in Anhang C.2.

das Signal eine obere bzw. untere Schranke darstellen (oben rechts). Der punktweise Mittelwert  $m_y$  dieser Funktionen mit

$$m_y(t) = \frac{e_o(t) + e_u(t)}{2} \quad \forall t \in \tilde{T}^6 \quad (3.2)$$

wird als lokaler Mittelwert  $y_m$  des Signals interpretiert (unten links) und von diesem subtrahiert (unten rechts). Erfüllt das Differenzsignal die IMF-Kriterien, wird der Siebprozess erfolgreich beendet, anderenfalls erfolgt eine erneute Mittelwertbestimmung (vgl. Abbildung 3.2). Aus dieser Darstellung heraus ergeben sich drei im Folgenden zu diskutierende Aspekte des Verfahrens. So ist erstens die Genauigkeit zu untersuchen, die bei der Bestimmung der als Stützstellen genutzten Extremwerte des Signals  $y$  erreicht werden kann. Ein zweiter Punkt betrifft die Auswahl der Interpolationsfunktionen  $e_o$  und  $e_u$ . Deren Modellierung an den Intervallgrenzen ist eine dritte Fragestellung.

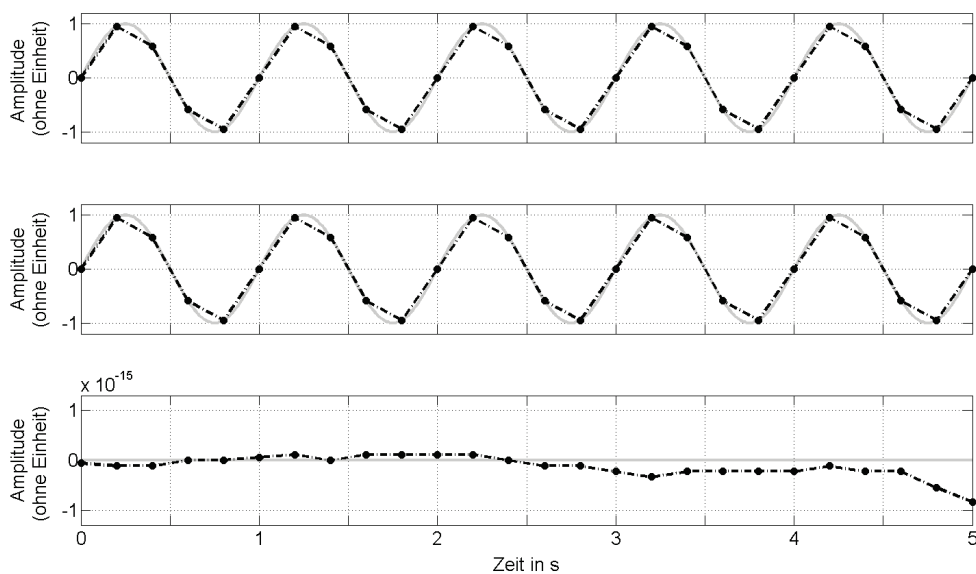


**Abbildung 3.3:** Prinzip envelopebasierter Verfahren. Oben links: Signal  $y$  mit Minima (Rechteck) und Maxima (Kreis). Oben rechts: Signal mit Minima und Maxima sowie den Einhüllenden  $e_o$  (Punkt) und  $e_u$  (Strich-Punkt). Unten links: Signal mit Einhüllenden und lokalem Mittelwert  $y_m$  (Linie). Unten rechts: Signal  $y$  (grau) und Differenzsignal  $y - y_m$  (schwarz). Erfüllt dieses Signal die IMF-Kriterien, wird der Siebprozess erfolgreich beendet.

Die EMD ist eine für kontinuierliche Signale entworfene Methode. Insbesondere kann der Siebprozess als nichtlinearer Operator für kontinuierliche Signale angesehen werden. Die Daten-

<sup>6</sup>  $\tilde{T}$  bezeichnet die Zeitspanne, für die Signalwerte vorliegen, z.B.  $\tilde{T} = [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1]$ .

grundlage der zu analysierenden realen Prozesse ist jedoch (zumeist) von diskreter Form. So kann es vorkommen, dass die Abtastzeitpunkte nicht mit den Zeitpunkten übereinstimmen, an denen das kontinuierliche Signal Extremwerte besitzt. Da diese Werte jedoch Stützstellen der Interpolationsfunktionen sind, stellt sich in diesem Fall die Frage, inwieweit die Korrektheit der IMF-Extraktion beeinflusst wird. In Abbildung 3.4 wird der beschriebene Sachverhalt visualisiert. Im oberen Bild ist eine Sinus-Schwingung mit einer Frequenz  $f = 1$  Hz (grau) sowie das mit  $f_s = 5$  Hz abgetastete diskrete Signal (schwarz) dargestellt. Abbildung 3.4 (Mitte) zeigt die erste extrahierte IMF für das kontinuierliche (grau) bzw. das diskrete Signal (schwarz), Abbildung 3.4 (unten) die Differenz zwischen Originalsignal und IMF. Da eine reine Sinus-Schwingung bereits die Eigenschaften einer IMF besitzt, sollte sie erwartungsgemäß in genau eine IMF zerlegt werden und die Differenz zwischen Sinus-Schwingung und extrahierter IMF demzufolge gleich Null sein. Dies ist nicht der Fall, wenn, wie in Abbildung 3.4 verdeutlicht, die Abtastzeitpunkte nicht die Zeitpunkte umfassen, an denen das Signal extremal ist.



**Abbildung 3.4:** Einfluss der Bestimmung der Extremwerte auf die Korrektheit der IMF-Extraktion. Kontinuierliches Signal (grau); diskretes Signal (schwarz). Oben: Zu zerlegendes Signal. Mitte: Erste extrahierte IMF. Unten: Differenz zwischen Signal und IMF.

In welcher Größenordnung liegen nun die durch die Diskretisierung verursachten Abweichungen (kurz: *Diskretisierungsfehler*)? Dieser Frage wird in verschiedenen Veröffentlichungen nachgegangen. In [SMB05] wird eine Überabtastung vorgeschlagen, die dem 5-fachen der Nyquistfrequenz entspricht. Deren Wirksamkeit wird anhand der Zerlegung linear frequenzmodulierter Signale und eigens entwickelter Qualitätsparameter nachgewiesen. Rilling und

Flandrin nähern sich der Frage in [RF06] von der theoretischen Seite und geben für Interpolationsfunktionen, die stückweise linear sind, eine obere Schranke für den Diskretisierungsfehler an. Anhand der Zerlegung stückweise kubischer Polynome überprüfen sie ihren Ansatz. Dabei werden Überabtastungen zwischen 2-facher und 200-facher Nyquistfrequenz vorgenommen. Untersuchungen in [RF09] schließen an diese Analysen an, sind jedoch umfangreicher und detaillierter. Als Fazit der in der Literatur publizierten Erkenntnisse kann festgehalten werden, dass die Diskretisierung des zu analysierenden Signals durchaus Einfluss auf die Genauigkeit der extrahierten IMF hat. Sie liegt jedoch im Bereich der erzielbaren, numerischen Genauigkeit und damit in vernachlässigbarer Größenordnung (Abbildung 3.4 (unten)). Somit sind auch Algorithmen zur exakten Bestimmung der Extremwertpunkte, wie sie in [XHX08] und [XHZ09] diskutiert werden, für diese Arbeit von untergeordneter Bedeutung. Die Extremwertbestimmung erfolgt, wie auch in [ROB08], allein anhand des vorliegenden, diskreten Signals:

$$(y(n) > y(n-1)) \wedge (y(n) > y(n+1)) \Rightarrow y(n) \quad \text{Maximum} \quad (3.3)$$

$$(y(n) < y(n-1)) \wedge (y(n) < y(n+1)) \Rightarrow y(n) \quad \text{Minimum} \quad (3.4)$$

Der in [KM08] vorgeschlagene Ansatz, die Stützstellen nicht, wie in den bisherigen Ausführungen erläutert, in jeder Iteration des Siebprozesses neu zu bestimmen<sup>7</sup>, sondern für den gesamten Siebprozess unverändert zu belassen, hat sich in der Anwendung nicht durchgesetzt, da er keinen Mehrwert generiert.

Im Anschluss an die oben beschriebene Festlegung der Stützstellen für die Einhüllenden, stellt sich nun die Frage nach geeigneten Interpolationsfunktionen<sup>8</sup>. In [HAC10] wird die Verwendung einer trigonometrischen Funktion vorgeschlagen, diese jedoch nur für den Fall fourieranalysierbarer Signale empfohlen. Eher verbreitet ist die Anwendung von stückweise zusammengesetzten Funktionen, sogenannten Spline-Funktionen<sup>9</sup> (kurz: *Splines*). Huang et al. verwenden in [Hua+98] kubische Splines. Der Wunsch nach einem ähnlich glatten, jedoch flexibleren Spline<sup>10</sup> führt Peel, Pegram und McMahon zu den rationalen Splines [PPM07], die einen zusätzlichen, sogenannten Tensionsparameter besitzen, über den sich der Graph modifizieren lässt. In [PPM08] analysieren sie deren Potenzial anhand von Testdatensätzen und validieren die dort getroffenen Aussagen auf Grundlage einer umfangreichen Datenbasis in [PMP09]. Für die von ihnen verwendeten, rationalen Splines wählen sie einen Ansatz, der [Spä90] ent-

<sup>7</sup> Die Stützstellen können in jeder Iteration des Siebprozesses variieren, da die Extrema zu Beginn jeder Iteration neu bestimmt werden.

<sup>8</sup> In Anhang C.2 sind ausführliche Erläuterungen zu den mathematischen Grundlagen der Interpolation zu finden.

<sup>9</sup> Zur Definition und ergänzenden Erläuterungen sei auf Anhang C.2 verwiesen.

<sup>10</sup> Der kubische Spline ist auf dem gesamten Intervall zweimal stetig differenzierbar (vgl. Anhang C.2). Ähnlich glatt bedeutet, dass diese Eigenschaft beibehalten werden soll.

nommen ist und dort eingehend diskutiert wird. Ist dabei  $M := \{(t_k, y_k) | k \in 0, \dots, n\}$  die Menge der Stützpunkte (zum Beispiel Minimal- bzw. Maximalpunkte einer Funktion  $y$ ), dann stimmt  $S_p : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Intervall  $[t_k, t_{k+1}]$  mit  $k = 0, \dots, n - 1$  mit einer Funktion  $s_k : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  überein, wobei

$$s_k(t) = A_k v + B_k w + \frac{C_k v^3}{1 + pw} + \frac{D_k w^3}{1 + pv} \quad (3.5)$$

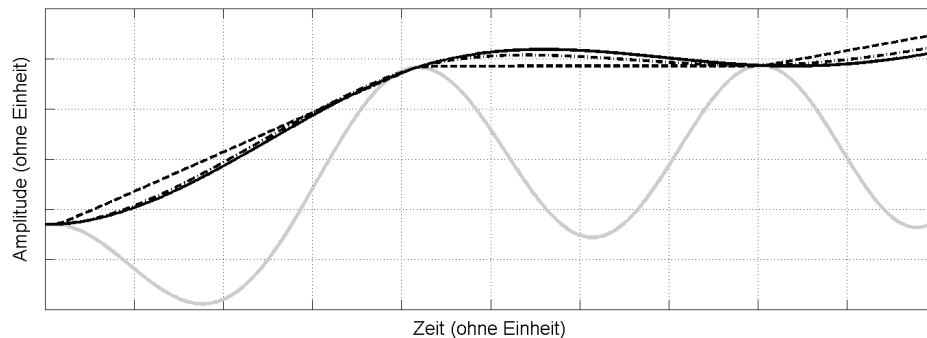
mit

$$v = 1 - w \quad (3.6)$$

und

$$w = \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (3.7)$$

Dabei weist der Index  $k$  darauf hin, dass die Parameter  $A_k, B_k, C_k$  und  $D_k$  intervallspezifische Parameter sind. Sie werden über die Anschlussbedingungen an den Stützstellen  $t_k$  bestimmt.<sup>11</sup> Über den bereits erwähnten, zusätzlichen Tensionsparameter  $p > -1$  ist der Graph des Splines adaptierbar. Abbildung 3.5 veranschaulicht die Graphen von  $S_p$  bei Wahl unterschiedlicher Werte für  $p$ . Für  $p = 0$  ist  $S_p$  kubischer Spline, für  $p \rightarrow \infty$  Polygonzug.



**Abbildung 3.5:** Darstellung der Graphen rationaler Splines (schwarz) nach Gleichung 3.5 für unterschiedliche Tensionsparameter  $p$ , die als obere Einhüllende eines Signals (grau) fungieren: Spline mit  $p = 0$  (durchgezogene Linie), Spline mit  $p = 1$  (Strich-Punkt), Spline mit  $p = 50$  (Strich). Je höher die Werte für  $p$ , desto *straffer* wird der Spline.

In engem Zusammenhang mit der Verwendung von Splines unter Nutzung der Extrema als Stützpunkte steht die Frage nach der Modellierung der Splines an den Intervallgrenzen des Analyseintervalls  $\tilde{T} = [\tilde{t}_0, \tilde{t}_l]$ . Grund dafür ist, dass erste und letzte Extremalstelle  $t_0$  und  $t_n$

<sup>11</sup> Eine Herleitung wird in Anhang C.2 gegeben.

nicht mit  $\tilde{t}_0$  und  $\tilde{t}_l$  zusammenfallen und der Spline nur auf  $T = [t_0, t_n]$  definiert ist. Es stellt sich also die Frage nach der Fortsetzbarkeit des Splines auf  $\tilde{T} = [\tilde{t}_0, \tilde{t}_l]$ , d.h. wie obere und untere Einhüllende auf den Intervallen  $[\tilde{t}_0, t_0]$  und  $[t_n, \tilde{t}_l]$  modelliert werden sollten. Eine allen zu diesem Thema publizierten Beiträgen zugrunde liegende Idee basiert auf der Generierung zusätzlicher Extrema außerhalb des Intervalls  $\tilde{T} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_l)$ . Diese dienen als zusätzliche Stützpunkte für die Spline-Interpolation, sodass Einhüllende berechnet werden können, die nicht nur auf  $T$ , sondern auf  $\tilde{T}$  definiert sind. Festgelegt werden demnach Stützstellen  $t_{-1} \leq \tilde{t}_0$  und  $t_{n+1} \geq \tilde{t}_l$  sowie die zugehörigen Stützwerte  $y_{-1}$  und  $y_{n+1}$ . Die Darstellung der konkreten Berechnung der Stützpunkte bleibt in den Publikationen jedoch häufig unvollständig.

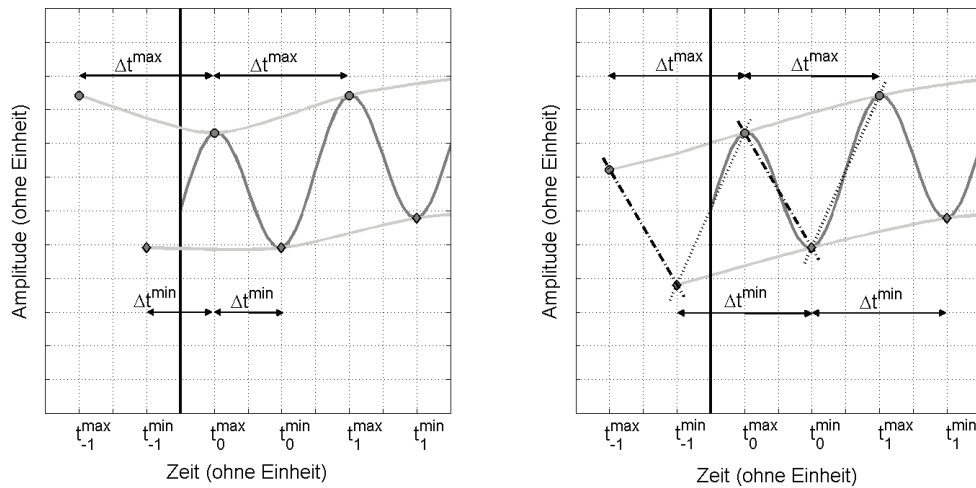
In [Hua+98] und [CT04] werden dem zu analysierenden Datensatz an den jeweiligen Intervallenden *charakteristische Schwingungen*<sup>12</sup> hinzugefügt, deren Amplitude, Frequenz und Phasenlage in Abhängigkeit der ersten bzw. letzten Extrema des Datensatzes gewählt werden. In [RFG03] wird eine *Spiegelachse* durch den Extrempunkt gelegt, welcher jeweils den geringsten Abstand zum Intervallanfang bzw. -ende besitzt. Die beiden dieser Achse nächstgelegenen Extrempunkte werden an ihr gespiegelt (Abbildung 3.6, links). Liegen die gespiegelten Punkte nicht außerhalb des Intervalls  $\tilde{T}$ , werden die Spiegelachsen in die Intervallgrenzen verschoben. Die Autoren von [Ami+05] machen bei der Festlegung der Stützpunkte keine Angaben zu den Stützstellen, die Ausführungen lassen allerdings vermuten, dass sie wie in [RFG03] gewählt werden. Die Berechnung der Stützwerte wird hingegen explizit angegeben. Sie werden durch Mitteln der den Intervallgrenzen nächstgelegenen zwei Maxima bzw. Minima bestimmt. Tritt der Fall ein, dass sich die Signalwerte  $y(\tilde{t}_0)$  bzw.  $y(\tilde{t}_l)$  außerhalb der Einhüllenden befinden, werden die Intervallgrenzen  $\tilde{t}_0$  bzw.  $\tilde{t}_l$  als Stützstellen und die dazugehörigen  $y(\tilde{t}_0)$  bzw.  $y(\tilde{t}_l)$  als Stützwerte festgelegt.

In dem in [DS04] vorgestellten und in [WQ08] modifizierten Ansatz werden die zusätzlichen Stützstellen so festgelegt, dass gilt:  $|t_{-1} - t_0| = |t_0 - t_1|$  bzw.  $|t_{n+1} - t_n| = |t_n - t_{n-1}|$ . Für die Bestimmung der Stützwerte werden nicht wie in den o.g. Publikationen Funktionswerte  $y$  genutzt. Vielmehr werden Geraden, definiert durch die den Intervallgrenzen nächstgelegenen Extrema, zur Konstruktion der Stützwerte  $y(t_{-1})$  und  $y(t_{n+1})$  verwendet (Abbildung 3.6, rechts). Neben der Festlegung der zusätzlichen Stützpunkte ist zu beachten, dass für die eindeutige Bestimmung der Splines zusätzliche Bedingungen festgelegt werden müssen.<sup>13</sup> In [DS04] sind dies Werte für die ersten, in [PPM08] für die zweiten Ableitungen in  $t_{-1}$  und  $t_{n+1}$ .

<sup>12</sup>Eine exakte Spezifizierung dieser Schwingungen und damit der durch diese Schwingungen gewonnenen, zusätzlichen Stützpunkte bleiben die Autoren dem Leser schuldig.

<sup>13</sup>Vgl. dazu die Ausführungen in Anhang C.2.





**Abbildung 3.6:** Prinzipskizze verschiedener Möglichkeiten zur Gewinnung der Einhüllenden am Intervallanfang. Um die Stützpunkte für obere und untere Einhüllende unterscheiden zu können, ist den Zeitpunkten der Index *max* bzw. *min* hinzugefügt. Das Signal (dunkelgrau) beginnt zum Zeitpunkt  $t_0$  (Senkrechte, schwarz). Links: Verfahren nach [RFG03] durch Spiegelung. Rechts: Verfahren nach [DS04]. Die Gewinnung zusätzlicher Stützpunkte erfolgt unter Nutzung linearer Funktionen, die durch die dem Intervallanfang nächstgelegenen Extrema bestimmt werden, sowie deren Abstand zueinander. Die Parallelität von Geraden ist jeweils durch eine gleiche Linienart gekennzeichnet.

**Direkte Verfahren.** Im Gegensatz zu envelopebasierten Verfahren, die den Nachteil haben, dass die mittels Interpolation konstruierten Einhüllenden nur unter Nutzung der Extremwerte gewonnen werden und damit nicht garantiert werden kann, dass tatsächlich zu jedem Zeitpunkt  $e_u(t) \leq x(t) \leq e_o(t)$  gilt, umgehen die direkten Verfahren die Interpolation. Sie nutzen mathematische Methoden, die die o.g. Forderung garantieren können, sodass insbesondere Konvergenzaussagen für die EMD möglich werden, was der eigentliche, weitreichende Beitrag dieser Verfahren ist.

In [Che+06] wird vorgeschlagen, den lokalen Mittelwert als Summe gewichteter B-Splines<sup>14</sup> zu modellieren, wobei die Wichtung aus den Extremwerten des Signals abgeleitet wird. Die Autoren zeigen, dass ähnlich gute Resultate wie bei der Verwendung envelopebasierter Verfah-

<sup>14</sup> Für nähere Erläuterungen zu den Vorteilen der Modellierung mit B-Splines sei auf [DR08] verwiesen.

ren erzielt werden, weisen jedoch gleichzeitig darauf hin, dass auch hier die Wahl der Spline-Ordnung und die Modellierung der Splines an den Intervallenden offene Fragestellungen sind. Diese Problematik kann mit der Entwicklung von nicht-splinebasierten Verfahren umgangen werden. In [DLN05] werden zwei derartige Ansätze vorgestellt. Beide basieren auf der Lösung partieller Differentialgleichungen (englisch: *partial differential equation*, kurz: *PDE*). Im ersten Ansatz wird der Mittelwert klassisch aus den Einhüllenden berechnet, wobei diese als Lösung eines Systems nicht linearer, parabolischer PDE vierter Ordnung gewonnen werden. In ihrem zweiten Ansatz bestimmen die Autoren den Mittelwert nicht unter der Nutzung von Einhüllenden, sondern gewinnen ihn direkt als Lösung einer nicht linearen, parabolischen PDE vierter Ordnung. In beiden Fällen werden die Lösungen für ausgewählte Testsignale<sup>15</sup> iterativ gewonnen und bewertet. Die erzielten Ergebnisse sind ähnlich denen der in [Hua+98] vorgeschlagenen Variante, ein rechentechnischer Vorteil wird allerdings erst für mehrdimensionale Signale gesehen. Diop et al. gelingt es in [DAB09], den Siebprozess als PDE zu modellieren. Lösung ihrer PDE sind demnach nicht Mittelwerte, sondern bereits die gesuchten IMF. In [DAB10] erweitern sie ihren Ansatz dahingehend, dass dieser für eine größere Klasse von Funktionen geeignet ist. Bewertet werden auch ihre Ansätze mit synthetischen Signalen.<sup>16</sup> Zu bedenken geben die Autoren, dass ihr PDE-Ansatz einen freien Parameter besitzt, dessen Wert empirisch festgelegt ist und den es sinnvoll zu wählen gilt.

Neben der direkten Modellierung des Mittelwertes als Spline-Funktion bzw. als Lösung von PDE gibt es in der Literatur Ansätze, ihn unter Nutzung von Methoden der Optimierung zu bestimmen. In [MP07] ist der Mittelwert Lösung eines quadratischen Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen. Modellansatz für den Mittelwert ist auch hier der eines Splines, sodass, wie im Fall des klassischen Ansatzes aus [Hua+98], die Wahl der Spline-Art und dessen Modellierung an den Intervallenden offene Fragen sind, die in [MP07] durch die Wahl eines kubischen Splines und einer Spiegelung des Signals an den den Intervallenden nächstgelegenen Extrema beantwortet werden. In [HK13] erfolgt die Bestimmung der oberen und unteren Einhüllenden als Lösung quadratischer Optimierungsaufgaben unter Nebenbedingungen. Der Mittelwert wird dann wie in [Hua+98] berechnet.

Die hier vorgestellten Alternativen zu den envelopebasierten Verfahren sind wie diese von der Festlegung bestimmter Parameterwerte (beispielsweise der Ordnung der PDE) abhängig. Für

---

<sup>15</sup> Es handelt sich hierbei zum einen um die Überlagerung zweier Dreieckschwingungen und einer Sinusschwingung sowie zweier frequenzmodulierter Sinusschwingungen und einer temporär vorhandenen, gaußgefensterten Sinusschwingung. Eine funktionale Beschreibung dieser Testsignale wird nicht gegeben.

<sup>16</sup> In diesem Fall handelt es sich um die Summe zweier Sinusschwingungen. Auf welcher Basis die Wahl der Signalparameter erfolgt ist, bleibt offen.

verschiedene Werte und Testsignale sind sie in den o.g. Publikationen evaluiert und als ähnlich gut bewertet. Da sie keinen überragenden Mehrwert generieren<sup>17</sup>, werden in der vorliegenden Arbeit klassische envelopebasierte Verfahren favorisiert. Für die Verwendung dieser gilt, dass auf Grund der hohen Flexibilität der rationalen Splines und den mit ihnen erlangten, vielversprechenden Analyseergebnissen in [PPM08] und [PMP09], diese für die im Rahmen dieser Arbeit vorzunehmenden Analysen geeignet erscheinen, wobei die Frage nach der Festsetzung der Parameter sowie der Spline-Modellierung an den Intervallenden einen noch zu diskutierenden Punkt darstellt.

### 3.1.2.2 Abbruchkriterien

Der Siebprozess wird abgebrochen, wenn nach  $k$  Iterationen die Funktion  $y$  als IMF identifiziert wird. Dafür ist rein formal zu prüfen, ob durch die Funktion die IMF-Eigenschaften erfüllt werden. Was theoretisch zunächst einfach erscheint, erweist sich in der rechentechnischen Umsetzung als nicht trivial. Dies liegt insbesondere daran, dass ein lokaler Mittelwert  $m \equiv 0$  faktisch nicht erreichbar ist. Es stellt sich also die Frage, wie klein  $\epsilon$  gewählt werden sollte, damit  $|m(t)| \leq \epsilon \ (\forall t \in \tilde{T})$  als genügend klein anzusehen ist. Je kleiner das  $\epsilon$  gewählt wird, desto höher wird die Anzahl  $k$  an benötigten Iterationen. Für  $k \rightarrow \infty$  führt dies zu dem folgenden, in [Wan+10] bewiesenen Resultat:

**Satz (Funktion der Einhüllenden).** Für jede Funktion mit wenigen Extrema<sup>18</sup> degenerieren obere und untere Einhüllende zu einem Paar symmetrischer, linearer Funktionen.  $\square$

Ist die Amplitude des zu analysierenden Signals nicht strikt monoton, bedeutet dies, dass die Einhüllenden zu konstanten Funktionen degenerieren und damit jede möglicherweise vorhandene Amplitudenmodulation von physikalischer Bedeutung beseitigt wird. In der praktischen Überprüfung an Testdatensätzen zeigt sich zwar, dass dieser Grenzfall konstanter Einhüllender selbst bei einer Anzahl an Iterationen in der Größenordnung von  $10^5$  noch nicht eintritt, ein hoher Grad an Symmetrie ist jedoch bereits erkennbar ([WL12]). Das  $\epsilon$  sollte also nicht so klein wie möglich, sondern nur so klein wie nötig gewählt werden, um die Anzahl an Iterationen zu beschränken. In der Literatur finden sich diverse Ansätze für die Festlegung von Abbruchkriterien. Diese modifizieren entweder die Forderung  $|m(t)| \leq \epsilon \ (\forall t \in \tilde{T})$  oder diskutieren die Festlegung einer Anzahl an Iterationen. In Anlehnung an [Wan+10] seien die Ansätze hier wie folgt klassifiziert:

<sup>17</sup> Der tatsächliche Mehrwert dieser Verfahren ist die Möglichkeit mathematisch fundierter Konvergenzaussagen, die jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sind.

<sup>18</sup> Dabei ist *wenig* in Relation zur Anzahl der Abtastschritte zu sehen, was hier stets vorausgesetzt wird.

**Cauchy-ähnliches Kriterium.** Der Name soll die Parallelität zu dem aus der Analysis bekannten Cauchy-Kriterium aufzeigen. Es besagt, dass eine Folge  $(a_k) \in \mathbb{R}$  genau dann konvergiert, wenn ab einem bestimmten Folgeglied der Abstand  $d(a_m, a_n)$  zweier Folgeglieder  $a_m$  und  $a_n$  beliebig klein wird, genauer:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N : \quad d(a_m, a_n) < \epsilon \quad (3.8)$$

Auf den Siebprozess übertragen, bedeutet dies die Betrachtung der Folge der Iterierten  $y$ . Der Siebprozess wird abgebrochen, sobald der Abstand  $SD_1$  aufeinander folgender Iterierter ein vorgegebenes  $\epsilon$  unterschreitet.<sup>19</sup> Der Abstand  $SD_1$  wird dabei von Huang et al. in ihrer Pionierarbeit [Hua+98] wie folgt definiert, wobei der Index  $k$  die  $k$ -te Iterierte kennzeichnet und  $N_A$  die Anzahl an Abtastpunkten bezeichnet.

$$SD_1 = \sum_{i=1}^{N_A} \left[ \frac{|y^{k-1}(i) - y^k(i)|^2}{|y^{k-1}(i)|^2} \right] \quad (3.9)$$

$SD_1$  kann auch als Summe aller relativen Energieänderungen pro Zeitschritt interpretiert werden. Die Autoren in [Hua+98] schlagen Schwellwerte von  $0,2 \leq SD_1 \leq 0,3$  vor. Ein Kritikpunkt an diesem Kriterium bezieht sich darauf, dass lokal große Abweichungen zu hohen Werten von  $SD_1$  führen und damit das Sieben fortgesetzt wird, obwohl die beiden Iterierten  $y^k$  und  $y^{k-1}$  möglicherweise bis auf wenige Zeitschritte nahezu identisch sind. Ein weiterer Kritikpunkt betrifft die vollkommene Unabhängigkeit dieses Kriteriums von der Definition einer IMF. So wird anhand dieses Kriteriums demnach zwar eine Entscheidung über den Abbruch des Siebprozesses getroffen, jedoch nicht überprüft, ob  $y = y^k$  tatsächlich die Eigenschaften einer IMF erfüllt. Erstgenanntem Kritikpunkt entgegenen die Autoren in [HW08b] mit Modifikationen von Gleichung 3.9, dargestellt in den Gleichungen 3.10 und 3.11.

$$SD_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_A} |y^{k-1}(i) - y^k(i)|^2}{\sum_{i=1}^{N_A} |y^{k-1}(i)|^2} \quad (3.10)$$

$$SD_3 = \frac{\sum_{i=1}^{N_A} |m_y^k(i)|^2}{\sum_{i=1}^{N_A} |y^k(i)|^2} \quad (3.11)$$

In Gleichung 3.11 bezeichnet  $m_y^k$  den Mittelwert der Einhüllenden der  $k$ -ten Iterierten, wie er in Gleichung 3.2 beschrieben ist. Im Gegensatz zu den Gleichungen 3.9 und 3.10, in denen relative Energieunterschiede aufeinander folgender Iterierter betrachtet werden, erfolgt in Gleichung

<sup>19</sup> Huang et al. setzen hier stillschweigend voraus, dass die Folge der Iterierten konvergiert, was bisher zwar an vielen praktischen Beispielen gezeigt, jedoch nicht mathematisch bewiesen worden ist.

3.11 die Bestimmung von  $SD_3$  allein mittels charakteristischer Werte der  $k$ -ten Iterierten. Bewertet wird hier die Energie des lokalen Mittelwertes  $m_y^k$  bezogen auf die Energie der  $k$ -ten Iterierten, wodurch ein Bezug zur IMF-Definition hergestellt und somit auf den o.g. zweiten Kritikpunkt eingegangen wird. Dennoch ist allen vorgestellten Varianten gemein, dass unter Nutzung aller Funktionswerte nur ein einziger, mit einem Schwellwert zu vergleichender Wert  $SD_i$  berechnet wird. Große Werte auf einem schmalen Teilintervall können also dazu führen, dass der Schwellwert überschritten wird, obwohl auf dem restlichen Intervall die Energie vernachlässigbar klein ist. Dies würde dann zu einer Fortsetzung der Iterationen führen, was, wie oben ausgeführt, zur Auslöschung physikalisch bedeutsamer Informationen führen kann. Rilling et al. greifen dieses Problem auf und stellen in [RFG03] ein Abbruchkriterium vor, welches lokale Fluktuationen zulässt. In [Wan+10] wird dieses Kriterium als Mittelwert-Kriterium bezeichnet.

**Mittelwert-Kriterium.** Die Idee von [RFG03] besteht darin, zwei Schwellwerte  $\theta_{S1}$  und  $\theta_{S2}$  zu definieren. Auf  $100(1 - \alpha_S)$  Prozent des Intervalls soll ein noch zu definierender Wert  $\sigma_S < \theta_{S1}$ , auf den restlichen  $100\alpha_S$  Prozent des Intervalls  $\sigma_S < \theta_{S2}$  gelten. Sie schlagen vor,  $\theta_{S2} \approx 10\theta_{S1}$  mit  $\theta_{S1} \approx 0,05$  sowie  $\alpha_S \approx 0,05$  zu wählen. Dies bedeutet, dass auf 5% des Intervalls ein um den Faktor 10 größerer Schwellwert und damit lokale Fluktuationen zugelassen sind. Der Wert  $\sigma_S$  (vgl. Gleichung 3.13) ist das zu jedem Zeitpunkt  $t \in \tilde{T}$  bestehende Verhältnis von lokalem Mittelwert  $m_y$  (Gleichung 3.2) und *Modenamplitude*  $a_S$  (Gleichung 3.12).

$$a_S(t) = \frac{e_o(t) - e_u(t)}{2} \quad (3.12)$$

$$\sigma_S(t) = \left| \frac{m_y(t)}{a_S(t)} \right| \quad (3.13)$$

Mit diesem Kriterium wird erreicht, dass bei Abbruch des Siebprozesses die Funktion  $y$  die zweite Eigenschaft einer IMF *genügend genau* erfüllt. Zusätzlich fordern die Autoren, dass der Unterschied zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Anzahl der Extrema kleiner gleich eins ist, sodass die Funktion  $y$  damit auch die erste Eigenschaft einer IMF erfüllt.

**Sifting-Kriterium.** Neben den o.g. Kriterien, bei denen der Abbruch des Siebprozesses unter Einbeziehung der zu analysierenden Daten entschieden wird, finden sich in der Literatur auch von der Datengrundlage (mehr oder weniger) unabhängige Vorschläge. So wird in [HSL99] empfohlen, eine feste Anzahl  $S_I$  an Iterationen vorzunehmen. Da diese Variante keine der IMF-Eigenschaften überprüft, wird als Alternative dazu ein Ansatz erwähnt, der darauf beruht, dass

die Anzahl der Nullstellen und die der Extrema für zwei aufeinander folgende Iterationen konstant bleibt. Diese beiden Varianten werden in [Hua+03] miteinander verknüpft. Die Autoren fordern eine unveränderte Anzahl an Nullstellen und Extrema über  $S_{I,fix}$  Siebiterationen. Nach einer Analyse von Testsignalen schlagen sie  $3 \leq S_{I,fix} \leq 5$  vor.

Das von Rilling et al. in [RFG03] beschriebene Abbruchkriterium kann als Weiterentwicklung der von Huang et al. in [Hua+98] und [HW08b] publizierten Kriterien favorisiert werden, da es als einziges Verfahren die IMF-Eigenschaften garantieren kann. Es wird daher für die Analysen im Rahmen dieser Arbeit verwendet.

### 3.1.3 Eigenschaften der EMD

Die Empirische Modenzerlegung ist, wie der Name andeutet, eine empirische Signalanalysemethode, deren großer Nachteil in einem fehlenden, mathematisch bewiesenen Fundament liegt. Die Überprüfung von Eigenschaften, die bei analytisch darstellbaren Signalanalysemethoden einfach und allgemeingültig aus ihrer mathematischen Beschreibung abgeleitet werden können, führt bei Anwendung der EMD teilweise zu unbeantworteten Fragestellungen. So interessiert beispielsweise, ob die Konvergenz des Verfahrens in jedem Fall gewährleistet ist und inwiefern die Zerlegung eindeutig und die für jedwede Signalanalyse aufgestellte Zielstellung, physikalisch signifikante Informationen aus einem Signal zu extrahieren, erfüllt ist. Eine weitere Fragestellung betrifft die Verwendung des Basisbegriffes für die Menge der erzeugten IMF. Während für Fourier- und Wavelet-Analyse eine Basis a priori bekannt ist, ein Signal also eindeutig mittels trigonometrischer Funktionen bzw. orthonormaler Wavelets dargestellt werden kann<sup>20</sup>, ist der Begriff im Fall der EMD zu adaptieren, da eine solche nicht allgemein angegeben werden kann<sup>21</sup>. In diesem Zusammenhang interessieren für die IMF auch Aussagen zur Eigenschaft der Orthogonalität, wie sie für die Basis in der Fourier-Analyse gegeben sind. Die bisher publizierten Erkenntnisse bzgl. dieser Eigenschaften (Konvergenz, Eindeutigkeit, physikalische Signifikanz, Basisbegriff, Orthogonalität) sind im Folgenden zusammengestellt.

**Konvergenz.** Allgemeingültige Aussagen zum Konvergenzverhalten können auf Grund der fehlenden analytischen Darstellung der EMD bisher nicht getroffen werden. Daher sind diejenigen Arbeiten vielversprechend, deren Modifikationsansätze für die EMD auf eine solche Darstellung abzielen. Dies sind beispielsweise Verfahren zur direkten Bestimmung des Mittelwertes, wie sie in Abschnitt 3.1.2.1 diskutiert werden. In der Praxis kann der Abbruch des

---

<sup>20</sup> Für nähere Erläuterungen sei auf [Mer10], [Bro+05] und [Heu06] verwiesen.

<sup>21</sup> Ansätze für die Charakterisierung von Basiselementen mit zeitvarianten Amplituden und Phasen werden in [XZ09] diskutiert.

Algorithmus bei geeigneter Wahl des Abbruchkriteriums erzwungen werden, wobei in diesem Fall zu untersuchen ist, inwieweit die extrahierten Signale die IMF-Eigenschaften erfüllen.

**Eindeutigkeit.** Je nach Wahl der EMD-Parameter werden unterschiedliche Zerlegungen des Signals realisiert. Demnach gibt es keine eindeutige Zerlegung, was zu der Fragestellung führt, inwieweit sich die Zerlegungen unterscheiden und welche der Zerlegungen als vertrauenswürdig anzusehen ist. In der Literatur finden sich zahlreiche Untersuchungen, deren Gegenstand die Festlegung von Konfidenzintervallen, sowohl für die Zerlegung synthetisch erzeugten Rauschens als auch für die Zerlegung realer Signale, ist. Resultate dieser Untersuchungen werden in Abschnitt 3.1.4.1 und Abschnitt 3.1.4.3 erläutert.

**Physikalische Signifikanz.** Wie schon in der Einleitung zu diesem Abschnitt erwähnt, ist das Ziel einer Signalanalyse, Informationen, die den zugrunde liegenden, physikalischen Prozess charakterisieren, zu extrahieren. Klassische Methoden wie die Fourier- oder Wavelet-Analyse stützen sich zwar auf ein mathematisches Fundament. Jedoch ist dieses an die Erfüllung bestimmter Voraussetzungen gekoppelt: Die Signale müssen linear und stationär (Fourier-Analyse), zumindest aber linear (Wavelet-Analyse) sein.<sup>22</sup> Diesen Bedingungen genügen reale Signale nur selten, sodass die mit o.g. genannten Methoden gewonnenen Resultate dementsprechend nur bedingt physikalische Bedeutung haben. Die EMD ist für die Analyse nicht linearer, nicht stationärer Signale geeignet, da keine Voraussetzungen an die zu analysierenden Signale gestellt werden, jedoch kann auch hier keine physikalische Signifikanz der einzelnen IMF gewährleistet werden.

**Basisbegriff.** Sowohl bei der Fourier- als auch bei der Wavelet-Analyse kann jeweils eine maximale Menge linear unabhängiger Funktionen ausgezeichnet werden, die den Funktionenraum  $L_2(\mathbb{R})$  aufspannt und demnach eine Basis von diesem bildet. So ist gewährleistet, dass jedes Element  $x \in L_2(\mathbb{R})$  eindeutig als Linearkombination dieser (a priori festgelegten) Basiselemente dargestellt werden kann. Die Menge der IMF, in die ein Signal  $x \in L_2(\mathbb{R})$  zerlegt wird, entzieht sich diesem Basisbegriff, da diese a posteriori, also erst nach Ausführung der EMD vorliegt, und allein durch das jeweilige  $x$  bestimmt wird. Es ist jedoch festzuhalten, dass jedes  $x \in L_2(\mathbb{R})$  für einen festen EMD-Parametersatz eindeutig in IMF zerlegt und aus der Menge der IMF das zugrunde liegende  $x$  mit Gleichung 3.1 vollständig rekonstruiert werden kann. Somit übernimmt die Menge der IMF die Rolle einer Art adaptiven Basis, wobei, wie in [HW08b] ausgeführt, offen bleibt, wie eine solche allgemein zu definieren ist und welche mathematischen Eigenschaften ihr zuzuordnen sind.

---

<sup>22</sup> Für die Definition der Linearität und Stationarität sei auf die Anhänge D.1 und D.2 verwiesen.

**Orthogonalität.** Die trigonometrischen Funktionen als Basiselemente der Fourier-Analyse sind paarweise orthogonal<sup>23</sup> zueinander. Dies hat den Vorteil, dass Signalanteile von  $x$  mit unterschiedlicher Frequenz durch verschiedene Basiselemente repräsentiert werden. Eine derartige Darstellung wäre auch bei der Durchführung der EMD wünschenswert, wobei die einzelnen IMF als eine Art von Basiselementen anzusehen wären. Zu beachten ist hier, dass im Gegensatz zu den Basiselementen der Fourier-Analyse, die IMF per Definition eine zeitlich variierende Frequenz besitzen können. Demnach muss ein bestimmter Frequenzbereich in verschiedenen Zeitintervallen nicht von ein und derselben IMF repräsentiert werden. Wichtig ist nur, dass er sich in einem bestimmten Zeitintervall nicht über mehr als eine IMF erstreckt. Orthogonalität hat im Fall der EMD demnach einen lokalen Charakter. Um diese (lokale) Orthogonalität zu erfassen, leiten [Hua+98] aus Energiebetrachtungen einen *Orthogonalitätsindex*  $OI_1$  her. Dabei seien  $E_x^T$  die Energie des Signals  $x$  im Intervall  $[0, T]$ ,  $x_i$  die  $i$ -te IMF,  $n$  die Anzahl der IMF<sup>24</sup> und  $N_A$  die Anzahl an Abtastpunkten. Für die Signalenergie  $E_x^T$  gilt:

$$E_x^T = \sum_{k=1}^{N_A} x^2(k) = \sum_{k=1}^{N_A} \left( \sum_{i=1}^{n+1} x_i(k) \right)^2 = \sum_{k=1}^{N_A} \left( \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2(k) + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x_i(k)x_j(k) \right) \quad (3.14)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{N_A} x_i^2(k) + \sum_{k=1}^{N_A} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x_i(k)x_j(k) \quad (3.15)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} E_{x_i}^T + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{N_A} x_i(k)x_j(k) \quad (3.16)$$

Sind die IMF  $x_i$  und  $x_j$  orthogonal, ist der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung 3.16 Null. Die Signalenergie  $E_x^T$  ist in diesem Fall gleich der Summe der Signalenergien  $E_{x_i}^T$  der IMF. Wird das in jedem Zeitschritt berechnete Produkt  $x_i(k)x_j(k)$  auf die Energie des Signals  $x$  zu diesem Zeitpunkt normiert, ergibt sich der in [Hua+98] vorgeschlagenen und in Gleichung 3.17 dargestellte Orthogonalitätsindex  $OI_1$ .

$$OI_1 = \sum_{k=1}^{N_A} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_i(k)x_j(k)}{x^2(k)} \quad (3.17)$$

Dieser Index besitzt mehrere Defizite. Zum einen kann der Quotient zu einem Zeitpunkt  $k$ , an dem das Signal  $x$  eine Signalamplitude von nahe Null besitzt, einen betragsmäßig großen Wert annehmen, und somit zu einem Index führen, der (möglicherweise unberechtigt) suggeriert,

<sup>23</sup> Dies bedeutet, dass für je zwei Elemente das Skalarprodukt den Wert Null annimmt. Für nähere Erläuterungen sei auf [Bro+05] und [Heu06] verwiesen.

<sup>24</sup> [Hua+98] beziehen in die Berechnung auch den Trend  $r_t$  ein. Er wird in den Gleichungen 3.14 bis 3.17 als  $x_{n+1}$  bezeichnet.



dass die IMF nur ein geringes Maß an Orthogonalität<sup>25</sup> aufweisen. Auf der anderen Seite kann der Index durchaus auch bei Vorliegen von in hohem Maße nicht orthogonalen IMF einen Wert von nahe Null annehmen, wenn sich auf Grund unterschiedlicher Vorzeichen Summanden aufheben. Peel, McMahon und Pegram schlagen daher in [PMP09] einen modifizierten und in Gleichung 3.18 dargestellten Orthogonalitätsindex  $OI_2$  vor.

$$OI_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{j<i} \left| \sum_{k=1}^{N_A} x_i(k)x_j(k) \right|}{\sum_{k=1}^{N_A} (x(k) - r_t(k))^2} \quad (3.18)$$

### 3.1.4 Testsignalanalyse - Fehlerabschätzung und Bewertungsansätze

Die EMD ordnet jedem Signal  $x$  seine Zerlegung in  $n$  IMF  $x_i$  und einen Trend  $r_t$  zu. Somit kann sie als Übertragungssystem mit Eingang  $x$  und Ausgang  $\{r_t, x_i | i \in \{1, \dots, n\}\}$  angesehen werden. Aufgrund des Siebprozesses ist die EMD ein nichtlineares System. In Anlehnung an die Möglichkeiten zur Analyse linearer, zeitinvarianter Systeme<sup>26</sup> werden in der Literatur Ansätze diskutiert, die EMD durch ihre Antwort auf diverse Testsignale zu charakterisieren. Dabei sind insbesondere Fragestellungen von Interesse, die die EMD-Parameterauswahl für zulässige und optimale Zerlegungen eines Signals betreffen. Diese Fragestellungen beinhalten die Suche nach Kriterien, anhand derer die Festlegung der *Zulässigkeit* und *Optimalität* einer Zerlegung erfolgt.

Die bisher publizierten Untersuchungen lassen sich in drei Bereiche untergliedern: Anhand synthetischer, stochastischer Signale wird die Filterbank-Struktur der EMD herausgearbeitet. Synthetische, deterministische Signale werden genutzt, um die Trennbarkeit von Signalen unterschiedlicher Frequenz zu untersuchen. Schlussendlich wird anhand vorliegender Messwerte aus unterschiedlichen Wissenschaftsgebieten die Nutzbarkeit der EMD für die Analyse realer Daten untersucht. Die folgenden Abschnitte gehen jeweils auf die in den drei Bereichen in der Literatur diskutierten Erkenntnisse ein.

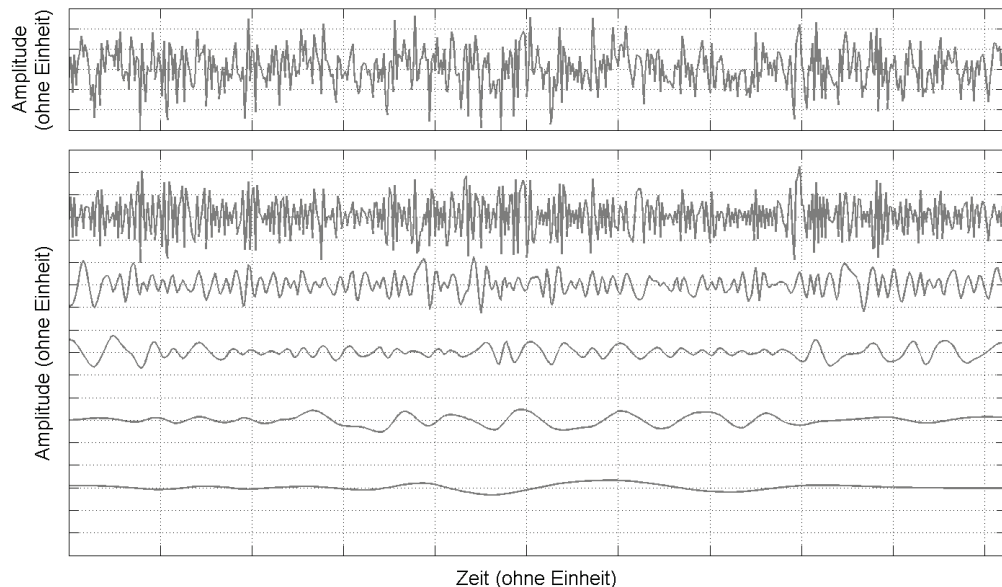
#### 3.1.4.1 Analyse synthetischer, stochastischer Signale

Die in den Abschnitten 3.1.1 und 3.1.2 beschriebene Struktur des Algorithmus führt zu einer Zerlegung des Signals, die in der Literatur als *Fine-to-Coarse-Nature* bezeichnet wird. Je eher

<sup>25</sup> Aus mathematischer Sicht ist die Frage nach der Orthogonalität damit beantwortet, ob das definierte Skalarprodukt den Wert Null besitzt. *Geringes Maß* soll aus ingenieurtechnischer Sicht bedeuten, dass das Skalarprodukt *stark* von diesem Wert abweicht.

<sup>26</sup> Vgl. [Mer10].

eine IMF ausgesiebt wird, desto hochfrequenter (fine), je später sie ausgesiebt wird, desto niederfrequenter (coarse) ist sie (vgl. Abbildung 3.7). Diese Feststellung führt zu der Frage, inwiefern die EMD als Filterbank, d.h. als Anordnung von Hoch-, Band- und Tiefpassfiltern<sup>27</sup> beschrieben werden kann und inwieweit sich die möglichen Filter allgemeingültig charakterisieren lassen. Verschiedene Autoren von zu dieser Thematik veröffentlichter Literatur wählen für ihre Analysen Weißes Rauschen<sup>28</sup> als Eingangssignal des Übertragungssystems EMD, da in diesem Signal alle Frequenzen enthalten sind. Des Weiteren wird in der Literatur der Frage nachgegangen, inwiefern die EMD geeignet ist, den Grad der Korreliertheit stochastischer Prozesse und damit Farbiges Rauschen zu beschreiben. Die bisher publizierten Erkenntnisse zur Zerlegung von Weißem und Farbigem Rauschen sind im Folgenden zusammengefasst.



**Abbildung 3.7:** Darstellung der *Fine-to-Coarse-Nature* der EMD. Normalverteiltes Weißes Rauschen  $x$  (oben) wird mittels EMD in seine IMF  $x_i$  zerlegt (unten). Die IMF sind in absteigender Reihenfolge angeordnet, beginnend mit der ersten, endend mit der letzten. Sie sind einheitlich skaliert, für eine bessere Visualisierung jedoch versetzt. Deutlich sichtbar ist die Abnahme der Amplitude und der Frequenz mit dem Extraktionszeitpunkt.

**Weißes Rauschen.** Die in Abbildung 3.7 dargestellte Zerlegung von normalverteiltem Weißem Rauschen verdeutlicht, dass sowohl die Beträge der (zeitvarianten) Frequenzen als auch die

<sup>27</sup> Vgl. [Mer10].

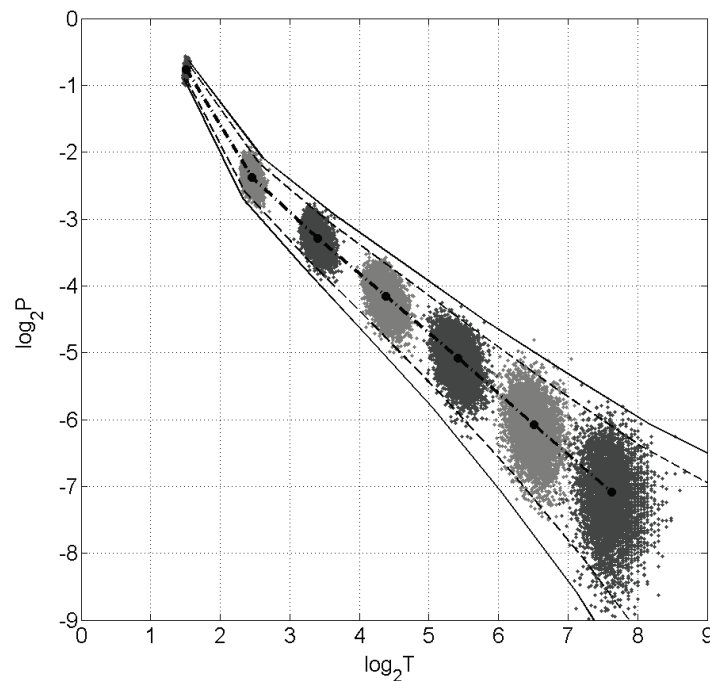
<sup>28</sup> Unter Weißem Rauschen versteht man einen unkorrelierten, stochastischen Prozess. Für nähere Erläuterungen sei auf Anhang D.2 verwiesen.

der (zeitvarianten) Amplituden einer IMF abnehmen, je später sie ausgesiebt wird. In [HW04] und [FRG04] wird dieser Zusammenhang untersucht und quantitativ erfasst. Wu und Huang postulieren in [HW04], dass das Produkt aus mittlerer Periodendauer  $T_i$  und der Leistung  $P_i$  für alle IMF  $i > 1$  identisch ist und es somit einen (im doppelt logarithmischen Maßstab zur Basis  $\zeta^{29}$ ) linearen Zusammenhang zwischen diesen Größen gibt (Gleichung 3.19, Abbildung 3.8). Die Leistung  $P_i$  der  $i$ -ten IMF wird dabei nach Gleichung 3.20 berechnet und die mittlere Periodendauer  $T_i$  aus der Anzahl der Nullstellen im Analyseintervall abgeleitet.

$$P_i T_i = \text{const.} \Rightarrow \log_{\zeta} P_i + \log_{\zeta} T_i = \text{const.} \quad (3.19)$$

mit

$$P_i = \frac{1}{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} |x_i(t)|^2 \quad (3.20)$$



**Abbildung 3.8:** Zerlegung von 5000 GWR-Datensätzen à  $2^{12}$  Datenpunkten in IMF. Dargestellt ist für alle Datensätze die Leistung der ersten 7 IMF als Funktion ihrer mittleren Periodendauer. Werte für die ungeraden IMF sind dunkelgrau, für die geraden IMF hellgrau dargestellt. Die Median-Werte aller IMF  $x_i, i \geq 2$  (Strich-Punkt) liegen auf der durch Gleichung 3.19 beschriebenen Gerade. Ferner sind die 0,01 und 0,99-Quantile (Linie) sowie die 0,05 und 0,95-Quantile (Strich) angegeben.

<sup>29</sup> Wu und Huang stellen diesen Zusammenhang im doppelt logarithmischen Maßstab zur Basis  $e$  dar.

Ergänzend zu o.g. Analysen untersuchen sowohl Wu und Huang in [HW04] als auch Flandrin et al. in [FRG04] die Leistungsdichtespektren (engl. *power spectrum density*, kurz: *PSD*) der einzelnen IMF auf Selbstähnlichkeit. Es stellt sich heraus, dass sich die vermutete Ähnlichkeit der PSD tatsächlich quantifizieren lässt und für den Fall von Weißem Rauschen der in Gleichung 3.21 gegebene Zusammenhang zwischen dem PSD  $S_i$  der  $i$ -ten IMF und dem PSD  $S_j$  der  $j$ -ten IMF gilt, wobei die Autoren  $\rho$  mit  $\rho \approx 2$  angeben.

$$S_i(f) = S_j(\rho^{i-j}f) \quad \text{mit } i > j \geq 2 \quad (3.21)$$

Da auf Grund dieser Skalierung die relative Bandbreite  $b_{PSD}$  der PSD der verschiedenen IMF konstant bleibt<sup>30</sup>, wird die EMD in [FRG04] auch als *Filterbank mit Constant-Q-Bandpassfiltern* bezeichnet<sup>31</sup> (vgl. Abbildung 3.9).

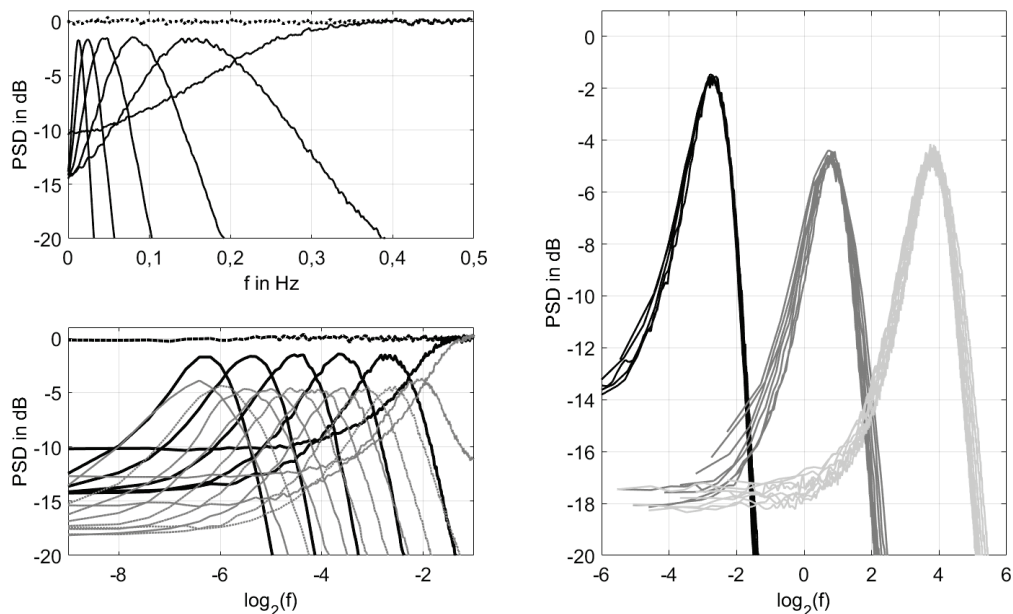
Sowohl in [HW04] als auch in [FRG04] werden die Analysen mit wenigen Siebiterationen ausgeführt und so wird in [WH10] der Frage nachgegangen, ob die Filterbank-Aussagen nicht in Abhängigkeit der Anzahl dieser Iterationen zu diskutieren sind. Die Autoren weisen nach, dass dem tatsächlich so ist. Je mehr Iterationen durchgeführt werden, desto kleinere Werte nimmt das  $\rho$  in Gleichung 3.21 an, wobei die untere Schranke bei  $\rho = 1$  liegt. Des Weiteren sei die Selbstähnlichkeit in Abhängigkeit der Datensatzlänge zu diskutieren, wobei gilt, dass die Werte für  $\rho$  umso kleiner werden, je länger der Datensatz ist. Abbildung 3.9 veranschaulicht die soeben beschriebenen Sachverhalte. Mit steigender Anzahl an Iterationen bzw. Datenpunkten steigt auch die Anzahl der IMF, in die ein Signal zerlegt wird. Die Überlappung der Spektren der einzelnen IMF nimmt zu, die relativen Bandbreiten bleiben hingegen konstant.

Neben der Beschreibung der EMD als Filterbank wird auch die Beschreibung der Dichtefunktionen der Amplituden bzw. die der mittleren Periodendauer der verschiedenen IMF (kurz: *Amplituden-Dichtefunktion* bzw. *Perioden-Dichtefunktion*) diskutiert. In [HW04] wird nach Auswertung erster Analysen von gleich- und normalverteiltem Weißem Rauschen die These aufgestellt, dass, unabhängig von der Amplituden-Dichtefunktion des zu analysierenden Weißem Rauschens, die Amplituden der zugehörigen IMF jeweils normalverteilt seien. Diese These wird in [Sch+09] widerlegt. Es wird gezeigt, dass die Amplituden-Dichtefunktionen der einzelnen IMF sowohl von der Datensatzlänge als auch der Anzahl der Iterationen im Sieb-

<sup>30</sup> Die relative Bandbreite  $b_{PSD}$  ist definiert als:  $b_{PSD} = \frac{f_o - f_u}{f_m}$ , wobei  $f_o$  die obere Grenzfrequenz,  $f_u$  die untere Grenzfrequenz und  $f_m$  die Mittenfrequenz bezeichnet. Ausführliche Erläuterungen finden sich in [Hof98].

<sup>31</sup> Ist die relative Bandbreite aller Filter einer Filterbank gleich, ist eine gleichmäßige Auflösung  $Q_f = \frac{f}{df} = const.$  möglich. Hierbei bezeichnet  $df$  den Abstand von zwei Frequenzen im Spektrum, was gleichbedeutend mit der Auflösung ist. Für ausführliche Informationen sei auf [Bro91] verwiesen.

prozess abhängen. Während die Amplituden-Dichtefunktion der ersten IMF unabhängig von Datensatzlänge und Anzahl der Iterationen stets bimodal ist, gilt für alle später ausgesiebten IMF, dass ihre Amplituden mit zunehmender Länge des Datensatzes und steigender Anzahl an Iterationen durch multimodale Dichtefunktionen beschrieben werden können. Die Perioden-Dichtefunktionen sind hingegen laut [WH10] unabhängig von der Anzahl der Siebiterationen und unterscheiden sich ferner für alle IMF nur marginal<sup>32</sup>.



**Abbildung 3.9:** Filterbankstruktur der EMD. Links, oben: Ein GWR-Datensatz von  $N_A = 2^9$  Punkten (schwarz, Punkt) wird bei fixierter Anzahl an Siebiterationen  $S_I = 2^3$  in IMF (schwarz) zerlegt. Während die erste IMF Hochpass-Charakter besitzt, können alle weiteren IMF als Bandpässe interpretiert werden. Links, unten: Wird der Datensatz mit  $S_I = 2^9$  Siebiterationen zerlegt (grau), überlappen sich die Spektren der einzelnen IMF stärker als bei Wahl von  $S_I = 2^3$  (schwarz). Rechts: Skalierung der PSD der IMF  $x_i$ ,  $i \geq 2$  nach Gleichung 3.21.  $N_A = 2^9$ ,  $S_I = 2^3$ ,  $\rho = 1,85$  (schwarz),  $N_A = 2^9$ ,  $S_I = 2^9$ ,  $\rho = 1,38$  (dunkelgrau),  $N_A = 2^{12}$ ,  $S_I = 2^9$ ,  $\rho = 1,38$  (hellgrau). Unabhängig von Iterationsanzahl und Datensatzlänge bleibt die relative Bandbreite aller IMF-Spektren erhalten. (Für eine bessere Sichtbarkeit sind die Spektren für die unterschiedliche Konfigurationen versetzt angeordnet.)

**Farbiges Rauschen.** Neben der Analyse von Weißem Rauschen, gehen verschiedene Autoren der Frage nach, ob und wie die Filterbank-Struktur der EMD auch im Fall von korreliertem, sogenanntem Farbigem Rauschen erhalten bleibt, indem sie fraktionales Gaußsches Rau-

<sup>32</sup>Die Beschreibung der Dichtefunktionen erfolgt in den zitierten Publikationen ausschließlich qualitativ.

schen (engl. *fractional Gaussian noise*, kurz: *fGn*) untersuchen. Dabei heißt ein diskreter, stochastischer Prozess fraktionales Gaußsches Rauschen vom Index  $H$  (Hurst-Komponente) mit  $0 < H < 1$  genau dann, wenn es sich um einen mittelwertfreien, stationären Gaußschen Prozess handelt, dessen Autokorrelationsfunktion Gleichung 3.22 entspricht (vgl. [FG04])<sup>33</sup>.

$$R(k) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} (|k-1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k+1|^{2H}) \quad \text{mit } 0 < H < 1 \quad (3.22)$$

Das Leistungsdichtespektrum derartiger Prozesse kann nach [FG04] durch den in Gleichung 3.23 gegebenen, im doppelt-logarithmischen Maßstab linearen Zusammenhang approximiert werden. Für  $H = 0,5$  liegt Weißes Rauschen vor und die Gleichungen 3.22 und 3.23 nehmen die dafür charakteristischen Werte  $R(0) = \sigma_\varepsilon^2$  und  $R(k) = 0, \forall k \neq 0$  sowie  $\log S_H(f) = c, \forall f$  an.

$$\log S_H(f) \approx (1 - 2H) \log |f| + c \quad (3.23)$$

Die als Ergebnis der Analysen von Weißem Rauschen herausgearbeitete Filterbank-Struktur der EMD wird nach der Untersuchung von Farbigem Rauschen in [FG04] und [FGR11] allgemeiner formuliert (vgl. Gleichung 3.24). Die bisherigen Erkenntnisse sind darin als Spezialfall für  $H = 0,5$  (Weißes Rauschen) enthalten.

$$S_{i,H}(f) = \rho_H^{(2H-1)(i-j)} S_{j,H}(\rho^{i-j} f) \quad (3.24)$$

mit

$$\rho_H \approx 2,01 + 0,2 \left( H - \frac{1}{2} \right) + 0,12 \left( H - \frac{1}{2} \right)^2 \quad (3.25)$$

Ähnlich den Untersuchungen, wie sie für Weißes Rauschen durchgeführt worden sind, versuchen Flandrin et al. in [FG04] und [FGR11] Aussagen zu Amplituden-Dichtefunktionen in Abhängigkeit der Hurst-Komponente zu treffen. Wie auch im Fall der Spektren der verschiedenen IMF stellen sie eine Selbstähnlichkeit dieser Dichtefunktionen  $p_A$  fest, die sich für alle IMF  $x_i, i \geq 2$  mit Gleichung 3.27 beschreiben lässt.<sup>34</sup>

$$p_A(x_{i,H}) = \beta_H^{(i-j)} p(\beta_H^{(i-j)} x_{j,H}) \quad (3.26)$$

mit

$$\beta_H := \rho_H^{H-1} \quad (3.27)$$

<sup>33</sup> Für weiterführende Informationen vgl. [Kou02].

<sup>34</sup> Wie bereits im Zusammenhang mit Weißem Rauschen diskutiert, ist die Ähnlichkeit auch hier von Datenlänge und Anzahl an Siebiterationen abhängig.

Die durch die Analyse von Rauschprozessen herausgearbeiteten Charakteristika der EMD können dazu genutzt werden, um festzustellen, ob ein rein stochastisches Signal vorliegt oder ein Signalgemisch aus stochastischen und deterministischen Anteilen, wobei letztere als zu extrahierende Information interpretiert werden. So werden beispielsweise in [HW04] die IMF als signifikant bewertet, deren Leistung über dem für reine Rauschprozesse ermittelten 0,99-Quantil liegt (vgl. Abbildung 3.8). In [FGR04] und [FGR11] wird ein derartiges Vorgehen für die Rauschunterdrückung (engl. *denoising*) bzw. die Trend-Beseitigung (engl. *detrending*) genutzt. Des Weiteren kann auf Grundlage der analytischen Beschreibung der Selbstähnlichkeit in Abhängigkeit der Hurst-Komponente eine Schätzung der Korreliertheit vorliegender Rauschprozesse, wie beispielsweise in [FG04] und [Gon+07]) beschrieben, vorgenommen werden.

Die Ergebnisse der Analyse von stochastischen Prozessen und die Ansätze für die Bewertung von Signalgemischen bilden für die Detektion von Mehrwegesignalen eine vielversprechende Grundlage. Die in dieser Arbeit untersuchten  $C/N_0$ -Werte können als additive Überlagerung von periodischen und Rauschanteilen modelliert werden (vgl. Abschnitt 2.1.2.2). Ziel ist es, die IMF herauszufiltern, die die periodischen, durch die Mehrwegeausbreitung hervorgerufenen Signalanteile repräsentieren. Die Festsetzung der für diese Entscheidung benötigten Schwellwerte erfordert umfangreiche Voruntersuchungen, da, wie gezeigt, die Spektren und damit die Varianz der IMF von Datenlänge, Iterationsanzahl und Korreliertheit der enthaltenen Rauschprozesse abhängt. Diese Vorarbeiten werden ausführlich in Kapitel 4 beschrieben.

### 3.1.4.2 Analyse synthetischer, deterministischer Signale

In der Literatur liegt das Hauptaugenmerk bei der Analyse synthetischer, deterministischer Signale auf der Untersuchung elementarer, trigonometrischer Funktionen<sup>35</sup>. Zwei Fragestellungen werden dabei diskutiert, die Auflösung und das sogenannte *Mode Mixing*.

**Auflösung.** Bei der Fragestellung der Auflösung interessiert, unter welchen Bedingungen die Summe mehrerer der oben erwähnten Funktionen mittels EMD so zerlegt wird, dass jede der erzeugten IMF eine der Funktionen repräsentiert. Diese Untersuchungen zielen darauf ab, festzustellen, inwieweit ein Signalgemisch, bestehend aus Signalen unterschiedlicher Amplitude und Frequenz als Überlagerung einzelner Signale oder aber als ein einziges Signal interpretiert wird. Dabei ist letztere Interpretation keineswegs als Versagen der EMD zu bewerten, wie das folgende, in [RF08] verwendete Beispiel zeigt. Mathematisch kann ein Signal  $x$ , welches aus zwei Cosinus-Schwingungen zusammengesetzt ist, sowohl als additive Überlagerung

---

<sup>35</sup> Gemeint sind Sinus- und Cosinus-Funktionen unterschiedlicher, zeitvarianter Amplitude und Periodizität.

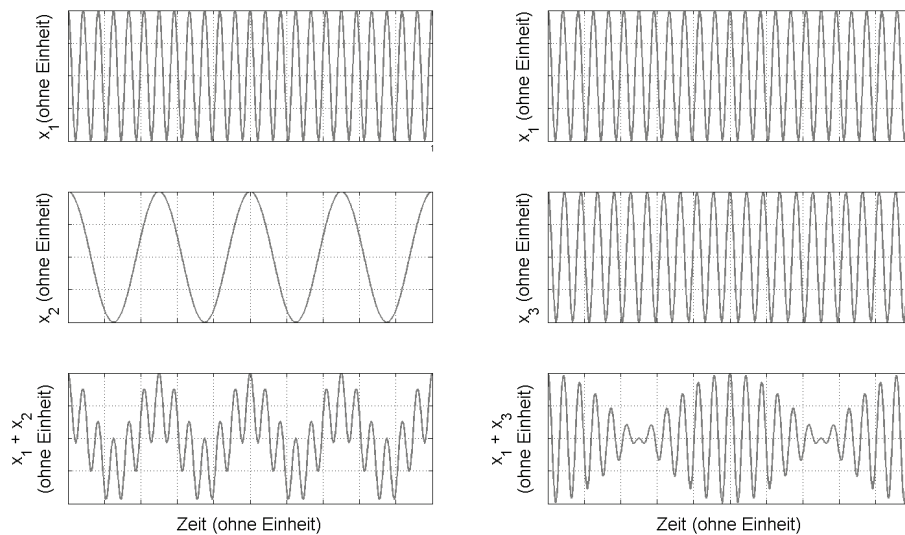
(Gleichung 3.28) dieser als auch als amplitudenmodulierte Schwingung (Gleichung 3.29) geschrieben werden.

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) \quad (3.28)$$

$$= 2 \cos \pi(f_1 - f_2)t \cos \pi(f_1 + f_2)t \quad (3.29)$$

$$= a_x(t) \cos 2\pi f t \quad (3.30)$$

Im Fall der Interpretation als Überlagerung zweier Cosinus-Schwingungen wäre zu erwarten, dass das Signal  $x$  durch die EMD in genau zwei IMF zerlegt wird, wobei jede IMF genau eine der Schwingungen konstanter Amplitude und Frequenz repräsentiert. Bei Interpretation als amplitudenmodulierte Schwingung sollte die EMD das Signal  $x$  in genau eine IMF mit zeitvarianter Amplitude  $a_x$  und konstanter Frequenz  $f$  zerlegen. Welche der beiden mathematisch gleichwertigen Darstellungen gewählt wird, hängt davon ab, welche Interpretation physikalisch sinnvoll ist. So nimmt beispielsweise das menschliche Ohr bei  $f_1 \approx f_2$  nicht zwei unterschiedliche Töne, sondern einen in der Lautstärke variierenden Ton wahr. Folglich wäre in diesem Fall die Zerlegung von  $x$  in eine IMF wünschenswert. Der beschriebene Effekt wird als *Beat-Effect* bezeichnet und ist in Abbildung 3.10 dargestellt.



**Abbildung 3.10:** Darstellung der Überlagerung zweier Cosinus-Schwingungen nach [RF08]. Links: Signal  $x_1$  (oben) und Signal  $x_2$  (Mitte) sowie die Summe dieser Signale (unten). Da sich die Frequenzen von  $x_1$  und  $x_2$  *genügend* unterscheiden, liegt die Interpretation als Summe (Gleichung 3.28) nahe. Rechts: Für die Frequenzen von Signal  $x_1$  (oben) und  $x_3$  (Mitte) gilt:  $f_1 \approx f_3$ . Das Summensignal (unten) würde als ein amplitudenmoduliertes Signal (Gleichung 3.29) interpretiert werden können (*Beat-Effect*).



Erste ausführliche Untersuchungen zur Beantwortung der Frage, in wieviele IMF ein Signal zerlegt und welche Interpretationsvariante demnach durch die EMD gewählt wird, werden von Rilling und Flandrin in [RF08] vorgestellt. Als Ansatz dient ihnen dabei der in Gleichung 3.31 dargestellte Ansatz der Überlagerung zweier Cosinus-Funktionen mit unterschiedlicher, konstanter Amplitude, Frequenz und Phase.

$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \quad (3.31)$$

Da jedoch nicht die absoluten Signalparameter, sondern vielmehr ihre Relation das Verhalten der EMD bestimmen, arbeiten Rilling und Flandrin mit Gleichung 3.32, wobei  $a_V = a_2/a_1$ ,  $f = f_2/f_1$  und  $\phi = \phi_2 - \phi_1$ . Unter der Annahme, dass  $f \in ]0, 1[$  stellt der erste Term in Gleichung 3.32 die hochfrequente, der zweite die niederfrequente Komponente dar.

$$x(t) = \cos(2\pi t) + a_V \cos(2\pi f t + \phi) \quad (3.32)$$

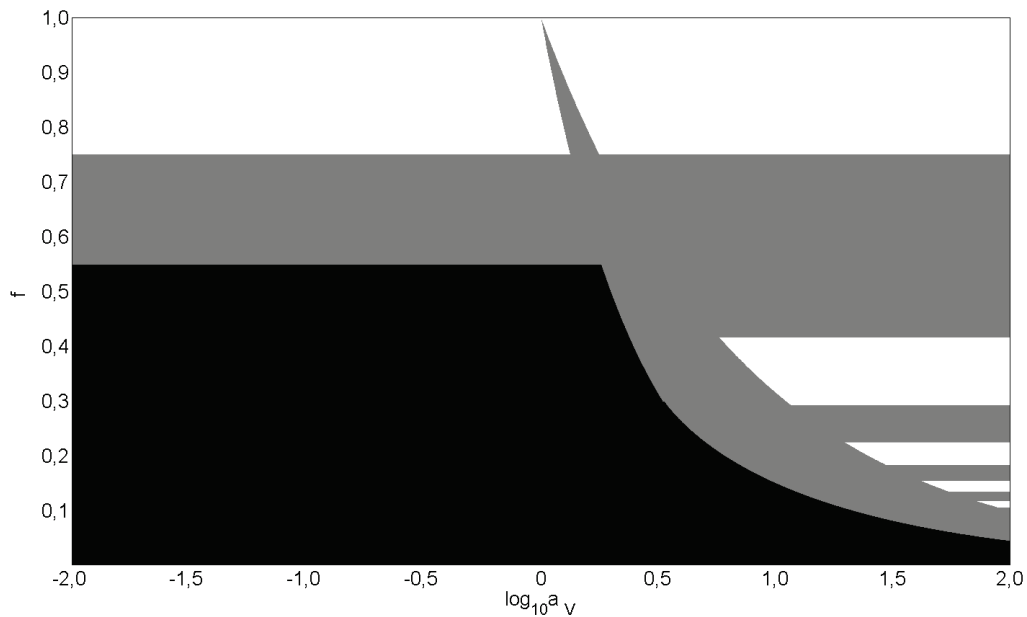
Rilling und Flandrin definieren zwei Schwellwerte  $c_1$  und  $c_2$  wie folgt:

$$c_1(a_V, f, \phi) = \frac{\|x_1 - \cos(2\pi t)\|}{\|a_V \cos(2\pi f t + \phi)\|} \quad (3.33)$$

$$c_2(a_V, f, \phi) = \frac{\|x_1 - x(t)\|}{\|\cos(2\pi t)\|} \quad (3.34)$$

Werden die beiden Cosinus-Schwingungen als solche erkannt, ist die erste IMF  $x_1$  identisch mit  $\cos(2\pi t)$  und somit  $c_1 = 0$ . Wird  $x$  als amplitudenmodulierte Schwingung betrachtet, ist  $x_1$  mit  $x$  identisch und demnach  $c_1 = 1$  sowie  $c_2 = 0$ . In ihren Untersuchungen interessiert Rilling und Flandrin insbesondere die Abhängigkeit der Schwellwerte von  $a_V$  und  $f$ . Die Abhängigkeit von  $\phi$  bleibt insofern unberücksichtigt, als dass die Schwellwerte  $c_1$  und  $c_2$ , für ein festes 2-Tupel  $(a_V, f)$  über alle  $\phi$ <sup>36</sup> gemittelt werden. Ist die Interpretation von  $x$  unabhängig von  $\phi$ , nehmen demnach auch die Mittelwerte o.g. Werte an. Als Ergebnis der Auswertung dieser Schwellwerte können drei Bereiche unterschieden werden (vgl. Abbildung 3.11): Ein Bereich, in dem die beiden Komponenten von  $x$  separierbar sind ( $c_1 = 0 \forall \phi$ ), ein zweiter, in dem  $x$  als ein einziges amplitudenmoduliertes Signal interpretiert wird ( $c_1 = 1, c_2 = 0 \forall \phi$ ), und ein dritter, in dem keine der beiden eben genannten Interpretationen eintritt.

<sup>36</sup> Welche Diskretisierung von  $[0, 2\pi]$  bei ihren Analysen vorgenommen worden ist, welche Werte demnach  $\phi$  angenommen hat, erwähnen die Autoren nicht.



**Abbildung 3.11:** EMD-Interpretation eines aus zwei Cosinus-Schwingungen zusammengesetzten Signals  $x$  (Gleichung 3.32) in Abhängigkeit des Amplituden- und Frequenzverhältnisses. Schwarz: Additive Überlagerung nach Gleichung 3.28. Weiß: Amplitudenmodulation nach Gleichung 3.29. Grau: Keine der beiden Interpretationen.

Aufbauend auf der in [RF08] vorgestellten Analyse eines Signals  $x$  nach Gleichung 3.32 mit konstantem Amplituden- und Frequenzverhältnis wird diese in [PKO11] auf den allgemeinen Fall der Überlagerung endlich vieler (nicht notwendigerweise trigonometrischer) Signale mit zeitvarianten Amplituden und Frequenzen erweitert. Die Beweisführung für dazugehörige Thesen hinsichtlich der Auflösung basiert maßgeblich auf den Eigenschaften der als Einhüllende fungierenden kubischen Splines.<sup>37</sup>

Gao und Hatzinakos widmen sich in [GH12] dem in [RF08] wenig beachteten Einfluss der Phasenlage  $\phi$ . Dabei sind die Bereiche, in denen für alle  $\phi$  eine eindeutige Interpretation vorliegt, uninteressant. Gao und Hatzinakos konzentrieren sich demnach auf die in Abbildung 3.11 dargestellten grauen Bereiche. Den Ansatz für  $x$  aus Gleichung 3.32 sowie den Schwellwert aus Gleichung 3.33 nutzend, zeigen sie sowohl analytisch als auch empirisch, dass für  $f = (2k + 1)^{-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  für bestimmte 3-Tupel  $(a_V, f, \phi)$  die beiden Cosinus-Schwingungen als solche interpretiert werden.

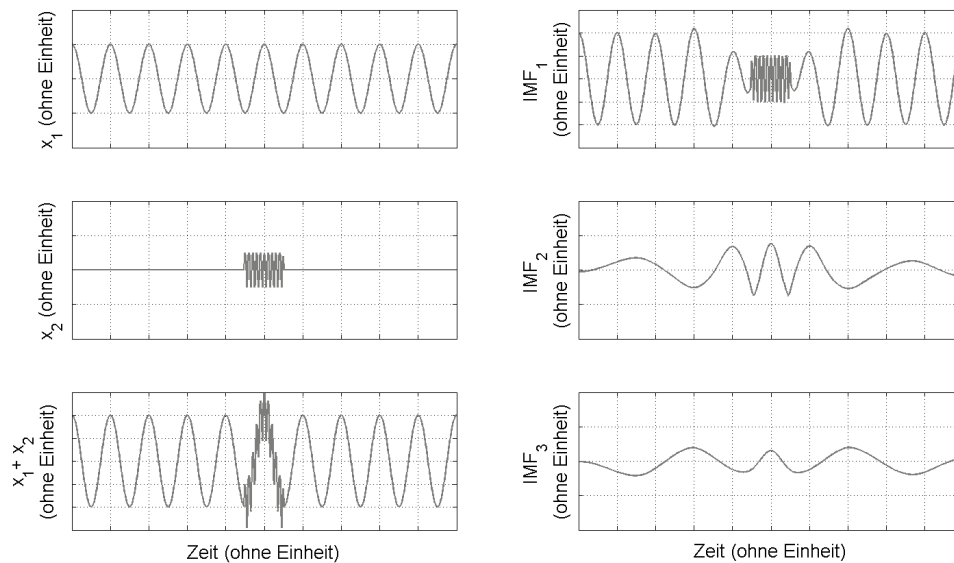
<sup>37</sup> Es sei angemerkt, dass weder in [RF08] noch in [PKO11] explizit auf die exakte Parametereinstellung für den Siebprozess eingegangen wird.

Wie in Abschnitt 2.2.2.2 und 2.2.2.3 beschrieben, hängt die Frequenz eines Mehrwegesignals unter anderem von dem Abstand zwischen Empfangsantenne und Hindernis (Reflektor), die Amplitude von den Materialeigenschaften der Reflektoroberfläche ab. Sind mehrere Reflektoren vorhanden, überlagern sich demnach Mehrwegesignale unterschiedlicher Frequenz und Amplitude. Den vorgestellten Überlegungen zufolge sind diese je nach Anordnung der Reflektoren sowie deren Material möglicherweise nicht separierbar. Die Bestimmung der für die Berechnung des Trägerphasenmessfehlers benötigten Amplituden und Phasen der Mehrwegesignale ist demnach fehlerbehaftet. Für die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen ist weiterhin zu beachten, dass die in der Literatur vorgestellten Analysen auf einer bestimmten und teilweise nur vage beschriebenen Parametereinstellung für den Siebprozess beruhen. Inwieweit die Aussagen für die in dieser Arbeit gewählte Adaption der EMD übernommen werden können, ist Gegenstand der durchgeführten und in Kapitel 4 vorgestellten Analysen.

**Mode Mixing.** Wie in 3.1.3 bzw. 3.1.4.1 beschrieben, ist die EMD eine Filterbank mit Fine-to-Coarse-Struktur, wobei diese Struktur von lokaler Natur ist und somit für jeden Zeitpunkt unabhängig von den anderen Zeitpunkten bestimmt wird. Wird einem Signal  $x_1$ , definiert auf einem Intervall  $[0, T_A]$ , nur auf Teilintervallen ein weiteres Signal  $x_2$  überlagert, wird auf diesen Teilintervallen eine neue Fine-to-Coarse-Struktur induziert, die zu einer Zerlegung führen kann, in der das Signal  $x_1$ , welches zuvor durch eine einzige IMF repräsentiert worden ist, nun auf mehrere IMF verteilt ist. Die intuitiv erwartete Zerlegung des Summensignals  $x_1 + x_2$  in zwei IMF, wobei jede IMF eines der Teilsignale  $x_1, x_2$  repräsentiert, wird also nicht realisiert. Abbildung 3.12 veranschaulicht diesen, als *Mode Mixing* bezeichneten Sachverhalt in Anlehnung an die Darstellung in [DK05].

Sowohl in [HSL99] als auch in [Gao+08] wird vorgeschlagen, dieses Phänomen durch Einführung von Schwellwerten für Signalfrequenzen zu beseitigen. Bei Unterschreitung dieser Werte werden die betreffenden Signalanteile erst in darauffolgenden Iterationen ausgesiebt und daher durch höhere und somit niederfrequenterer IMF repräsentiert. Auf eine präzise Beschreibung der Verfahren verzichten die Autoren. Weitere Möglichkeiten der Beseitigung des Mode Mixing beruhen auf Weiterentwicklungen der EMD wie sie in Abschnitt 3.1.5 vorgestellt werden.

Das Phänomen des Mode Mixing stellt auch für die Analysen in dieser Arbeit eine zu diskutierende Fragestellung dar, da sich auf Grund der Relativbewegung von Empfänger und Satelliten verändernde Geometrien (vgl. Abschnitt 2.2.2.2) ergeben, die zu plötzlichem Auftreten und Verschwinden von Mehrwegesignalen führen können. Werden dadurch andere Mehrwegesi-



**Abbildung 3.12:** Darstellung des Mode Mixing. Links: Einem über das gesamte Intervall definierten Signal  $x_1$  (oben) wird ein nur auf einem Teilintervall definiertes Signal  $x_2$  (Mitte) additiv überlagert (unten). Rechts: Die erste IMF (oben) repräsentiert auf Grund der Fine-to-Coarse-Eigenschaft der EMD zu jedem Zeitpunkt den höchstfrequenten Anteil des Summensignals  $x_1 + x_2$ , was in dem Teilintervall, in dem  $x_2$  definiert ist, dazu führt, dass das Signal  $x_1$  erst durch die folgenden IMF (Mitte, unten) repräsentiert wird.

gnale, wie in Abbildung 3.12 dargestellt, in einem Teilintervall nicht mehr durch eine, sondern durch mehrere IMF repräsentiert, sind Amplituden und Phasen der betreffenden Mehrwegesignale nur fehlerbehaftet bestimmbar und damit gilt Gleiches auch für den daraus berechneten Trägerphasenmessfehler. Eine Abschätzung der Größenordnung erfolgt in Abschnitt 4.1.3.

### 3.1.4.3 Bewertungsansätze für die Analyse realer Signale

Zu analysierende reale Signale bestehen oftmals aus einem Gemisch deterministischer und stochastischer Signalanteile. Ziel ist es, eine zulässige Zerlegung dieses Signalgemisches zu erzeugen. Zulässig bedeutet dabei, dass alle Signalanteile durch entsprechende IMF repräsentiert werden, jedoch keine IMF auftreten, die physikalisch nicht relevant sind. Da Art und Anzahl der im zu analysierenden Signal enthaltenen Anteile jedoch unbekannt sind, stellt sich die Frage nach einem handhabbaren Kriterium, mit dem die Zulässigkeit geprüft werden kann. Des Weiteren ist zu untersuchen, inwieweit die Festlegung der EMD-Parameter Einfluss auf die Zerlegung nimmt. Ist ein solcher Einfluss vorhanden, schließt sich die Suche nach einer optimalen Zerlegung an, wobei zu klären ist, wie ein solches Optimum gefunden werden kann.

**Zulässigkeit der Zerlegung.** Als Grundlage für die Entscheidung, ob eine Zerlegung zulässig ist, wird in [Hua+03] die in der Statistik verbreitete Nutzung von Konfidenzintervallen vorgeschlagen. Dafür erzeugen die Autoren zunächst eine Schar von Zerlegungen, indem sie das in Abschnitt 3.1.2.2 vorgestellte Sifting-Abbruchkriterium nutzen und den Parameter  $S_{I,fix}$  variieren.<sup>38</sup> Scharmittel und zugehörige Standardabweichungen würden nun üblicherweise genutzt werden, um die Grenzen festzulegen, in denen einer Zerlegung vertraut, sie also als zulässig angesehen wird. Das Problem an dieser Vorgehensweise liegt im Fall der EMD darin, dass die Anzahl der IMF, in die ein Signal zerlegt wird, abhängig von der Wahl des Abbruchkriteriums ist. Sei  $n$  die Anzahl verschiedener Zerlegungen  $j$ ,  $m_j$  die dabei jeweils realisierte Anzahl an IMF,  $x_{ij}$  die  $i$ -te IMF der  $j$ -ten Zerlegung und sei  $m_{min} = \min\{m_j\}$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), dann kann nur für die ersten  $m_{min}$  IMF eine Mittelung über alle Zerlegungen nach Gleichung 3.35 erfolgen.

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad i = 1, \dots, m_{min} \quad (3.35)$$

Huang et al. schlagen daher in [Hua+03] vor, eine Mittelung über die Hilbert-Spektren<sup>39</sup> der Zerlegungen durchzuführen. Dabei werden jedoch nur die Zerlegungen genutzt, deren IMF den Schwellwert eines Orthogonalitätsindex<sup>40</sup> nicht überschreiten. Alle anderen Zerlegungen werden bereits hier als Ausreißer und damit als unzulässig klassifiziert.

**Optimalität der Zerlegung.** In [PPM08] und [PMP09] wird der Frage nachgegangen, anhand welcher Kriterien aus den zulässigen Zerlegungen diejenige ausgewählt werden sollte, die als optimal einzustufen ist. Die Autoren nutzen für ihre Untersuchungen rationale Splines mit unterschiedlichen Werten für den Tensionsparameter  $p$  und die Modellierung der Splines an den Intervallenden<sup>41</sup> sowie als Abbruchkriterium das in Abschnitt 3.1.2.2 vorgestellte Sifting-Kriterium mit  $S_{I,fix} = 5$ . Das Vorliegen einer optimalen Zerlegung wird anhand dreier Indikatoren bestimmt: Der Anzahl an Iterationen im Siebprozess, der Anzahl der IMF und der Orthogonalität der IMF. Anhand der Auswertung zahlreicher Datensätze wählen sie die Zerlegung mit der minimalen Anzahl an Siebiterationen, der geringsten Anzahl an IMF und dem kleinsten Wert des von ihnen vorgeschlagenen Orthogonalitätsindex (vgl. Gleichung 3.18). Sie begründen dies damit, dass mit steigender Anzahl an Siebiterationen mögliche Amplitu-

<sup>38</sup> Dieser Parameter definiert, wie in Abschnitt 3.1.2.2 beschrieben, die Anzahl an Iterationen, für die die Anzahl an Nullstellen und Extrema zweier aufeinander folgender Iterierten im Siebprozess unverändert bleiben muss.

<sup>39</sup> Erläuterungen dazu finden sich in [Hua+03]. Zu beachten ist, dass alle Hilbert-Spektren die gleiche zeitliche und spektrale Auflösung haben müssen.

<sup>40</sup> Der Orthogonalitätsindex ist hier nicht näher spezifiziert. Es handelt sich jedoch vermutlich um den in einer früheren Publikation der Autoren verwendeten und in Gleichung 3.17 dargestellten Orthogonalitätsindex.

<sup>41</sup> Für eine ausführliche Beschreibung vgl. Abschnitt 3.1.2.1 sowie Anhang C.2.

denmodulationen bereinigt werden<sup>42</sup> und die Zerlegung mit der geringsten Anzahl an IMF, die zudem den höchsten Grad an Orthogonalität<sup>43</sup> aufweisen, die physikalisch bedeutsamste sei. Mit Verweis auf die Ausführungen in Abschnitt 3.1.2.2 erscheint das Kriterium der Minimierung der Siebiterationen plausibel. Ebenfalls schlüssig ist die Einbeziehung der Orthogonalität, da ein geringer Grad an Orthogonalität auf das Vorhandensein von Mode Mixing<sup>44</sup> hinweist. Nicht uneingeschränkt nachvollziehbar ist hingegen, inwiefern die Anzahl an IMF Aussagen über die physikalische Signifikanz zulassen. Der Nachteil der von Peel et al. verwendeten Kriterien besteht darin, dass keine Aussagen über die tatsächliche Genauigkeit der Zerlegung möglich sind. Dies ist jedoch dem Umstand geschuldet, dass bei einer alleinigen Analyse realer Daten die tatsächlich enthaltenen Signalanteile unbekannt sind und demnach ein Vergleich zwischen ihnen und den extrahierten IMF nicht möglich ist. In Abschnitt 4.1.2.1 wird daher der Ansatz einer Einbeziehung von Modellen und modifizierten Kriterien verfolgt.

### 3.1.5 Weiterentwicklungen der EMD

Die in den vorangegangenen Abschnitten zusammengestellten Spezifika der EMD und die damit verbundenen Möglichkeiten und Einschränkungen für die Signalanalyse haben dazu geführt, dass sich zahlreiche Autoren neben den bereits in Abschnitt 3.1.2 erwähnten Adaptationen einzelner Teilaspekte (Mittelwertbildung, Abbruchkriterien) mit einer Weiterentwicklung der Methode als solche befasst haben. Dies umfasst zum einen die Übertragung der Idee einer durch additives Rauschen gestützten Datenanalyse (engl. *noise assisted data analysis*, kurz: *NADA*) auf die EMD. Zum zweiten zielen Untersuchungen auf eine Erweiterung der EMD für die Analyse von Signalen höherer Dimension ab. Drittes Forschungsgebiet ist die Entwicklung neuer Verfahren, die auf der EMD-Grundidee einer datengetriebenen Bestimmung instantaner Signalparameter basieren.

Ziel der NADA-Verfahren ist es, durch das Hinzufügen von Weißem Rauschen den Aufbau einer dyadischen Filterbank (vgl. Abschnitt 3.1.4.1) zu erzwingen, um die Aufteilung der in einem Signal enthaltenen Anteile verschiedener Frequenzen auf verschiedene IMF zu realisieren und so den Effekt des Mode Mixing (vgl. Abschnitt 3.1.4.2) zu mindern. Durch das abschließende Mitteln der IMF mehrerer Versuche wird das Rauschen eliminiert. Die in der Literatur vorgestellten Varianten werden im Folgenden kurz wiedergegeben.

---

<sup>42</sup> Vgl. Abschnitt 3.1.2.2.

<sup>43</sup> Diese Aussage bezieht sich auf den von den Autoren verwendeten Orthogonalitätsindex. Aus mathematischer Sicht ist das Vorliegen der Orthogonalität (bezüglich eines definierten Skalarproduktes) eindeutig dadurch definiert, dass dieses Skalarprodukt den Wert Null annimmt.

<sup>44</sup> Vgl. Abschnitt 3.1.4.2.

Als eine NADA-Variante wird in [WH09] die *Ensemble Empirical Mode Decomposition* (kurz: *EEMD*) vorgestellt. Dem Signal  $x$  wird in  $K$  unabhängigen Versuchen Weißes Rauschen  $w^k$ ,  $k = 1, \dots, K$  additiv überlagert (Gleichung 3.36), sodass  $K$  Signale ( $x^k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ) entstehen. Jedes dieser Signale wird mittels EMD in eine Menge von IMF  $\{x_i^k\}$  zerlegt, wobei  $x_i^k$  die  $i$ -te IMF im  $k$ -ten Versuch bezeichnet. Als Ergebnis der EEMD wird dann die Menge aller  $x_i$  angesehen, wobei die einzelnen  $x_i$  als Mittel über alle  $x_i^k$  berechnet werden (Gleichung 3.37).

$$x^k(t) = x(t) + w^k(t) \quad (3.36)$$

$$x_i(t) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_i^k(t) \quad (3.37)$$

Die Autoren deuten bereits an, dass die Anzahl  $K$  der Versuche, sowie die Standardabweichung  $\sigma_\varepsilon^k$  des Weißes Rauschens zu justierende Parameter sind, wobei sie für  $K$  *einige hundert* und  $\sigma_\varepsilon^k = 0,2$  vorschlagen.<sup>45</sup> Weiterhin sind, wie bei der EMD als solche, Mittelwertbestimmung und Abbruchkriterien für den Siebprozess festzulegen. Zusätzlich generiert die EEMD drei weitere Fragestellungen. Da die Anzahl an generierten IMF in jedem der  $K$  Versuche unterschiedlich ist, ist unklar, wie die Ergebnismenge  $\{x_i\}$  zu bestimmen ist. Des Weiteren ist nicht gewährleistet, dass die einzelnen  $x_i$  die IMF-Kriterien erfüllen, so dass vor Anwendung der Hilbert-Transformation<sup>46</sup> eine Nachbearbeitung, beispielsweise durch erneutes Ausführen der EMD auf die betroffenen  $x_i$ , wie in [WH09] vorgeschlagen, erfolgen muss. Hinzukommt, dass Anteile des additiven Rauschens in den  $x_i$  verbleiben und damit die ausgesiebten Signalanteile verfälschen. Alle weiteren publizierten NADA-Varianten der EMD bauen auf die grundlegende Idee der EEMD auf, zielen aber auf den Abbau der hier genannten Defizite ab.

In [Nia+09] werden die Wahl eines geeigneten Abbruchkriteriums für den Siebprozess sowie der optimalen Standardabweichung des additiven Weißes Rauschens diskutiert, wobei gezeigt wird, dass sich die Ergebnisse bei unterschiedlicher Parameterwahl nur geringfügig unterscheiden, auch im Vergleich zu Ergebnissen der klassischen EMD.<sup>47</sup> Ebenfalls wird diskutiert wie eine Mittelung nach Gleichung 3.37 erfolgen könnte. Es wird vorgeschlagen, über die  $K'$  Versuche zu mitteln, in denen das Signal in die Anzahl an IMF zerlegt wird, die, über alle  $K$  Versuche betrachtet, am häufigsten realisiert worden ist. Da bei der EEMD je nach Anzahl der Versuche Anteile des additiven Rauschens in den  $x_i$  verbleiben und damit das exakte Aussie-

<sup>45</sup> Diese Werte werden ohne weitere Begründung angenommen und die Ausführungen lassen vermuten, dass sie aus der Analyse eines Beispieldatensatzes abgeleitet werden.

<sup>46</sup> Vgl. Abschnitt 3.2.

<sup>47</sup> Die Aussagen werden auch hier aus der Analyse nur weniger Datensätze abgeleitet, sodass ihre Allgemeingültigkeit eine offene Fragestellung ist.

ben relevanter Signalanteile verfälschen, wird in [YSH10] eine Methode vorgeschlagen, die die Autoren *Complementary Ensemble Empirical Mode Decomposition* (kurz: *CEEMD*) nennen. Idee ist es,  $K$  Weiße Rauschprozesse  $w^k$  zu erzeugen, diese jedoch jeweils einmal zum Signal  $x$  zu addieren und einmal zu subtrahieren. Folglich würden  $2K$  zu analysierende Signale  $x^k$  zur Verfügung stehen und sich die Rauschanteile bei Mittelung nach Gleichung 3.37 eliminieren. Die erzielten Ergebnisse sind mit denen der EEMD-Analyse vergleichbar. In [Tor+11] wird das Konzept der *Complete Ensemble Empirical Mode Decomposition with Adaptive Noise* (kurz: *CEEMDAN*) vorgestellt und in [Col+12] umfangreichen Analysen unterzogen. Die CEEMDAN basiert im Gegensatz zur EEMD, bei der jedes verrauschte Signal  $x^k$  unabhängig von den anderen zerlegt und die  $x_i$  im Anschluss an die Zerlegungen berechnet werden, auf einer schrittweisen Bestimmung der  $x_i$  direkt im Anschluss an die  $i$ -ten Siebprozesse, wobei die Eingangsgrößen für die Siebprozesse gewichtete Rauschanteile sind.<sup>48</sup> Durch die sukzessive Bestimmung der  $x_i$  und die Nutzung des in [RFG03] vorgestellten Abbruchkriteriums für den Siebprozess wird jede  $x_i$  aus genau  $K$   $x_i^k$  berechnet. Ferner kann die Anzahl  $K$  der Versuche, die für eine vorgegebene Genauigkeit der Zerlegung benötigt wird, wesentlich kleiner angesetzt werden, als dies für die EEMD der Fall ist. Die besten Ergebnisse werden für additives Rauschen mit  $\sigma_\varepsilon = 0,2$  erzielt.

Abwandlungen der hier vorgestellten NADA-Verfahren finden sich zum einen in [DK05]. In dieser Publikation wird die Idee verfolgt, dem Signal an Stelle des Weißen Rauschens trigonometrische Funktionen zu überlagern, um das Mode Mixing zu verhindern.<sup>49</sup> Zum anderen wird mit der Addition von Rauschprozessen nicht das Ziel der Beseitigung des Mode Mixing verfolgt, sondern vielmehr das der Unterdrückung von Signalanteilen mit geringer Amplitude. Diese als *Noise Modulated Empirical Mode Decomposition* (kurz: *NEMD*) bezeichnete Variante wird in [Tsu+09] und [TCH10] vorgestellt und analysiert. Allen hier vorgestellten NADA-Verfahren und ihren Modifikationen ist gemein, dass sie, wie die klassische EMD, über eine Vielzahl zu justierender Parameter verfügen, deren Einfluss bisher teilweise mit nur wenigen Testsignalen experimentell untersucht worden ist. Der größte Nachteil der NADA-Verfahren liegt jedoch in der Rechenintensität, die der in dieser Arbeit angestrebten Echtzeitfähigkeit der entwickelten Algorithmen entgegensteht. Daher wird hier keine NADA-Variante, sondern eine Adaption der EMD für die Problematik der Bestimmung der durch die Mehrwegeausbreitung verursachten Entfernungsmessfehler favorisiert.

<sup>48</sup> Der Algorithmus der CEEMDAN kann hier auf Grund seines Umfangs nur prinzipiell dargestellt werden. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf die genannte Literatur verwiesen.

<sup>49</sup> Die Idee wird lediglich an einem Beispiel vorgestellt. Umfangreiche Analyse wie beispielsweise zur Wahl benötigter Parameter werden nicht durchgeführt.



Neben der Anwendung von NADA-Verfahren basiert eine zweite Weiterentwicklung der EMD auf der Übertragung der Methode auf  $n$ -dimensionale Daten. Da die in dieser Arbeit analysierten  $C/N_0$ -Werte eindimensional sind, sei zu Ausführungen zu Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet auf die einschlägige Literatur verwiesen.<sup>50</sup> Ebenfalls nicht näher ausgeführt seien Methoden, die lediglich auf der EMD-Grundidee der datengetriebenen Signalanalyse beruhen<sup>51</sup>. Diese Methoden sind teilweise sehr neu und nur in Ansätzen untersucht. Sie werden als Untersuchungsgegenstand für über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehende Studien angesehen.

## 3.2 Berechnung instantaner Signalparameter

Ein Interesse an Methoden zur Bestimmung instantaner Signalparameter besteht seit Beginn des vergangenen Jahrhunderts.<sup>52</sup> Als Meilenstein kann der Beitrag von Gabor bezeichnet werden, dessen in [Gab46] veröffentlichtes Konzept des analytischen Signals bis heute als favorisierte Variante für dieses Vorhaben gilt. In Abschnitt 3.2.1 wird das Konzept vorgestellt und die damit einhergehenden Hilbert-Transformation (HT) eines gegebenen Signals sowie die dadurch realisierbare Bestimmung der instantanen Signalparameter Amplitude und Phase erläutert. Da nicht gewährleistet werden kann, dass die durch die EMD erzeugten IMF alle Voraussetzungen dafür erfüllen, nach Anwendung der HT physikalisch signifikante Parameterwerte zu generieren, schlagen Huang et al. in [Hua+09] eine Modifikation der HT vor. Diesem sogenannten Normalisierungsschema und der dadurch definierten normalisierten Hilbert Transformation (NHT) widmet sich Abschnitt 3.2.2. Das Schema kann auch genutzt werden, um die Voraussetzungen dafür zu schaffen, das analytische Signal mittels direkter Quadratur ohne Anwendung der HT zu erzeugen. Abschnitt 3.2.3 stellt diese direkte Quadraturmethode (DQ) vor. Abschließend werden die Methoden in Abschnitt 3.2.4 vergleichend diskutiert und die für die Analysen in dieser Arbeit geeignetste ausgewählt.

### 3.2.1 Hilbert-Transformation und Konzept des analytischen Signals

Grundlage für die Bestimmung der instantanen Signalparameter Amplitude  $a_x$  und Phase  $\theta$  eines reellen Signals  $x$  ist das von Gabor in [Gab46] vorgestellte und als analytisches Signal bekannte Konzept. Es basiert darauf, das Signal  $x$  als Vektor auf der reellen Achse einer komplexen Ebene zu anzusehen. So kann dieses Signal als Projektion eines komplexen Signals  $z$  (Gleichungen 3.38 bis 3.40) mit Amplitude  $a_x$  und Phase  $\theta$  auf die reelle Achse interpretiert

---

<sup>50</sup> Exemplarisch sei [Pab+10] genannt. In dieser Publikation findet sich auch eine Zusammenstellung weiterer Literatur auf diesem Gebiet.

<sup>51</sup> Hier seien die Arbeiten von Feldman ([Fel08]), Frei und Osorio ([FO07]) sowie Pustelnik et al. ([PBF14]) genannt.

<sup>52</sup> Ein historischer Abriss wird in [Boa92a] und [Boa92b] gegeben.

werden. Den Imaginärteil  $y_z$  des Signals  $z$  bildet das um  $90^\circ$  phasenverschobene Signal  $x$ , die sogenannte Quadraturkomponente. Das auf diese Weise konstruierte Signal  $z$  wird in der Literatur als *analytisches Signal* bezeichnet.

$$z(t) = a_x(t)e^{-j\theta(t)} \quad (3.38)$$

$$= a_x(t) (\cos \theta(t) + j \sin \theta(t)) \quad (3.39)$$

$$= x(t) + j(y_z(t)) \quad (3.40)$$

Für analytische Signale  $z$  gilt ferner, wie in [Gab46] gezeigt, dass Real- und Imaginärteil über die Hilbert-Transformation (Gleichung 3.41) verknüpft sind.

$$z(t) = x(t) + j\mathcal{H}\{x(t)\} \quad (3.41)$$

Die Hilbert-Transformierte  $\mathcal{H}\{x\}$  eines Signals  $x$  ist dabei definiert als:

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3.42)$$

$$= x(t) * \frac{1}{t} \quad (3.43)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{P}$  den Cauchy'schen Hauptwert<sup>53</sup>. Liegt also ein analytisches Signal vor, sind Quadraturkomponente und Hilbert-Transformierte eines Signals  $x$  identisch. Zu beachten ist jedoch, dass die Hilbert-Transformation nur unter bestimmten Voraussetzungen die Quadraturkomponente darstellt, und somit über sie ein analytisches Signal konstruierbar und physikalisch relevante Amplituden und Phasen berechenbar sind. Damit dies sicher gestellt ist, muss, die Gleichungen 3.39 und 3.41 aufgreifend, gelten:

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \mathcal{H}\{a_x(t) \cos \theta(t)\} \quad (3.44)$$

$$= a_x(t) \mathcal{H}\{\cos \theta(t)\} \quad (3.45)$$

$$= a_x(t) \sin \theta(t) \quad (3.46)$$

Sind die Spektren von  $a_x$  und  $\theta$  disjunkt, so gilt mit dem in [Bed63] veröffentlichten Theorem von Bedrosian Gleichung 3.45. Picinbono zeigt in [Pic97], dass Gleichung 3.46 nur gilt, wenn die zeitvariante Phase  $\theta$  gewisse Bedingungen erfüllt.<sup>54</sup> Da jedoch nicht sichergestellt werden könne, dass zu analysierende Signale diese Bedingungen tatsächlich erfüllen, sei es eher von Bedeutung, die Fehler abzuschätzen, die auf Grund der Approximation der Quadratur durch die Hilbert-Transformierte entstanden ([Pic97]). Eine derartige Fehlerbetrachtung ist bereits in

<sup>53</sup> Für die Definition sei auf Anhang C.1 verwiesen.

<sup>54</sup> Angesichts der umfangreichen Theorie, die für eine korrekte Darstellung der Ergebnisse notwendig ist, sei an dieser Stelle auf die Ausführungen in [Pic97] verwiesen.

[Nut66] diskutiert worden, gestaltet sich jedoch, wie in [Hua+09] ausgeführt, als schwierig und nicht abschließend gelöst, da die Quadraturkomponente unbekannt ist. Huang et al. empfehlen daher in [Hua+09] zur Vermeidung dieser Problematik, eine Vorverarbeitung der zu analysierenden Signale<sup>55</sup>, um die Voraussetzungen für eine korrekte Generierung der Quadraturkomponente zu schaffen. Bevor diese Ideen in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden, sei zum Abschluss dieses Abschnitts das Vorgehen zur rechentechnischen Gewinnung eines analytischen Signals aus dem zu analysierenden Signal als Grundlage für die Berechnung instantaner Signalparameter erläutert. Hierfür wird auf den Zusammenhang der Spektren beider Signale zurückgegriffen. Er wird durch den folgenden Satz beschrieben ([Mar99]).

**Satz (Spektrum des analytischen Signals).** Sei  $Z$  die Fourier-Transformierte des analytischen Signals  $z$  und  $X$  die Fourier-Transformierte seines Realteils  $x$ . Dann gilt:

$$Z(f) = \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ X(0), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

□

Bei gegebenem Signal  $x$  ist demnach zunächst dessen Fourier-Transformierte  $X$  zu berechnen. Mit Gleichung 3.47 wird dann die Fourier-Transformierte  $Z$  gebildet. Als Ergebnis der Fourier-Rücktransformation von  $Z$  liegt das (komplexe) Signal  $z$  mit instantaner Phase  $\theta$  und Amplitude  $a_x$  vor.

Es ist zu beachten, dass das analytischen Signal als kontinuierliche Funktion der Zeit definiert ist und diskrete Signale, wie sie auch die in dieser Arbeit zu analysierenden  $C/N_0$ -Werte darstellen, demnach keine analytischen Signale im mathematischen Sinne sind ([Mar99]). Es ist jedoch möglich, ein Äquivalent, das diskret-analytische Signal  $z$ , zu generieren, welches die interessierenden Eigenschaften ebenfalls besitzt. Diese Eigenschaften sind die Übereinstimmung des diskreten Signals  $x$  mit dem Realteil  $z_r$  des diskret-analytischen Signals nach Gleichung 3.48 sowie die Orthogonalität von dessen Real- und Imaginärteil ( $z_r$  und  $z_i$ ) nach Gleichung 3.49 ([Mar99]). Dabei bezeichnet  $N_A$  die Anzahl der Datenpunkte.

$$z_r(n) = x(n) \quad n \in \{0, \dots, N_A - 1\} \quad (3.48)$$

$$\sum_{n=0}^{N_A-1} z_r(n)z_i(n) = 0 \quad (3.49)$$

<sup>55</sup> In dieser Arbeit ist damit die Modifikation der durch die EMD erzeugten IMF gemeint.

Vorschläge, wie zu einem vorliegenden diskreten Signal  $x$  ein diskret-analytisches Signal  $z$  generiert werden kann, finden sich in [OSB04] und [RFB94]. Während das diskret-analytische Signal  $z$  aus [OSB04] zwar die Orthogonalität gewährleistet (vgl. Gleichung 3.49), nicht aber die Werte des ursprünglichen Signals erhält (vgl. Gleichung 3.48), erzeugt das Verfahren aus [RFB94] diskret-analytische Signale  $z$ , für die Gleichung 3.48, nicht aber Gleichung 3.49 gilt. In [Mar99] werden hingegen Verfahren vorgeschlagen, bei denen das erzeugte diskret-analytische Signal  $z$  beide gewünschte Eigenschaften erfüllt. Ausgangspunkt ist die diskrete Fourier-Transformierte  $X$  des Signals  $x$ . Die Anzahl der Stützstellen für die Transformierte entspricht der Anzahl  $N_A$  der Datenpunkte des Signals  $x$ . Von dieser Transformierten wird die Fourier-Transformierte  $Z$  des zu bestimmenden diskret-analytischen Signals  $z$  abgeleitet. Dieses ergibt sich in einem abschließenden Schritt als Rücktransformierte von  $Z$ . Die in [Mar99] vorgeschlagenen Verfahren unterscheiden sich im Rahmen dieser Struktur nur anhand der Anzahl von Stützstellen für  $Z$  und damit auch für  $z$ . Das in dieser Arbeit verwendete Verfahren nutzt für alle Funktionen die gleiche Stützstellenanzahl  $N_A$ .<sup>56</sup> Die Transformierte  $Z$  lässt sich demnach aus der Transformierten  $X$  nach Gleichung 3.50 gewinnen.

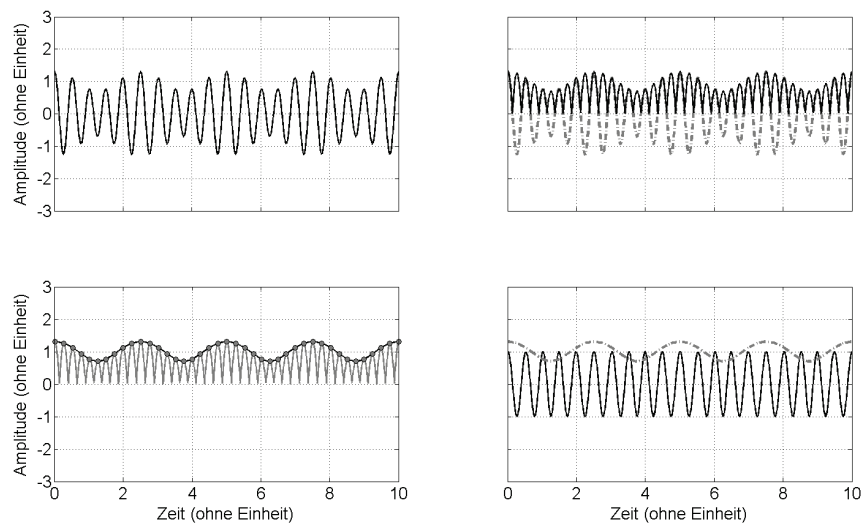
$$Z(m) = \begin{cases} X(0), & m = 0 \\ 2X(m), & 1 \leq m \leq \frac{N_A}{2} - 1 \\ X(\frac{N_A}{2}), & m = \frac{N_A}{2} \\ 0, & \frac{N_A}{2} + 1 \leq m \leq N_A - 1 \end{cases} \quad (3.50)$$

### 3.2.2 Das Normalisierungsschema als Grundlage für eine modifizierte Hilbert-Transformation

Wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, muss das zu analysierende Signal gewisse Voraussetzungen erfüllen, damit die Hilbert-Transformation der Quadraturkomponente entspricht und physikalisch relevante instantante Signalparameter gewonnen werden können. Durch die EMD wird gewährleistet, dass die vorliegenden IMF Monokomponenten, und somit zu jedem Zeitpunkt  $t$  nur eine instantane Amplitude und Phase zu bestimmen sind. Nicht gewährleistet werden kann hingegen, dass deren Spektren disjunkt sind, ebenso wenig die notwendigen Eigenschaften der Phase (vgl. Ausführungen zu den Gleichungen 3.44 bis 3.46). Um das erstgenannte Problem zu lösen, schlagen Huang et al. in [Hua+09] ein Normalisierungsschema vor. Es ermöglicht, empirisch die zeitvariante Amplitude (die Einhüllende) und den Träger mit zeitvarianter Frequenz zu trennen. Im Ergebnis können Amplituden- und Phasenwerte unabhängig voneinander analysiert werden. Insbesondere liegt ein normalisiertes

<sup>56</sup> Neben dieser Variante werden in [Mar99] auch die Varianten der Dezimierung der Stützstellen für  $Z$  auf  $\frac{N_A}{2}$  und die Erhöhung auf  $N_A M$ ,  $M \in \mathbb{N}$  vorgestellt.

Trägersignal vor, d.h. ein rein frequenzmoduliertes Signal konstanter Amplitude, welches es (zumindest teilweise) ermöglicht, die Voraussetzungen zu erfüllen, die Quadraturkomponente über die Hilbert-Transformation zu bestimmen.<sup>57</sup> Des Weiteren ermöglicht ein derartiges Signal die direkte Berechnung der Quadraturkomponente ohne Anwendung der Hilbert-Transformation. Während diese Berechnungen im folgenden Abschnitt vorgestellt werden, soll an dieser Stelle die Normalisierung mit anschließender Hilbert-Transformation, in [Hua+09] als normalisierte Hilbert-Transformation (NHT) bezeichnet, erläutert und anhand Abbildung 3.13 veranschaulicht werden.



**Abbildung 3.13:** Prinzip der NHT. Oben links: Das Signal  $x$ , von dem Amplituden und Phasen bestimmt werden sollen. Oben rechts: Das Signal  $x$  (grau, Strich-Punkt) sowie sein Betrag (schwarz). Unten links: Betrag des Signals  $x$  (grau) sowie dessen als Stützpunkte für die Spline-Funktion (schwarz) fungierenden Maxima (Punkt). Unten rechts: Auf die Einhüllende (grau, Strich-Punkt) normiertes Signal  $x$  (schwarz). Nach  $k$  Iterationen entspricht diese Einhüllende der zeitvarianten Amplitude  $A$  und das normierte Signal dem rein frequenzmoduliertem Trägersignal  $F$ .

Gegeben sei dafür ein zu analysierendes Signal  $x$ , welches die Eigenschaften einer IMF erfüllt. Wie in Gleichung 3.51 dargestellt, sei die zeitvariante Amplitude mit  $A$ , das Trägersignal mit  $F$  bezeichnet.

$$x(t) = a_x(t) \cos \theta(t) = A(t)F(t) \quad (3.51)$$

Zunächst wird der Betrag des Signals  $x$  gebildet (Abbildung 3.13, oben, rechts). Von diesem Signal werden alle Maxima berechnet und als Stützstellen für eine kubische Spline-Funktion

<sup>57</sup> Nicht geschaffen werden durch die Normalisierung die Voraussetzungen für Gleichung 3.46, da es sich hierbei um spezielle Eigenschaften der zeitvarianten Phase  $\theta$  selbst handelt.

$e$  genutzt (Abbildung 3.13, unten, links). Das Signal  $x$  wird auf diese Funktion normiert (Abbildung 3.13, unten, rechts). Dieses so normierte Signal  $y_N$  hat idealerweise nur noch Amplitudenwerte kleiner eins. Es können jedoch auch Datenpunkte auftreten, deren Werte über der Einhüllenden liegen, sodass Funktionswerte von  $y_N$  entstehen mit  $y_N(t) > 1$  für einige  $t \in \tilde{T}$ . Die Normierung wird daher erneut durchgeführt, wobei das zu normierende Signal in diesem Fall  $y_N$  ist. Werden die Signale  $e$  und  $y_N$  mit dem Iterationsschritt indiziert und  $y_{N,0} := x$  definiert und wird angenommen, dass nach  $k$  Iterationsschritten  $y_{N,k}(t) < 1, \forall t \in \tilde{T}$  gilt, so ist:

$$y_{N,i}(t) = \frac{y_{N,i-1}}{e_i} \quad (3.52)$$

$$y_{N,k}(t) = \cos \theta(t) = F(t) \quad (3.53)$$

und damit:

$$A(t) = \frac{x(t)}{F(t)} = \frac{x(t)}{y_{N,k}(t)} = \prod_{i=1}^k e_i \quad (3.54)$$

Auf das Signal  $F$  kann nun die Hilbert-Transformation angewandt und die instantane Phase berechnet werden<sup>58</sup>. Die instantane Amplitude liegt als Produkt der Splinefunktionen  $e_i$  vor.

### 3.2.3 Direkte Quadraturmethode

Mit  $F$  liegt als Ergebnis der Normalisierung eine Funktion vor, die es erlaubt, die Quadraturkomponente direkt zu bestimmen. Unter Ausnutzung der Beziehung zwischen Sinus und Cosinus (Gleichung 3.55) und der funktionalen Beschreibung von  $F$  in Gleichung 3.53 folgt:

$$\sin \theta(t) = \sqrt{1 - \cos^2 \theta(t)} \quad (3.55)$$

$$= \sqrt{1 - F^2(t)} \quad (3.56)$$

Die instantane Phase  $\theta$  ergibt sich nun unter Verwendung bekannter Zusammenhänge trigonometrischer Funktionen (Gleichung 3.57) und Einsetzen der in den Gleichungen 3.53 und 3.56 gegebenen, funktionalen Beschreibungen für Sinus und Cosinus (Gleichung 3.58).

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left( \frac{\sin \theta(t)}{\cos \theta(t)} \right) \quad (3.57)$$

$$= \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - F^2(t)}}{F(t)} \right) \quad (3.58)$$

<sup>58</sup> Wie in Abschnitt 3.2.1 angemerkt, unterscheiden sich Hilbert-Transformierte und tatsächliche Quadraturkomponente, wenn die Phase nicht die in [Pic97] diskutierten Eigenschaften erfüllt.

### 3.2.4 Bewertung und Auswahl geeigneter Methoden

Im Gegensatz zur EMD liegen für das Gebiet der Gewinnung instantaner Signalparameter nur wenige Analysen vor. Ein Grund dafür liegt in der Vielfalt der wählbaren EMD-Parameter, die es für eine optimale Extraktion im Signal enthaltener Informationen zu justieren gilt (vgl. Abschnitte 3.1.2-3.1.5). Im Gegensatz dazu ist die Berechnung instantaner Signalparameter mit dem in [Gab46] veröffentlichten Konzept des analytischen Signals eindeutig definiert. Lediglich bei der Bestimmung der Quadraturkomponente mittels Hilbert-Transformation besteht Adaptionsbedarf, da die Signale nicht per se die Voraussetzungen dafür erfüllen, sie auf diesem Weg fehlerfrei zu berechnen (vgl. Abschnitt 3.2.1). Huang et al. widmen sich diesem Thema in [Hua+09] und vergleichen anhand ausgewählter Testsignale die von ihnen vorgeschlagenen und in den Abschnitten 3.2.1- 3.2.3 erläuterten Verfahren. Sie weisen nach, dass für Signale, die die Voraussetzungen für den Satz von Bedrosian nicht erfüllen<sup>59</sup>, durch die Anwendung des Normalisierungsschemas<sup>60</sup> diese Voraussetzungen geschaffen werden können. In diesen Fällen sind NHT und DQ der HT überlegen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass auf Grund der splinebasierten Normierung bei diesen beiden Verfahren ähnliche Aspekte zu diskutieren sind wie im Fall der EMD<sup>61</sup>. Die direkte Gegenüberstellung von DQ und NHT führt laut [Hua+09] zu keiner Favorisierung von einer der Methoden, es sei denn, es liegen Signale mit komplizierten Phasenfunktionen<sup>62</sup> vor, für die dann die DQ vorzuziehen wäre. Können derartige Phasenfunktionen ausgeschlossen werden, sollte nach Meinung von Huang et al. die NHT erste Wahl sein, da die DQ rechentechnisch instabiler als die NHT sei.

Ein weiterer Grund dafür, dass für keine der Methoden zur Bestimmung instantaner Signalparameter Untersuchungen im Umfang der EMD-Analysen vorliegen, ist die fehlende praktische Relevanz. Die meisten Anwender der HHT sind lediglich daran interessiert, spezielle Signalanteile in zur Verfügung stehenden Daten nachzuweisen bzw. zu extrahieren, nicht aber daran, instantane Amplituden- und Phasenwerte dieser Signalanteile exakt zu berechnen. In dieser Arbeit sollen hingegen Effekte der Mehrwegeausbreitung in  $C/N_0$ -Werten nicht nur nachgewiesen, sondern auch Amplituden und Phasen der Mehrwegesignale ermittelt werden, um Abweichungen bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers berechnen und eliminieren zu können. In Kapitel 4 wird daher zu untersuchen sein, mit welcher Genauigkeit dieses Ziel erreicht werden kann.

---

<sup>59</sup> Dies sind Signale, bei denen die Spektren der Amplitude  $a$  und der Phase  $\theta$  nicht disjunkt sind.

<sup>60</sup> Vgl. Abschnitt 3.2.2.

<sup>61</sup> Exemplarisch sei die Modellierung der Spline-Funktion an den Intervallgrenzen genannt.

<sup>62</sup> Insbesondere sind hier nichtlineare Phasen gemeint.

## Kapitel 4

# Adaption der Hilbert-Huang-Transformation für die Detektion von Mehrwegesignalen

Um die Hilbert-Huang-Transformation für die Detektion von Mehrwegeeffekten in  $C/N_0$ -Werten anwenden und den dadurch verursachten Trägerphasenmessfehler berechnen zu können, ist die Festlegung verschiedener Parameter und Schwellwerte erforderlich. Dies betrifft zunächst einmal mögliche Prozessparameter der HHT, einer Thematik, der sich, ausgehend von den in Kapitel 3 dargestellten Erkenntnissen, Abschnitt 4.1 widmet. Des Weiteren ist im Anschluss an die Zerlegung der  $C/N_0$ -Werte in ihre IMF zu entscheiden, welche dieser IMF mögliche Mehrwegesignale repräsentieren. Unter Nutzung der in Abschnitt 3.1.4 vorgestellten Charakteristika von Zerlegungen unterschiedlicher Testsignale erfolgt in Abschnitt 4.2 die Ableitung von Schwellwerten, anhand derer diese Zuordnung im Rahmen dieser Arbeit vorgenommen wird.

### 4.1 Auswahl und Bewertung optimaler Prozessparameter für die Hilbert-Huang-Transformation

Die Adaption der HHT erfolgt anhand von synthetischen Signalen. Die Verwendung derartiger Signale ermöglicht eine Bewertung der theoretisch erzielbaren Genauigkeit bei der Bestimmung des durch Mehrwegeeffekte verursachten Trägerphasenmessfehlers, da sowohl Ist- als auch Soll-Werte der Signalparameter bekannt sind. Unter Nutzung dieser synthetischen, in Abschnitt 4.1.1 vorgestellten Signale und aufbauend auf den in Kapitel 3 gewonnenen Erkenntnissen werden in Abschnitt 4.1.2 Kriterien für die Auswahl optimaler Prozessparameter für die



HHT erarbeitet und die Parameter anhand dieser Kriterien festgelegt. Die Bewertung der damit erzielbaren HHT-Ergebnisse erfolgt in Abschnitt 4.1.3. Die hier vorgestellten Ergebnisse sind zu großen Teilen in [HJM12] veröffentlicht.

#### 4.1.1 Auswahl von Testsignalen

Die Testsignale, anhand derer geeignete Prozessparameter für die HHT ausgewählt werden, sollen die  $C/N_0$ -Werte, die der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers zugrunde liegen, sowohl realitätsnah als auch möglichst einfach nachbilden. Wie in Abschnitt 2.1.2.2 erläutert, führen Antennengewinn sowie Freiraum- und atmosphärische Dämpfung zu einem parabelförmigen Verlauf der  $C/N_0$ -Werte über den Zeitraum eines Satellitendurchgangs, wohingegen die Mehrwegeausbreitung Signaturen verursacht, die als sinusartig beschreibbar sind. Dem überlagert sind Effekte der empfängerexternen und -internen Rauschprozesse. Testsignale sollten demnach eine verrauschte Parabel mit additiv überlagerten, sinusartigen Anteilen abbilden (vgl. Abbildung 2.3). Ihre Auswahl leitet sich nun aus folgenden Überlegungen ab:

Da die EMD die im Signal enthaltenen Anteile unterschiedlicher Frequenz iterativ gewinnt, führt eine unzureichende Extraktion einer der Anteile in eine bestimmte IMF direkt zu Artefakten in den ihr nachfolgenden IMF und im Trend. Um die erreichbare Genauigkeit bei der Zerlegung der  $C/N_0$ -Werte abschätzen zu können, ist es demnach entscheidend, die erreichbare Genauigkeit bei der Extraktion der die sinusartigen Anteile enthaltenden IMF zu kennen. Daher beschränkt sich die Auswahl der Testsignale auf einfache, trigonometrische Funktionen mit additivem Rauschen, wie sie durch Gleichung 4.1 modelliert werden können. Aus den Betrachtungen in Abschnitt 2.2.2 geht hervor, dass es sich bei den Mehrwegesignaturen um Signalanteile mit zeitvarianten Signalparametern handelt. Es sind demnach funktionale Beschreibungen für Amplitude  $\alpha$  und Frequenz  $f$  der Testsignale  $x$  sowie die Phasenlage  $\varphi_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  und Art und Parameter des überlagerten Rauschprozesses  $\varepsilon$  festzulegen.

$$x(t) = \alpha(t)\cos(2\pi f(t)t + \varphi_0) + \varepsilon(t) \quad (4.1)$$

Bei der Berechnung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  ist lediglich die relative Amplitude  $\alpha$  von Bedeutung (vgl. Gleichung 2.83). Deren zeitliche Änderung kann als stückweise linear angenommen werden (vgl. Abschnitt 2.2.2.3). Um den unterschiedlichen Änderungen Rechnung zu tragen, werden Testsignale mit verschiedenen Anstiegen generiert. Dabei soll gewährleistet sein, dass mögliche Varianten zwischen einer konstanten relativen Amplitude  $\alpha$  und dem Entstehen bzw. dem Verschwinden eines Mehrwegesignals (d.h. der Anstieg von einer relativen Amplitude  $\alpha = 0$  auf einen beliebigen Wert  $\alpha \leq 1$  bzw. das Absinken auf eine relative Amplitude

tude  $\alpha = 0$  ausgehend von einem beliebigen Wert  $\alpha \leq 1$ ) erfasst werden. Für die zeitvariante Frequenz  $f$  wird auf Grund der sehr langsamen zeitlichen Änderung (vgl. Gleichung 2.74) ebenfalls ein linearer Ansatz gewählt. Wie im Fall der relativen Amplitude werden auch hier Frequenzänderungen unterschiedlicher Größenordnung gewählt, beginnend von einer nahezu konstanten Frequenz, wie sie beispielsweise für sehr geringe Reflektor-Antennen-Abstände auftritt, über verschiedene prozentuale Zu- bzw. Abnahmen, wie sie je nach Geometrie von Satellit, Reflektor und Empfangsantenne auftreten können.<sup>1</sup> Da die relative Phasenlage  $\theta$  des Mehrwegesignals beliebig im Intervall  $[0, 2\pi)$  variieren kann, soll dies auch für die möglichen Phasenlagen  $\varphi_0$  der Testsignale zum Zeitpunkt  $t = 0$  gelten. Der additiv überlagerte Rauschprozess wird, angelehnt an die Größenordnung des Rauschens in realen  $C/N_0$ -Werten, als mittelwertfreies Gaußsches Weißes Rauschen  $\varepsilon$  mit einer Standardabweichung  $\sigma_\varepsilon = 0,1$  (10% des angenommenen Maximalwertes der relativen Amplitude  $\alpha$ ) modelliert. Um die theoretisch erreichbare Genauigkeit bei der Extraktion sinusförmiger Signalanteile bewerten zu können, werden zudem nicht verrauschte Testsignale ( $\sigma_\varepsilon = 0,0$ ) ausgewertet. In Tabelle 4.1 sind die unter Beachtung dieser Überlegungen ausgewählten Parameter für die nach Gleichung 4.1 modellierten Testsignale zusammengefasst. Die Menge der Testsignale ergibt sich durch Bildung aller möglichen Kombinationen der verschiedenen Amplituden, Frequenzen, Phasenlagen zum Zeitpunkt  $t = 0$  und Standardabweichungen. Anhand der Zerlegung aller Elemente dieser Menge werden in Abschnitt 4.1.2.2 optimale Prozessparameter für die Hilbert-Huang-Transformation abgeleitet. Für einen repräsentativen Stichprobenraum wird die Länge  $T_A$  des Analyseintervalls mit  $T_A = 100$ , die Schrittweite mit  $dt = 0,02$  festgelegt, sodass die Testsignale an  $N_A = 5000$  Abtastpunkten ausgewertet werden.

**Tabelle 4.1:** Zu modellierende Parameter der Testsignale, ihre funktionalen Beschreibungen und der Wertebereich der verwendeten Variablen. Es gilt:  $T_A = 100$  sowie  $t \in \{0,02; 0,04; \dots; T_A\}$ .

Parameter	funktionale Beschreibung	
$\alpha$	$\frac{k_a}{T_A} t$	$k_a \in \{0, 1; 0, 2; \dots; 1, 0\}$
	$\frac{k_a}{T_A} t + 1$	$k_a \in \{-1, 0; -0, 9; \dots; 0, 0\}$
$f$	$\frac{k_f}{T_A} t$	$k_f \in \{0, 1; 0, 2; \dots; 1, 0\}$
	$\frac{k_f}{T_A} t + 1$	$k_f \in \{-0, 9; -0, 8; \dots; 0, 0\}$
$\varphi_0$	$k_p \pi$	$k_p \in \{0; 0, 1; \dots; 1, 9\}$
$\sigma_\varepsilon$	$\{0; 0, 1\}$	

<sup>1</sup> Für umfangreiche Darstellungen sei auf die Ausführungen in [Irs08] verwiesen.

## 4.1.2 Auswahl optimaler HHT-Prozessparameter

Wie in Kapitel 3 ausführlich diskutiert, sind in der Literatur, ausgehend von dem ursprünglichen, in [Hua+98] vorgestellten Algorithmus für die EMD, zahlreiche Modifikationen vorgeschlagen worden. Sowohl die Systematik der zugehörigen Analysen als auch der Umfang der Datengrundlage variieren in den verschiedenen Veröffentlichungen stark. Die Auswahl der für die Ziele dieser Arbeit geeigneten Optionen für HHT-Prozessparameter erfolgt unter Einbeziehung o.g. Sachverhalte. Eine erste zu treffende Entscheidung ist die zwischen der EMD in ihrer ursprünglichen Form und einer NADA-Variante. Sie fällt unter Abwägung von Mehrwert und Rechenintensität, wie in Abschnitt 3.1.5 erläutert, zugunsten der EMD aus. Im Anschluss an diese Entscheidung sind folglich die Art der Mittelwertbestimmung und mögliche Abbruchkriterien für den Siebprozess festzulegen. Diese Fragestellungen sind ausführlich in Abschnitt 3.1.2.1 bzw. Abschnitt 3.1.2.2 diskutiert. Als Ergebnis dieser Diskussionen werden envelopebasierte Verfahren unter Nutzung rationaler Splines in Verbindung mit dem für den Abbruch des Siebprozesses in [RFG03] vorgeschlagenen Mittelwert-Kriterium favorisiert. Die Aufgabe der Festlegung optimaler EMD-Prozessparameter beschränkt sich somit auf die Auswahl optimaler Spline-Parameter. Abschnitt 4.1.2.1 stellt die Kriterien vor, anhand derer ein solches Optimum bestimmt wird. Der darauffolgende Abschnitt 4.1.2.2 ist dem Auswahlverfahren selbst gewidmet. Hinsichtlich der Bestimmung der instantanen Signalparameter wird auf Grundlage der Ausführungen in Abschnitt 3.2.4 in dieser Arbeit die normalisierte Hilbert-Transformation (NHT) verwendet.

### 4.1.2.1 Kriterien für die Auswahl optimaler HHT-Prozessparameter

In der Literatur finden sich nur wenige Arbeiten, in denen allgemeingültige Kriterien vorgeschlagen werden, anhand derer eine Zerlegung realer Daten und die zugehörigen Prozessparameter als optimal bewertet werden. Peel, Pegram und McMahon leiten die von ihnen in [PPM08] und [PMP09] vorgeschlagenen Kriterien<sup>2</sup> zur Bestimmung optimaler Prozessparameter direkt aus der Analyse realer Datensätze ab. Ein solches Vorgehen hat den Nachteil, dass bei derartigen Datensätzen nicht bekannt ist, ob vermutete Signale enthalten sind und anhand welcher Signalparameter (Amplitude, Frequenz) sie tatsächlich charakterisiert werden. Es liegt also kein Soll-Wert (die bekannten Signale) vor, der mit dem Ist-Wert (die extrahierten IMF  $x_i$ ) verglichen werden könnte. Somit kann die Qualität einer Zerlegung nicht dadurch bewertet werden, dass die Abweichung zwischen Soll- und Ist-Wert analysiert wird. Peel et al. greifen daher auf indirekte Kriterien, wie eine minimale Anzahl an IMF und eine größtmögliche Orthogonalität dieser, zurück. In dieser Arbeit wird der Ansatz verfolgt, die

---

<sup>2</sup> Vgl. Ausführungen in Abschnitt 3.1.4.3.

optimalen HHT-Prozessparameter anhand von Modellsignalen festzulegen. Dieses Vorgehen besitzt den Vorteil, dass Kriterien angewendet werden können, die auf einem Soll-Ist-Wert-Vergleich beruhen. Zu beachten ist jedoch, dass die Qualität der Zerlegung echter Daten unter Nutzung der so bestimmten Prozessparameter von der Güte der Modellsignale abhängt. Unter Einbeziehung der von Peel et al. genutzten Kriterien und der Möglichkeiten, die die Verwendung von Modellsignalen bieten, werden die folgenden Kriterien für die Auswahl optimaler HHT-Prozessparameter vorgeschlagen.

**Kriterium (Siebiterationen).** Wie in Abschnitt 3.1.2.2 beschrieben, führt eine hohe Anzahl an Siebiterationen zur Eliminierung möglicherweise vorhandener Amplitudenmodulationen und damit physikalisch relevanter Informationen. Zudem steigt mit der Anzahl an Siebiterationen auch die Rechenzeit. Daher soll in dieser Arbeit, wie bereits von Peel et al. vorgeschlagen, diese Anzahl möglichst gering gehalten werden.

Die Verwendung von Modellsignalen bietet die Möglichkeit, die Übereinstimmung dieser Signale mit den zugehörigen IMF zu bewerten. Als Modellsignal wird das durch Gleichung 4.1 definierte Signal gewählt. Ist dieses Signal nicht verrauscht, d.h.  $\sigma_\varepsilon = 0$  wird eine Zerlegung dieses Signals in genau eine IMF erwartet. Für  $\sigma_\varepsilon \neq 0$  sollte eine IMF die trigonometrische Funktion repräsentieren, alle weiteren IMF das überlagerte Rauschen. Aus diesen Annahmen lassen sich die beiden folgenden Kriterien ableiten.

**Kriterium (Extraktion relevanter Informationen).** Wird das Modellsignal  $x$  ideal extrahiert, gibt es genau eine IMF  $x_i^{rel}$ , für die gilt:  $x(t) = x_i^{rel}(t), \forall t \in \tilde{T}$ . Bei einer nicht idealen Zerlegung wird es zwar eine IMF  $x_i^{rel}$  geben, die dem Signal  $x$  sehr ähnlich ist, bei der jedoch eine vom Zeitpunkt  $t$  abhängige Differenz  $\Delta x$  zwischen dem Modellsignal  $x$  und der zugehörigen IMF  $x_i^{rel}$  auftritt (Gleichung 4.2).

$$\Delta x(t) = x(t) - x_i^{rel}(t) \quad (4.2)$$

Ziel ist es, die Signalenergie  $E_{\Delta x}$  dieser Differenz zu minimieren. Folglich soll als ein zweites Kriterium gelten:

$$\min E_{\Delta x} = \int_0^{T_A} |\Delta x(t)|^2 dt \quad (4.3)$$

**Kriterium (Minimierung irrelevanter Informationen).** Durch die Methode selbst (u.a. Art der verwendeten Splines, Modellierung der Splines an den Intervallenden) können zusätzliche,

ursprünglich nicht im Signal enthaltenen Informationen entstehen. Sie suggerieren fälschlicherweise das Vorliegen physikalisch signifikanter Signalanteile und sind daher zu vermeiden bzw. zu minimieren. Im Fall nicht verrauschter Modellsignale sollten demnach keine nicht relevanten IMF auftreten, im Fall verrauschter Modellsignale die Energie nicht relevanter IMF der Energie des additiven Rauschens entsprechen. Sei also  $E_\varepsilon$  die Energie des Rauschens  $\varepsilon$ , definiert durch Gleichung 4.4 und  $E_{irr}$  die Energie aller nicht relevanten IMF  $x_i^{irr}$ , definiert durch Gleichung 4.5.

$$E_\varepsilon = \int_0^{T_A} |\varepsilon(t)|^2 dt \quad (4.4)$$

$$E_{irr} = \sum_{i=1}^k \int_0^{T_A} |x_i^{irr}(t)|^2 dt \quad (4.5)$$

Dann besteht ein drittes Kriterium darin, die Differenz dieser beiden Energien zu minimieren (Gleichung 4.6).

$$\min |E_{irr} - E_\varepsilon| \quad (4.6)$$

#### 4.1.2.2 Festlegung optimaler HHT-Prozessparameter

Anhand der im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten Kriterien, angewandt auf die Zerlegung der in Abschnitt 4.1.1 vorgestellten Modellsignale, wird in diesem Abschnitt ein optimaler HHT-Parametersatz bestimmt. Dabei kann, wie in der Einleitung zu Abschnitt 4.1.2 bereits erläutert, auf einen groben Rahmen für infrage kommende Parametersätze zurückgegriffen werden. So beschränkt sich die Optimierungsaufgabe auf die Bestimmung des Tensionsparameters  $p$  für den durch Gleichung 3.5 beschriebenen rationalen Spline sowie auf Anschlussbedingungen an den Intervallgrenzen. Der Wert des Parameters  $p$  wird dabei von  $p = 0$  (kubischer Spline) bis  $p = 50$  (Polygonzug)<sup>3</sup> variiert. Das bereits in Abschnitt 3.1.2.1 diskutierte Hinzufügen zusätzlicher Stützpunkte für eine bis an die Intervallgrenzen reichende Einhüllende wird, aufbauend auf den in [PPM08] erzielten Ergebnissen, so realisiert, dass Maxima und Minima an den den Intervallgrenzen nächstgelegenen Extrempunkten gespiegelt werden und die zweiten Ableitungen  $y''(t_{-1}), y''(t_{n+1})$  in diesen Punkten  $t_{-1}$  und  $t_{n+1}$  vorgegeben werden. In [PPM08] wird zum einen vorgeschlagen,  $y''(t_{-1}) = y''(t_{n+1}) = 0$  zu wählen. Zum anderen diskutieren die Autoren den Ansatz,  $y''(t_{-1})$  bzw.  $y''(t_{n+1})$  gleich den zweiten Ableitungen ihrer Spiegelpunkte zu setzen. Den erstgenannten Fall bezeichnen sie mit  $r_p = 0$ , den letztgenannten mit  $r_p = 1$ . Aus diesen Vorüberlegungen leiten sich die in Tabelle 4.2 zusammengestellten Parametersätze  $(p, r_p)$  ab, für die die Zerlegung der Modellsignale in IMF

<sup>3</sup> Ein Polygonzug wird genau genommen erst für  $p \rightarrow \infty$  realisiert. Durch die Wahl des Wertes  $p = 50$  approximiert der so definierte Spline einen Polygonzug jedoch *genügend genau*.

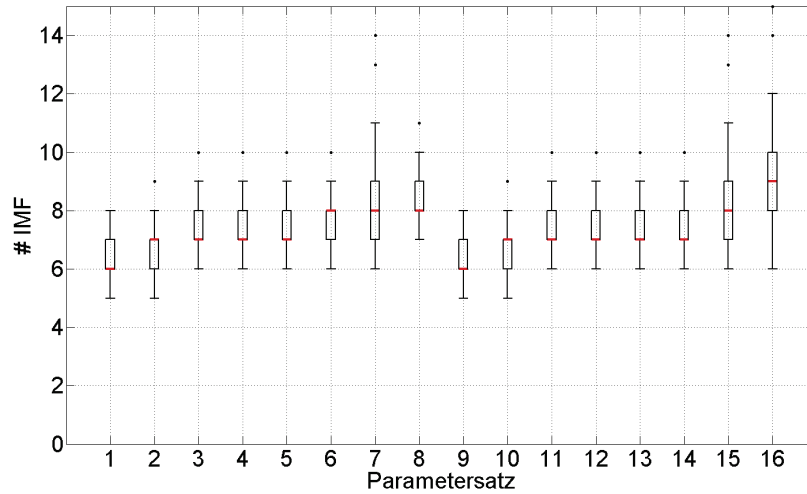
nach den in Abschnitt 4.1.1 vorgestellten Kriterien bewertet werden soll. Da sich die Splines für ansteigende Werte von  $p$  Polygonzügen annähern und für die hier untersuchten Signale für große Werte von  $p$  kaum signifikante Änderungen in der Zerlegung zu erwarten sind, werden Parametersätze zusammengestellt, bei denen nur bis  $p = 5$  alle ganzzahligen  $p$ -Werte in Betracht gezogen werden. Für jeden dieser Parametersätze wird die EMD realisiert und alle in Abschnitt 4.1.1 zusammengestellten Modellsignale zerlegt. Daran anschließend werden die für die in Abschnitt 4.1.2.1 aufgeführten Kriterien relevanten Größen (Anzahl Siebiterationen,  $E_{\Delta x}$ , etc.) für jedes Modellsignal berechnet. Die so entstandene Werteschar wird größen- und parametersatzabhängig in einem Box-Whisker-Plot<sup>4</sup>, die Box-Whisker-Plots aller Parametersätze einer jeweiligen Größe in einem Diagramm dargestellt (vgl. Abbildungen 4.1 - 4.8). Die Diskussion der Ergebnisse erfolgt für die nicht verrauschten und die verrauschten Signale getrennt.

**Tabelle 4.2:** Zusammenstellung der verwendeten Paramaterkombinationen von Tensionsparameter  $p$  und Modellierungsparameter für die Intervallgrenzen  $r_p$  der verwendeten rationalen Splines.

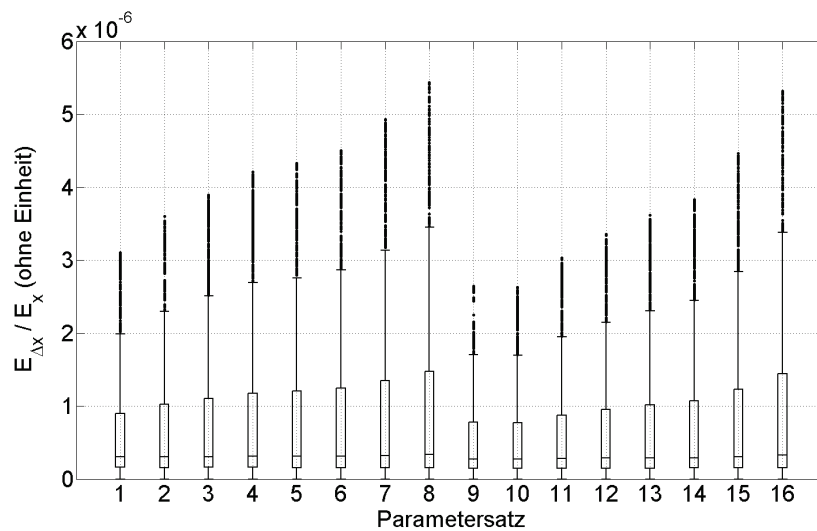
Parametersatz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$p$	0	1	2	3	4	5	10	50	0	1	2	3	4	5	10	50
$r_p$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

**Modellsignale ohne additives Rauschen.** Für den Fall  $\sigma_\varepsilon = 0$  wird erwartet, dass die EMD die durch Gleichung 4.1 definierten Testsignale in genau eine IMF zerlegt. Abbildung 4.1 zeigt jedoch, dass diese Erwartung nicht erfüllt wird. Für jeden Parametersatz gilt, dass es kein Modellsignal gibt, welches nicht wenigstens in fünf IMF zerlegt wird. Für die Parametersätze 7, 15 und 16 gibt es sogar Modellsignale, die in 14 IMF zerlegt werden. Unter der Annahme, dass die relevanten Informationen (ein amplituden- und frequenzmoduliertes Signal) in einer einzigen dieser IMF extrahiert worden sind, sollte der Unterschied zwischen beiden Signalen sehr gering, somit  $E_{\Delta x} \approx 0$  sein. Ferner sollten die restlichen IMF keine Information enthalten und demnach  $E_{irr} \approx 0$  gelten. Die Abbildung 4.2 stellt die Größe  $E_{\Delta x}$  (normiert auf die Energie  $E_x$  des jeweiligen Modellsignals  $x$ ) aller Modellsignale für jeden Parametersatz als Box-Whisker-Plot dar. Deutlich wird, dass mit zunehmendem  $p$  sowohl Wertebereich als auch Standardabweichung der auf  $E_x$  normierten  $E_{\Delta x}$  steigen. Der Einfluss des Parameters  $r_p$  ist von untergeordneter Bedeutung. Auf Grund der Größenordnung von  $10^{-6}$  kann jedoch festgehalten werden, dass alle Modellsignale ungeachtet der Wahl der Signalparameter und des HHT-Parametersatzes mit vernachlässigbarem Fehler extrahiert werden.

<sup>4</sup> Für die Beschreibung eines Box-Whisker-Plots sei auf Anhang C.3 verwiesen.

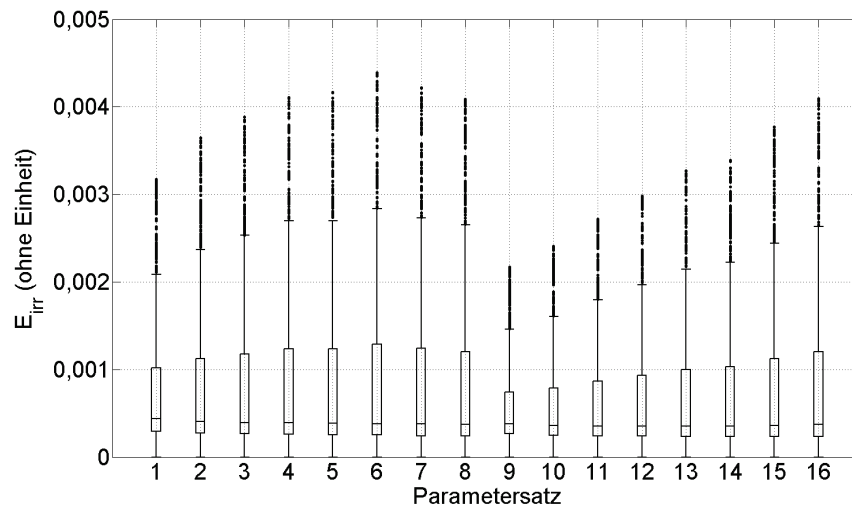


**Abbildung 4.1:** Zusammenstellung der Box-Whisker-Plots für die IMF-Anzahl aller Modellsignale ohne additives Rauschen aller Parametersätze. Die erwartete Zerlegung der Modellsignale in genau eine IMF wird für kein Modellsignal und keinen Parametersatz realisiert.



**Abbildung 4.2:** Zusammenstellung der Box-Whisker-Plots für die, auf die Signalenergie  $E_x$  normierte Energie  $E_{\Delta x}$  aller Modellsignale ohne additives Rauschen aller Parametersätze.

Abbildung 4.1 zeigt, dass neben der das Modellsignal (nahezu perfekt) repräsentierenden IMF eine Anzahl zusätzlicher IMF ohne physikalische Bedeutung erzeugt wird. Da deren Auftreten nicht verhindert werden kann, ist zu klären, in welcher Größenordnung die so fälschlicherweise extrahierten Informationen liegen. Anhand einer ähnlichen Darstellung wie in Abbildung 4.2 für die Größe  $E_{\Delta x}$  ist in Abbildung 4.3 die Größe  $E_{irr}$  aller Modellsignale für jeden Parametersatz als Box-Whisker-Plot dargestellt. Die Standardabweichungen liegen bei gleichem  $p$  für die Parametersätze mit  $r_p = 1$  unter denen der Parametersätze mit  $r_p = 0$ . Ferner steigen bis auf wenige Ausnahmen die Standardabweichungen mit steigendem  $p$ . Dennoch kann auch hier auf Grund der Größenordnung von  $10^{-3}$  davon ausgegangen werden, dass die durch die EMD hinzugefügten Informationen vernachlässigbar sind.



**Abbildung 4.3:** Zusammenstellung der Box-Whisker-Plots für die Energie  $E_{irr}$  aller Modellsignale ohne additives Rauschen aller Parametersätze.

Angesichts der vernachlässigbaren Größenordnung, sowohl der Fehler bei der Extraktion der Modellsignale als auch der zusätzlichen, irrelevanten IMF, kann aus der Analyse der nicht verrauschten Modellsignale geschlossen werden, dass unabhängig von der Wahl des Parametersatzes eine nahezu einwandfreie Extraktion der Modellsignale realisiert wird und somit kein Parametersatz zu bevorzugen ist.

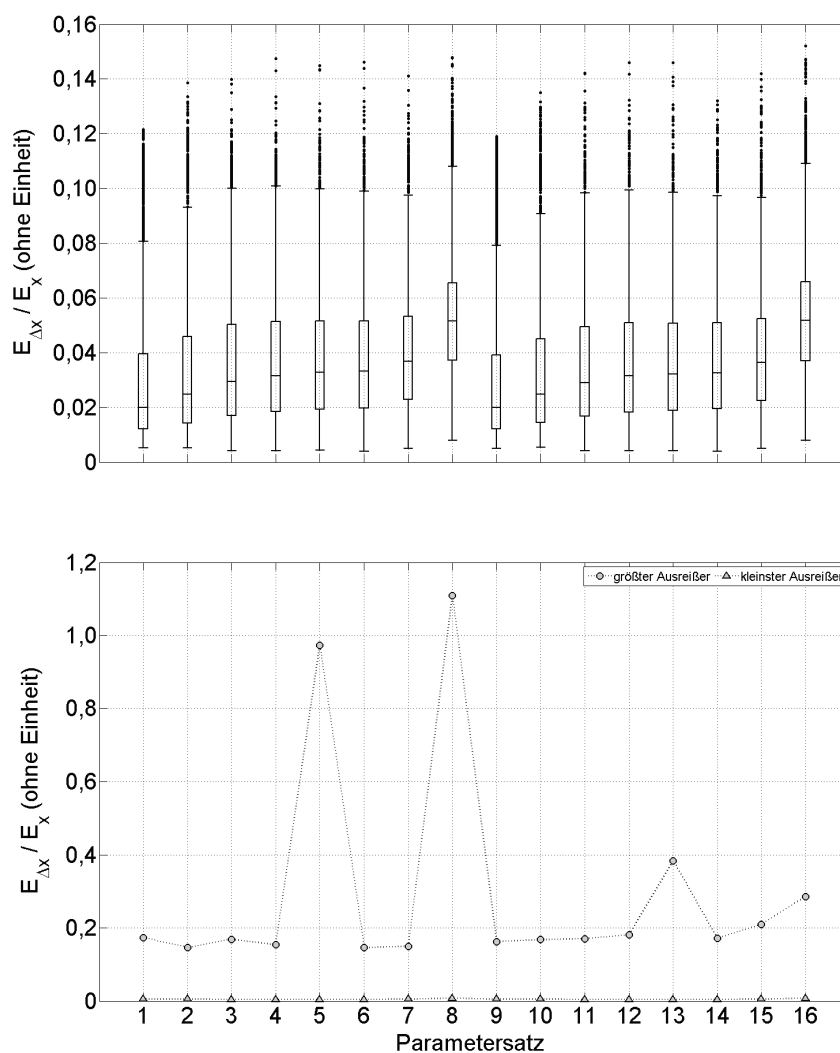
**Modellsignale mit additivem Rauschen.** Für den Fall  $\sigma_\epsilon = 0,1$  wird erwartet, dass als Resultat der Zerlegung eines Modellsignals genau eine IMF dieses Modellsignal repräsentiert und damit wie im Fall der Analyse nicht verrauschter Signale  $E_{\Delta x} \approx 0$  gilt. Die Energie  $E_{irr}$  der übrigen IMF soll der Energie  $E_\epsilon$  des additiven Rauschen entsprechen, also  $E_{irr} \approx E_\epsilon$ . Im Gegensatz zu den Ergebnissen nicht verrauschter Modellsignale treten signifikant höhere Werte für



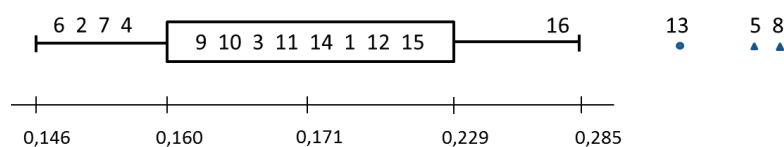
$E_{\Delta x}/E_x$  auf (Abbildung 4.4, oben). Der Median der Energie  $E_{\Delta x}$  des Differenzsignals liegt, je nach Parametersatz zwischen 2% und 5% der Energie  $E_x$  des Modellsignals. Er vergrößert sich mit zunehmendem Wert für  $p$ , unabhängig von der Wahl des Parameters  $r_p$ . Gleiches gilt für die Standardabweichung. Deutlich wird, dass bei der Verwendung sehr straffer Splines (Parametersätze 8 und 16,  $p = 50$ ) signifikant höhere Fehler bei der Extraktion relevanter Signale auftreten als bei Nutzung von Splines mit kleineren Werten für  $p$ . Die Verteilungen der auf  $E_x$  normierten  $E_{\Delta x}$  sind für alle Parametersätze (mit Ausnahme der Parametersätze 8 und 16 (linearer Spline) sowie 1 und 9 (kubischer Spline)) zudem sehr ähnlich, sodass als Kriterium für die Priorisierung der Parametersätze die jeweils größten extremen Ausreißer pro Parametersatz (im Folgenden als Maximalwerte bezeichnet) hinzugezogen werden sollen. Während diese für die meisten Parametersätze vergleichbar sind, verzeichnen die Parametersätze 5, 8, 13 und 16 (stark) erhöhte Maximalwerte (Abbildung 4.4, unten). Um die Höhe der Werte diskutieren zu können, werden die Maximalwerte in einem eigenen Box-Whisker-Plot veranschaulicht (Abbildung 4.5). Während die Maximalwerte für den Parametersatz 13 als Ausreißer und für die Parametersätze 5 und 8 als extreme Ausreißer gelten, liegt der Maximalwert für den Parametersatz 16 noch innerhalb des Whiskers und gilt somit nicht als Ausreißer.

Die Untersuchung der Energie  $E_{irr}$  führt zu ähnlichen Ergebnissen. Unabhängig vom Wert des Parameters  $r_p$  vergrößern sich Mediane und Standardabweichungen mit steigendem Wert des Parameters  $p$  (Abbildung 4.6, oben), wobei sich die Box-Whisker-Plots für Parametersätze mit  $4 \leq p \leq 10$  kaum unterscheiden. Daher sollen auch hier die Maximalwerte der auf die Energie  $E_\varepsilon$  normierten Energie  $E_{irr}$  betrachtet werden. Abbildung 4.6 (unten) zeigt, dass mehrere Parametersätze sehr hohe Maximalwerte verzeichnen, sodass die Entscheidung, welche Maximalwerte als (extreme) Ausreißer anzusehen sind, in diesem Fall nicht so offensichtlich ist. Werden die Maximalwerte aller Parametersätze wiederum mittels eines Box-Whisker-Plots dargestellt (Abbildung 4.7), gilt nur der Maximalwert des Parametersatzes 9 als Ausreißer.

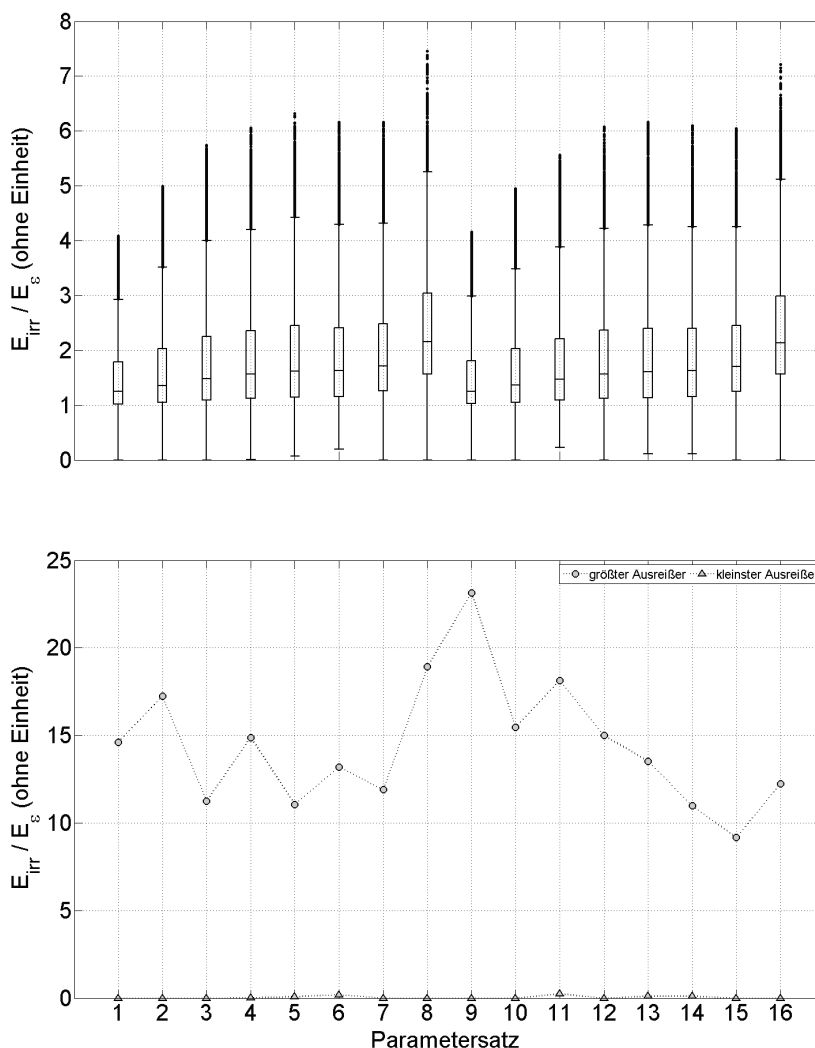
Neben der Auswertung der Signalenergie der IMF soll die Anzahl an Siebiterationen, die für die Zerlegung eines jeden Modellsignals in seine IMF benötigt wird, diskutiert werden. Während sich (unabhängig vom Wert des Parameters  $r_p$ ) die Verteilungen der Siebiterationen für Parameterwerte  $0 \leq p \leq 5$  nicht signifikant unterscheiden, werden im Fall der Parametersätze mit  $p = 10$  bzw.  $p = 50$  deutlich mehr Siebiterationen benötigt. Die Anzahl streut zudem sehr viel stärker (Abbildung 4.8, oben). Diese Tatsache wird durch die Größe der Maximalwerte unterstrichen (Abbildung 4.8, unten). Bei Darstellung dieser in einem Box-Whisker-Plot (Abbildung 4.9) gelten die Werte der Parametersätze 8 und 16 ( $p = 50$ ) als extreme Ausreißer, die Werte der Parametersätze 7 und 15 ( $p = 10$ ) liegen am Ende des oberen Whisker.



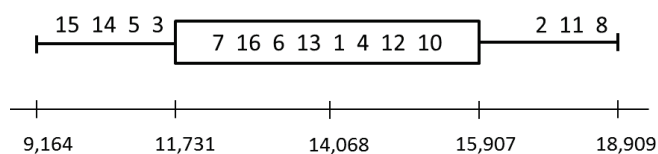
**Abbildung 4.4:** Oben: Zusammenstellung der Box-Whisker-Plots für die, auf die Signalenergie  $E_x$  normierte Energie  $E_{\Delta x}$  aller Modellsignale mit additivem Rauschen aller Parametersätze. Unten: Parametersatzabhängige minimale und maximale Werte von  $E_{\Delta x} / E_x$ , die bei der Zerlegung von einem der Modellsignale erreicht werden.



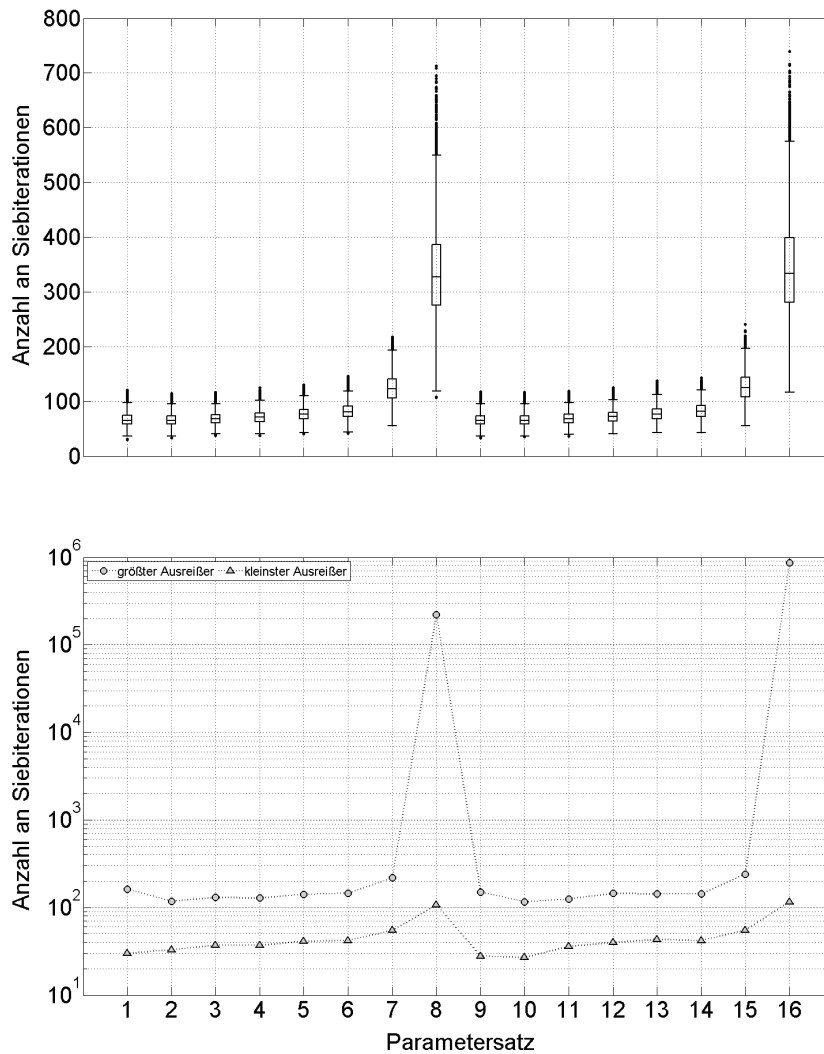
**Abbildung 4.5:** Box-Whisker-Plot der in Abbildung 4.4 dargestellten maximalen Werte von  $E_{\Delta x} / E_x$  je Parametersatz. Die einzelnen Werte sind durch den Index des zugehörigen Parametersatzes gekennzeichnet. Ausreißer sind zusätzlich durch einen Kreis (Parametersatz 13), extreme Ausreißer durch Dreiecke (Parametersätze 5 und 8) markiert.



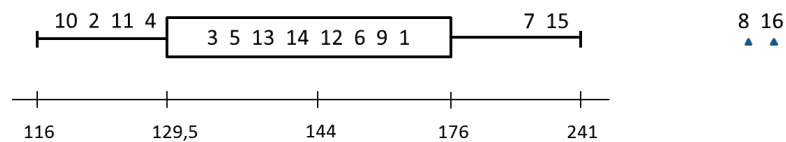
**Abbildung 4.6:** Oben: Zusammenstellung der Box-Whisker-Plots für die, auf die Energie  $E_{\epsilon}$  des Rauschens normierte Energie  $E_{irr}$  aller Modellsignale mit additivem Rauschen aller Parametersätze. Unten: Parametersatzabhängige minimale und maximale Werte von  $E_{irr}/E_{\epsilon}$ , die bei der Zerlegung von einem der Modellsignale erreicht werden.



**Abbildung 4.7:** Box-Whisker-Plot der in Abbildung 4.6 dargestellten maximalen Werte von  $E_{irr}/E_{\epsilon}$  je Parametersatz. Die einzelnen Werte sind durch den Index des zugehörigen Parametersatzes gekennzeichnet. Ausreißer sind zusätzlich durch einen Kreis (Parametersatz 9) markiert.



**Abbildung 4.8:** Oben: Zusammenstellung der parameterspezifischen Box-Whisker-Plots für die Anzahl an Siebiterationen, die für die Zerlegung eines jeweiligen Modellsignals mit additivem Rauschen benötigt wird. Unten: Parametersatzabhängige minimale und maximale Werte der Siebiterationsanzahl, die bei der Zerlegung von einem der Modellsignal erreicht werden.



**Abbildung 4.9:** Box-Whisker-Plot der in Abbildung 4.8 dargestellten maximalen Werte der Siebiterationsanzahl je Parametersatz. Die einzelnen Werte sind durch den Index des zugehörigen Parametersatzes gekennzeichnet. Extreme Ausreißer sind zusätzlich durch Dreiecke (Parametersätze 8 und 16) markiert.

Welcher der Parametersätze ist nun zu bevorzugen? Da es Ziel ist, alle Modellsignale möglichst gut zu extrahieren, werden zunächst die Parametersätze verworfen, deren Maximalwerte bei mindestens einer der drei Analysen (Anzahl an Siebiterationen,  $E_{\Delta x}/E_x$ ,  $E_{irr}/E_e$ ) im oberen Whisker liegen oder aber als Ausreißer bzw. extreme Ausreißer klassifiziert werden. Betroffen sind demnach die Parametersätze 2, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15 und 16. Damit sind alle die Parametersätze aussortiert, die besonders hohe und damit nicht gewollte Werte liefern. Von den übrigen Parametersätzen wird der Parametersatz 3 ( $r_p = 0$ ,  $p = 2$ ) priorisiert, da dies der einzige Parametersatz ist, bei dem die Maximalwerte aller drei Kenngrößen unter dem jeweiligen Median liegen. Für die Analysen der  $C/N_0$ -Werte in dieser Arbeit wird somit eine EMD genutzt, deren Siebprozess durch eine envelopebasierte Mittelwertbestimmung unter Nutzung rationaler Splines mit  $r_p = 0$  und  $p = 2$  sowie das in [RFG03] vorgestellte Mittelwert-Kriterium als Abbruchkriterium realisiert wird.

#### 4.1.3 Bewertung des optimalen HHT-Prozessparametersatzes

Ziel dieser Arbeit ist es, Trägerphasenmessfehler möglichst genau zu bestimmen, was maßgeblich von der Genauigkeit bei der Bestimmung von Amplituden und Phasen der Mehrwegesignale abhängt (Gleichung 2.82). Die Bewertung des im vorangegangenen Abschnitt ausgewählten HHT-Parametersatzes erfolgt daher anhand von zwei Analysen. Zunächst wird angenommen, dass genau ein Mehrwegesignal auftritt. Die Aufgabe seiner Gewinnung mittels EMD kann darauf zurückgeführt werden, die durch Gleichung 4.1 definierten Modellsignale  $x$  in ihre IMF  $x_i$  zu zerlegen und die relevante IMF  $x_i^{rel}$  als Mehrwegesignal zu interpretieren (Abschnitt 4.1.1). Werden nun instantane Amplituden und Phasen der relevanten IMF  $x_i^{rel}$  (Ist-Wert) mittels NHT berechnet und mit den entsprechenden Werten des Modellsignals  $x$  (Soll-Wert) verglichen, können Aussagen über die erzielbare Genauigkeit bei der Bestimmung der Amplituden und Phasen des Mehrwegesignals und damit auch des Trägerphasenmessfehlers getroffen werden. Diesen Untersuchungen widmet sich Abschnitt 4.1.3.1. Die zweite Fragestellung fokussiert auf die bereits in Abschnitt 3.1.4.2 erwähnten Grenzen der Trennbarkeit zweier Signale. Diese in Abschnitt 4.1.3.2 für die adaptierte EMD diskutierte Eigenschaft sowie Genauigkeitsgrenzen bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers ist für den Fall von Bedeutung, dass dem direkten Signal mehr als ein Mehrwegesignal überlagert ist.

##### 4.1.3.1 Abschätzung der Abweichung bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers bei Auftreten eines einzelnen Mehrwegesignals

Für die Berechnung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  werden nach Gleichung 2.83 die Amplitude  $\alpha$  und die Phasenlage  $\theta$  des Mehrwegesignals benötigt. Demzufolge hängt die Genauig-

keit, die bei seiner Bestimmung erreicht werden kann, von der Genauigkeit ab, mit der die Amplitude und die Phasenlage des Mehrwegesignals bestimmt werden kann. Quantitativ kann die Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  des berechneten vom wahren Trägerphasenmessfehler mit Hilfe der Fehleranalyse erfasst werden.<sup>5</sup> Dafür sind die den Trägerphasenmessfehler  $\Delta\phi$  beschreibende Gleichung 2.83 nach  $\alpha$  und  $\theta$  partiell abzuleiten (Gleichungen 4.7 und 4.8).<sup>6</sup>

$$\Delta(\Delta\phi) = \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\alpha} \right| \Delta\alpha + \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\theta} \right| \Delta\theta \quad (4.7)$$

$$\Delta(\Delta\phi) = \left| \frac{\sin\theta}{1 + 2\alpha \cos\theta + \alpha^2} \right| \Delta\alpha + \left| \frac{\alpha \cos\theta + \alpha^2}{1 + 2\alpha \cos\theta + \alpha^2} \right| \Delta\theta \quad (4.8)$$

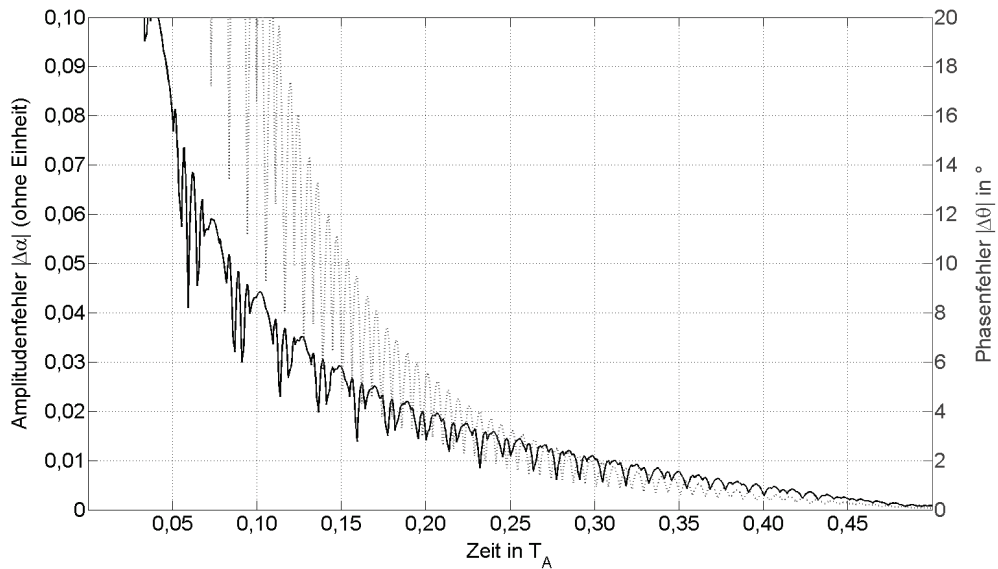
Um den maximalen Wert von  $\Delta(\Delta\phi)$  in Abhängigkeit der Mehrwegesignalparameter  $\alpha$  und  $\theta$  diskutieren zu können, sind obere Schranken für die Fehler  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\theta$  bei der Bestimmung der Amplitude  $\alpha$  und der Phasenlage  $\theta$  einzusetzen. Diese oberen Schranken werden unter Verwendung der in Abschnitt 4.1.1 definierten Testsignale als repräsentative Mehrwegesignale ermittelt. Dafür werden diese zunächst mittels EMD zerlegt. Im Anschluss daran werden mittels NHT die instantanen Amplituden- und Phasenwerte der relevanten IMF  $x_i^{rel}$  bestimmt<sup>7</sup> und die Abweichungen  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\theta$  zu den Werten der originalen Modellsignale berechnet. Für jeden Zeitpunkt können dann, in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\theta$  obere Schranken  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\theta$  festgelegt werden, die nicht oder nur in einer bestimmten Prozentzahl untersuchter Fälle überschritten wird. Die Ergebnisse werden im folgenden getrennt nach den Werten der Standardabweichung  $\sigma_\varepsilon$  für das additive Rauschen dargestellt.

**Modellsignale ohne additives Rauschen.** Für den Fall  $\sigma_\varepsilon = 0$  kann für die Gesamtheit der Modellsignale eine (zeitabhängige) obere Schranke für  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\theta$  angegeben werden (vgl. Abbildung 4.10). So werden beispielsweise nach einer Einschwingzeit von 21% des Analyseintervalls  $T_A$  ( $0,21T_A$ ) alle Amplituden mit einem Fehler  $\Delta\alpha < 0,02$ , alle Phasen mit einem Fehler  $\Delta\theta < 5^\circ$  bestimmt. Nach einer Einschwingzeit von 30% des Analyseintervalls  $T_A$  ( $0,3T_A$ ) gilt  $\Delta\alpha < 0,01$  und  $\Delta\theta < 2^\circ$ . Abbildung 4.11 visualisiert den bei der Trägerphasenbestimmung maximal auftretenden Fehler in Abhängigkeit von der relativen Mehrwegephasenlage  $\theta$  und der relativen Amplitude  $\alpha$  nach Gleichung 4.8. Dabei wird die Darstellung auf den zu erwartenden Wertebereich  $\alpha \leq 0,3$  beschränkt. Der maximale Fehler beträgt  $0,09$  rad. Für ein GPS L1-Signal bedeutet dies eine bis auf  $2,7$  mm genaue Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$ .

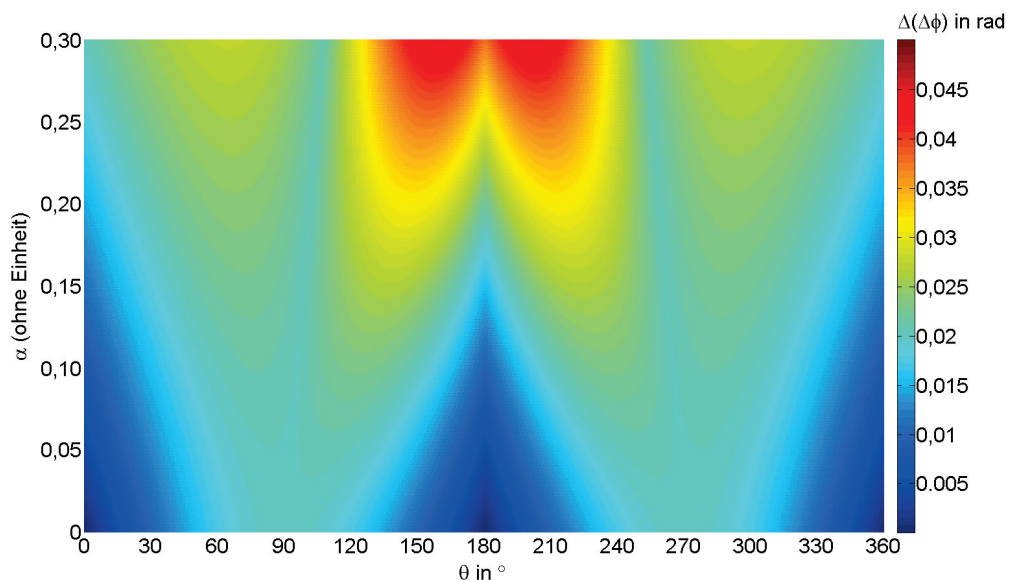
<sup>5</sup> Erläuterungen zur Fehleranalyse finden sich im Anhang C.4.

<sup>6</sup> Um eine Ausgleich der einzelnen Fehlerterme zu verhindern, werden deren Beträge addiert.

<sup>7</sup> Die IMF gilt als relevant, wenn sie einen Korrelationskoeffizienten größer  $0,9$  mit dem Signal  $x$  besitzt.

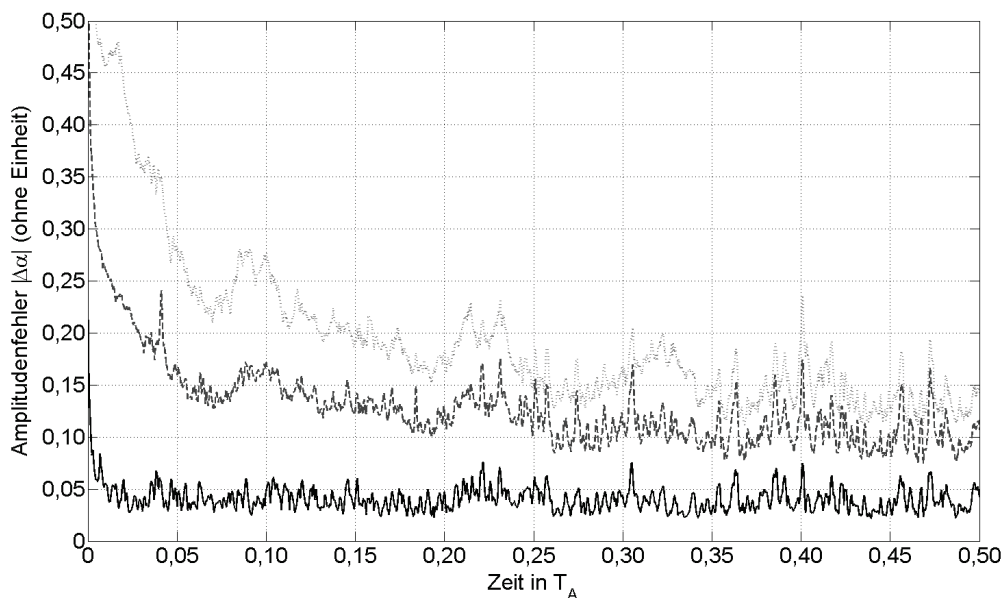


**Abbildung 4.10:** Maximal auftretender Amplitudenfehler  $\Delta\alpha$  (schwarz) und maximal auftretender Phasenfehler  $\Delta\theta$  (grau) bei der Analyse aller Modellsignale mit  $\sigma_\varepsilon = 0$ . Nach einer Einschwingzeit von  $0,3T_A$  können die Amplituden mit einem maximalen Fehler von  $\Delta\alpha = 0,01$ , die Phasen mit einem maximalen Fehler von  $\Delta\theta < 2^\circ$  bestimmt werden.



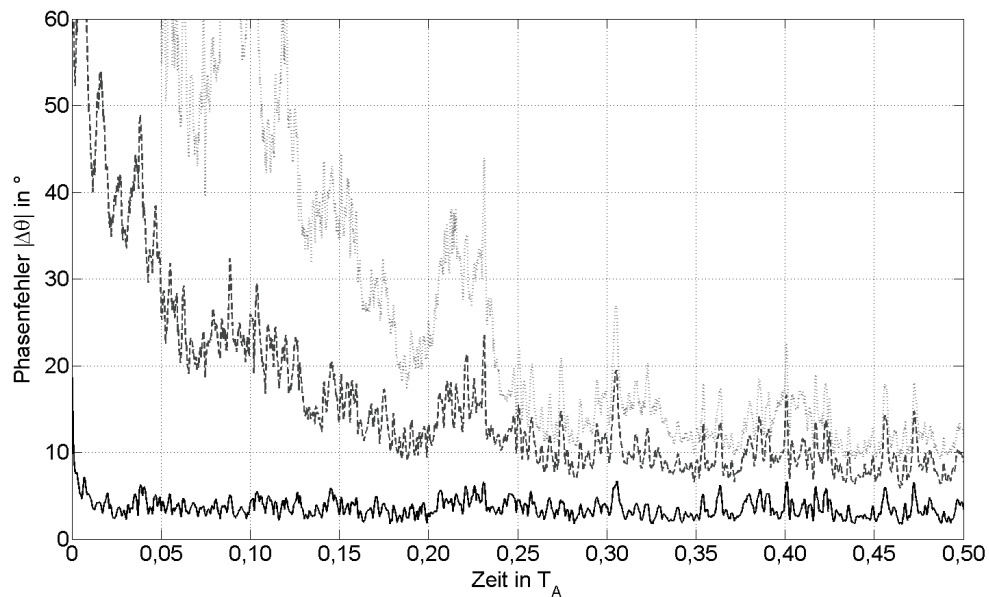
**Abbildung 4.11:** Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  nach Gleichung 4.8 in Abhängigkeit von der Phase  $\theta$  und der Amplitude  $\alpha$  des Mehrwegesignals.

**Modellsignale mit additivem Rauschen.** Da bei Hinzufügen von additivem Rauschen bereits die Extraktion der Modellsignale mit größeren Fehlern behaftet ist als im Fall von nicht verrauschten Modellsignalen, wird erwartungsgemäß auch die Bestimmung der Amplituden und Phasen ungenauer ausfallen. Würden die oberen Schranken  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\theta$  für deren Abweichungen wie im Fall der nicht verrauschten Modellsignale diskutiert werden, ergäben sich inakzeptabel hohe Werte für die Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers. Daher werden die Schranken als Quantile, das heißt, nur für eine bestimmte Prozentzahl der Modellsignale, dargestellt. Abbildung 4.12 gibt 0.5-, 0.9- und 0.95-Quantil des Fehlers  $\Delta\alpha$  bei der Bestimmung der Amplitude  $\alpha$  wieder, Abbildung 4.13 selbige Quantilwerte für den Fehler  $\Delta\theta$  bei der Bestimmung der Phasenlage  $\theta$ . Es ist zu erkennen, dass 90% aller Modellsignale (0.9-Quantil) nach einer Einschwingzeit von 10% des Analyseintervalls ( $0,1T_A$ ) mit einem Amplitudenfehler von  $\Delta\alpha < 0,18$  und einem Phasenfehler von  $\Delta\theta < 30^\circ$  rekonstruierbar sind. Wird eine Einschwingzeit von  $0,25T_A$  zugelassen, verbessert sich der Fehler bei der Bestimmung der Phasenlage auf  $\Delta\theta < 20^\circ$ . Sollen bei dieser Einschwingzeit 95% aller Modellsignale (0.95-Quantil) erfasst werden, liegen die oberen Schranken bei  $\Delta\alpha < 0,25$  bzw.  $\Delta\theta < 27^\circ$ .



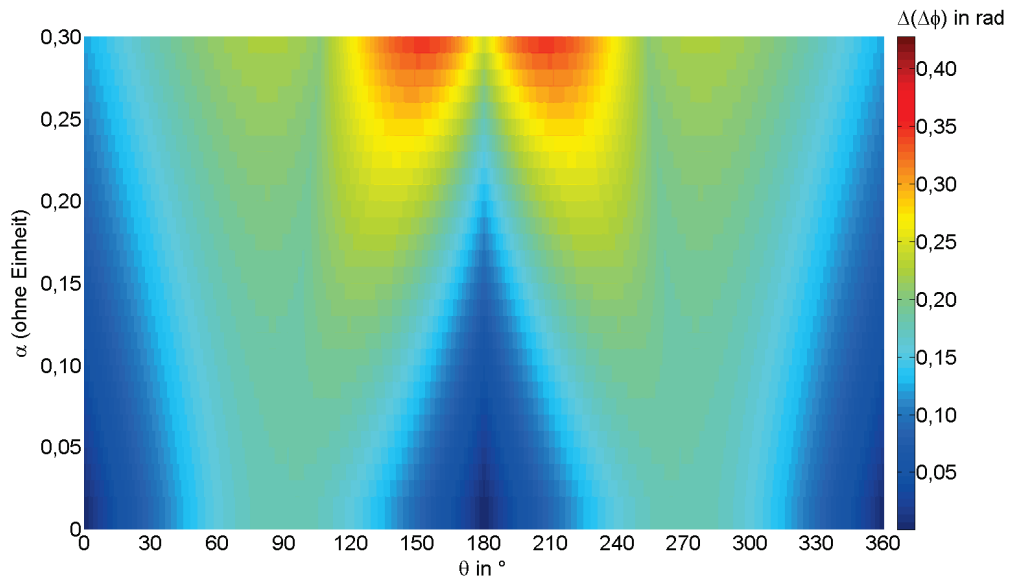
**Abbildung 4.12:** Fehler  $\Delta\alpha$  bei der Bestimmung der Amplituden  $\alpha$  der verrauschten Modellsignale ( $\sigma_\varepsilon = 0,1$ ) nach Gleichung 4.1, dargestellt als zeitabhängige Quantile: 0,5-Quantil (schwarz), 0,9-Quantil (dunkelgrau), 0,95-Quantil (hellgrau). Nach einer Einschwingzeit von  $0,25T_A$  ist der Fehler bei der Bestimmung der Amplitude für 90% der verrauschten Modellsignale kleiner als 0,18 (0,9-Quantil), für 95% der verrauschten Modellsignale kleiner als 0,25 (0,95-Quantil).



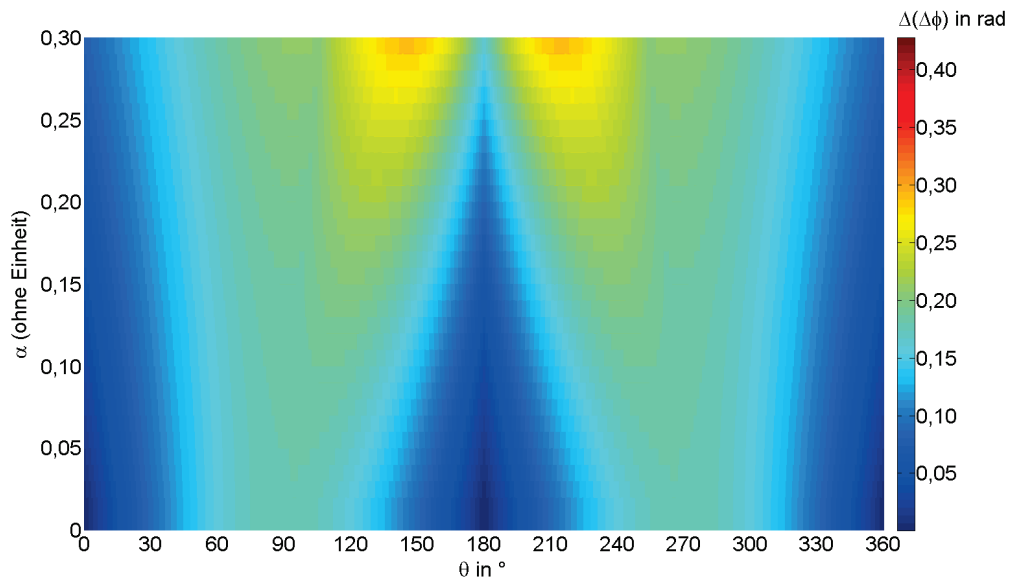


**Abbildung 4.13:** Fehler  $\Delta\theta$  bei der Bestimmung der Phasenlage  $\theta$  der verrauschten Modellsignale ( $\sigma_\varepsilon = 0,1$ ) nach Gleichung 4.1, dargestellt als zeitabhängige Quantile: 0,5-Quantil (schwarz), 0,9-Quantil (dunkelgrau), 0,95-Quantil (hellgrau). Nach einer Einschwingzeit von  $0,25T_A$  ist der Fehler bei der Bestimmung der Phasenlage für 90% der verrauschten Modellsignale kleiner als  $20^\circ$  (0,9-Quantil), für 95% der verrauschten Modellsignale kleiner  $27^\circ$  (0,95-Quantil).

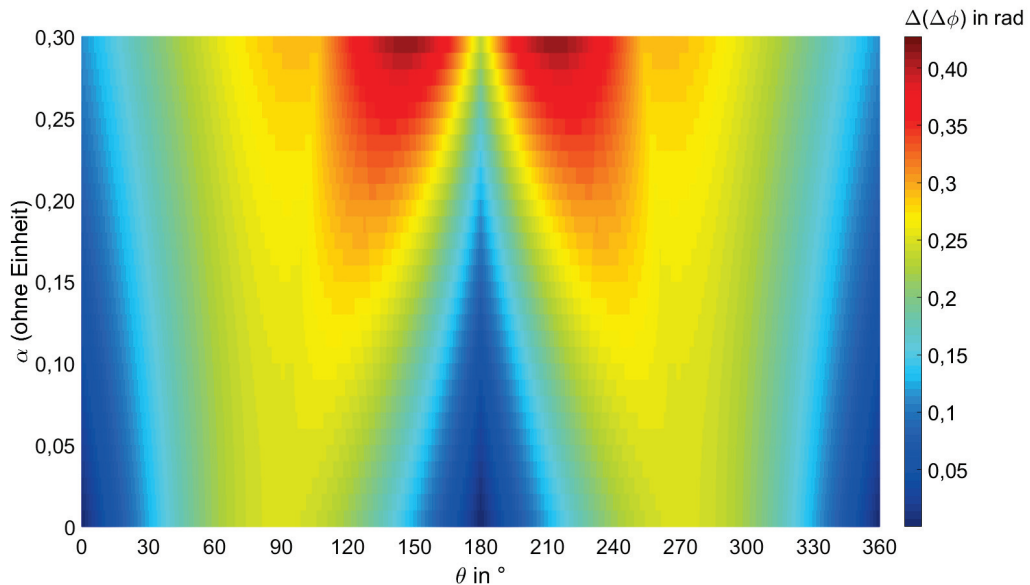
Die Abbildungen 4.14 bis 4.16 visualisieren die Abweichungen  $\Delta(\Delta\phi)$  bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehler  $\Delta\phi$ . Dabei wird bei der Darstellung, wie im Fall der nicht verrauschten Modellsignale, der Wertebereich der Amplitude  $\alpha$  auf eine erwartbare Größenordnung der relativen Mehrwegeamplitude  $\alpha \leq 0,3$  eingeschränkt. Abbildung 4.14 stellt die Werte von  $\Delta(\Delta\phi)$  für 90% der verrauschten Modellsignale nach einer Einschwingzeit von 10% des Analyseintervalls ( $0,1T_A$ ) in Abhängigkeit der Phasenlage  $\theta$  und der Amplitude  $\alpha$  dar. Die maximale Abweichung bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers liegt bei  $0,38$  rad. Für ein GPS L1-Signal entspräche dieser Wert  $1,15$  cm. Abbildung 4.15 visualisiert die Werte von  $\Delta(\Delta\phi)$  für eine zugelassene Einschwingzeit von 25% des Analyseintervalls ( $0,25T_A$ ). Zunächst werden wieder 90% aller verrauschten Modellsignale in Betracht gezogen. Die maximale Abweichung bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers beträgt in diesem Fall  $0,31$  rad. Für ein GPS L1-Signal entspräche dies  $0,94$  cm. Die bei der Verwendung von 95% aller Modellsignale berechneten Abweichungen bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta(\Delta\phi)$  sind in Abbildung 4.16 dargestellt. Der maximale Wert  $\Delta(\Delta\phi) \approx 0,43$  rad entspricht, wiederum beispielhaft für ein GPS L1-Signal, einem Fehler von  $1,3$  cm.



**Abbildung 4.14:** Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  nach Gleichung 4.8 in Abhängigkeit von der Phase  $\theta$  und der Amplitude  $\alpha$  des Mehrwegesignals. Verwendet werden 90% aller Modellsignale nach einer Einschwingzeit von  $0,1T_A$ .



**Abbildung 4.15:** Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  nach Gleichung 4.8 in Abhängigkeit von der Phase  $\theta$  und der Amplitude  $\alpha$  des Mehrwegesignals. Verwendet werden 90% aller Modellsignale nach einer Einschwingzeit von  $0,25T_A$ .



**Abbildung 4.16:** Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  nach Gleichung 4.8 in Abhängigkeit von der Phase  $\theta$  und der Amplitude  $\alpha$  des Mehrwegesignals. Verwendet werden 95% aller Modellsignale nach einer Einschwingzeit von  $0,25T_A$ .

#### 4.1.3.2 Analysen zur Extraktion mehrerer Mehrwegesignale

Neben der Abschätzung, wie genau der Trägerphasenmessfehler unter der Annahme eines einzelnen Mehrwegesignals bestimmt werden kann, interessiert, ob und wenn ja mit welcher Genauigkeit die Überlagerung mehrerer solcher Signale, hervorgerufen durch verschiedene Reflektoren, festgestellt wird und welche Auswirkungen dies auf die Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers hat. Als Basis dienen die in Abschnitt 3.1.4.2 vorgestellten Untersuchungen von [RF08] und [GH12]. Diese zeigen, dass die Antwort auf die Frage, wie zwei additiv überlagerte Signale interpretiert werden, von deren Amplituden-, Frequenz- und Phasenverhältnis abhängt. Sie machen jedoch keine Angaben zu auftretenden maximalen Fehlern bei der Amplituden- und Phasenschätzung der extrahierten Signale, Werte, die in dieser Arbeit benötigt werden, um Abweichungen  $\Delta(\Delta\phi)$  bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  berechnen zu können. Dieses Abschnitt zielt somit darauf ab, die Größenordnungen dieser Werte zu bestimmen, um in Abhängigkeit verschiedener Amplituden- und Frequenzverhältnisse (und damit der geometrischen Anordnung verschiedener Reflektoren) den Wertebereich der Abweichungen  $\Delta(\Delta\phi)$  abzuschätzen. Als Modellansatz dient die in Gleichung 4.9 bzw. 4.10 dargestellte Überlagerung zweier trigonometrischer Funktionen, die bereits in [RF08] genutzt wird<sup>8</sup>, wobei hier auch der Fall von additiv überlagertem GWR  $\varepsilon$  einbezogen wird.

<sup>8</sup> Vgl. dazu auch die Ausführungen in Abschnitt 3.1.4.2, insbesondere Gleichungen 3.31 und 3.32.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \varepsilon \quad (4.9)$$

$$= \alpha_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \alpha_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + \varepsilon \quad (4.10)$$

$$= \alpha_1 \cos \theta_1(t) + \alpha_2 \cos \theta_2(t) + \varepsilon \quad (4.11)$$

$$= \alpha(t) \cos \theta(t) + \varepsilon \quad (4.12)$$

mit

$$\alpha(t) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t))} \quad (4.13)$$

und

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left( \frac{\alpha_1 \sin \theta_1(t) + \alpha_2 \sin \theta_2(t)}{\alpha_1 \cos \theta_1(t) + \alpha_2 \cos \theta_2(t)} \right) \quad (4.14)$$

Wie bereits in Abschnitt 3.1.4.2 in der Abbildung 3.11 visualisiert, sind, je nach Frequenzverhältnis  $f = f_2/f_1$  und Amplitudenverhältnis  $a = \alpha_2/\alpha_1$  drei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Fall wird  $x$  als additive Überlagerungen zweier Cosinus-Schwingungen  $x_1$  und  $x_2$  interpretiert (Gleichung 4.11). Demzufolge werden nach Anwendung der HHT zwei relevante IMF  $x_i^{rel}$  mit Amplituden  $\alpha_1, \alpha_2$  und Phasen  $\theta_1, \theta_2$  erwartet. Der Trägerphasenmessfehler  $\Delta\phi$  ließe sich in diesem Fall nach Gleichung 2.84 mit  $n = 2$  berechnen (vgl. Gleichung 4.15). Die Amplituden werden jedoch mit Fehlern  $\Delta\alpha_1$  und  $\Delta\alpha_2$ , die Phasen mit Fehlern  $\Delta\theta_1$  und  $\Delta\theta_2$  bestimmt. Die sich daraus ergebende Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers lässt sich, wie auch bei Auftreten eines einzigen Mehrwegesignals, mit Hilfe der Fehleranalyse abschätzen.<sup>9</sup> Dabei gehen die Ableitungen der Funktion  $\Delta\phi$  (Gleichung 4.15) nach allen Parametern sowie die Maximalwerte der Fehler  $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\theta_1$  und  $\Delta\theta_2$  ein (Gleichung 4.16).

$$\Delta\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\alpha_1 \sin \theta_1 + \alpha_2 \sin \theta_2}{1 + \alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2} \right) \quad (4.15)$$

$$\Delta(\Delta\phi) = \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\alpha_1} \right| \Delta\alpha_1 + \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\alpha_2} \right| \Delta\alpha_2 + \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\theta_1} \right| \Delta\theta_1 + \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\theta_2} \right| \Delta\theta_2 \quad (4.16)$$

Im zweiten Fall wird  $x$  als ein amplitudenmoduliertes Signal interpretiert (Gleichung 4.12). Folglich wird genau eine relevante IMF  $x_i^{rel}$  mit Amplitude  $\alpha$  nach Gleichung 4.13 und Phase  $\theta$  nach Gleichung 4.14 erwartet. Es liegt demnach der Fall eines einzeln auftretenden Mehrwegesignals vor. Der Trägerphasenmessfehler  $\Delta\phi$  ist somit nach Gleichung 2.83, die Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  bei seiner Bestimmung nach Gleichung 4.8 zu bestimmen. Im dritten Fall können keine

---

<sup>9</sup> Erläuterungen zur Fehleranalyse finden sich in Anhang C.4.

allgemeingültigen Aussagen zur Interpretation nach Gleichung 4.11 oder Gleichung 4.12 und somit zur Anzahl der erwarteten relevanten IMF getroffen werden. Für die Analyse werden in diesem Fall, je nach tatsächlicher Anzahl, Amplituden- und Phasenwerte der IMF mit den entsprechenden Werten der Signale nach Gleichung 4.11 bzw. 4.12 verglichen.

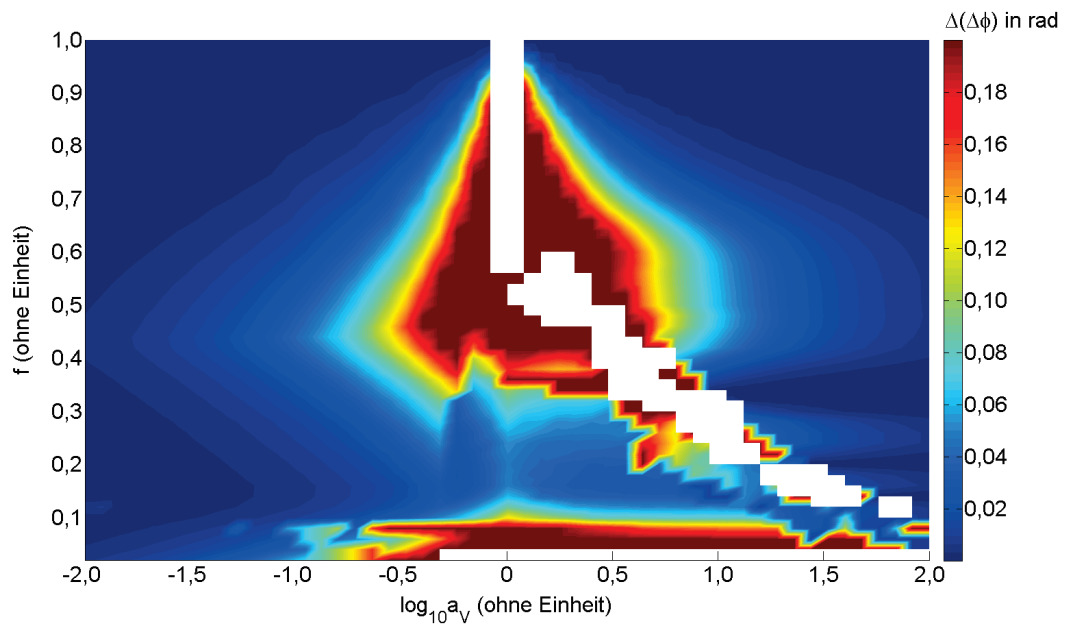
Als Grundlage für die Analysen werden Testsignale nach Gleichung 4.10 erzeugt. Die Frequenzverhältnisse  $f = f_2/f_1$  und die Amplitudenverhältnisse  $a_V = \alpha_2/\alpha_1$  werden dabei wie in [RF08] gewählt (vgl. Abbildung 3.11). Da in die Berechnung des Fehlers  $\Delta(\Delta\phi)$  Absolutwerte der Amplituden eingehen, ist neben der Angabe des Verhältnisses auch eine der beiden Amplituden festzulegen, wobei als obere Grenze der für Mehrwegesignale übliche Wert  $\alpha_i = 0,3$   $i \in \{1,2\}$  angenommen wird. Die Wertebereiche der Phasen  $\phi_1$  und  $\phi_2$  sowie der Standardabweichung  $\sigma_\varepsilon$  des GWR  $\varepsilon$  entsprechen den Wertebereichen für die Phasen  $\varphi_0$  und  $\sigma_\varepsilon$  der Testsignale aus Abschnitt 4.1.1 (Tabelle 4.1). Die so modellierten Testsignale werden in ihre IMF zerlegt, für die die Originalsignale nach Gleichung 4.10 bzw. 4.12 repräsentierenden IMF instantane Amplituden und Phasen berechnet und diese mit den Soll-Werten nach Gleichung 4.11 bzw. 4.13 und 4.14 verglichen. Für jede  $(a_V, f)$ -Kombination interessiert nun der Maximalwert für  $\Delta(\Delta\phi)$  über alle möglichen 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$ . Wie im vorangegangenen Abschnitt 4.1.3.1 erläutert, treten aufgrund der Eigenschaften der EMD an den Intervallenden deutlich erhöhte Fehler bei der Bestimmung der Amplituden und Phasen auf. Daher wird eine Einschwingzeit zugelassen (in den dargestellten Ergebnisse  $0,1T_A$ ), nach der die Werte in die Berechnungen eingehen. Die Ergebnisse werden im folgenden getrennt nach der Standardabweichung des Rauschens diskutiert.

**Modellsignale ohne additives Rauschen.** Für eine Überlagerung der Testsignale nach Gleichung 4.9 mit  $\sigma_\varepsilon = 0$  ergeben sich die in Abbildung 4.17 in Abhängigkeit der gewählten Amplituden- und Frequenzverhältnisse dargestellten Abweichungen  $\Delta(\Delta\phi)$  bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$ , wobei diese nur für die Kombinationen  $(a_V, f)$  bereitgestellt werden können, bei denen für alle zulässigen 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$  die relevante(n) IMF extrahiert worden sind. Eine IMF gilt dabei als relevant, wenn sie einen Korrelationskoeffizienten größer 0.9 mit einem der möglichen Originalsignale ( $x_1$ ,  $x_2$  oder  $x$ ) besitzt. In der Abbildung werden Werte  $\Delta(\Delta\phi) > 0,2$  rad einheitlich mit  $\Delta(\Delta\phi) = 0,2$  rad dargestellt.<sup>10</sup> Dies entspricht für ein GPS L1-Signal einer Abweichung von ca. 6 mm. Es können drei Berei-

---

<sup>10</sup> Diese Grenze ist an Angaben in [GPS06] angelehnt. Dort wird gefordert, dass die Trägerphasen in einer derartigen Qualität bereitzustellen sind, dass sie in einer PLL mit einer Genauigkeit von 0,1 rad RMS nachgeführt werden können. Der in Abbildung 4.17 dargestellte Wertebereich erfasst demnach Abweichungen bis zum Zweifachen dieses Wertes mit der tatsächliche Größenordnung. Höhere Abweichungen werden einheitlich mit dem Maximalwert dargestellt.

che unterschieden werden. Der erste Bereich ( $\Delta(\Delta\phi) \leq 0,1$  rad) umfasst die Kombinationen  $(a_V, f)$ , für die eine nahezu fehlerfreie Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  möglich, die Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  sehr gering ist. Die Kombinationen  $(a_V, f)$ , für die eine Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  für alle zulässigen 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$  zwar durchführbar ist, jedoch zum Teil mit einem erheblichen Fehler, bilden den zweiten Bereich ( $\Delta(\Delta\phi) > 0,1$  rad). Der dritte Bereich (weiß) erfasst die Kombinationen  $(a_V, f)$ , bei denen die Extraktion relevanter IMF nicht, oder nur für bestimmte 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$  erfolgreich durchgeführt wird.



**Abbildung 4.17:** Maximale Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  bei Auftreten zweier Mehrwegesignale in Abhängigkeit von deren Amplitudenverhältnis  $a$  und Frequenzverhältnis  $f$  über alle zulässigen 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$ . Werte  $\Delta(\Delta\phi) \geq 0,2$  werden mit  $\Delta(\Delta\phi) = 0,2$  dargestellt. Weiße Bereiche kennzeichnen die Kombinationen  $(a_V, f)$ , für die aufgrund einer unzureichenden Extraktion relevanter IMF nicht für alle zulässigen 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$  Abweichungen  $\Delta(\Delta\phi)$  bestimmt werden können.

Werden die Abbildung 4.17, in der die Bereiche nach Qualität der Korrektur, und Abbildung 3.11, in der die Bereiche nach Art der Signalinterpretation geteilt sind, miteinander verglichen, können die verschiedenen Bereiche teilweise einander zugeordnet werden. Die Bereiche, in denen das Signalgemisch als ein einzelnes amplitudenmoduliertes Signal interpretiert wird (Abbildung 3.11, weiß), fallen größtenteils in Bereiche, in denen eine nahezu fehlerfreie Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers realisiert wird. Gleiches gilt für die Bereiche, in denen das Signalgemisch als Überlagerung zweier Sinusschwingungen aufgefasst werden (Abbildung 3.11, schwarz). Größere Abweichungen treten lediglich für Kombinationen  $\{(a_V, f) | -$

$0,5 \leq \log_{10} a_V \leq 0,5, 0,3 \leq f \leq 0,9$  auf. Bei diesen Kombinationen sind die Amplituden  $\alpha_1, \alpha_2$  in ähnlicher Größenordnung. Im Fall der Interpretation als Überlagerung zweier Signale treten zudem große Fehler bzw. eine nicht erfolgreiche Zerlegung für die Kombinationen  $\{(a_V, f) \mid -0,5 \leq \log_{10} a_V \leq 2, f \leq 0,1\}$  auf. In diesen Fällen gilt, dass der Frequenzunterschied gering und die Amplitude des niederfrequenten Signals ähnlich bzw. größer als die des hochfrequenten Signals ist. Es bleibt die Diskussion der Bereiche, in denen keine Interpretationsweise festgelegt werden kann (Abbildung 3.11, grau). Diese lassen sich bezüglich der Genauigkeit bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers in zwei Kategorien teilen. Die erste Kategorie umfasst die zur  $\log_{10} a_V$ -Achse parallel ausgerichteten Streifen. Hier gelten die Aussagen, die bereits für die anderen beiden Interpretationsarten gemacht worden sind. Die zweite Kategorie umfasst den halbmondförmigen Bereich. Dieser Bereich deckt sich in großen Teilen mit dem Bereich der  $(a_V, f)$ -Kombinationen, für die keine, alle zulässigen 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$  umfassende, erfolgreiche Extraktion relevanter IMF gewährleistet ist.

Für die Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers bedeuten die Ergebnisse, dass bei gleichzeitigem Auftreten mehrerer Mehrwegesignale aufgrund verschiedener Reflektoren für die überwiegende Mehrheit der  $(a_V, f)$ -Kombinationen, das heißt die Kombination unterschiedlicher geometrischer Anordnungen (charakterisiert durch das Frequenzverhältnis  $f$ ) und Reflektormaterialien (charakterisiert durch das Amplitudenverhältnis  $a_V$ ), eine nahezu fehlerfreie Durchführung möglich ist. Kritisch ist die Bestimmung zu sehen, wenn die Amplituden der Mehrwegesignale in der gleichen Größenordnung liegen ( $-0,5 \leq \log_{10} a_V \leq 0,5$ ), also ähnliche Reflektormaterialien vorhanden sind. Insbesondere, wenn in diesem Fall das Frequenzverhältnis  $f > 0,4$  ist, können die Abweichungen  $\Delta(\Delta\phi)$  inakzeptabel hoch werden bzw. ist eine Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  aufgrund einer ungenügenden Extraktion der Mehrwegesignale nicht mehr möglich. Derartige Fälle treten beispielsweise auf, wenn zwei horizontale Reflektoren einen geringeren Abstand zueinander haben als Empfangsantenne und der ihr nahestehendere Reflektor (vgl. Gleichung 2.74 bzw. Gleichung 5.10). Ähnlich negative Ergebnisse sind zu verzeichnen, wenn das Frequenzverhältnis  $f < 0,1$  ist (die Reflektoren also beispielsweise weit voneinander entfernt sind) und die Amplitude des niederfrequenten Signals, das heißt des Signals, welches durch den Reflektor verursacht wird, der dichter an der Empfangsantenne gelegen ist, in der gleichen Größenordnung bzw. deutlich größer ist, als die Amplitude des hochfrequenten Signals ( $\log_{10} a_V \geq -0,5$ ).

**Modellsignale mit additivem Rauschen.** Im Unterschied zu den nicht verrauschten Modellsignalen tritt bei Signalen, die mit additivem GWR überlagert sind, verstärkt der Effekt des Mode Mixing (vgl. Abschnitt 3.1.4.2) auf. Das sinusförmige Signal wird zu unterschiedlichen Zeit-

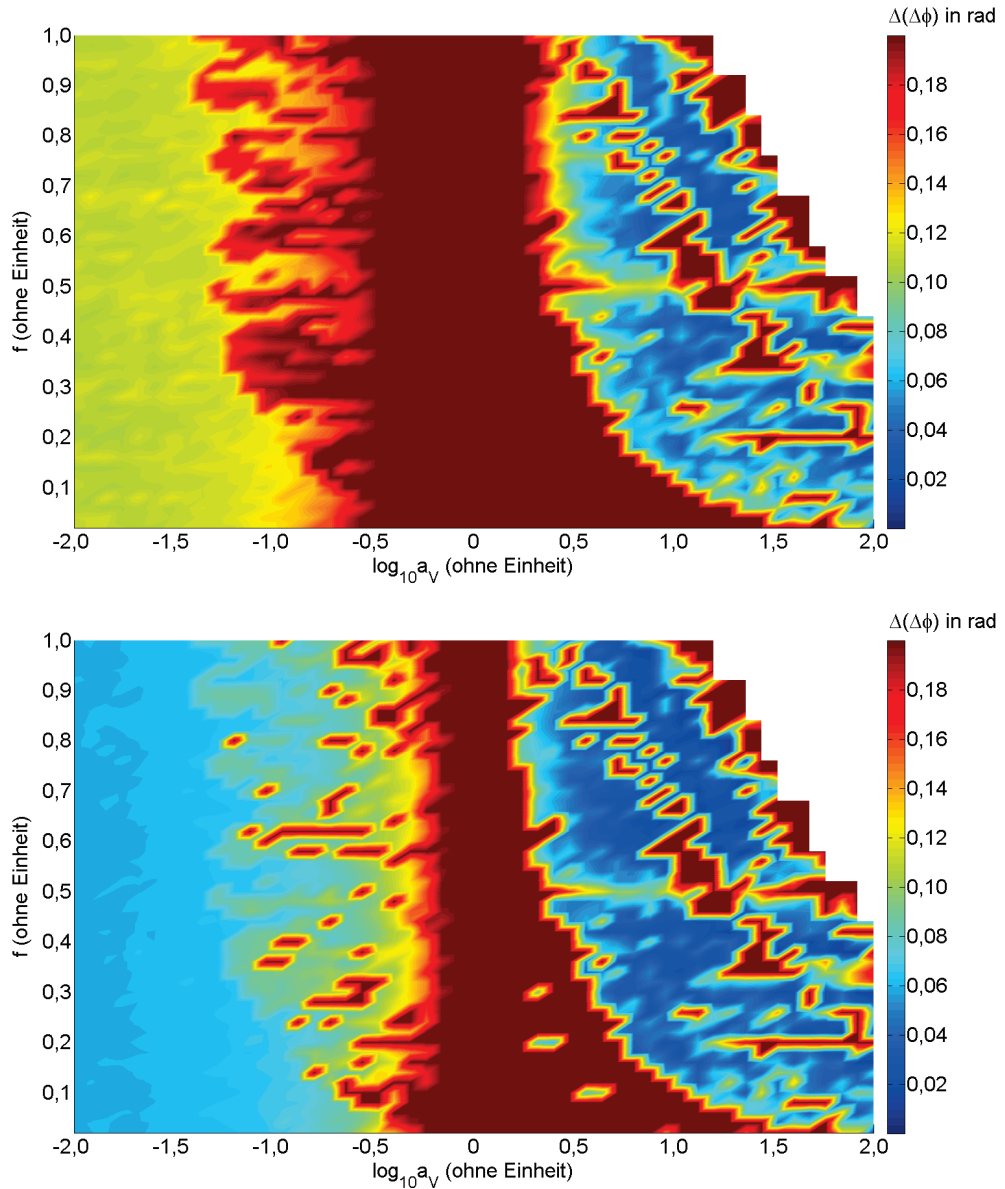
punkten von verschiedenen IMF repräsentiert. Die relevanten IMF über den Korrelationskoeffizient zu bestimmen, ist demnach auf Grund seiner geringen Größenordnung nur bedingt erfolgreich. Daher wird für die Detektion relevanter IMF das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte und in Abschnitt 4.2 vorgestellte Verfahren verwendet. Die vektorielle Überlagerung  $\tilde{x}$  der relevanten IMF  $x_i^{rel}$  und das Originalsignal  $x$  sollten in Amplitude und Phase übereinstimmen. Für einen Vergleich bzw. eine Bestimmung der Abweichung dieser Parameter sind Amplituden und Phasen der Signale  $x$  und  $\tilde{x}$  zu berechnen. Dies erfolgt nach den Regeln der Vektoraddition unter Verwendung der Amplituden und Phasen der einzelnen Signalanteile  $x_i$  bzw.  $x_i^{rel}$ .<sup>11</sup> Die Abweichungen zwischen den Signalen  $\tilde{x}$  und  $x$  in der Amplitude und Phase führen zu einer Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  nach Gleichung 4.8.

Abbildung 4.18 (oben) veranschaulicht die maximalen Werte von  $\Delta(\Delta\phi)$  für alle in Frage kommenden 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$  der jeweiligen  $(a_V, f)$ -Kombination. Wie auch in der Analyse nicht verrauschter Modellsignale gilt, dass für eine  $(a_V, f)$ -Kombination ein Wert für  $\Delta(\Delta\phi)$  nur dann angegeben wird, wenn die Extraktion relevanter IMF für alle 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$  erfolgreich ist. Ferner werden auch in dieser Darstellung Werte  $\Delta(\Delta\phi) > 0,2$  rad einheitlich mit  $\Delta(\Delta\phi) = 0,2$  rad dargestellt. Zunächst ist festzuhalten, dass die Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers deutlich schlechter realisiert wird und somit die Abweichungen  $\Delta(\Delta\phi)$  sehr viel größer ausfallen als im Fall nicht verrauschter Modellsignale. Es lassen sich jedoch auch hier drei Bereiche unterscheiden. Der weiße Bereich umfasst die  $(a_V, f)$ -Kombinationen, bei der nicht für alle 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$  die Extraktion relevanter IMF gewährleistet wird. In diesen Bereich fallen Kombinationen  $(a_V, f)$ , bei denen das niederfrequente Signal eine deutlich größere Amplitude besitzt als das hochfrequente ( $\log_{10} a_V > 1$ ) und der Abstand der Frequenzen nicht zu groß ( $f > 0,5$ ) ausfällt. Bereiche, in denen eine Extraktion zwar möglich ist, jedoch mit unzureichender Genauigkeit realisiert wird ( $\Delta(\Delta\phi) \geq 0,2$  rad), ergeben sich insbesondere für Kombinationen  $(a_V, f)$ , in denen die Amplituden der beiden Signale ähnlich sind ( $-0,5 \leq \log_{10} a_V \leq 0,5$ ), unabhängig vom Frequenzverhältnis der beiden Signale. Der dritte Bereich umfasst die Kombinationen  $(a_V, f)$ , für die eine annehmbare Genauigkeit ( $\Delta(\Delta\phi) < 0,2$  rad) erreichbar ist. Er umfasst Kombinationen mit  $\log_{10} a_V \leq -0,5$  und  $\log_{10} a_V \geq 0,5$ . Für erstere können, (größtenteils) unabhängig von der Frequenz, Genauigkeiten  $\Delta(\Delta\phi) < 0,14$  rad, das entspricht für ein GPS L1-Signal 4,2 mm, erzielt werden. Für letztere ist zu großen Teilen eine nahezu fehlerfreie Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers möglich ( $\Delta(\Delta\phi) < 0,1$  rad).

---

<sup>11</sup> Für den Fall der Überlagerung von zwei Signalen  $x_1$  und  $x_2$  ist die Bestimmung der gesuchten Größen in den Gleichungen 4.13 und 4.14 dargestellt. Für den Fall der Überlagerung von  $n$  Signalen erfolgt die Bestimmung analog.





**Abbildung 4.18:** Abweichung  $\Delta(\Delta\phi)$  des Trägerphasenmessfehlers  $\Delta\phi$  bei Auftreten zweier Mehrwegesignale in Abhängigkeit von deren Amplitudenverhältnis  $a$  und Frequenzverhältnis  $f$  über alle zulässigen 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$ . Werte  $\Delta(\Delta\phi) \geq 0,2$  werden mit  $\Delta(\Delta\phi) = 0,2$  dargestellt. Weiße Bereiche kennzeichnen die Kombinationen  $(a_V, f)$ , für die aufgrund einer unzureichenden Extraktion relevanter IMF nicht für alle zulässigen 4-Tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$  Abweichungen  $\Delta(\Delta\phi)$  bestimmt werden können. Oben: Maximalwerte für  $\Delta(\Delta\phi)$ . Unten: 0,95-Quantilwerte für  $\Delta(\Delta\phi)$ .

Werden nicht die Maximalwerte des  $\Delta(\Delta\phi)$  einer jeden Kombination  $(a_V, f)$ , sondern lediglich die 0,95-Quantile in Betracht gezogen (Abbildung 4.18, unten), ist zu konstatieren, dass sich die Bereiche, in denen eine nahezu fehlerfreie Extraktion der IMF möglich ist, vergrößern. Eine unzureichende Genauigkeit bleibt jedoch weiterhin bestehen, wenn die Amplituden der beiden Signale, unabhängig vom Verhältnis ihrer Frequenzen, in ähnlicher Größenordnung liegen. Es bleibt abschließend festzuhalten, dass sich die in diesem Abschnitt herausgearbeiteten Bereiche hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers nicht mit der Interpretationsstruktur deckt, wie sie in Abschnitt 3.1.4.2 Abbildung 3.11 dargestellt und diskutiert wird. Die Abweichung bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers ist demnach nicht abhängig davon, wie das Signal durch die EMD interpretiert wird (additive Überlagerung nach Gleichung 4.11 oder Amplitudenmodulation nach Gleichung 4.12), sondern vielmehr, in welchem Verhältnis die Signalparameter, insbesondere die Amplituden, zueinander stehen.

Werden die hier diskutierten Ergebnisse auf die zugehörigen Eigenschaften der Reflektoren übertragen, die eine Mehrwegeausbreitung der GNSS-Signale hervorrufen, ist festzuhalten, dass die Analysen der Testsignale mit additivem Rauschen in Teilen die Aussagen stützen, die bereits aus der Analyse der nicht verrauschten Testsignale abgeleitet werden konnten. Die Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers gestaltet sich insbesondere in den Fällen als schwierig, in denen die Materialeigenschaften der Reflektoren für beide Signale Amplituden in ähnlicher Größenordnung hervorrufen. Die Analysen zeigen, dass der Abstand der Reflektoren und das dadurch hervorgerufene Frequenzverhältnis der beiden Mehrwegesignale dabei eine untergeordnete Rolle spielt. Als günstig für eine genaue Trägerphasenmessfehlerbestimmung erweisen sich Materialien von Reflektoren, die zu stark unterschiedlichen Amplituden der Signale führen. Auch hier gilt, dass die Anordnung der Reflektoren von geringerer Relevanz ist. Dies gilt insbesondere für den Fall, dass die Amplitude des niederfrequenten Signals (hervorgerufen durch den Reflektor mit der geringeren Distanz zur Empfangsantenne) deutlich kleiner ist als die Amplitude des höherfrequenten Signals (hervorgerufen durch den Reflektor mit der größeren Distanz zur Empfangsantenne).

## 4.2 Festlegung der Schwellwerte für die Detektion von Mehrwegesignalen

Voraussetzung für die Bestimmung der Signalparameter von Mehrwegesignalen ist deren Detektion. Nach der Zerlegung der  $C/N_0$ -Werte in ihre IMF ist somit zu entscheiden, welche der IMF Mehrwegesignale repräsentieren. Als Grundlage dafür dienen die in der Literatur

diskutierten und in Abschnitt 3.1.4.1 zusammengestellten Auswertungen stochastischer Testsignale. Aus ihnen geht hervor, dass es für Rauschprozesse einen (im doppelt logarithmischen Maßstab zur Basis  $\zeta$ ) linearen Zusammenhang zwischen der mittleren Periodendauer  $T_i$  und der Leistung  $P_i$  der IMF  $x_i$  ( $i > 1$ ) gibt (vgl. Gleichung 3.19). Liegt hingegen ein Signalgemisch vor, weichen die Werte der Parameter von diesem Zusammenhang ab, was zur Detektion deterministischer Anteile, wie sie Mehrwegesignale darstellen, genutzt werden kann. Da aus den Darstellungen in Abschnitt 3.1.4.1 ebenfalls bekannt ist, dass die Parameterwerte auf Grund ihrer Stochastik streuen und diese Standardabweichung zudem von diversen Faktoren abhängt, widmet sich dieser Abschnitt dem Prozess der Festlegung von Schwellwerten für beliebige  $C/N_0$ -Werte, wobei für die Detektion von Mehrwegesignalen die Auswertung der Leistung  $P_i$  als zielführend erscheint. Wie schon in [HW04] vorgeschlagen, werden dabei charakteristische Quantile der  $P_i$ -Verteilungen der IMF  $x_i$  ( $i > 1$ ) verwendet. Um die bereits erwähnten Abhängigkeiten der Quantile von der speziellen EMD-Parametrisierung, der Datenlänge und der Standardabweichung der Rauschprozesse quantitativ zu erfassen, werden pro Einstellung<sup>12</sup> 10000 Realisierungen  $R_\epsilon$  eines GWR-Prozesses mit der in Abschnitt 4.1.2.2 festgelegten Parametrisierung der EMD zerlegt und für jede IMF  $x_i^k$  ( $k = 1 \dots R_\epsilon$ ) die Leistung  $P_{i,k}$  nach Gleichung 3.19 berechnet. Aus den für ein festes  $i$  zur Verfügung stehenden  $R_\epsilon$  Werten der Leistung  $P_{i,k}$  können markante Quantile ihrer Verteilung bestimmt werden.<sup>13</sup>

In einem ersten Schritt soll die Abhängigkeit der Quantile von der Standardabweichung der Rauschprozesse betrachtet werden. Dafür werden je  $R_\epsilon$  Realisierungen von GWR mit einer Datenlänge von  $N_A = 2^9$  Punkten für verschiedene Werte der Standardabweichung  $\sigma_\epsilon$  zerlegt. Abbildung 4.19 stellt die Ergebnisse für  $\sigma_\epsilon = 0,01$  sowie  $\sigma_\epsilon = 100$  vor. Die Quantile unterscheiden sich zwar bei einer absoluten Darstellung der Werte, normiert auf den Medianwert der jeweils ersten IMF können sie (bis auf die Werte für die letzte IMF  $x_9$ ) jedoch als identisch angesehen werden, woraus ihre Unabhängigkeit von der Größe der Standardabweichung folgt.

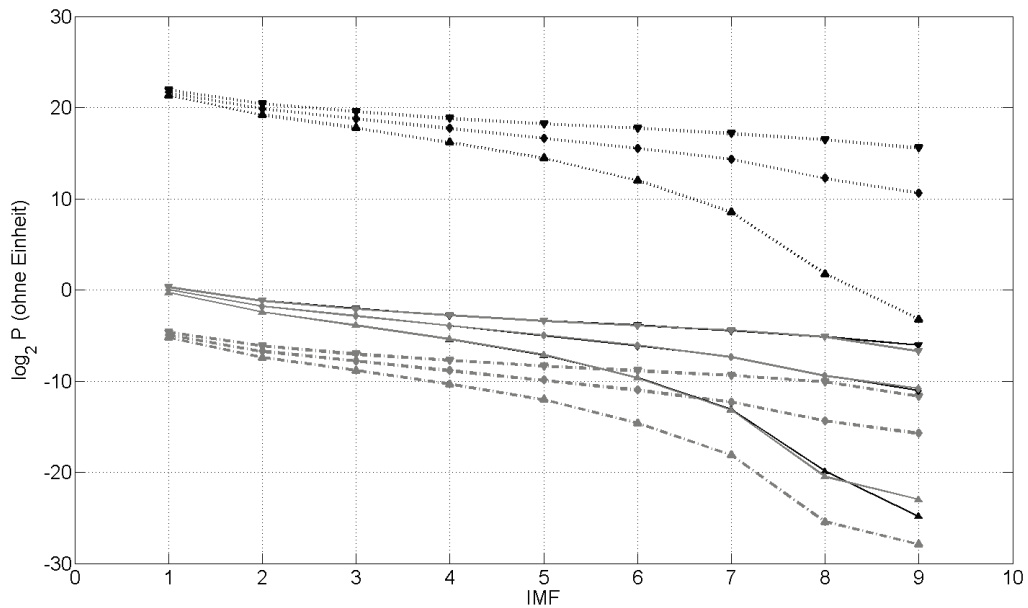
In einem zweiten Schritt soll die Abhängigkeit der Quantilwerte von der Datenlänge untersucht werden. Dass eine solche besteht, ist bereits in Abschnitt 3.1.4.1 dargelegt. Da sie jedoch in der Literatur zumeist nur qualitativ und für spezielle Datenlängen diskutiert wird und derartige Ergebnisse für die Auswertung realer Messdaten unzureichend sind, werden in dieser Arbeit Analysen vorgestellt, die es ermöglichen sollen, die  $P_i$ -Quantile von Datensätzen belie-

---

<sup>12</sup> Eine Einstellung meint dabei die Wahl eines bestimmten Wertes für die Standardabweichung  $\sigma_\epsilon$  oder die Datenlänge.

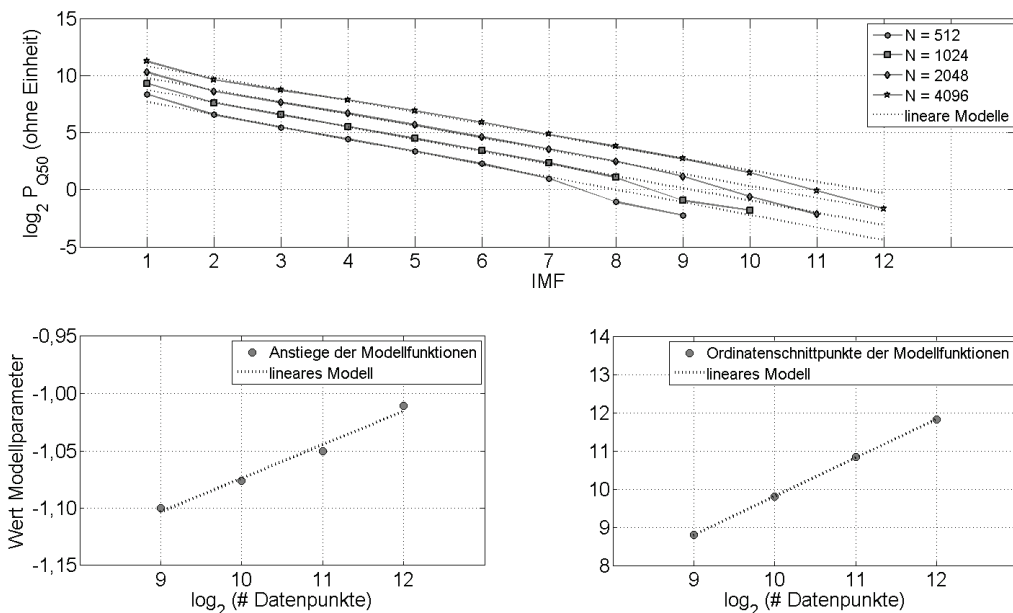
<sup>13</sup> Da die  $k$  Zerlegungen unterschiedliche Anzahlen an IMF erzeugen können, werden in den Analysen nur die IMF betrachtet, für die exakt  $R_\epsilon$  Werte der Leistung vorliegen. Für Untersuchungen von Rauschprozessen einer Länge von  $N_A = 512$  Datenpunkten wären dies die IMF  $x_i$  ( $i = 1 \dots 9$ ).

biger Länge quantitativ zu erfassen. Grundlage der Untersuchungen sind jeweils  $R_\epsilon$  Realisierungen von GWR für verschiedene Datenlängen  $N_A$ . Da, wie oben gezeigt, die (normierten) Quantile unabhängig von der Größe der Standardabweichung sind, wird im folgenden immer mit einer Standardabweichung  $\sigma_\epsilon = 1$  gearbeitet.



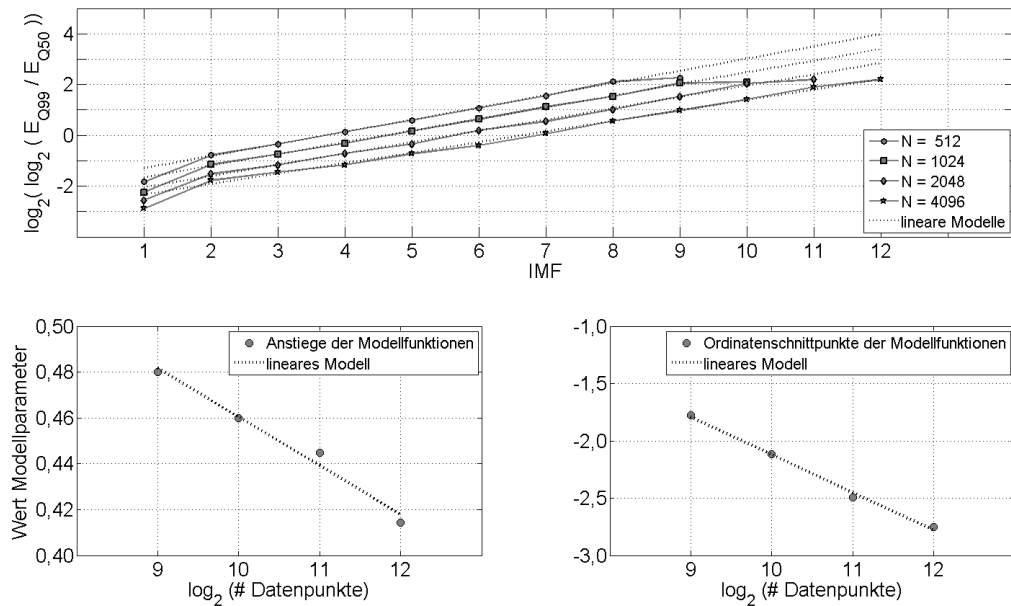
**Abbildung 4.19:** Quantilwerte: 0,01 (Dreieck, Spitze oben), 0,5 (Rombus), 0,99 (Dreieck, Spitze unten) der Leistung der verschiedenen IMF für unterschiedliche Standardabweichungen:  $\sigma_\epsilon = 100$  (schwarz, punktiert),  $\sigma_\epsilon = 0,01$  (grau, Strich-Punkt). Werden die Quantilwerte jeweils auf den 0,5-Quantilwert der ersten IMF normiert (durchgezogene Linie) wird (bis auf die Werte der letzten IMF  $x_9$ ) ihre Unabhängigkeit von der Standardabweichung deutlich. Datengrundlage sind für jede Standardabweichung jeweils  $R_\epsilon = 10000$  Realisierungen von GWR mit einer Datenlänge von  $N_A = 2^9$  Punkten.

Abbildung 4.20 (oben) stellt die Medianwerte  $Q_{50}^{\sigma_\epsilon}$  der IMF für GWR-Realisierungen mit  $\sigma_\epsilon = 1$  unterschiedlicher Datenlänge dar. Ihnen überlagert ist, spezifisch für jede Datensatzlänge, ein lineares Modell, welches eine gute Approximation der Medianfunktionen zwischen zweiter und drittletzter IMF liefert. Die Anstiege dieser linearen Modelle sind in Abhängigkeit der Anzahl der Datenpunkte in Abbildung 4.20 (links, unten), die der Ordinatenschnittpunkte in 4.20 (rechts, unten) dargestellt. In beiden Fällen kann ein linearer Zusammenhang zwischen der Datenpunktanzahl und dem jeweiligen Modellparameter festgestellt werden. Dies ermöglicht, für beliebige Datensatzlängen Anstiege und Ordinatenschnittpunkte der Medianfunktion zu ermitteln.



**Abbildung 4.20:** Medianwerte als Funktion der IMF für verschiedene Datensatzlängen (oben). Diesen Funktionen ist jeweils ein lineares Modell (punktirt) überlagert. Anstiege (links, unten) und Ordinaten Schnittpunkte (rechts, unten) dieser Modelle zeigen einen linearen Zusammenhang zwischen Datensatzlänge und Parameter. Grundlage der Darstellung sind  $R_\epsilon = 10000$  GWR-Realisierung pro Datensatzlänge mit einer Standardabweichung  $\sigma_\epsilon = 1$ .

Neben den 0,5-Quantilen der IMF (Medianfunktion) werden für die Detektion deterministischer Anteil in Signalgemischen insbesondere die 0,99-Quantile  $Q_{99}^{\sigma_\epsilon}$  benötigt, deren Überschreitung eben jene Anteile identifiziert. Wie bereits in Abbildung 4.19 am Beispiel der Datenlänge  $N_A = 2^9$  deutlich wird, nehmen die absoluten 0,99-Quantilwerte mit dem Zeitpunkt der Extraktion einer IMF ab, der Abstand zum jeweils dazugehörigen 0,5-Quantil nimmt hingegen zu. Um diese Eigenschaft quantitativ und zudem in Abhängigkeit der Datensatzlänge zu erfassen, werden die auf das 0,5-Quantil normierten 0,99-Quantile  $\kappa$  für verschiedene Datensatzlängen analysiert (Abbildung 4.21, oben). Wie im Fall der 0,5-Quantile (Abbildung 4.20) ist den normierten 0,99-Quantilen spezifisch für jede Datensatzlänge ein lineares Modell überlagert, welches eine gute Approximation der normierten 0,99-Quantilfunktionen zwischen zweiter und vorletzter IMF liefert. Auch hier kann ein linearer Zusammenhang zwischen der Datenpunktzahl und Anstieg (Abbildung 4.21, unten, links) bzw. Ordinaten Schnittpunkten (Abbildung 4.21, unten, rechts) festgestellt werden.



**Abbildung 4.21:** 0,99-Quantilwerte als Funktion der IMF für verschiedene Datensatzlängen (oben). Diesen Funktionen ist jeweils ein lineares Modell (punktiert) überlagert. Anstiege (links, unten) und Ordinaten Schnittpunkte (rechts, unten) dieser Modelle zeigen einen linearen Zusammenhang zwischen Datensatzlänge und Parameter. Grundlage der Darstellung sind  $R_\varepsilon = 10000$  GWR-Realisierung pro Datensatzlänge mit einer Standardabweichung  $\sigma_\varepsilon = 1$ .

Um  $C/N_0$ -Werte beliebiger Länge auf das Vorhandensein deterministischer Mehrwegeanteile hin zu untersuchen und diese Mehrwegeanteile gegebenenfalls zu extrahieren, fehlen nun nur noch Aussagen zum Verhältnis der Leistungen der ersten und zweiten IMF in Abhängigkeit der Datensatzlänge, sowie eine Festlegung, wie Median- und normierte 0,99-Quantilwerte für die IMF zu definieren sind, für die die linearen Modelle und die Quantilwerte stark voneinander abweichen.

Für die normierten 0,99-Quantilwerte betrifft dies jeweils die letzte IMF. Für diese wird der Quantilwert der vorletzten IMF als gute Näherung angesehen (vgl. Abbildung 4.21). Im Fall der 0,5-Quantilwerte sind jeweils die beiden letzten IMF betroffen. Für sie soll das lineare Modell als Näherung genutzt werden. Da die eigentlichen Quantilwerte unterhalb dieser so definierten oberen Schranke liegen, werden für diese IMF dadurch höhere Grenzwerte festgelegt, sodass vorhandene Mehrwegesignale möglicherweise nicht detektiert werden. Da diese in dem Fall jedoch ohnehin eine sehr geringe Energie aufweisen, ist auch ihr Einfluss auf die Abweichung bei der Trägerphasenmessfehlerbestimmung vernachlässigbar. Das Verhältnis der

Leistungen der ersten beiden IMF kann nach Analysen, wie sie auch für das 0,5-Quantil sowie das normierte 0,99-Quantil geführt worden sind, als lineare Funktion der Datensatzlänge nach Gleichung 4.25 approximiert werden.

Um aus  $C/N_0$ -Werten Mehrwegeanteile zu extrahieren, sind die  $C/N_0$ -Werte zunächst in Amplitudenwerte umzurechnen. Es folgt die Zerlegung dieser Amplitudenwerte mittels EMD in IMF. Für jede IMF wird ihre Leistung  $P_i$  nach Gleichung 3.19 berechnet. Die Entscheidung, bei welcher IMF es sich um ein Mehrwegesignal handelt, erfolgt anhand des Vergleiches dieser  $P_i$  mit einem Grenzwert, dem 0,99-Quantil  $Q_{99}^{\sigma_\epsilon}$  der jeweiligen Verteilung der  $P_i$ . Um den Wert dieses Quantils für den jeweils vorliegenden Datensatz zu ermitteln, werden die in Abbildung 4.19 bis Abbildung 4.21 dargestellten Zusammenhänge genutzt. Zunächst werden für die vorliegende Datensatzlänge  $N_A$  Anstieg  $m_{99}^{N_A}$  (Abbildung 4.21, unten, links) und Ordinatenschnittpunkt  $n_{99}^{N_A}$  (Abbildung 4.21, unten, rechts) des normierten 0,99-Quantils  $\kappa$  anhand der die linearen Modelle beschreibenden Gleichungen 4.17 und 4.18 ermittelt.

$$m_{99}^{N_A} = -0.0212 \log_2 N_A + 0.6726 \quad (4.17)$$

$$n_{99}^{N_A} = -0.3298 \log_2 N_A + 1.1772 \quad (4.18)$$

Der vom IMF-Index  $i$  abhängige, normierte 0,99-Quantilwert  $\kappa(i)$   $i \geq 2$  berechnet sich dann nach Gleichung 4.19.

$$\kappa(i) = \log_2 \log_2 \left( \frac{Q_{99}^{\sigma_\epsilon}}{Q_{50}^{\sigma_\epsilon}}(i) \right) = m_{99}^{N_A} i + n_{99}^{N_A} \quad (4.19)$$

Ähnlich erfolgt die Bestimmung des 0,5-Quantilwert  $Q_{50}^{\sigma_\epsilon=1}$  (vgl. Abbildung 4.20). Zu beachten ist, dass der 0,5-Quantilwert abhängig von der Standardabweichung des unterliegenden Rauschprozesses ist, im Gegensatz zum normierten Quantilwert  $\kappa$  als Verhältnis zwischen 0,99-Quantil und 0,5-Quantil (vgl. Abbildung 4.21). Es gilt für  $i \geq 2$ :

$$m_{50}^{(N_A, \sigma_\epsilon=1)} = 0.0293 \log_2 N_A - 1.3670 \quad (4.20)$$

$$n_{50}^{(N_A, \sigma_\epsilon=1)} = 1.0107 \log_2 N_A - 0.2976 \quad (4.21)$$

und somit:

$$\log_2 Q_{50}^{\sigma_\epsilon=1}(i) = m_{50}^{(N_A, \sigma_\epsilon=1)} i + n_{50}^{(N_A, \sigma_\epsilon=1)} \quad (4.22)$$

Um die für den Fall  $\sigma_\epsilon = 1$  erstellten Modelle für Datensätze beliebiger Standardabweichung nutzen zu können, ist eine Normierung der Quantile auf den 0,5-Quantilwert der ersten IMF notwendig (vgl. Abbildung 4.19). Für die normierten 0,5-Quantile  $Q_{50}^{norm}$  und  $i \geq 2$  gilt:

$$\log_2 Q_{50}^{norm}(i) = \log_2 \left( \frac{Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}(i)}{Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}(1)} \right) = \log_2 \left( \frac{Q_{50}^{\sigma_\varepsilon}(i)}{Q_{50}^{\sigma_\varepsilon}(1)} \right) \quad (4.23)$$

Umstellen der Gleichung 4.23 ergibt für die 0,5-Quantile der IMF mit Index  $i \geq 2$  von Datensätzen beliebiger Standardabweichung  $\sigma_\varepsilon$ :

$$\log_2 Q_{50}^{\sigma_\varepsilon}(i) = \log_2 Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}(i) - \log_2 Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}(1) + \log_2 Q_{50}^{\sigma_\varepsilon}(1) \quad (4.24)$$

Der Wert  $Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}(1)$  kann nicht aus Gleichung 4.22 gewonnen werden, da dieses Modell erst ab der zweiten IMF gilt. Ähnlich wie in Abbildung 4.20 (unten) dargestellt, lässt sich jedoch ein von der Länge des Datensatzes abhängiger Zusammenhang zwischen den Quantilwerten der ersten und zweiten IMF finden. Es gilt:

$$\Delta P_{12} = \log_2 \left( \frac{Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}(1)}{Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}(2)} \right) = -0.0592 \log_2 N_A + 2.315 \quad (4.25)$$

Umstellen der Gleichung ergibt für  $Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}(1)$ :

$$\log_2 Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}(1) = \Delta P_{12} + \log_2 Q_{50}^{\sigma_\varepsilon=1}(2) \quad (4.26)$$

Unter der Annahme, dass die Leistung  $P_1$  der ersten IMF in vernachlässigbarer Größenordnung streut, gilt:

$$\log_2 Q_{50}^{\sigma_\varepsilon}(1) = \log_2 P_1 \quad (4.27)$$

Mit diesen Größen lässt sich nun ein 0,99-Quantil  $Q_{99}^{\sigma_\varepsilon}$  für Rauschprozesse beliebiger Standardabweichung berechnen. Gleichung 4.19 umgestellt nach (dem logarithmierten)  $Q_{99}^{\sigma_\varepsilon}$  ergibt für alle IMF mit Index  $i \geq 2$ :

$$\log_2 Q_{99}^{\sigma_\varepsilon}(i) = 2^k + \log_2 Q_{50}^{\sigma_\varepsilon}(i) \quad (4.28)$$

Diese für jede IMF bestimmten 0,99-Quantilwerte werden mit den nach Gleichung 3.19 berechneten Leistungen  $P_i$  verglichen. Liegt der Wert der Leistung unterhalb des zugehörigen Quantilwertes, kann davon ausgegangen werden, dass diese IMF nur Rauschanteile repräsentiert. Liegt der Wert der Leistung hingegen oberhalb des Quantilwertes, werden deterministische Anteile vermutet und die IMF als Repräsentant eines Mehrwegesignals identifiziert. Von allen so detektierten Mehrwegesignalen können dann instantane Amplituden und Phasen berechnet werden, Werte die dann dafür genutzt werden, den Trägerphasenmessfehler  $\Delta\phi$  zu bestimmen.



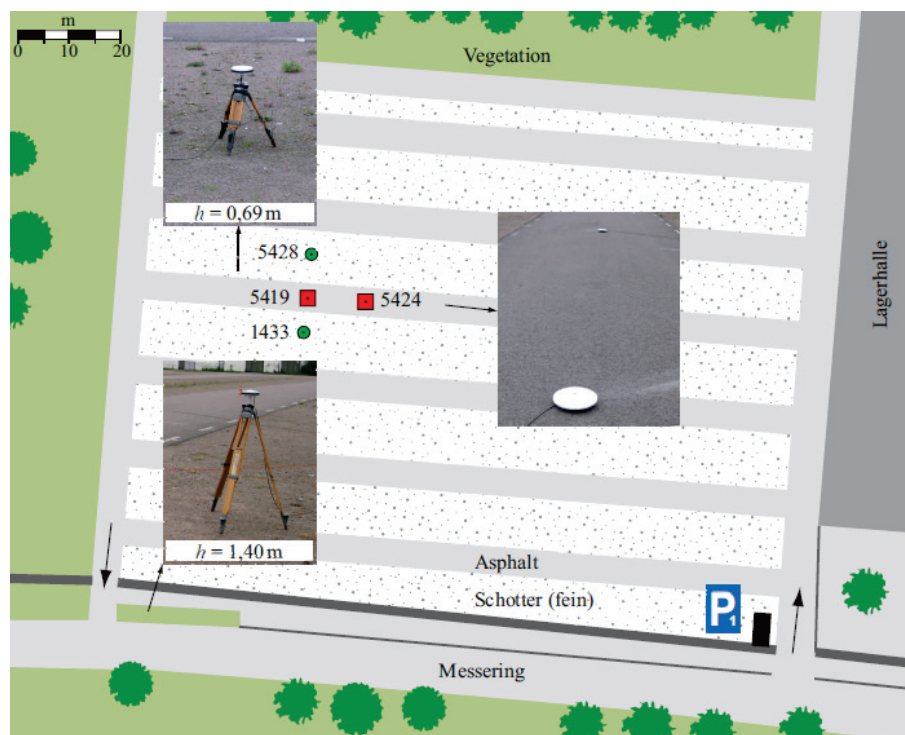
## Kapitel 5

# Anwendung der Hilbert-Huang-Transformation für die Bestimmung von Mehrwegesignalparametern - Auswertung eines Experimentaldatensatzes

Im vorangegangenen Kapitel ist anhand von synthetischen Signalen eine Parameterjustierung für die Hilbert-Huang-Transformation vorgenommen worden, die eine unter den angenommenen Nebenbedingungen optimierte Mehrwegesignalextraktion verspricht. In diesem Kapitel wird nun untersucht, inwieweit die so parametrisierte Hilbert-Huang-Transformation geeignet ist, Mehrwegesignale in realen Datensätzen zu detektieren und zu korrigieren und welchen Einfluss dies auf die Qualität der Positionsbestimmung ausübt. Die Analysen werden anhand von Daten einer Experimentalmessung vorgenommen, die im Rahmen einer Dissertation am Geodätischen Institut der TU Dresden durchgeführt worden ist und deren Aufbau detailliert in [Ros11] beschrieben wird. Dieser Aufbau wird in Abschnitt 5.1 vorgestellt. Im darauf folgenden Abschnitt 5.2 wird auf erwartete und tatsächlich detektierte Mehrwegesignale eingegangen. Daran anschließend widmet sich Abschnitt 5.3 einer vergleichenden Analyse von Positionierungsergebnissen auf Basis von Beobachtungen, die auf Grundlage der Detektion von Mehrwegesignalen korrigiert werden und denen, die auf nicht korrigierten Beobachtungen beruhen. Die Positionsbestimmung erfolgt dabei unter Nutzung der an der Berner Universität entwickelten *Bernese GNSS Software* ([Dac+15]) in Zusammenarbeit mit dem GeoForschungszentrum Potsdam.

## 5.1 Experimentalaufbau und Datengrundlage

Experimentelle Messungen fungieren als Stufe zwischen der Analyse synthetisch generierter Daten und der Auswertung realer Messwerte in unbekannter, komplexer Umgebung. So ermöglicht ein derartiger Messaufbau die Gewinnung realer Messwerte, die jedoch unter möglichst einfachen und definierten Umgebungsbedingungen aufgenommen werden. In [Ros11] werden Messungen auf einer  $100\text{ m} \times 130\text{ m}$  großen Freifläche<sup>1</sup> mit ebener, homogener Oberfläche durchgeführt. Die so gewählte Umgebung gestattet es, von gerichteten Reflexionen an einem einzelnen horizontalen Reflektor, dem Boden, auszugehen.<sup>2</sup> Die verwendete und in Abbildung 5.1 dargestellte Messanordnung umfasst mehrere Stationen im Abstand von  $13 - 14\text{ m}$  in unterschiedlichen Höhen (Tabelle 5.1). Gemessen werden Code- und Phasenbeobachtungen der GPS-Links L1 und L2 sowie das jeweils zugehörige  $C/N_0$  über einen Zeitraum von 12 Stunden. Die zeitliche Auflösung beträgt  $5\text{ s}$ , die digitale Auflösung der  $C/N_0$ -Werte  $0,25\text{ dBHz}$ .



**Abbildung 5.1:** Experimentalaufbau auf dem Parkplatz  $P_1$  der Messe Dresden. Die Daten der Stativstationen 1433 und 5428 sowie der Bodenstation 5424 dienen als Grundlage für die Analysen in diesem Kapitel. Die Abbildung ist [Ros11] entnommen.

<sup>1</sup> Es handelt sich hierbei um den Parkplatz  $P_1$  der Messe Dresden.

<sup>2</sup> Nähere Erläuterungen dazu folgen in Abschnitt 5.2. Des Weiteren wird für die Analyse zusätzlich eine Elevationsmaske von  $10^\circ$  angewandt, sodass davon ausgegangen werden kann, dass neben den Bodenreflexionen keine Beugungen an weiter entfernten Gebäuden und Vegetation in Erwägung gezogen werden müssen.

**Tabelle 5.1:** Zusammenstellung der in dieser Arbeit analysierten Stationen des Experimentalaufbaus mit Kennung, Höhe über dem Boden in m, sowie Empfänger- und Antennentyp.

Station		Empfängertyp	Antennentyp
Kennung	Höhe $h$ in m		
5424	0,00	LEICA GRX1200GGPRO	Trimble Zephyr GNSS Geodetic II
1433	1,40	LEICA GRX1200GGPRO	Septentrio PolaNt
5428	0,69	LEICA GRX1200GGPRO	Septentrio PolaNt

Der Vorteil des hier verwendeten Empfängertyps liegt in einem bekannten Zusammenhang zwischen Amplitude und  $C/N_0$ .<sup>3</sup> Dieser gestattet es, aus den durch den Empfänger bereitgestellten  $C/N_0$ -Werten nach Gleichung 2.32 Amplitudenwerte zu berechnen, um daraus, auf Grundlage der bekannten Zusammenhänge (Gleichungen 2.83 bis 2.84), Phase und Amplitude der Mehrwegesignale sowie die Amplitude des direkten Signals ableiten zu können.

Der gewählte Aufbau ermöglicht ferner eine Basislinienauswertung, wobei die Basislinien je zweier Empfänger mit einer Länge von wenigen Metern sehr kurz sind. Wie bereits in Abschnitt 2.1.3 beschrieben, können die meisten Fehleranteile daher eliminiert bzw. so stark verringert werden, dass sie vernachlässigbar klein sind. Dies gilt jedoch nicht für den Mehrwegefehler, sodass der Einfluss der Korrektur dieses Fehlers auf die Positionsbestimmung bewertet werden kann. Dieser Diskussion als Gegenstand von Abschnitt 5.3 vorangestellt seien im folgenden Abschnitt Vorüberlegungen zur Charakteristik erwartbarer sowie ein Vergleich dieser mit tatsächlich detektierten Mehrwegesignalen.

## 5.2 Charakterisierung und Detektion der Mehrwegesignale

In Abhängigkeit von der Umgebung können die erwarteten Mehrwegesignale charakterisiert werden. Dieser Thematik widmet sich Abschnitt 5.2.1. Inwiefern diese theoretisch zu erwartenden mit den tatsächlich auftretenden Mehrwegesignalen übereinstimmen, wird in Abschnitt 5.2.2 untersucht. Dabei wird auf die Besonderheiten bei der Gewinnung der Mehrwegesignale bei Verwendung der Hilbert-Huang-Transformation eingegangen.

<sup>3</sup> Dieser Zusammenhang ist nur bei wenigen Empfängern bekannt ([Bil06]).

### 5.2.1 Charakterisierung erwarteter Mehrwegesignale

Wie in Abschnitt 2.2.2 ausgeführt, entscheiden geometrische Abmessungen und die Oberflächenbeschaffenheit des Reflektors über das Auftreten und die Art der Mehrwegeausbreitung. Für die hier vorliegenden Messungen kann, unter Einbeziehung der Wellenlängen der genutzten Signale, einer Elevationsmaske von  $10^\circ$  und der Abstände zwischen Boden und Station, die für das Auftreten von Reflexionen maximal benötigte Fläche nach Einsetzen der Gleichungen 2.64 und 2.65 in Gleichung 2.54 wie folgt abgeschätzt werden.

$$A = \pi ab \quad (5.1)$$

$$\leq \pi \left( \frac{\lambda h}{\sin^3 el} \right)^{0,5} \left( \frac{\lambda h}{\sin el} \right)^{0,5} \quad (5.2)$$

$$\leq \pi \left( \frac{0,245 \text{ m} \cdot 1,4 \text{ m}}{\sin^3 10^\circ} \right)^{0,5} \left( \frac{0,245 \text{ m} \cdot 1,4 \text{ m}}{\sin 10^\circ} \right)^{0,5} \quad (5.3)$$

$$\leq \pi \cdot 8,1 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} \quad (5.4)$$

$$\leq 38,2 \text{ m}^2 \quad (5.5)$$

Durch die in [Ros11] gewählte Messumgebung können diese Größe und damit Bodenreflexionen gewährleistet werden. Damit eine gerichtete Reflexion auftritt, muss die Oberfläche genügend glatt sein. Abgeschätzt mit dem Fraunhofer-Kriterium (Gleichung 2.81) unter der Annahme einer maximalen Elevation von  $90^\circ$  und einer minimalen Wellenlänge, die der Wellenlänge des GPS L1-Signals entspricht, bedeutet dies für die Standardabweichung  $\sigma_h$  der Oberflächenhöhen:

$$\sigma_h \leq \frac{\lambda}{32 \sin el} \quad (5.6)$$

$$\leq \frac{0,1903 \text{ m}}{32} \quad (5.7)$$

$$\leq 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (5.8)$$

Da die Oberfläche aus Asphalt und feinem Schotter besteht, kann davon ausgegangen werden, dass die Grenzen für die Standardabweichung, insbesondere für Elevationen kleiner  $90^\circ$ , eingehalten werden und demnach von gerichteter Reflexion auszugehen ist ([Ros11]). Es lassen sich daher deterministische Mehrwegemodelle anwenden. Aufgabe ist es demnach, die Anzahl der Mehrwegesignale sowie deren Signalparameter (Amplitude, Frequenz, Phasenlage) zu bestimmen. Die Messumgebung ist ferner so gewählt worden, dass ausschließlich der Boden als Reflexionsebene dient. Somit wird höchstens ein Mehrwegesignal erwartet. Da es sich

bei der Reflexionsebene um einen horizontalen Reflektor handelt, vereinfachen sich in diesem Fall die für die Phasen- und Frequenzberechnung geltenden Gleichungen 2.73 und 2.74 zu:

$$\theta(t) = \frac{4\pi h \sin el(t)}{\lambda} \quad (5.9)$$

$$f(t) = \frac{2h \cos el(t)}{\lambda} \frac{del}{dt} \quad (5.10)$$

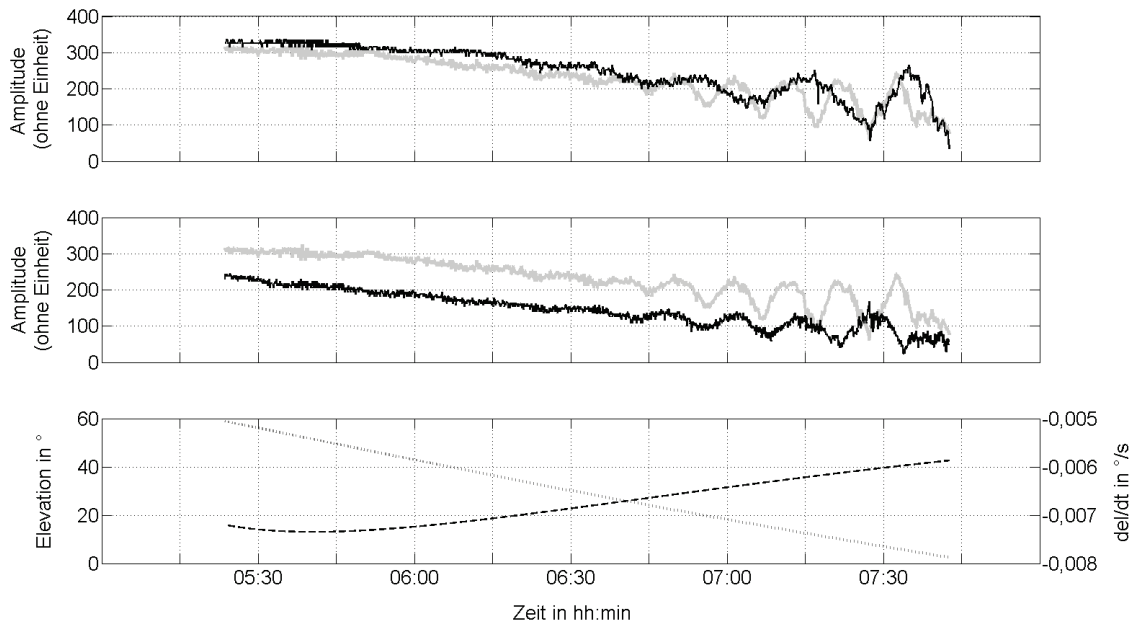
Die Frequenz des Mehrwegesignals ist abhängig von der Höhe  $h$  der Station über dem Boden sowie der Wellenlänge  $\lambda$ , der Elevation  $el$  und der Elevationsänderung  $del/dt$  des Signals. Je höher die Station angebracht ist, desto höher ist die Frequenz. Für Station 1433 ( $h = 1,40$  m) wird demnach in etwa eine doppelt so hohe Frequenz erwartet wie für Station 5428 ( $h = 0,69$  m). Die Frequenz ist ferner indirekt proportional zur Wellenlänge des Signals. Für das GPS L1-Signal ( $\lambda \approx 0,19$  m) wird daher also eine höhere Frequenz auftreten als für das GPS L2-Signal ( $\lambda \approx 0,24$  m). Da eine direkte Proportionalität zwischen der Frequenz und dem Cosinus der Elevation besteht, wird die Frequenz mit zunehmender Elevation abnehmen. Es besteht ebenfalls eine direkte Proportionalität zwischen der Frequenz und der Elevationsänderung.

Den letzten zu diskutierenden Signalparameter stellt die Amplitude des Mehrwegesignals dar. Wie in Abschnitt 2.2.2.3 beschrieben, ist sie von den Materialeigenschaften des Reflektors (hier des Bodens) sowie der Richtcharakteristik der Antenne abhängig, wobei diese Abhängigkeit eine Funktion der Elevation ist. Auf Basis dieser theoretischen Grundlagen wird im Fall des hier beschriebenen Messaufbaus eine relative Mehrwegeamplitude  $\alpha$  erwartet, die mit zunehmender Elevation kontinuierlich abnimmt und insbesondere für Elevationen  $el \geq 20^\circ$  deutlich kleinere Werte als  $\alpha = 0,5$  annimmt.

## 5.2.2 Detektion vorhandener Mehrwegesignale

Um die Signalparameter möglicher Mehrwegesignale bestimmen zu können, werden die in den RINEX-Dateien zur Verfügung gestellten  $C/N_0$ -Werte zunächst in Amplitudenwerte umgerechnet (Gleichung 2.32). In Abbildung 5.2 sind beispielhaft die Amplitudenwerte des Satelliten mit der PRN 7 für verschiedene Stationshöhen und Trägerfrequenzen dargestellt. Wie erwartet, ist die Frequenz des Mehrwegesignals für eine Stationshöhe von  $h = 1,40$  m in etwa doppelt so hoch, wie im Fall einer Stationshöhe von  $h = 0,69$  m (Abbildung 5.2, oben). Bei gleicher Stationshöhe (in Abbildung 5.2, (Mitte) beispielhaft  $h = 1,40$  m) ist die Frequenz höher, je niedriger die Wellenlänge des Trägersignals. Auch wird die Elevationsabhängigkeit der relativen Amplitude  $\alpha$  deutlich: Je größer die Elevation, desto kleiner die relative Amplitude. Ferner

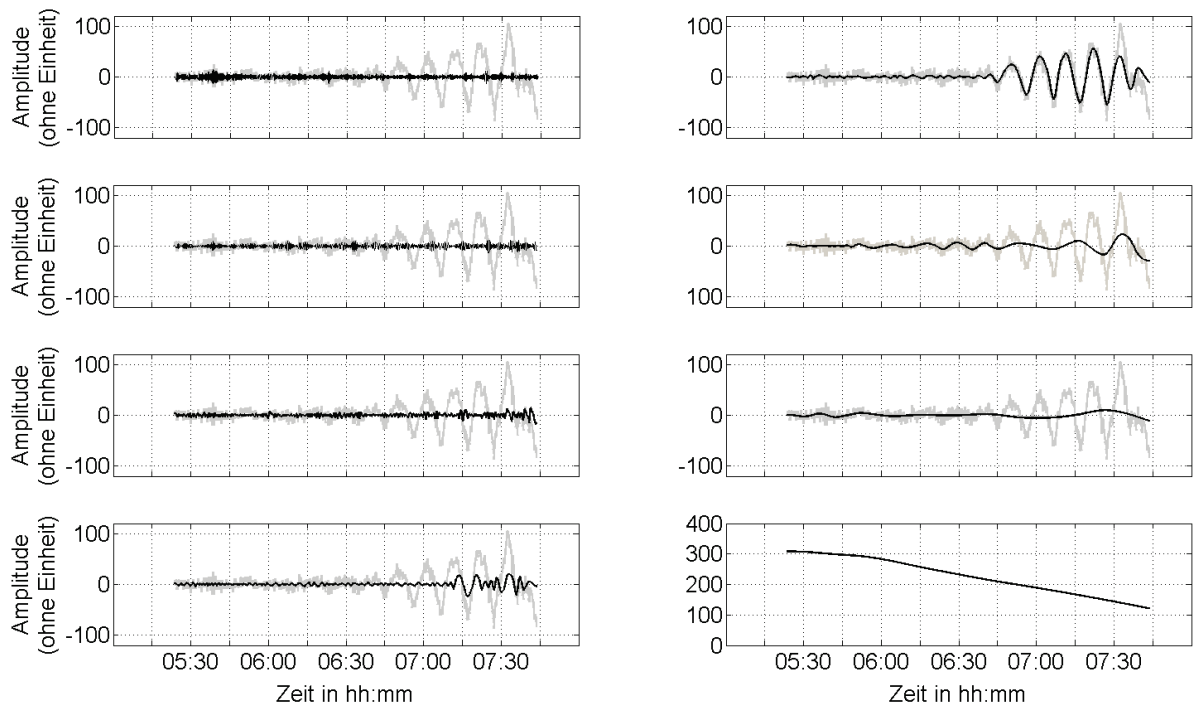
wird durch die Messwerte das in Abschnitt 4.1.1 entwickelte Modell verifiziert: Die Amplitudenwerte können als Überlagerung eines parabelähnlichen Trends, eines sinusförmigen Mehrwegesignals und Rauschen interpretiert werden.



**Abbildung 5.2:** Mehrwegebehaftete Amplitudenwerte des PRN 7 für verschiedene Stationshöhen und Trägerfrequenzen. Oben: Amplitudenwerte auf der Trägerfrequenz GPS L1. Station mit Höhe  $h = 1,40$  m (grau), Station mit Höhe  $h = 0,69$  m (schwarz). Mitte: Amplitudenwerte an der Station mit Höhe  $h = 1,40$  m. Trägerfrequenz GPS L1 (grau), Trägerfrequenz GPS L2 (schwarz). Unten: Elevation des Satelliten (grau), sowie Elevationänderung (schwarz). Wie erwartet gilt: Je geringer die Stationshöhe bzw. die GPS-Trägerfrequenz, desto niedriger die Frequenz des Mehrwegesignals. Je geringer die Elevation, desto höher die Frequenz.

Es wird erwartet, dass bei der Zerlegung der Messwerte durch das Rauschen eine Filterbank aufgebaut wird.<sup>4</sup> Es wird des Weiteren damit gerechnet, das Mehrwegesignal, in Abhängigkeit seiner Frequenz, in der IMF vorzufinden, die das zugehörige Frequenzband repräsentiert. Der Trend sollte die parabelähnliche Amplitude des direkten Signals widerspiegeln. Abbildung 5.3 zeigt beispielhaft die Zerlegung der GPS L1-Amplitudenwerte des PRN 7, aufgenommen von der Station 1433. Deutlich erkennbar ist die durch die IMF 1 bis 7 gebildete Filterbankstruktur. Der Trend (rechts, unten) repräsentiert die Amplitude des direkten Signals.

<sup>4</sup> Vgl. hierzu die Ausführungen in Abschnitt 3.1.4.1.



**Abbildung 5.3:** Zerlegung der in Abbildung 5.2 dargestellten GPS L1-Amplitudenwerte des PRN 7 der Station 1433 ( $h = 1.40$  m) in ihre IMF und einen Trend. Grau dargestellt sind in den Abbildungen die Trend bereinigten Amplitudenwerte, schwarz die IMF sowie der Trend. Links: IMF 1 bis 4 in absteigender Reihenfolge. Rechts: IMF 5 bis 7, sowie der Trend.

Zu beachten ist, dass bei der Wahl eines Analyseintervalls, das kürzer als die Hälfte der Periode eines auftretenden Mehrwegesignals gewählt ist, der Trend die Überlagerung aus der Amplitude dieses Mehrwegesignals und der Amplitude des direkten Signals darstellt. In diesem Fall führt die Interpretation des Trends als alleinige Amplitude des direkten Signals zu Fehlinterpretationen. Ein solcher Fall kann zum Beispiel bei sehr geringen Distanzen zwischen Reflektor und Station auftreten, wodurch Mehrwegesignale mit sehr niedrigen Frequenzen bzw. langen Periodendauern entstehen.

Im hier dargestellten Beispiel trifft dies nicht zu. Bei einer Stationshöhe von  $h = 1.40$  m und einer Wellenlänge von  $\lambda \approx 0.19$  m (GPS L1), treten je nach Elevation Periodendauern zwischen 10 und 18 Minuten auf. Diese Perioden sind deutlich kürzer als das hier gewählte Analyseintervall von ca. zwei Stunden. In den trendbereinigten Amplitudenwerten (grau) als Summe aller IMF befinden sich demnach alle Signalanteile außer dem direkten Signal. Das durch die Bodenreflexion verursachte Mehrwegesignal ist hauptsächlich in IMF 5 enthalten. Anteile fin-

den sich jedoch auch in der IMF 4 sowie in den IMF 6-7.<sup>5</sup> Dieser Effekt führt dazu, dass das in Abschnitt 4.2 vorgestellte Schwellwertverfahren im Ergebnis eben diese IMF als Mehrwegesignale klassifiziert. Wie in Abbildung 5.3 deutlich sichtbar, enthalten die als Mehrwegesignale identifizierten IMF (im vorgestellten Beispiel IMF 4-7), neben dem tatsächlich durch die Bodenreflexion verursachten Mehrwegesignal, auch Rauschanteile sowie Artefakte auf Grund des Mode Mixing<sup>6</sup>. Dies führt dazu, dass die Berechnung des Trägerphasenmessfehlers nach Gleichung 2.84, in die die Amplituden- und Phasenwerte aller als Mehrwegesignale identifizierten IMF eingehen, fehlerbehaftet ist.

Im Anschluss an diese Berechnung wird der Trägerphasenmessfehler genutzt, um die zugehörige Phasenbeobachtung zu korrigieren. Inwieweit sich diese Korrektur auf die Position auswirkt, wird im folgenden Abschnitt zu diskutieren sein.

### 5.3 Analysen zum Mehrwert einer Korrektur des Mehrwegefehlers

Wie bereits in 5.1 erwähnt, ermöglicht die gewählte Messanordnung eine Positionsbestimmung unter Nutzung kurzer Basislinien. Diese Auswertestrategie hat den Vorteil, dass durch die Bildung doppelter Differenzen satelliten- und empfängerseitige Uhrfehler und instrumentelle Laufzeitverzögerungen eliminiert werden. Da die Basislinien ferner sehr kurz sind, können zudem atmosphärisch bedingte Messabweichungen ebenso vernachlässigt werden, wie geodynamische und relativistische Effekte. Werden zusätzlich noch hochpräzise IGS-Orbits<sup>7</sup> und Antennenkorrekturwerte verwendet, können auch die dazu gehörigen Fehleranteile vernachlässigt werden. Somit reduzieren sich die Gleichungen 2.48 und 2.50 auf die Gleichungen 5.11 und 5.12.

$$\nabla\Delta R_{ij,f}^{kl} = \nabla\Delta\rho_{ij}^{kl} + \nabla\Delta M_{ij,f,R}^{kl} + \epsilon_{ij,f,R}^{kl} \quad (5.11)$$

$$\nabla\Delta\Phi_{ij,f}^{kl} = \nabla\Delta\rho_{ij}^{kl} + \nabla\Delta M_{ij,f,\Phi}^{kl} + \lambda_f \nabla\Delta N_{i,f}^{kl} + \epsilon_{ij,f,\Phi}^{kl} \quad (5.12)$$

Demnach verbleibt, neben dem additiven Rauschen, allein der durch die Mehrwegeausbreitung induzierte Fehler in den doppelten Differenzen. Inwiefern eine Schätzung dieses Fehleranteils einen Mehrwert für die Bestimmung der Position darstellt, wird im Folgenden zu diskutieren sein. Dabei werden im Weiteren nur die doppelt differenzierten Phasenbeobachtungen (Gleichung 5.12) von Bedeutung sein, da für eine Positionsbestimmung im cm-Bereich

---

<sup>5</sup> Dieses als Mode Mixing bekannte Phänomen ist in Abschnitt 3.1.4.2 beschrieben.

<sup>6</sup> Vgl. Abschnitt 3.1.4.2.

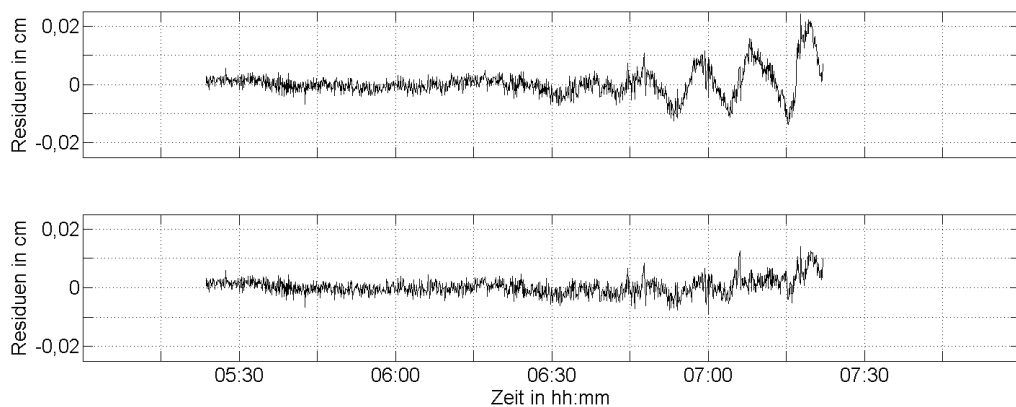
<sup>7</sup> Für diese Arbeit finden die von CODE bereitgestellten Bahndaten Verwendung.



die Festsetzung der Mehrdeutigkeiten erforderlich ist und die (für diese Anwendung zu ungenauen) Codebeobachtungen lediglich für erste Schätzungen dieser herangezogen werden.<sup>8</sup>

### 5.3.1 Auswertung im Beobachtungsraum

Gegenstand dieses Abschnitts sind die bei der statischen Positionsbestimmung<sup>9</sup> entstehenden Residuen der als Eingangsgrößen verwendeten Beobachtungen. In diesem Fall sind dies die doppelten Differenzen der Phasenbeobachtungen (Gleichung 5.12). Die in Abschnitt 5.1 vorgestellte Anordnung liefert Beobachtungsdaten von drei Stationen auf jeweils zwei Trägerfrequenzen, sodass verschiedene Möglichkeiten der Basislinienberechnung und damit der Bildung doppelter Differenzen bestehen. Ferner bestehen verschiedene Korrektur-Varianten für den durch die Mehrwegeausbreitung verursachten Fehler. So können die Korrekturen an die Beobachtungen keiner, nur einer oder beider Stationen angebracht werden. Erwartet wird, dass sich die Qualität der Residuen mit der Verwendung der Korrekturen verbessert. Um dies zu überprüfen, erfolgt eine sukzessive Anwendung dieser. Zunächst werden nur die GPS L1-Beobachtungen für die Positionsbestimmung genutzt und die Mehrwegekorrekturen ausschließlich an die Beobachtungen einer Station angebracht.<sup>10</sup> Abbildung 5.4 zeigt beispielhaft den Unterschied in den DD-Residuen bei Verzicht auf Korrekturen und ihrer Verwendung.



**Abbildung 5.4:** Residuen der Doppeldifferenz bei Verwendung der Stationen 5424 (Boden) und 1433 (Höhe  $h = 1,40$  m) sowie der Satelliten mit der PRN 7 und 8. Oben: Die Phasenbeobachtungen beider Stationen werden nicht korrigiert. Unten: Die Phasenbeobachtungen der Station 1433 werden korrigiert, die der Station 5424 bleiben unverändert. Durch die Korrektur werden die durch den Mehrwegefehler verursachten sinusförmigen Anteile eliminiert.

---

<sup>8</sup> Zu näheren Erläuterungen sei auf Anhang A.1 bzw. weiterführende Fachliteratur wie z.B. [ME06] verwiesen.

<sup>9</sup> Für nähere Erläuterungen sei auf Abschnitt 5.3.2 verwiesen.

<sup>10</sup> Es handelt sich dabei um die Station mit nicht festgesetzten Koordinaten.

Erkennbar ist, dass bei Verwendung der Korrekturen der Einfluss des Mehrwegefehlers deutlich reduziert wird. Dies führt zur Abnahme der Standardabweichung<sup>11</sup> der DD-Residuen. Tabelle 5.2 stellt diese Werte für die Basislinienauswertungen Boden-Stativ (5424-1433 bzw. 5424-5428) sowie Stativ-Stativ (5428-1433) bei Verwendung korrigierter und nicht korrigierter Beobachtungen gegenüber. Im Fall der Basislinienauswertung Boden-Stativ kann eine Verringerung der Standardabweichung um mehr als 15% erreicht werden, wenn die Beobachtungen der Stativstation korrigiert werden. Gleiches gilt für die Basislinienauswertung zwischen den beiden Stativ-Stationen (1433 und 5428). Werden in diesem Fall zusätzlich die Phasenbeobachtungen der zweiten Station korrigiert, kann eine weitere Verringerung der Standardabweichung der DD-Residuen und damit eine über 20%-ige Verbesserung erzielt werden.

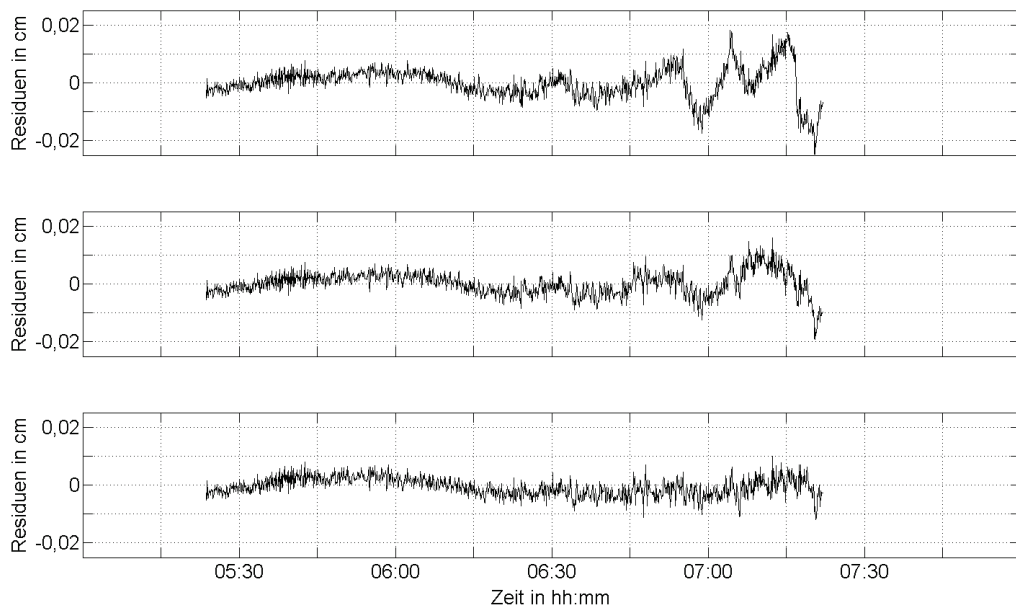
**Tabelle 5.2:** Standardabweichung der Residuen der doppelten Differenzen in mm bei Verwendung der GPS L1-Beobachtungen in der statischen Basislinienauswertung. Die Korrektur des Mehrwegefehlers auf den Phasenbeobachtungen führt zu einer Verringerung der Standardabweichung.

	5424 (Boden)	5428 ( $h = 0,69$ m)	
	unkorrigiert	unkorrigiert	korrigiert
1433 ( $h = 1,40$ m)			
unkorrigiert	6,0	7,6	
korrigiert	5,0	6,9	5,9
5428 ( $h = 0,69$ m)			
unkorrigiert	5,7		
korrigiert	4,9		

Abbildung 5.5 verdeutlicht diese Tatsache beispielhaft. Während bei alleiniger Korrektur der Phasenbeobachtungen der höher gelegenen Stativ-Station 1433 zunächst nur die Schwingungsanteile mit kürzerer Periodendauer eliminiert werden (Abbildung 5.5, Mitte), werden durch die zusätzliche Korrektur der Phasenbeobachtungen der niedrigeren Stativ-Station 5428 auch die Anteile mit größerer Periodendauer beseitigt (Abbildung 5.5, unten). Auffällig ist jedoch, dass in den Residuen nach Korrektur der Phasenbeobachtungen beider Stationen (Abbildung 5.5, unten) ein langwelliger Anteil verbleibt und nicht wie erwartet, ein reiner Rauschprozess. Dies ist auf eine nicht exakte Extraktion des direkten Signals zurückzuführen. Da dieses Signal als

<sup>11</sup> Die Berechnung der Standardabweichung erfolgt über alle DD-Residuen und den gesamten Beobachtungszeitraum.

letztes Signal aus der EMD hervorgeht, unterliegt es dem Einfluss aller davor stattfindenden Siebprozesse und damit verbundenen Artefakten (u.a. Mode Mixing). Eine weitere Ursache, die zu derartigen Artefakten führt, ist, wie in Abschnitt 5.2.2 angedeutet, ein durch Mehrwegeausbreitung verursachtes Signal mit einer Periodendauer von mindestens der doppelten Länge des Beobachtungsintervalls. In diesem Fall wird dieses Signal nicht mehr in einer IMF extrahiert, sondern verbleibt im Trend. Somit wird zum einen das Mehrwegesignal als solches nicht erkannt und zum anderen die Amplitude des direkten Signals nicht richtig bestimmt. Dies spiegelt sich dann in den Residuen der doppelten Differenzen wieder. Ein solches Ereignis tritt bei der hier verwendeten Anordnung im Fall der Bodenstation ein, da sich die Frequenz direkt proportional zur Höhe der Station verhält (vgl. Gleichung 5.10).



**Abbildung 5.5:** Residuen der Doppeldifferenz bei Verwendung der Stationen 5428 (Höhe  $h = 0,69$  m) und 1433 (Höhe  $h = 1,40$  m) sowie der Satelliten mit der PRN 7 und 8. Oben: Die Phasenbeobachtungen beider Stationen werden nicht korrigiert. Mitte: Die Phasenbeobachtungen der Station 1433 werden korrigiert, die der Station 5428 bleiben unverändert. Unten: Die Phasenbeobachtungen beider Stationen werden korrigiert.

Die in Tabelle 5.3 zusammengestellten Standardabweichungen der Residuen der doppelten Differenzen bei unterschiedlicher Verwendung der Korrektur unterstreichen diese Beobachtung. Die Tabelle dokumentiert die Ergebnisse einer auf die erste, einfrequenzbasierte Auswertung aufbauende Analyse, die die Beobachtungen beider Trägerfrequenzen (L1 und L2) für die Positionsbestimmung verwendet. Wird bei der Basislinienauswertung zwischen der Bodenstation und einer Stativ-Station ausschließlich die Stativ-Station korrigiert, verringert sich die

Standardabweichung der DD-Residuen. Bei zusätzlicher Korrektur der Bodenstation erhöht sie sich wieder. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das im Fall der Bodenstation auf Grund der geringen Höhe vorliegende Mehrwegesignal mit sehr langer Periodendauer nicht erkannt und durch eine IMF repräsentiert wird. Es wird stattdessen im Trend und damit im geschätzten direkten Signal absorbiert. Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ergebnisse bestätigen die in [Ros11] präsentierten Resultate in Qualität und Quantität.

**Tabelle 5.3:** Standardabweichung der Residuen der doppelten Differenzen in mm bei Verwendung der GPS L1- und L2-Beobachtungen in der statischen Basislinienauswertung. Während die Korrektur der Mehrwegefehler auf Beobachtungen der Stativ-Stationen zu einer Verringerung der Standardabweichung führt, erhöht sich diese wieder, wenn zusätzlich die Bodenstation korrigiert wird.

	5424 (Boden)			
	unkorrigiert		korrigiert	
	L1	L2	L1	L2
1433 ( $h = 1,40$ m)				
unkorrigiert	6,0	8,5		
korrigiert	5,1	8,1	5,6	8,6
5428 ( $h = 0,69$ m)				
unkorrigiert	5,8	8,3		
korrigiert	5,0	8,0	5,4	8,4

### 5.3.2 Auswertung im Koordinatenraum

Die im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Verringerungen der Standardabweichung der DD-Residuen lassen erwarten, dass durch die Korrektur des Mehrwegefehlers auch die Qualität der ermittelten Positionen zunimmt. Um dies zu untersuchen, wird zunächst eine statische Basislinienauswertung durchgeführt. Dafür werden die Koordinaten einer Station festgesetzt. Sie dient demzufolge als Referenzstation. Die Koordinaten der zweiten, freien Station sind neben den Mehrdeutigkeiten als Unbekannte während der Ausgleichung zu schätzen. Alle in den Beobachtungen der Referenzstation enthaltenen und durch Bildung doppelter Differenzen nicht eliminierten Fehleranteile gehen somit auf die Koordinatenlösung der freien Station über. Daher sollte sich sowohl die Korrektur des Mehrwegefehlers auf den Beobachtungen der Referenzstation als auch die Korrektur des Mehrwegefehlers auf den Beobachtungen der freien Sta-

tion in den Koordinatenlösungen letzterer bemerkbar machen. Für die Basislinienauswertung zwischen der Bodenstation und einer Stativ-Station (5424-1433 bzw. 5424-5428) werden jeweils die Koordinaten der Bodenstation auf ihre a priori Werte in der RINEX-Datei festgesetzt. Für die Auswertung zwischen den beiden Stativ-Stationen (5428-1433) betrifft die Fixierung auf die Werte in der RINEX-Datei die Koordinaten der Station 5428. Für die Ausgleichung werden als a priori Koordinaten für die jeweils freie Station die Koordinaten der RINEX-Datei verwendet. Es gehen die Beobachtungen des gesamten Messzeitraumes ein, wobei nur die Beobachtungen der Satelliten mit einer Elevation größer  $10^\circ$  verwendet und elevationsabhängig gewichtet werden. Auf Grund der hohen Redundanz, d. h. eine geringe Anzahl an Unbekannten (Stationskoordinaten und Mehrdeutigkeiten) gegenüber einer hohen Anzahl an Gleichungen (ca. 8640 Epochen à 8-10 DD), ist eine hohe Genauigkeit zu erwarten.

In Tabelle 5.4 sind zunächst die Abweichungen der a posteriori Koordinaten von den a priori Koordinaten dargestellt, wobei jeweils das lokale Koordinatensystem der freien Station mit Koordinatenursprung in der zugehörigen Position der RINEX-Datei als Bezugssystem dient. Deutlich wird, dass sich korrigierte und nicht korrigierte Varianten nicht signifikant unterscheiden. Ferner ist zu erwähnen, dass alle von Bernese ausgegebenen a posteriori Positionen mit einem RMS von 0,0 mm angegeben werden, was sich mit der Erwartung einer hohen Genauigkeit deckt.

**Tabelle 5.4:** Statische Basislinienauswertung bei Verwendung von GPS L1-Beobachtungen. Abweichung der a posteriori Positionen von der a priori Position in mm, aufgeteilt in Nord- (dN), Ost- (dO) und Höhenkomponente (dh). Darstellung im lokalen Koordinatensystem der jeweils freien Station (linke Spalte) mit Ursprung in der a priori-Position.

	5424 (Boden)	5428 ( $h = 0,69$ m)	
	unkorrigiert	unkorrigiert	korrigiert
	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh
1433 ( $h = 1,40$ m)			
unkorrigiert	0,4/1,7/3,3	-0,7/1,2/1,6	
korrigiert	0,4/1,6/3,4	-0,7/1,0/1,7	-0,9/1,0/-0,1
5428 ( $h = 0,69$ m)			
unkorrigiert	1,1/0,6/1,7		
korrigiert	1,4/0,5/3,5		

Da sich aus dieser Darstellung keine Aussage zu einem Mehrwert der Korrektur des Mehrwegefehlers ableiten lässt, erfolgt nun in einem zweiten Schritt eine kinematische Basislinienauswertung. Im Unterschied zur statischen Auswertung werden die Koordinaten der freien Station in jeder Epoche neu berechnet, die Redundanz sinkt damit erheblich. Den zu schätzenden Unbekannten stehen nur ca. 8 Gleichungen (doppelte Differenzen) gegenüber. Fehleranteile in den doppelten Differenzen beeinflussen das Positionsergebnis somit sehr viel stärker. Es wird daher erwartet, dass sich die Korrektur des Mehrwegefehlers in den Ergebnissen bemerkbar macht.

Um die Auswirkungen zu erfassen, werden der Mittelwert und die Standardabweichung der sogenannten Einzelepochenresiduen ausgewertet. Unter einem Einzelepochenresiduum wird dabei die in jeder Epoche auftretende Abweichung der in der Epoche geschätzten a posteriori Position von der a priori Position verstanden. Der Mittelwert und die Standardabweichung werden dann spezifisch für jede Basislinie und jede Korrektur-Variante über den gesamten Beobachtungszeitraum berechnet. Die Tabelle 5.5 fasst die Mittelwerte, die Tabelle 5.6 die zugehörigen Standardabweichungen zusammen. Auffällig ist, dass sich die Abweichungen aus der statischen Position und der Mittelwert der Einzelepochenresiduen nicht signifikant unterscheiden. Dies gilt sowohl für korrigierte als auch nicht korrigierte Varianten.

**Tabelle 5.5:** Kinematische Basislinienauswertung bei Verwendung von GPS L1-Beobachtungen. Abweichung des Mittelwertes der Residuen der Einzelepochenlösungen von der a priori Position in mm, aufgeteilt in Nord- (dN), Ost- (dO) und Höhenkomponente (dh). Darstellung im lokalen Koordinatensystem der jeweils freien Station (linke Spalte) mit Ursprung in der a priori-Position.

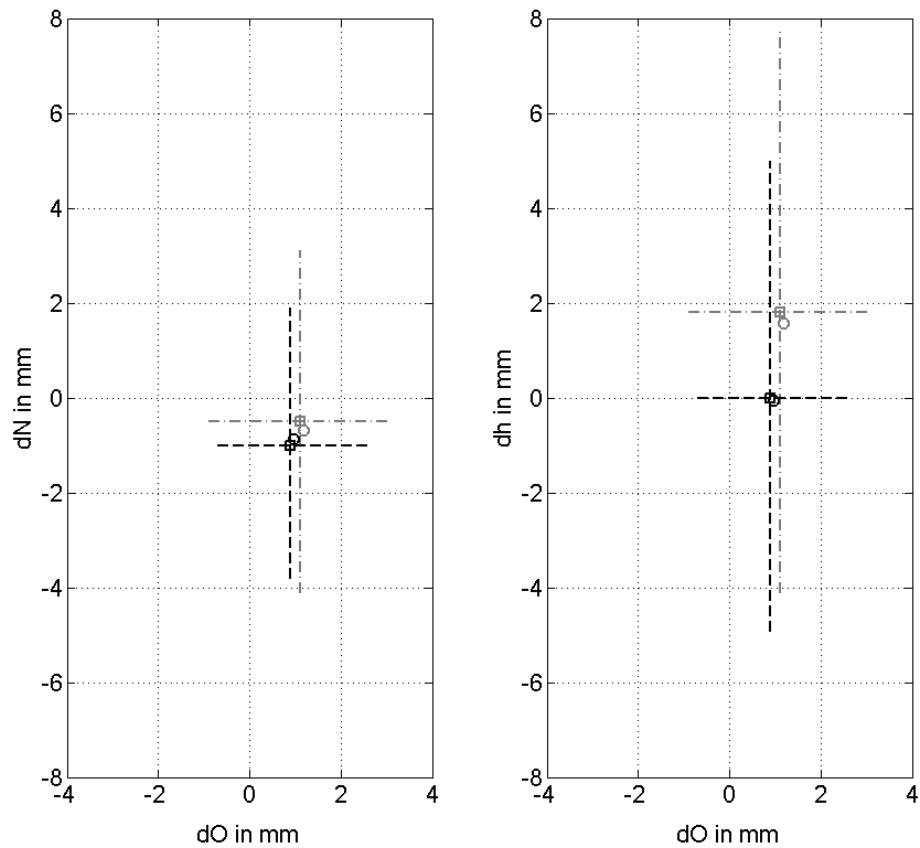
	5424 (Boden)		5428 ( $h = 0,69$ m)	
	unkorrigiert		unkorrigiert	korrigiert
	dN/dO/dh		dN/dO/dh	dN/dO/dh
1433 ( $h = 1,40$ m)				
unkorrigiert	0,7/1,8/3,0		-0,5/1,1/1,8	
korrigiert	0,8/1,6/3,3		-0,5/0,9/2,2	-1,0/0,9/0,0
5428 ( $h = 0,69$ m)				
unkorrigiert	1,3/0,7/1,2			
korrigiert	1,7/0,7/3,3			

**Tabelle 5.6:** Kinematische Basislinienauswertung bei Verwendung von GPS L1-Beobachtungen. Standardabweichung der Residuen der Einzelepochenlösungen in mm, aufgeteilt in Nord- (dN), Ost- (dO) und Höhenkomponente (dh). Darstellung im lokalen Koordinatensystem der jeweils freien Station (linke Spalte) mit Ursprung in der a priori-Position.

	5424 (Boden)	5428 ( $h = 0,69$ m)	
	unkorrigiert	unkorrigiert	korrigiert
	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh
1433 ( $h = 1,40$ m)			
unkorrigiert	2,9/1,6/4,8	3,6/2,0/5,9	
korrigiert	2,6/1,4/4,1	3,4/1,9/5,4	2,9/1,7/5,0
5428 ( $h = 0,69$ m)			
unkorrigiert	3,1/1,6/5,2		
korrigiert	2,9/1,5/4,7		

Dies lässt die Schlussfolgerung zu, dass eine Korrektur des Mehrwegefehlers keinen signifikanten Einfluss auf die absolute Positionsbestimmung hat. Der Mehrwert der Mehrwegekorrektur wird jedoch deutlich in den Standardabweichungen der Einzelepochenresiduen sichtbar (Tabelle 5.6). In allen Komponenten (Nord, Ost, Höhe) verringern sich die Standardabweichungen um ca. 10 bis 20 %. Beispielhaft zeigt die Abbildung 5.6 die hier präsentierten Werte für die statische und kinematische Basislinienauswertung der Stativstationen 1433 und 5428. Dabei beschränkt sich die Darstellung auf zwei Varianten: Die Variante, bei der für beide Stationen auf eine Korrektur verzichtet wird und die Variante, bei der beide Stationen korrigiert werden.

Ergänzend zu der umfangreichen Darstellung der reinen GPS L1-Lösung seien in Tabelle 5.7 lediglich die Standardabweichungen der Einzelepochenresiduen aus der kinematischen Basislinienauswertung bei Nutzung der GPS L1- und L2-Beobachtungen zusammengestellt. Die Ergebnisse für die statische Basislinienauswertung und die Mittelwerte der Einzelepochenresiduen zeichnen ein ähnliches Bild wie im Einfrequenzfall. Die Standardabweichungen der Einzelepochenresiduen unterstützen die aus den Analysen im Beobachtungsraum gewonnenen Erkenntnisse. Während die Korrektur der Stativstationen zu einer Verringerung der Standardabweichungen führt, bewirkt die Korrektur der Bodenstation deren Erhöhung.



**Abbildung 5.6:** Ergebnisse der Basislinienauswertung der freien Station 1433 und der festgesetzten Station 5428 bei Verwendung von GPS L1-Beobachtungen. Darstellung im lokalen Koordinatensystem der Station 1433 mit Ursprung in deren a priori Position. Links: Abweichungen in Ost- und Nordkomponente. Rechts: Abweichungen in Ost- und Höhenkomponente. Grau: Beide Stationen unkorrigiert. Schwarz: Beide Stationen korrigiert. Kreis: Abweichung der a posteriori Position von der a priori Position bei der statischen Auswertung. Viereck: Mittelwert der Einzelepochenresiduen bei der kinematischen Auswertung. Linien: Standardabweichungen der Einzelepochenresiduen.



**Tabelle 5.7:** Kinematische Basislinienauswertung bei Verwendung der GPS L1- und L2-Beobachtungen. Standardabweichung der Residuen der Einzelepochenlösungen in mm, aufgeteilt in Nord- (dN), Ost- (dO) und Höhenkomponente (dh). Darstellung im lokalen Koordinatensystem der jeweils freien Station (linke Spalte) mit Ursprung in deren a priori-Position.

	5424 (Boden)	
	unkorrigiert	korrigiert
	dN/dO/dh	dN/dO/dh
1433 ( $h = 1,40$ m)		
unkorrigiert	2,7/1,7/4,8	
korrigiert	2,4/1,6/4,4	2,7/1,8/4,9
5428 ( $h = 0,69$ m)		
unkorrigiert	2,6/1,7/4,5	
korrigiert	2,5/1,5/4,3	2,8/1,7/4,5

### 5.3.3 Bewertung der Ergebnisse und Schlussfolgerung

Die Auswertung der Daten des Experimentalaufbaus zeigt, dass bei Vorliegen eines einzigen Reflektors und die durch ihn hervorgerufene Mehrwegeausbreitung eine erfolgreiche Detektion der dadurch entstehenden Mehrwegesignaturen in den  $C/N_0$ -Werten durch die Anwendung der Hilbert-Huang-Transformation möglich ist. Durch die im Anschluss an die Extraktion der Mehrwegesignale durchgeführte Bestimmung der Signalparameter kann der durch die Mehrwegeausbreitung verursachte Trägerphasenmessfehler berechnet und die Phasenbeobachtungen um diesen Fehler korrigiert werden. Im Vergleich der Standardabweichungen der Doppeldifferenzresiduen und der Koordinaten bei Verwendung korrigierter und nicht korrigierter Beobachtungen zeigt sich eine deutliche Reduktion bei Anwendung der Korrekturen. Zu beachten ist jedoch, dass bei einem zu geringen Abstand zwischen Reflektor und Empfangsantenne die dadurch verursachten langwelligen Signaturen nicht als Mehrwegesignal erkannt, sondern im Trend absorbiert werden. In diesem Fall ist die Detektion und somit die Korrektur der Beobachtungen nicht erfolgreich. Die Ergebnisse zeigen demnach das Potenzial und die Grenzen der Hilbert-Huang-Transformation auf, wenn diese für die Mehrwegedetektion und -korrektur im Rahmen einer Auswertung realer Messdaten eingesetzt wird. Inwiefern sie sich auch bewährt, wenn mit Beobachtungen zu positionieren ist, die in komplexerer Umgebung aufgenommen sind, wird im folgenden Kapitel diskutiert.

## Kapitel 6

# Anwendung der Hilbert-Huang-Transformation für die Bestimmung von Mehrwegesignalparametern - Auswertung von Daten eines GNSS-Referenzstationsnetzwerkes

Nach den durchaus vielversprechenden Ergebnissen, welche bei der Anwendung der Hilbert-Huang-Transformation auf die Daten des Experimentalaufbaus erzielt worden sind, soll die Methode nun auf Daten des GNSS-Referenzstationsnetzwerkes SAPOS angewandt werden. Im Gegensatz zu den im vorangegangenen Kapitel analysierten Daten liegen für diese Stationen Umgebungen mit unterschiedlichem Grad an Komplexität vor. Ferner verlangt der Abstand der Stationen die Bildung längerer Basislinien, wodurch die vereinfachten Annahmen zur Eliminierung bestimmter Fehleranteile, wie sie in Kapitel 5 gemacht werden, in diesem Fall nicht mehr zutreffend sind. Des Weiteren stehen neben GPS-Beobachtungen zusätzlich auch Beobachtungen von GLONASS zur Verfügung. Die verwendeten Daten werden in Abschnitt 6.1 vorgestellt. Daran anschließend erfolgt in Abschnitt 6.2, ähnlich wie in Abschnitt 5.3, die Analyse des Mehrwertes einer Korrektur des Mehrwegefehlers.

### 6.1 Datengrundlage

In [Ros11] ist eine umfangreiche Analyse von SAPOS-Stationen des Landes Sachsen-Anhalt hinsichtlich des Verbesserungspotenziales bei Anwendung von Korrekturalgorithmen für de-

terministische Mehrwegefehler durchgeführt worden. Ausgehend von den dabei gewonnenen Resultaten werden für diese Arbeit vier Stationen ausgewählt (Tabelle 6.1).<sup>1</sup> Auswahlkriterium ist die Verschiedenartigkeit der Empfängerumgebung.

**Tabelle 6.1:** Zusammenstellung der in dieser Arbeit analysierten SAPOS-Stationen. Alle Antennen sind mit einem Choke-Ring versehen. Dessen Verwendung führt zu einer starken Dämpfung von empfangenen Signalen unterhalb einer Elevation von  $0^\circ$  (vgl. [LRT15]).

Station Kennung	Ort	Empfängertyp	Antennentyp
0067	Genthin	LEICA GRX1200+GNSS	LEIAR25
0078	Staßfurt	LEICA GRX1200+GNSS	LEIAR25
0083	Halberstadt	LEICA GRX1200GGPRO	LEIAT504GG
0097	Dessau	LEICA GRX1200GGPRO	LEIAT504GG

Für die Stationen Genthin (0067) und Halberstadt (0083) ist laut [Ros11] eine Empfängerumgebung mit nur einem horizontalen Reflektor charakteristisch. Der in [Ros11] vorgestellte Algorithmus ermöglicht für eine solche Umgebung und insbesondere im Fall der Station 0067 eine Verringerung der Standardabweichungen in allen Koordinaten (im Vergleich zu den Standardabweichungen bei Nutzung unkorrigierter Beobachtungen). Es wird erwartet, dass für diese Stationen auch die Hilbert-Huang-Transformation, wie bereits anhand der Experimentaldaten aus Kapitel 5 demonstriert, eine signifikante Verbesserung liefert.

Im Gegensatz dazu liefert der Algorithmus im Fall dreier weiterer Stationen (Klötze (0072), Staßfurt (0078) und Halle (0101)) zu vernachlässigende Verringerungen bzw. Vergrößerungen der Standardabweichungen aller Koordinaten. Rost führt dies auf das Vorhandensein einer komplexen Empfängerumgebung (zwei Reflektoren) und die damit verbundenen eingeschränkte Nutzbarkeit des Algorithmus zurück. Für die Station 0078 gelingt es ihm, den Vergrößerungen der Standardabweichungen entgegenzuwirken, indem die durch einen der Reflektoren hervorgerufenen Effekte nicht korrigiert werden. Diese Strategie führt zu einer Ver-

<sup>1</sup> Eine Übersicht über alle SAPOS-Stationen des Landes Sachsen-Anhalt findet sich in [LVe].

ringierung der Standardabweichungen im Submillimeterbereich. Ein entsprechendes Vorgehen bei den Stationen 0072 und 0101 führt zu keinen positiven Resultaten. Zurückgeführt wird das auf die geringe Anzahl der Satelliten im Einflussbereich des Reflektors, dessen durch ihn verursachte Effekte nicht korrigiert werden und dem damit verbundenen, geringen Einfluss des dadurch hervorgerufenen Mehrwegefehlers auf die Positionsbestimmung. Der Vorteil der HHT besteht darin, dass Mehrwegesignale, hervorgerufen durch das Vorhandensein mehrerer Reflektoren, durchaus detektierbar sind, in sofern die Signalparameter gewisse Voraussetzungen erfüllen (vgl. Abschnitt 4.1.3.2). Auf Grund der oben genannten Untersuchungen in [Ros11] wird die Station 0078 für Analysen zu Mehrreflektor-Umgebungen in dieser Arbeit ausgewählt.

Für die Station Dessau (0097) zeigen Analysen in [Ros11], dass vernachlässigbar wenige Mehrwegesignale mit Periodendauern kleiner 20 min auftreten<sup>2</sup>. Zu Mehrwegesignalen mit Periodendauern größer 20 min werden keine Aussagen gemacht. Daher kann entweder angenommen werden, dass für die Station 0097 von mehrwegefreien Empfangsbedingungen gesprochen werden kann. Dies würde auch erklären, warum eine Korrektur des Mehrwegefehlers einen vernachlässigbar geringen Einfluss auf die Positionslösung hat. Oder aber es muss davon ausgegangen werden, dass nur Reflexionen mit Periodendauern größer 20 min vorhanden sind. Dann spräche die wenig ins Gewicht fallende Korrektur dafür, dass nur vernachlässigbar wenige Satelliten dem Mehrwegeeinfluss unterliegen. Inwieweit für eine derartige Station durch die Hilbert-Huang-Transformation Korrekturen berechnet werden und das Ergebnis der Positionsbestimmung beeinflusst wird, bleibt zu untersuchen.

Für die Analysen stehen GPS- und GLONASS-Beobachtungen von sieben Tagen (2.10.-8.10.2009, im Weiteren mit ihrem DOY<sup>3</sup>, 275-281, bezeichnet) zur Verfügung. Die zeitliche Auflösung der Beobachtungsgrößen beträgt 15 s. Die Empfänger der Stationen 0067 und 0078 geben  $C/N_0$ -Werte mit einer Auflösung von 0.05 dBHz aus, die der Stationen 0083 und 0097 mit 0.25 dBHz.

## 6.2 Analysen zum Mehrwert einer Korrektur des Mehrwegefehlers

Eine Basislinienauswertung erfolgt für jeweils zwei Stationen aus der Menge der für die Analyse ausgewählten Stationen ( $\{0067, 0078, 0083, 0097\}$ ). Es handelt sich dabei um Basislinien mit einer Länge von mehreren Kilometern (Tabelle 6.2).

---

<sup>2</sup> Dies entspräche, unter der Annahme von rein vertikalen bzw. horizontalen Reflexionsflächen, einem Hindernisabstand von mehr als einem Meter (vgl. Gleichung 5.10).

<sup>3</sup> DOY: Day of Year. Der DOY ordnet jedem Datum den zugehörigen Tag des Jahres zu. Dem 1. Januar wird die 1, dem 31. Dezember die 365 (bzw. 366 in einem Schaltjahr) zugeordnet.

**Tabelle 6.2:** Gerundete Basislinienlänge zwischen den SAPOS-Stationen in km

	0078	0083	0097
0067	74,2	96,3	64,1
0078		36,2	44,8
0083			81,0

Auf Grund der Länge der Basislinien kann nicht mehr davon ausgegangen werden, dass die durch die Atmosphäre verursachten Fehler der Stationen identisch sind. Der ionosphärisch bedingte Laufzeitfehler (erster Ordnung) kann durch die Verwendung der ionosphärenfreien Linearkombination (kurz: L3) anstelle der reinen L1- und L2-Phasenbeobachtungen in der Positionsbestimmung eliminiert werden, wodurch sich allerdings das Rauschen erhöht.<sup>4</sup> Für den durch die Troposphäre verursachten Fehler gilt, dass der trockene Fehleranteil a priori durch ein Modell approximiert und der Feuchtanteil als weitere Unbekannte bei der Positionsbestimmung geschätzt wird.<sup>5</sup> Die Schätzung erfolgt im 30-min-Intervall. Alle weiteren in den doppelten Differenzen nach Gleichung 2.50<sup>6</sup> vorkommenden Fehlerterme können bei Verwendung von IGS-Orbits und Antennenkorrekturparametern sowie mit den Anmerkungen in Abschnitt 2.1.3 vernachlässigt werden, sodass sich Gleichung 2.50 zu Gleichung 6.1 vereinfacht.

$$\nabla\Delta\Phi_{ij,L3}^{kl} = \nabla\Delta\rho_{ij}^{kl} + \nabla\Delta T_{ij}^{kl} + \nabla\Delta M_{ij,L3,\Phi}^{kl} + \lambda_{L3}\nabla\Delta N_{ij,L3}^{kl} + \varepsilon_{ij,L3,\Phi}^{kl} \quad (6.1)$$

Die die Qualität der L3-Basislinienauswertung beeinflussenden Faktoren sind demnach das erhöhte Rauschen  $\varepsilon_{ij,L3,\Phi}^{kl}$  auf Grund der Eliminierung des ionosphärenbedingten Fehleranteils durch Bildung der L3-Kombination, die Güte der Korrektur des Feuchtanteils des troposphärenbedingten Fehlers  $\nabla\Delta T_{ij}^{kl}$ , die Güte der Mehrwegekorrektur  $\nabla\Delta M_{ij,L3,\Phi}^{kl}$  und die durch diese Faktoren beeinflusste Güte der Bestimmung der Mehrdeutigkeiten. Zu beachten ist dabei, dass es sich bei der Wellenlänge  $\lambda_{L3}$  und den Mehrdeutigkeiten  $\nabla\Delta N_{ij,L3}^{kl}$  um L3-Parameter handelt. Die Wellenlänge  $\lambda_{L3}$  beträgt nur ca. 6 mm, was eine spezielle Strategie bei der Festsetzung der Mehrdeutigkeiten  $\nabla\Delta N_{ij,L3}^{kl}$  erfordert. Der in dieser Arbeit von Bernese verwendete Ansatz wird in Anhang A.1 erläutert.

<sup>4</sup> Vgl. dazu die Ausführungen in A.1.

<sup>5</sup> Die Zenitverzögerung des trockenen Anteils wird über das Global Pressure and Temperature Modell bestimmt. Als Mapping-Funktion wird die Global Mapping Function verwendet. Für nähere Ausführungen sei auf Anhang A.2 and die dort angegebenen Quellen verwiesen.

<sup>6</sup> Diese gilt nicht nur für reine L1- bzw. L2-Phasenbeobachtungen, sondern in gleicher Weise auch für jede Kombination dieser, also insbesondere auch für die ionosphärenfreie Linearkombination.

### 6.2.1 Auswertung im Beobachtungsraum

Wie in Kapitel 5 erfolgt die Bewertung der Mehrwegekorrektur zunächst anhand der Standardabweichungen der bei der statischen Basislinienauswertung<sup>7</sup> entstehenden Residuen der doppelten Differenzen. Erwartet wird, dass sich eine solche Korrektur in der Verringerung dieser Standardabweichungen bemerkbar macht. Wie bereits in Abschnitt 6.1 erwähnt, scheint eine Korrektur (auf Grund der einfachen Empfängerumgebung) insbesondere bei Station 0067 erfolgreich zu sein. Daher seien zunächst alle diese Station enthaltenden Basislinien untersucht. Die Korrektur des Mehrwegefehlers erfolgt dabei entweder für die Beobachtungen beider Stationen oder für keine der Stationen. Die Tabelle 6.3 gibt einen Überblick über die Standardabweichungen der DD-Residuen für eine rein GPS-basierte Lösung. Die vergleichende Darstellung zwischen korrigierter und nicht korrigierter Variante erfolgt dabei basislinien- und tagespezifisch. Tabelle 6.4 fasst in eben dieser Weise die Standardabweichungen der DD-Residuen für eine GPS-GLONASS-basierte Lösung zusammen.

Auffällig ist, dass die Standardabweichungen der DD-Residuen deutlich größer ist als im Fall der Auswertung der kurzen Basislinien des Experimentalaufbaus (Kapitel 5). Dies ist zum einen auf das höhere Rauschen der L3-Kombination zurückzuführen. Zum anderen wird, wie bereits erwähnt, der troposphärenbedingte Fehleranteil durch die Doppeldifferenzbildung nicht mehr eliminiert, sondern durch Modelle geschätzt. Diese Modelle basieren auf Mittelwerten von Messreihen für Druck, Temperatur und Luftfeuchte.<sup>8</sup> Weichen die tatsächlichen Werte von diesen Modellwerten ab, entstehen nicht modellierte Anteile, die demnach in den Doppeldifferenzen und auch in den Residuen dieser verbleiben. Dieser Effekt verursacht auch die deutlich sichtbare Tagesabhängigkeit der Standardabweichungen. So werden insbesondere an DOY 280 und DOY 281 Werte erreicht, die 30% über denen des DOY 275 liegen. Um den Erfolg der Mehrwegekorrektur zu diskutieren, seien nun jeweils die Standardabweichungen der DD-Residuen für die unkorrigierten und korrigierten Varianten verglichen. Es kann festgehalten werden, dass sowohl bei der GPS-Lösung als auch bei der GPS-GLONASS-Lösung für alle Basislinien und an allen Tagen durch die Korrektur des Mehrwegefehlers eine Verringerung der Standardabweichungen der DD-Residuen um bis zu 16% (Tabelle 6.4, Basislinie 0067-0083, DOY 275) erzielt wird. Abschließend sei angemerkt, dass ein Vergleich der Standardabweichungen der DD-Residuen aus der GPS-Lösung mit denen aus der GPS-GLONASS-Lösung keine signifikanten Unterschiede aufzeigt. Wie im Fall des Experimentalaufbaus (Kapitel 5), wird nun erwartet, dass sich eine derartige Reduzierung positiv auf die Standardabweichungen der Koordinatenlösungen auswirkt. Diesen Analysen ist der folgende Abschnitt gewidmet.

---

<sup>7</sup> Nähere Erläuterungen zur statischen Basislinienauswertung werden in Abschnitt 6.2.2 gegeben.

<sup>8</sup> Vgl. dazu die Anmerkungen in Anhang A.2.

**Tabelle 6.3:** Standardabweichung der Residuen der doppelten Differenzen bei ausschließlicher Verwendung von Satelliten des GPS in der statischen Basislinienauswertung. Unkorrigiert: Die Beobachtungen keiner der beiden Stationen werden korrigiert. Korrigiert: Die Beobachtungen beider Stationen werden korrigiert. Für alle Basislinien und alle Tage gilt, dass die Standardabweichungen bei Verwendung der Korrekturen verringert werden. Alle Angaben in mm.

Basislinie	275	276	277	278	279	280	281
0067-0078							
unkorrigiert	30,8	32,3	34,2	31,7	32,8	37,1	38,4
korrigiert	27,6	29,9	31,9	29,4	29,9	34,1	35,2
0067-0083							
unkorrigiert	29,1	32,0	33,2	29,9	31,0	36,9	33,4
korrigiert	25,3	28,6	30,1	26,8	27,6	34,4	30,0
0067-0097							
unkorrigiert	27,6	29,7	33,0	30,2	30,0	35,8	36,0
korrigiert	24,0	25,9	29,9	28,1	26,8	32,2	32,4

**Tabelle 6.4:** Standardabweichung der Residuen der doppelten Differenzen für die GPS-GLONASS-Lösung in der statischen Basislinienauswertung. Unkorrigiert: Die Beobachtungen keiner der beiden Stationen werden korrigiert. Korrigiert: Die Beobachtungen beider Stationen werden korrigiert. Für alle Basislinien und alle Tage gilt, dass die Standardabweichungen bei Verwendung der Korrekturen verringert werden. Alle Angaben in mm.

Basislinie	275	276	277	278	279	280	281
0067-0078							
unkorrigiert	32,7	34,1	36,7	33,6	34,1	38,8	39,1
korrigiert	28,6	30,2	33,8	30,6	31,0	36,2	34,9
0067-0083							
unkorrigiert	29,7	32,9	34,6	31,4	31,8	39,1	34,3
korrigiert	24,9	28,7	31,1	27,7	28,0	36,0	30,3
0067-0097							
unkorrigiert	28,6	30,9	33,8	30,3	30,8	36,2	35,8
korrigiert	24,3	26,6	30,5	27,3	26,8	32,6	31,8

## 6.2.2 Auswertung im Koordinatenraum

Eingangsgrößen für die statische Basislinienauswertung sind die mit Gleichung 6.1 gegebenen Doppeldifferenzen der ionosphärenfreien Linearkombination, gebildet aus den Phasenbeobachtungen von jeweils zwei Stationen, wobei die Mehrwegekorrektur entweder die Beobachtungen beider Stationen oder keiner Station betrifft. Es werden jeweils die Beobachtungen des gesamten Tages und aller Satelliten mit einer Elevation  $el \geq 5^\circ$  verwendet, wobei eine elevationsabhängige Gewichtung erfolgt. Für die Auswertung werden die Koordinaten der Station 0067 auf die Werte der RINEX-Datei fixiert, die Koordinaten der zweiten Station sind als Unbekannte zu schätzen. Wie bereits in Abschnitt 5.3.2 ausgeführt, gehen damit sämtliche nicht eliminierten Fehleranteile beider Stationen auf die Koordinatenlösung der zweiten, freien Station über. Als a priori Koordinaten für die Ausgleichung werden für alle Stationen die Werte der RINEX-Datei verwendet. Die von Bernese ausgegebenen Koordinatenstreuungen liegen an allen Tagen sowohl für die korrigierten als auch für die nicht korrigierten Varianten im Submillimeterbereich, sodass, wie im Fall der Stationen des Experimentalaufbaus allein aus den Ergebnissen der statischen Basislinienauswertung keine Aussagen zu einem Mehrwert der Korrektur des Mehrwegefehlers getroffen werden können.

Daher wird, wie in Kapitel 5, in einem zweiten Schritt eine kinematische Basislinienauswertung durchgeführt, d.h. die Koordinaten der freien Station werden in jeder Epoche neu geschätzt. In Tabelle 6.5 sind für die oben diskutierten Basislinien und beispielhaft für eine GPS-Lösung tageweise die Standardabweichungen der Koordinatenresiduen bei Verwendung unkorrigierter und korrigierter Beobachtungen zusammengestellt.<sup>9</sup> Es ist festzustellen, dass sich für keine der Basislinien die Erwartung einer Verringerung der Koordinatenstreuung bei Korrektur des Mehrwegefehlers uneingeschränkt erfüllt. Die Verwendung der Korrektur führt, über alle drei Basislinien und den gesamten Zeitraum von sieben Tagen gesehen, bei ungefähr der Hälfte der Standardabweichungen der Einzelepochenresiduen zu marginalen Verbesserungen. Hingegen verschlechtern sich die Standardabweichungen der anderen Hälfte teilweise um mehrere Millimeter. Diese Beobachtung lässt die folgenden Schlussfolgerungen zu. Die Bestimmung des Mehrwegefehlers scheint teilweise fehlerhaft zu erfolgen, da es anderenfalls nicht zu einer Verschlechterung der Ergebnisse, d.h. einer Erhöhung der Standardabweichung der Koordinatenresiduen, käme. Allerdings überwiegt eine korrekte Bestimmung des Mehrwegefehlers, da anderenfalls keine derart eindeutige und für alle Basislinien und Tage nachweisbare Verringerung der Standardabweichung der DD-Residuen bei Durchführung der Korrektur vorläge (Tabelle 6.3). Daher scheinen die erfolgreich korrigierten Beobachtungen nur einen geringen

---

<sup>9</sup> Die Ergebnisse für eine GPS-GLONASS-Lösung sind qualitativ äquivalent.



bis keinen, die fehlerhaft korrigierten Beobachtungen hingegen einen größeren Einfluss auf die Koordinatenlösungen zu haben. Dieser Einfluss wird während der Positionsbestimmung über die Gewichtung gesteuert. Diese erfolgt üblicherweise elevationsabhängig: Je geringer die Elevation des Satelliten, desto geringer der Einfluss seiner Beobachtungen. Es lässt sich daher schlussfolgern, dass mehrwegebedingte Fehleranteile insbesondere Beobachtungen von Satelliten in geringen Elevationen betreffen, diese Fehleranteile überwiegend erfolgreich detektiert und korrigiert werden, die Korrektur jedoch auf Grund der elevationsabhängigen Gewichtung nur einen geringeren Einfluss auf die Koordinatenlösung hat. Demgegenüber sind mehrwegebedingte Fehleranteile in Beobachtungen von Satelliten in hohen Elevationen nicht vorhanden oder werden nicht detektiert. Sie führen durch eine sich anschließende fehlerhafte Korrektur und deren gewichtungsbedingten, großen Einfluss auf die Koordinatenlösung teilweise zu deren Verschlechterung.

Der Grund, warum eine erfolgreiche Detektion des Mehrwegefehlers insbesondere bei Beobachtungen von Satelliten in geringen Elevationen gelingt, ist bei der EMD selbst zu finden. Durch sie gut detektierbar sind Mehrwegesignale mit (im Vergleich zum Beobachtungsintervall) kurzen Periodendauern, schlecht hingegen Mehrwegesignale mit langen Periodendauern. Die Analysen des  $C/N_0$  zeigen, dass Mehrwegesignale mit kurzen Periodendauern insbesondere bei Beobachtungen von Satelliten in geringen Elevationen auftreten.<sup>10</sup> Die dadurch verursachten Fehleranteile werden durch die EMD gut detektiert und erfolgreich korrigiert. Für den Fall, dass langwellige Mehrwegesignale auftreten, führen diese zu einer Verfälschung des in der EMD als Trend extrahierten direkten Signals. Ebenfalls zu einer Verfälschung führen methodenspezifische Artefakte, wie sie in Kapitel 3 beschrieben sind. Für Beobachtungen von Satelliten in hohen Elevationen und damit großem Gewicht können diese nicht detektierten Mehrwegeanteile bzw. Artefakte zu einer Verschlechterung der Koordinatenlösung führen. Hingegen spielen derartige Verfälschungen für Satelliten in niedrigen Elevationen eine untergeordnete Rolle, da sie mit einem sehr kleinen Gewicht versehen werden.

Um die These der erfolgreichen Korrektur des Mehrwegefehlers zu stützen, wird eine Positionsbestimmung ohne Gewichtung durchgeführt. Beobachtungen in niedrigen Elevationen bekommen damit denselben Stellenwert wie Beobachtungen in hohen Elevationen. Tabelle 6.6 stellt die so erreichbaren Standardabweichungen der Einzelepochenresiduen zusammen. Im Gegensatz zu den Ergebnissen bei Verwendung einer Gewichtung (Tabelle 6.5) wird deutlich, dass sowohl bei Nutzung von unkorrigierten als auch von korrigierten Beobachtungen die Einzelepochenresiduen stärker streuen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass üblicherweise al-

---

<sup>10</sup> Diese Behauptung wird auch durch die Analysen in [Ros11] gestützt.

**Tabelle 6.5:** Standardabweichung der Einzelepochenresiduen in mm bei ausschließlicher Verwendung von GPS-Beobachtungen. Diese werden für die Positionsbestimmung elevationsabhängig gewichtet. Die Residuen sind aufgeteilt nach Nord- (dN), Ost- (dO) und Höhenkomponente (dh). Die Anwendung der HHT-basierten Mehrwegekorrektur führt zu marginalen Verringerungen bzw. zu Vergrößerungen der Standardabweichung.

	275	276	277	278	279	280	281
Basislinie	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh
0067-0078							
unkorrigiert	11,6/8,6/25,6	12,3/9,4/29,6	13,1/9,6/32,5	12,2/8,4/29,5	12,2/9,1/26,5	15,0/10,6/33,4	15,4/12,0/36,4
korrigiert	12,0/8,5/29,3	12,4/9,1/28,8	13,5/9,3/30,3	13,4/8,8/30,3	13,3/9,4/29,9	14,1/10,4/34,1	16,0/12,2/41,7
0067-0083							
unkorrigiert	11,3/8,1/25,5	12,9/10,6/28,2	13,3/10,4/32,2	11,5/8,4/24,5	11,3/8,9/26,1	14,3/11,3/38,0	13,8/11,4/28,3
korrigiert	10,7/8,6/25,8	12,1/10,0/26,4	13,4/9,9/29,4	12,0/8,5/24,5	11,1/8,8/27,7	13,9/11,1/39,7	13,5/12,0/30,6
0067-0097							
unkorrigiert	10,0/7,8/21,0	11,1/8,5/23,4	12,2/9,0/25,4	11,5/8,3/26,2	10,3/8,0/23,3	12,0/10,0/29,2	14,1/10,7/33,8
korrigiert	10,4/7,9/24,1	11,0/8,3/23,1	12,3/8,5/23,0	12,2/8,2/28,3	10,5/8,0/25,0	11,1/9,5/29,5	13,1/10,1/34,2

**Tabelle 6.6:** Standardabweichung der Einzelepochenresiduen in mm bei ausschließlicher Verwendung von GPS-Beobachtungen. Diese werden für die Positionsbestimmung nicht gewichtet. Die Residuen sind aufgeteilt nach Nord- (dN), Ost- (dO) und Höhenkomponente (dh). Die Anwendung der HHT-basierten Mehrwegekorrekturen führt für alle Basislinien und Tage in sämtlichen Koordinatenkomponenten zu einer Verringerung der Standardabweichung.

	275	276	277	278	279	280	281
Basislinie	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh	dN/dO/dh
0067-0078							
unkorrigiert	16,5/13,1/27,2	17,9/13,7/27,8	19,3/14,9/32,2	16,9/13,2/28,3	16,7/14,2/28,9	19,9/16,3/32,2	21,4/19,6/33,3
korrigiert	14,5/11,3/24,3	16,5/12,9/26,2	17,7/14,0/29,3	16,2/12,3/26,0	15,6/12,9/26,7	18,5/15,3/29,4	19,7/18,0/30,8
0067-0083							
unkorrigiert	15,9/12,7/26,8	18,0/15,0/28,0	19,4/15,6/30,7	16,9/13,7/26,8	17,0/14,0/30,1	21,5/17,1/32,5	18,8/17,7/29,7
korrigiert	13,6/10,8/23,4	15,9/13,6/25,9	17,8/14,2/28,5	15,5/11,8/24,6	15,7/12,8/27,7	19,4/15,8/30,1	16,7/14,9/25,9
0067-0097							
unkorrigiert	14,8/12,2/23,9	16,5/13,2/26,0	17,8/15,0/28,8	16,7/14,0/26,1	15,1/13,5/26,9	19,6/16,5/29,2	20,3/17,6/29,4
korrigiert	12,7/10,0/21,1	13,9/12,0/23,7	16,7/13,9/27,6	15,1/12,7/24,0	13,6/12,2/24,0	17,6/14,8/27,1	17,6/15,1/27,0

le nicht erfassten Fehleranteile<sup>11</sup> stochastisch, d.h. mit einer Standardabweichung, abgeschätzt werden. Es wird davon ausgegangen, dass diese Fehleranteile in geringeren Elevationen höher ausfallen, d.h. stärker streuen. Die von ihnen betroffenen Beobachtungen sollen also ein geringeres Gewicht bei der Positionsbestimmung erhalten. Wird nun auf eine Gewichtung verzichtet, bedeutet dies, dass angenommen wird, die Fehleranteile seien in allen Elevationen gleich streuend. Die damit nicht mehr modellierte, stärkere Fehleranfälligkeit von Beobachtungen der Satelliten in niedrigen Elevationen geht somit in die Koordinatenlösung über. Diese Verfälschung ist jedoch hier von untergeordneter Bedeutung, da sie beide Versionen<sup>12</sup> in ähnlicher Weise betrifft. Entscheidend ist hier, dass bei Korrektur des Mehrwegefehlers für alle dargestellten Basislinien, alle Tage und alle Koordinaten eine Verbesserung um mehrere Millimeter erzielt werden kann. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass der auftretende kurzperiodische Mehrwegefehler gut detektiert wird, jedoch nur Beobachtungen von Satelliten in geringen Elevationen betrifft, sodass bei üblicher Verwendung einer Gewichtung seine Korrektur von untergeordneter Bedeutung ist.

Es seien nun die Basislinien untersucht, die Beobachtungen aller Stationen außer der Station 0067 verwenden. Laut Analysen in [Ros11] sind die Beobachtungen der Stationen 0078 und 0083 deutlich weniger von Mehrwegeausbreitung betroffen als die der Station 0067. Für die Station 0097 ist der Einfluss von Mehrwegeausbreitung, wie bereits in Abschnitt 6.1 angemerkt, faktisch nicht vorhanden.<sup>13</sup> Betroffene Satelliten befinden sich, wie im Fall von Station 0067, stets in geringen Elevationen. Auf Grund dessen und den Ergebnissen der bisherigen Basislinienauswertung (Tabellen 6.5 und 6.6) muss davon ausgegangen werden, dass, selbst bei erfolgreicher Korrektur des durch Mehrwegeausbreitung verursachten Fehleranteils, keine signifikanteren Verbesserungen zu erwarten sind als die, die Basislinien mit Beteiligung der Station 0067 betreffen. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn bei der Positionsbestimmung eine Gewichtung vorgenommen wird. Daher seien im Folgenden nur die Ergebnisse diskutiert, die ohne eine solche elevationsabhängige Gewichtung erzeugt worden sind. Als repräsentatives Beispiel stellt Tabelle 6.7 die Standardabweichungen der DD- und Einzelepochenresiduen aller Basislinien eines Tages (DOY 275), sowohl einer GPS- als auch einer GPS-GLONASS-Lösung, zusammen.

---

<sup>11</sup> Dies ist beispielsweise der nicht erfasste Einfluss der Troposphäre.

<sup>12</sup> Gemeint ist zum einen die Version, bei der für die Beobachtungen beider Stationen der Mehrwegefehler korrigiert wird und zum anderen die Version, bei der für keine der Beobachtungen der Mehrwegefehler berechnet wird.

<sup>13</sup> Die Aussagen zum Auftreten von Mehrwegeausbreitung beziehen sich, wie ebenfalls bereits in Abschnitt 6.1 erwähnt ausschließlich auf Mehrwegesignale mit Perioden kleiner 20 min. Für Mehrwegesignale mit größeren Perioden werden keine Angaben gemacht.

**Tabelle 6.7:** Standardabweichung der Residuen der doppelten Differenzen (DD) und der Einzelepochenresiduen in Nordrichtung, Ostrichtung und Höhe (dN/dO/dh), jeweils in mm und getrennt nach GPS-Lösung und GPS-GLONASS-Lösung (GNSS) des DOY 275. Für die Positionsbestimmung erfolgt keine elevationsabhängige Gewichtung. Für die Basislinien der Form 0067 – 00xx,  $xx \in \{78, 83, 97\}$  führt die Korrektur des Mehrwegefehlers zu einer Verringerung der Standardabweichung der DD- und Einzelepochenresiduen. Für alle anderen Basislinien kann dies nicht festgestellt werden.

Basislinie	GPS		GNSS	
	DD	dN/dO/dh	DD	dN/dO/dh
0067-0078				
unkorrigiert	30,0	16,5/13,1/27,2	31,9	12,4/12,0/24,2
korrigiert	27,0	14,5/11,3/24,3	27,9	11,0/10,0/20,4
0067-0083				
unkorrigiert	28,1	15,9/12,7/26,8	29,0	12,0/11,4/22,3
korrigiert	24,4	13,6/10,8/23,4	24,7	10,2/9,3/18,5
0067-0097				
unkorrigiert	26,7	14,8/12,2/23,9	28,1	11,2/11,3/20,5
korrigiert	23,4	12,7/10,0/21,1	24,2	9,8/8,9/16,8
0078-0083				
unkorrigiert	23,3	14,0/9,5/20,7	23,7	10,4/8,8/17,5
korrigiert	23,4	14,3/9,9/21,3	23,5	10,6/8,8/17,5
0078-0097				
unkorrigiert	20,9	12,8/8,5/18,1	22,6	10,2/8,0/16,6
korrigiert	22,2	13,6/9,3/19,7	22,7	10,6/8,1/16,7
0083-0097				
unkorrigiert	18,0	11,0/7,2/17,0	18,3	9,0/6,0/14,0
korrigiert	18,4	11,0/7,5/17,1	18,6	9,4/6,0/13,9

Wie erwartet, sind auf Grund der höheren Anzahl an verfügbaren Satelliten die Koordinatenlösungen bei Verwendung beider Systeme (kurz: GNSS) generell weniger verrauscht als im Fall einer GPS-Lösung. Werden die unkorrigierten Basislinien eines bestimmten Lösungstyps (GPS/GNSS) miteinander verglichen, ist auffällig, dass die Basislinien der Form 0067 – 00xx,  $xx \in \{78, 83, 97\}$  größere Standardabweichungen in DD- und Einzelepochenresiduen aufweisen als alle anderen Basislinien. Dies unterstreicht die bisherigen Ausführungen, dass diese Basislinien stärker (mehrwege-)fehlerbehaftet sind.

Ist die Korrektur des Mehrwegefehlers erfolgreich, sollte dies zuerst in der Standardabweichung der DD-Residuen sichtbar werden. Auffällig ist jedoch, dass nur für o.g. Basislinien überhaupt eine Verringerung der Standardabweichungen eintritt. Für die anderen Basislinien gibt es keine signifikante Änderung bzw. sogar eine Vergrößerung der Standardabweichungen der DD-Residuen. Verändert sich die Standardabweichung nur unwesentlich, wie beispielsweise im Fall der Basislinie 0078-0083, muss entweder davon ausgegangen werden, dass auf Grund der geringen Anzahl der betroffenen Beobachtungen, deren Korrektur auch nur einen geringen Einfluss auf die Gesamtheit der DD-Residuen hat. Oder aber es werden auftretende Mehrwegefehler auf einer signifikanten Anzahl an Beobachtungen zwar erfolgreich korrigiert. Diese Verbesserungen werden aber in den DD-Residuen nicht sichtbar, da eine ähnlich große Anzahl an Beobachtungen nur unzureichend bzw. fälschlicherweise korrigiert wird, was eine Vergrößerung der Standardabweichung der DD-Residuen zur Folge hat. In diesem Fall gleichen sich Verringerungen und Vergrößerungen der Standardabweichungen aus. Für Basislinien, wie 0078-0097, deren Standardabweichung der DD-Residuen sich markant vergrößert, muss davon ausgegangen werden, dass eine Korrektur fälschlicherweise durchgeführt wird. Es gilt stets, dass sich eine derartige, fehlerhafte Korrektur auch in den Einzelepochenresiduen widerspiegelt. Wie bereits in der Auswertung der Basislinien 0067 – 00xx,  $xx \in \{78, 83, 97\}$  angedeutet, kann die fehlerhafte Korrektur auf möglicherweise vorhandene, aber nicht detektierte, langwellige Mehrwegesignale oder methodenspezifische Artefakte zurückgeführt werden.

### 6.2.3 Bewertung der Ergebnisse und Schlussfolgerung

Nach der Basislinienauswertung von Stationen mit unterschiedlichen Umgebungsbedingungen ist festzustellen, dass es unter bestimmten Voraussetzungen gelingt, durch die Korrektur des geschätzten Mehrwegefehlers eine Verringerung der Standardabweichung der Einzelepochenresiduen zu erreichen. Für Umgebungen, die die Annahme einer einfachen Strahlengeometrie erlauben, d.h. ein Reflektor in genügend großem Abstand<sup>14</sup>, werden die Ergebnisse des

---

<sup>14</sup> Genügend groß meint, dass ein Mehrwegesignal hervorgerufen wird, das eine Periodendauer kleiner der doppelten Beobachtungsdauer besitzt, damit dieses Mehrwegesignal als IMF und nicht als Trend extrahiert wird.

Experimentaldatensatzes bestätigt. Es ist jedoch festzuhalten, dass auf Grund der Tatsache, dass Mehrwegesignale bei allen Stationen insbesondere in niedrigen Elevationen auftreten und Beobachtungen in diesen Elevationen während der Positionsbestimmung üblicherweise mit einem geringen Gewicht versehen werden, der Mehrwert einer Korrektur des durch Mehrwegeausbreitung verursachten Trägerphasenmessfehlers nur nachgewiesen werden kann, wenn diese Gewichtung aufgehoben wird. Für komplexere Umgebungsbedingungen muss konstatiert werden, dass durch die Korrektur keine Verbesserungen des Positionsergebnisses erzielt werden können. Dies kann zum einen daran liegen, dass einer der Reflektoren auf Grund seines geringen Abstandes Mehrwegesignale hervorruft, die auf Grund ihrer niedrigen Frequenz während der EMD nicht als IMF extrahiert, sondern im Trend absorbiert werden. Zum anderen können ungünstige Frequenz- und Amplitudenverhältnisse der Mehrwegesignale, beispielsweise gleiche Amplituden, hervorgerufen durch ähnliche Materialeigenschaften der Reflektoren, zu einer ungenügenden Extraktion der Mehrwegesignale und damit zu Fehlern bei der Berechnung des Trägerphasenmessfehlers führen (vgl. Abschnitt 4.1.3.2).

## Kapitel 7

# Zusammenfassung und Ausblick

Eine Besonderheit bei der GNSS-gestützten Positionsbestimmung im verkehrswissenschaftlichen Bereich stellen die Umgebungsbedingungen dar. Sie sind oftmals dadurch gekennzeichnet, dass sie durch den Nutzer nur eingeschränkt beeinflussbar sind und auf Grund zahlreicher Hindernisse im Ausbreitungsweg der GNSS-Signale, diese der Mehrwegeausbreitung unterliegen. Dies führt zu einer Verfälschung der Code- und Trägerphasenmessungen und in Folge dessen zu einer qualitativ schlechteren Position. Ziel ist es demnach, den durch die Mehrwegeausbreitung hervorgerufenen Fehler in den Messungen zu eliminieren.

Dafür kommen einerseits Verfahren in Frage, die empfängerexterne und -interne Hard- und Softwarekomponenten modifizieren und andererseits Ansätze, die auf der Weiterverarbeitung der Code- und Trägerphasenmessungen basieren. Unter der für übliche, verkehrliche Anwendungen berechtigten Annahme, dass weder auf die empfängerexternen noch auf die empfängerinternen Komponenten Einfluss genommen werden kann, verbleibt für verkehrswissenschaftliche Fragestellungen die Entwicklung von Ansätzen in der letztgenannten Kategorie. Je nach Genauigkeitsanforderungen an die Positionsbestimmung und damit der Verwendung von Code- und/oder Trägerphasenmessungen sind die entsprechenden Mehrwegefehler zu schätzen. Unter der Annahme, dass zukünftig auch standardmäßig für zivile Nutzer Codemessungen auf zwei Frequenzen zur Verfügung stehen, kann der Mehrwegefehler auf diesen Messungen mittels ihrer geeigneten Linearkombination abgeschätzt werden. Für den Mehrwegefehler auf Trägerphasenmessungen gelingt dies nicht. Für dessen Abschätzung eignen sich, unter der für verkehrliche Anwendungen wichtigen Maßgabe einer echtzeitnahen Positionsbestimmung bewegter Nutzer,  $C/N_0$ -basierte Verfahren. Diese Verfahren erlauben es, Mehrwegesignalparameter zu bestimmen, den Messfehler über bekannte funktionale Zusammenhänge zu berechnen und die Trägerphasenmessungen zu korrigieren. Bisherige in der Literatur diskutierte Ansätze dieser Art besitzen einige Schwächen. So werden zum einen nicht notwendigerweise



bereitstehende a priori Informationen für die Bestimmung des direkten Signals vorausgesetzt. Zum zweiten werden Signalanalysemethoden verwendet, die auf für ihre Anwendung notwendigen, jedoch nicht garantierten Signaleigenschaften beruhen. Zum dritten sei die oftmals sehr geringe und zudem häufig synthetische Datenbasis als Kritikpunkt angemerkt. Ziel dieser Arbeit ist es daher gewesen, ein  $C/N_0$ -basiertes Verfahren für die Schätzung des Mehrwegefehlers auf Trägerphasenmessungen zu entwickeln, welches ohne a priori Informationen über die zu analysierenden Signale und Voraussetzungen an selbige angewandt werden kann und dessen Leistungsfähigkeit anhand einer soliden Datenbasis diskutiert und bewertet wird. Daraus ergeben sich die folgenden, im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Arbeitsschritte.

**Vorgehensweise.** In einem ersten Schritt wird als eine die o.g. Anforderungen erfüllende Signalanalysemethode die Hilbert-Huang-Transformation ausgewählt. Ihr Nachteil besteht in dem sie rein qualitativ beschreibenden Algorithmus. Demzufolge werden in einem zweiten Schritt die sie beschreibenden Parameter sowie die daraus resultierenden Eigenschaften der Methode und Einsatzgrenzen diskutiert. Welche Parametereinstellungen für die in dieser Arbeit zu lösende Aufgabenstellung zweckmäßig sind, wird in einem dritten Schritt festgelegt. Hierfür werden eine Validierungsbasis sowie Bewertungsmaßstäbe definiert, d.h. die Hilbert-Huang-Transformation für die Schätzung des Mehrwegefehlers in Trägerphasenmessungen adaptiert. Um ihr Potenzial für diese Aufgabe bewerten zu können, wird die so adaptierte Hilbert-Huang-Transformation in einem vierten Schritt auf unter realen Bedingungen aufgenommene Messdaten angewandt. Diese umfassen sowohl Daten eines Experimentalaufbaus, der den Vorteil definierter Umgebungsbedingungen besitzt, als auch Daten eines Referenzstationsnetzwerkes, das diesen Vorzug nicht bietet. Als Auswertestrategie wird die Basislinienauswertung gewählt, da so Einflüsse anderer Fehlerquellen minimiert werden können, was die Bewertung des Mehrwertes ermöglicht, den der Einsatz der Hilbert-Huang-Transformation für die Mehrwegefehlerdetektion und -korrektur bietet. Diskutiert wird der Mehrwert einer Korrektur anhand vergleichender Analysen der Residuen doppelter Differenzen und Koordinatenreihen bei Verwendung korrigierter und nicht korrigierter Trägerphasenmessungen. Die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen.

**Erkenntnisse.** Bei Auftreten von Mehrwegeausbreitung wird im Empfänger nicht das direkte Signal, sondern ein Signal, welches sich als vektorielle Überlagerung von direktem und reflektierten Signalen darstellen lässt, für die Trägerphasenbestimmung genutzt, wodurch ein Trägerphasenmessfehler, der Mehrwegefehler, entsteht. Bei Kenntnis der Signalparameter aller auftretenden Signale kann dieser Fehler auf Grundlage des funktionalen Zusammenhanges zwischen dem  $C/N_0$  und der Amplitude des im Empfänger für die Trägerphasenbestimmung

ausgewerteten Signals berechnet werden. Mittels Hilbert-Huang-Transformation kann ein Signalgemisch in seine in ihm enthaltenen Signalanteile durch sukzessives Aussieben dieser in sogenannte IMF zerlegt und deren Parameter bestimmt werden. Sie ist demnach geeignet, aus gegebenen  $C/N_0$ -Werten die für die Berechnung des Mehrwegefehlers benötigten Werte zu bestimmen. Voraussetzung ist die (nicht für alle Empfänger gegebene) Bereitstellung adäquater  $C/N_0$ -Werte.

Die Hilbert-Huang-Transformation basiert auf einer rein qualitativen Beschreibung. Für ihre konkrete Implementierung sind den Siebprozess beschreibende Verfahren festzulegen. Nach Auswertung der bisher in der Literatur beschriebenen Ansätze werden für die Umsetzung in dieser Arbeit das envelopebasierte Verfahren unter Nutzung rationaler Splines sowie das schwellwertbasierte Mittelwert-Kriterium für den Abbruch des Siebprozesses favorisiert. Für die sich anschließende Bestimmung der Signalparameter der ausgesiebten Signalanteile wird die normalisierte Hilbert-Transformation ausgewählt.

Für die verwendeten Verfahren sind verschiedene Parameter festzulegen. Dies betrifft den Tensionsparameter der rationalen Splines sowie ihre Modellierung an den Intervallenden. Die Festlegung erfolgt auf Basis einer in dieser Arbeit definierten Schar von Testsignalen, die die herausgearbeiteten Charakteristika von Mehrwegesignalen tragen sowie auf Grundlage entwickelter Bewertungskriterien, anhand derer der optimale Parametersatz ausgewählt wird.

Die mit diesem Parametersatz theoretisch erreichbaren Genauigkeiten bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers werden, ebenfalls anhand der Auswertung von Testsignalen, getrennt nach der Anzahl angenommener Mehrwegesignale ermittelt. Wird die in den Spezifikationen geforderte Genauigkeit von 0.1 rad bei der Nachführung der Trägerphasen in der PLL als Richtwert zu Grunde gelegt, ist festzuhalten, dass bei Einsatz der adaptierten Hilbert-Huang-Transformation der Trägerphasenmessfehler bei Auftreten eines einzelnen, nicht veräuschten Mehrwegesignals mit deutlich geringeren Abweichungen als diesem Richtwert bestimmt werden kann. Ist den Testsignalen additives Gaußsches Weißes Rauschen überlagert, verschlechtern sich die erreichbaren Ergebnisse. In Abhängigkeit ihrer Signalparameter können jedoch für 95% aller Testsignale Abweichungen bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers kleiner 0.43 rad erreicht werden.

Ob und wie genau mehrere sich überlagernde Testsignale extrahiert werden können, ist abhängig von ihrem Frequenz- und Amplitudenverhältnis. Aufbauend auf der in der Literatur diskutierten Eigenschaft, wonach die Überlagerung zweier Signale durch die Hilbert-Huang-

Transformation entweder als eben solche erkannt wird oder als ein amplitudenmoduliertes Signal interpretiert wird oder keiner dieser Fälle eintritt, wird in Abhängigkeit des Frequenz- und Amplitudenverhältnisses die theoretisch maximale Abweichung bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers berechnet. Eine nicht korrekte Extraktion der Testsignale bzw. hohe Abweichungen ergeben sich insbesondere für Signale mit Amplituden in ähnlicher Größenordnung. Für die Behandlung des durch Mehrwegeausbreitung verursachten Trägerphasenmessfehlers bedeutet dies, dass nahezu ungeachtet des Abstandes der für die Mehrwegesignale ursächlichen Hindernisse (und damit des Frequenzverhältnisses der Signale) bei ähnlichen Amplituden (bedingt durch ähnliche Materialeigenschaften der Hindernisse) dessen Bestimmung mit inakzeptabel hohen Fehlern behaftet sein kann. Gleiches gilt, wenn die Amplitude des niederfrequenteren Signals, d.h. des Signals, welches durch Hindernisse, die sich dichter an der Empfangsantenne befinden, hervorgerufen wird, größer ist als die Amplitude des durch entferntere Hindernisse hervorgerufenen Signals.

Der Bestimmung der Mehrwegesignalparameter und daraus abgeleitet des Trägerphasenmessfehlers geht die Auswahl der die Mehrwegesignale repräsentierenden IMF aus der Menge aller IMF der  $C/N_0$ -Zerlegung voraus. Dies geschieht mit einem in dieser Arbeit entwickelten schwellwertbasierten Verfahren, welches auf den in der Literatur analysierten Eigenschaften der Hilbert-Huang-Transformation bei der Zerlegung von Rauschprozessen aufsetzt.

Die Einsatzfähigkeit der Methode für echtzeitnahe Anwendung wird nicht durch die Implementierung der Methode selbst eingeschränkt. Vielmehr muss das Analyseintervall der Frequenz des Mehrwegesignals (und damit dem Abstand zwischen Empfangsantenne und Hindernis) angepasst sein. Ist die Periodendauer des Signals größer als die Länge des Analyseintervalls, wird das Signal nicht in einer IMF extrahiert, sondern im Trend absorbiert und dementsprechend nicht als Mehrwegesignal erkannt.

Anhand der Auswertung realer Messdaten eines Experimentalaufbaus kann gezeigt werden, dass die in dieser Arbeit adaptierte Hilbert-Huang-Transformation in der Lage ist, bei Vorliegen einer Umgebung, die durch einen Reflektor charakterisierbar ist, die durch ihn hervorgerufene Mehrwegesignatur in den  $C/N_0$ -Werten zu detektieren und die für die Korrektur des Trägerphasenmessfehlers benötigten Parameter zu bestimmen. Durch die Korrektur kann sowohl die Standardabweichung der Doppeldifferenzresiduen, als auch die der Koordinaten deutlich reduziert werden. Voraussetzung dafür ist, wie bereits angemerkt, eine Periodendauer, die nicht größer als die Länge des Analyseintervalls ist, um die Absorption des Mehrwegesignals in den Trend zu verhindern.

Die Auswertung der Daten von SAPOS-Stationen bestätigt diese Ergebnisse für den Fall eines relevanten Reflektors. Da von der Mehrwegeausbreitung betroffene Signale meist Satelliten in geringen Elevationen zuzuordnen sind, führt eine Korrektur des Trägerphasenmessfehlers nur dann zu sichtbaren Verbesserungen in den Koordinaten, wenn keine elevationsabhängige Gewichtung der Beobachtungen vorgenommen wird. Für komplexere Umgebungen führt die Korrektur des Trägerphasenmessfehlers teilweise sogar zu einer Verschlechterung des Positionsergebnisses. Als Grund hierfür können ungünstige Geometrie und Materialeigenschaften der Reflektoren gelten, die sich in bereits angemerkten ungünstigen Frequenz- und Amplitudenverhältnissen der durch sie hervorgerufenen Mehrwegesignale widerspiegelt, welche deren erfolgreiche Extraktion und damit eine korrekte Berechnung des Trägerphasenmessfehlers verhindert.

**Ausblick.** In dieser Arbeit kommt eine für die Aufgabenstellung adaptierte EMD zur Anwendung. In der Literatur werden ferner sowohl Weiterentwicklungen der EMD diskutiert, die auf einer durch additives Rauschen gestützten Analyse beruhen, als auch die Entwicklung von Verfahren favorisiert, die die EMD-Grundidee einer datengetriebenen Signalanalyse weiterentwickeln. Inwiefern diese Verfahren einen Mehrwert bei der Bestimmung des Trägerphasenmessfehlers generieren können, ist eine offene Fragestellung.

Um das Potenzial der Hilbert-Huang-Transformation bei der Bestimmung des durch Mehrwegeausbreitung verursachten Trägerphasenmessfehlers für verkehrswissenschaftliche Anwendungen bewerten zu können, bei denen die Positionsbestimmung kinematischer Nutzer im Vordergrund steht, ist es angebracht, Messdaten auszuwerten, die unter derartigen Bedingungen aufgenommen werden.

Ein weiteres Einsatzgebiet der GNSS besteht in ihrer Anwendung im Bereich der Reflektometrie. Eine Aufgabenstellung stellt die Überwachung der Wasserstandhöhe in Küstennähe und Flussgebieten mit dem Ziel der Entwicklung eines Frühwarnsystems vor Überflutungen dar. Für eine korrekte Ableitung der Höhe sind die durch die Reflexionen an der Wasseroberfläche hervorgerufenen Signalanteile auszuwerten. Demzufolge ist es von großer Bedeutung, diese Signalanteile zum einen möglichst genau zu extrahieren und sie zum zweiten von Signalanteilen zu trennen, die durch Reflexionen an anderen Objekten verursacht werden. In [Bec+14] wird gezeigt, dass durch den Einsatz der EMD für diese Zielsetzung eine deutliche Steigerung in der Genauigkeit der abgeleiteten Wasserstandhöhen erzielt wird. Eine offene Fragestellung ist auch hier, inwiefern eine NADA-Erweiterung der EMD diese erzielten Ergebnisse zusätzlich verbessern kann.

# Literatur

- [ACM94] P. Axelrad, C. Comp und P. MacDoran. „Use of Signal-to-Noise Ratio for Multipath Error Correction in GPS Differential Phase Measurements: Methodology and Experimental Results“. In: *Proceedings of the 7th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 1994)*. Salt Lake City, UT, USA, 1994-09, S. 655–666.
- [ACM96] P. Axelrad, C. Comp und P. MacDoran. „SNR-based multipath error correction for GPS differential phase“. In: *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on* 32.2 (1996-04), S. 650–660.
- [AL07] D. Agnew und K. M. Larson. „Finding the repeat times of the GPS constellation“. In: *GPS Solutions* 11.1 (2007), S. 71–76.
- [Alb+95] G. Albert, H. Bottenberg, H. Brunswig, H. Heß, R. W. Lorenz, A. Vlcek und O. Zinke. „Elektromagnetische Strahlung und Antennen“. In: *Hochfrequenztechnik 1: Hochfrequenzfilter, Leitungen, Antennen*. Hrsg. von A. Vlcek und H. L. Hartnagel. 5. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995. Kap. 6, S. 384–473.
- [Ami+05] G. E. Amirthanathan, G. G. S. Pegram, T. A. McMahon und F. H. S. Chiew. „Issues with the application of Empirical Mode Decomposition Analysis“. In: *MODSIM 2005 International Congress on Modelling and Simulation, Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand*. 2005.
- [Ash03] N. Ashby. „Relativity in the Global Positioning System“. In: *Living Reviews in Relativity* 6.1 (2003), S. 5–42.
- [Ash96] N. Ashby. „Introduction to Relativistic Effects on the Global Positioning System“. In: *Global Positioning System: Theory and Applications*. Hrsg. von B. Parkinson, J. Spilker, P. Axelrad und P. Enge. Bd. 1. American Institute of Aeronautics und Astronautics, 1996. Kap. 18, S. 623–697.
- [Bad09] B. Badke. „What is C/N<sub>0</sub> and how is it calculated in a GNSS receiver?“ In: *Inside GNSS* (2009-09), S. 20–23.

- [BAL07] A. Bilich, P. Axelrad und K. M. Larson. „Scientific Utility of the Signal-to-Noise Ratio (SNR) Reported by Geodetic GPS Receivers“. In: *Proceedings of the 20th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2007)*. Fort Worth, TX, USA, 2007-09, S. 1999–2010.
- [Ban+08] S. Banville, R. Santerre, M. Cocard und R. B. Langley. „Satellite and Receiver Phase Bias Calibration for Undifferenced Ambiguity Resolution“. In: *Proceedings of the 2008 National Technical Meeting of The Institute of Navigation (ION ITM 2008)*. San Diego, CA, USA, 2008-01, S. 711–719.
- [BD97] G. Brodin und P. Daly. „GNSS Code and Carrier Tracking in the Presence of Multipath“. In: *International Journal of Satellite Communications* 15.1 (1997), S. 25–34.
- [Bec+14] J. Beckheinrich, A. Hirrle, S. Schön, G. Beyerle, M. Semmling und J. Wickert. „Water level monitoring of the Mekong Delta using GNSS reflectometry technique“. In: *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS 2014)*. 2014-07, S. 3798–3801.
- [Bed63] E. Bedrosian. „A product theorem for Hilbert transforms“. In: *Proceedings of the IEEE* 51.5 (1963-05), S. 868–869.
- [Bet+13] D. Betaille, F. Peyret, M. Ortiz, S. Miquel und L. Fontenay. „A New Modeling Based on Urban Trenches to Improve GNSS Positioning Quality of Service in Cities“. In: *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine* 5.3 (2013-Herbst), S. 59–70.
- [BHS07] J. Boehm, R. Heinkelmann und H. Schuh. „Short Note: A global model of pressure and temperature for geodetic applications“. In: *Journal of Geodesy* 81.10 (2007), S. 679–683.
- [BHT99] F. K. Brunner, H. Hartinger und L. Troyer. „GPS signal diffraction modelling: the stochastic SIGMA-delta model“. In: *Journal of Geodesy* 73.5 (1999), S. 259–267.
- [Bil06] A. Bilich. „Improving the Precision and Accuracy of Geodetic GPS: Applications to Multipath and Seismology“. Diss. Boulder, Colorado, USA: University of Colorado, Department of Aerospace Engineering Sciences, 2006.
- [BK04] F. Butsch und A. Kipka. „Die Bedeutung des Signal- zu Rauschleistungsverhältnisses und verwandte Parameter für die Messgenauigkeit bei GPS“. In: *Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN)* (2004-02), S. 46–55.
- [BL07] A. Bilich und K. M. Larson. „Mapping the GPS multipath environment using the signal-to-noise ratio (SNR)“. In: *Radio Science* 42.6 (2007).

- [BLA03] A. Bilich, K. M. Larson und P. Axelrad. „Observations of Signal-to-Noise ratios (SNR) at Geodetic GPS Site CASA: Implications for Phase Multipath“. In: *Proceedings of the Workshop: The State of GPS Vertical Positioning Precision: Separation of Earth Processes by Space Geodesy*. Hrsg. von E. C. for Geodynamics und Seismology. Bd. 23. Luxemburg (Stadt), Luxemburg, 2003, S. 77–83.
- [BLA08] A. Bilich, K. M. Larson und P. Axelrad. „Modeling GPS phase multipath with SNR: Case study from the Salar de Uyuni, Bolivia“. In: *Journal of Geophysical Research* 113 (2008).
- [Boa92a] B. Boashash. „Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. I. Fundamentals“. In: *Proceedings of the IEEE* 80.4 (1992-04), S. 520–538.
- [Boa92b] B. Boashash. „Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. II. Algorithms and applications“. In: *Proceedings of the IEEE* 80.4 (1992-04), S. 540–568.
- [Boe+06] J. Boehm, A. Niell, P. Tregoning und H. Schuh. „Global Mapping Function (GMF): A new empirical mapping function based on numerical weather model data“. In: *Geophysical Research Letters* 33.7 (2006), S. 1–4.
- [Bor07] K. Borre. *A software defined GPS and Galileo receiver : a single frequency approach*. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2007.
- [Bra+07] J. Bradbury, M. Ziebart, P. Cross, P. Boulton und A. Read. „Code Multipath Modelling in the Urban Environment Using Large Virtual Reality City Models: Determining the Local Environment“. In: *The Journal of Navigation* 60 (01 2007-1), S. 95–105.
- [Bro+05] I. N. Bronstejn, K. A. Semendjajev, G. Musiol und H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Aufl. Harri Deutsch, 2005.
- [Bro91] J. C. Brown. „Calculation of a constant Q spectral transform“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 89.1 (1991), S. 425–434.
- [BS87] P. Beckmann und A. Spizzichino. *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. Norwood, Mass.: Artech House, 1987.
- [BSW14] S. Beer, H. Sumaya und L. Wanninger. *Die broadcast-Ephemeriden der vier GNSS im Qualitätsvergleich*. Geodätische Woche 2014. 2014.
- [BZZ10] H. Bian, S. Zhang und Q.-Z. Zhang. „Empirical mode decomposition combined single epoch algorithm for GPS baseline solution“. In: *3rd International Congress on Image and Signal Processing (CISP 2010)*. Bd. 9. 2010-10, S. 4056–4058.

- [CA98] C. Comp und P. Axelrad. „Adaptive SNR-Based Carrier Phase Multipath Mitigation Technique“. In: *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on* 34.1 (1998-01), S. 264–276.
- [Che+06] Q. Chen, N. Huang, S. Riemenschneider und Y. Xu. „A B-spline approach for empirical mode decompositions“. In: *Advances in Computational Mathematics* 24.1-4 (2006), S. 171–195.
- [Che+14] Y. H. Chen, S. Lo, P. Enge und D. Akos. „Direct comparison of the multipath performance of L1 BOC and L1 C/A using on-air Galileo and Quasi-Zenith Satellite System (QZSS) transmissions“. In: *Position, Location and Navigation Symposium - PLANS 2014, 2014 IEEE/ION*. 2014-05, S. 823–832.
- [CL99] J. P. Collins und R. B. Langley. *Possible Weighting Schemes for GPS Carrier Phase Observations in the Presence of Multipath*. Techn. Ber. DAAH04-96-C-0086 TCN 98151. The United States Army Corps of Engineers Topographic Engineering Center, 1999-3.
- [Col+12] M. A. Colominas, G. Schlotthauer, M. E. Torres und P. Flandrin. „Noise-Assisted EMD Methods in Action“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 04.04 (2012).
- [CT04] K. Coughlin und K. Tung. „11-Year solar cycle in the stratosphere extracted by the empirical mode decomposition method“. In: *Advances in Space Research* 34.2 (2004). *Solar Variability and Climate Change*, S. 323–329.
- [DAB09] E.-H. Diop, R. Alexandre und A.-O. Boudraa. „A PDE characterization of the intrinsic mode functions“. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2009)*. 2009-04, S. 3429–3432.
- [DAB10] E. H. S. Diop, R. Alexandre und A.-O. Boudraa. „Analysis of Intrinsic Mode Functions: A PDE Approach“. In: *IEEE Signal Processing Letters* 17.4 (2010-04), S. 398–401.
- [Dac+15] R. Dach, S. Lutz, P. Walser und P. Fridez. *Bernese GNSS Software Version 5.2*. Astronomical Institute, University of Bern. 2015.
- [De 90] C. De Boor. *Splinefunktionen*. Birkhäuser, 1990.
- [DK05] R. Deering und J. Kaiser. „The use of a masking signal to improve empirical mode decomposition“. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP 05)*. Bd. 4. 2005-03, S. 485–488.
- [DLN05] E. Deléchelle, J. Lemoine und O. Niang. „Empirical mode decomposition: an analytical approach for sifting process“. In: *IEEE Signal Processing Letters* (2005), S. 764–767.



- 
- [DR08] W. Dahmen und A. Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 2. Aufl. Springer, 2008.
- [DS04] M. Dätig und T. Schlurmann. „Performance and limitations of the Hilbert–Huang transformation (HHT) with an application to irregular water waves“. In: *Ocean Engineering* 31.14–15 (2004), S. 1783–1834.
- [dSou+08] E. de Souza, J. Monico, W. Polezel und A. Pagamisse. „Spectral analysis and Low-Frequency Multipath Mitigation for Kinematic Applications“. In: *Position, Location and Navigation Symposium, 2008 IEEE/ION*. 2008-05, S. 413–417.
- [EEE08] M. Elhabiby, A. El-Ghazouly und N. El-Sheimy. „A New Wavelet-Based Multipath Mitigation Technique“. In: *Proceedings of the 21st International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2008)*. Savannah, GA, USA, 2008-09, S. 625–631.
- [EEE09] M. Elhabiby, A. El-Ghazouly und N. El-Sheimy. „Evaluation of Wavelet Multipath Mitigation Technique in the Final Measurement Domain“. In: *Proceedings of the 2009 International Technical Meeting of The Institute of Navigation*. Anaheim, CA, USA, 2009-01, S. 682–686.
- [Eis97] B. Eissfeller. *Ein dynamisches Fehlermodell für GPS Autokorrelationsempfänger*. Schriftenreihe (Universität der Bundeswehr München. Studiengang Vermessungswesen). Universität der Bundeswehr München, 1997.
- [ElG09] A. El-Ghazouly. „The Aid of Wavelets Correlator in Carrier Phase Multipath Reduction and Motion Detection“. In: *Proceedings of the 22nd International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2009)*. Savannah, GA, USA, 2009-09, S. 2344–2351.
- [EPo15] EPoSS. *European Roadmap Smart Systems for Automated Driving*. European Technology Platform on Smart Systems Integration. 2015-4.
- [FDR14] FDR. *Federal Radio Navigation Plan*. Department of Defense, Department of Homeland Security und Department of Transportation. 2014.
- [Fel08] M. Feldman. „Theoretical analysis and comparison of the Hilbert transform decomposition methods“. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 22.3 (2008), S. 509–519.
- [FG04] P. Flandrin und P. Gonçalves. „Empirical Mode Decomposition as Data-driven Wavelet-like Expansion“. In: *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing* 02.04 (2004), S. 477–496.

- [FGR04] P. Flandrin, P. Gonçalves und G. Rilling. „Detrending and denoising with Empirical Mode Decompositions“. In: *Proceedings of the European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2004)*. Wien, Österreich, 2004-09, S. 1581–1584.
- [FGR11] P. Flandrin, P. Gonçalves und G. Rilling. „EMD Equivalent Filter Banks - from Interpretation to Applications“. In: *Hilbert-Huang Transform and Its Applications*. 2011. Kap. 3, S. 57–74.
- [FO07] M. G. Frei und I. Osorio. „Intrinsic time-scale decomposition: time–frequency–energy analysis and real-time filtering of non-stationary signals“. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 463.2078 (2007), S. 321–342.
- [FON08] S. Feng, W. Ochieng und R. North. „Quantitative Measures for GPS Based Road User Charging“. In: *Proceedings of the 11th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*. Beijing, China, 2008-10, S. 495–500.
- [FRG04] P. Flandrin, G. Rilling und P. Goncalves. „Empirical mode decomposition as a filter bank“. In: *IEEE Signal Processing Letters* 11.2 (2004-02), S. 112–114.
- [FS01] J. C. Farret und M. C. Santos. „An alternative method for detection and mitigation of static multipath in L1 carrier phase measurements“. In: *Proceedings of the 2001 National Technical Meeting of The Institute of Navigation (ION NTM 2001)*. Long Beach, CA, USA, 2001-01, S. 261–270.
- [Gab46] D. Gabor. „Theory of Communication“. In: *Journal of the Institution of Electrical Engineers* 93 (1946), S. 429–457.
- [Gao+08] Y. Gao, G. Ge, Z. Sheng und E. Sang. „Analysis and Solution to the Mode Mixing Phenomenon in EMD“. In: *Proceedings of the Congress on Image and Signal Processing (CISP 2008)*. Bd. 5. 2008-05, S. 223–227.
- [GH12] J. Gao und D. Hatzinakos. „Effect of initial phase in two tone separation using empirical mode decomposition“. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2012)*. 2012-03, S. 3865–3868.
- [GJ13] P. D. Groves und Z. Jiang. „Height Aiding, C/N0 Weighting and Consistency Checking for GNSS NLOS and Multipath Mitigation in Urban Areas“. In: *Journal of Navigation* 66 (2013), S. 653–669.
- [Gon+07] P. Goncalves, P. Abry, G. Rilling und P. Flandrin. „Fractal Dimension Estimation: Empirical Mode Decomposition Versus Wavelets“. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2007)*. Bd. 3. 2007-04, S. 1153–1156.

- [GPS06] GPS. *Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interfaces, Interface Specification IS-GPS-200, Revision D*. ARINC Engineering Services. 2006.
- [Gro+13] P. D. Groves, Z. Jiang, M. Rudi und P. Strode. „A Portfolio Approach to NLOS and Multipath Mitigation in dense Urban Areas“. In: *Proceedings of the 26th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2013)*. Nashville, TN, USA, 2013-09, S. 3231–3247.
- [Gro13a] P. D. Groves. „How does Non-Line-of-Sight Reception Differ from Multipath Interference?“ In: *Inside GNSS (2013-11)*, S. 40–44.
- [Gro13b] P. D. Groves. *Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems*. 2. Aufl. Boston, Mass. u.a.: Artech House, 2013.
- [GW98] N. Geng und W. Wiesbeck. *Planungsmethoden für die Mobilkommunikation: Funknetzplanung unter realen physikalischen Ausbreitungsbedingungen*. Berlin, Heidelberg u.a.: Springer, 1998.
- [HAC10] S. Hawley, L. Atlas und H. Chizeck. „Some Properties of an Empirical Mode Type Signal Decomposition Algorithm“. In: *IEEE Signal Processing Letters* 17.1 (2010-01), S. 24–27.
- [HB15] T. Hadas und J. Bosy. „IGS RTS precise orbits and clocks verification and quality degradation over time“. In: *GPS Solutions* 19.1 (2015), S. 93–105.
- [HB99] H. Hartinger und F. K. Brunner. „Variances of GPS Phase Observations: The SIGMA-epsilon Model“. In: *GPS Solutions* 2 (4 1999), S. 35–43.
- [Heu06] H. Heuser. *Funktionalanalysis / Theorie und Anwendung*. 4. Aufl. Teubner, 2006.
- [HJM12] A. Hirrle, H.-J. Jentschel und O. Michler. „Estimation of Multipath Parameters using Hilbert Huang Transform“. In: *Proceedings of the 25th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2012)*. Nashville, TN, USA, 2012-09, S. 67–78.
- [HK13] B. Huang und A. Kunothe. „An optimization based empirical mode decomposition scheme“. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 240 (2013), S. 174–183.
- [HLW08] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger und E. Wasle. *GNSS - Global Navigation Satellite Systems : GPS, GLONASS, Galileo and more*. Springer, 2008.
- [HMB98] P. Y. Hwang, G. A. McGraw und J. R. Bader. „Enhanced Differential GPS Carrier-Smoothed Code Processing Using Dual Frequency Measurements“. In: *Proceedings of the 11th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 1998)*. Nashville, Tennessee, USA, 1998-09, S. 461–470.

- 
- [Hof98] R. Hoffmann. *Signalanalyse und -erkennung / Eine Einführung für Informationstechniker*. Springer, 1998.
- [HSL99] N. E. Huang, Z. Shen und S. R. Long. „A New View of Nonlinear Water Waves: The Hilbert Spectrum“. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 31.1 (1999), S. 417–457.
- [Hua+03] N. E. Huang, M.-L. C. Wu, S. R. Long, S. S. Shen, W. Qu, P. Gloersen und K. L. Fan. „A confidence limit for the empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis“. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 459.2037 (2003), S. 2317–2345.
- [Hua+09] N. E. Huang, Z. Wu, L. S. R., K. C. Arnold, X. Chen und K. Blank. „On Instantaneous Frequencies“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 01.02 (2009), S. 177–229.
- [Hua+98] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. C. Tung und H. H. Liu. „The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis“. In: *Proceedings of the Royal Society London A* 454 (1971 1998), S. 903–995.
- [HW04] N. E. Huang und Z. Wu. „A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition“. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 460 (2046 2004), S. 1597–1611.
- [HW08a] C.-H. Hsieh und J. Wu. „Multipath Reduction on Repetition in Time Series from the Permanent GPS Phase Residuals“. In: *Proceedings of the 21st Congress of the International Society for Photogrammetry and Remote Sensing (ISPRS)*. Peking, China, 2008-07, S. 911–916.
- [HW08b] N. E. Huang und Z. Wu. „A review on Hilbert-Huang Transform: Method and its Applications to Geophysical Studies“. In: *Reviews of Geophysics* 46.2 (2008).
- [IEE93] IEEE. *IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas, IEEE Std 145-1993*. 1993-03.
- [IGS] IGS. *IGS Products*. International GNSS Service. URL: <https://igs.cb.jpl.nasa.gov/components/prods.html> (besucht am 01.06.2015).
- [IMO02] IMO. *Resolution A.915(22), Revised Maritime Policy and Requirements for a Future Global Navigation Satellite System (GNSS)*. International Maritime Organization. 2002-1.
- [Irs08] M. Irsigler. „Multipath Propagation, Mitigation and Monitoring in the Light of Galileo and the Modernized GPS“. Diss. Universität der Bundeswehr München, 2008.

- [Kar14] K. W. Kark. *Antennen und Strahlungsfelder - Elektromagnetische Wellen auf Leitungen, im Freiraum und ihre Abstrahlung*. 5. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014.
- [Kei02] J. P. Keith. „Multipath Errors Induced by Electronic Components in Receiver Hardware“. Magisterarb. Ohio University, 2002-11.
- [Kim+03] D. Kim, R. B. Langley, J.-H. Kim und S.-N. Kim. „A Gantry Crane auto-Steering System Based on GPS RTK Technology“. In: *GNSS 2003*. Graz, Österreich, 2003-04.
- [KLK02] D. Kim, R. B. Langley und S. Kim. „High Precision Crane Guidance: Shipyard Giants“. In: *GPS World* 13.9 (2002), S. 28–34.
- [Klo96] J. A. Klobuchar. „Ionospheric Effects on GPS“. In: *Global Positioning System: Theory and Applications*. Hrsg. von B. Parkinson, J. Spilker, P. Axelrad und P. Enge. Bd. 1. American Institute of Aeronautics und Astronautics, 1996. Kap. 12, S. 485–515.
- [KM08] Y. Kopsinis und S. McLaughlin. „Improved EMD Using Doubly-iterative Sifting and High Order Spline Interpolation“. In: *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* (2008-01), S. 1–8.
- [Kou02] D. Koutsoyiannis. „The Hurst Phenomenon and Fractional Gaussian Noise Made Easy“. In: *Hydrological Sciences Journal* (2002), S. 573–595.
- [Lan92a] F. Landsdorfer. „Antennen“. In: *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik: Grundlagen, Komponenten, Systeme*. Hrsg. von K. Lange und K.-H. Löcherer. 5. Aufl. Berlin, Heidelberg u.a.: Springer, 1992. Kap. N, N1–N11.
- [Lan92b] K. Lange. „Elektromagnetische Felder und Wellen“. In: *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik: Grundlagen, Komponenten, Systeme*. Hrsg. von K. Lange und K.-H. Löcherer. 5. Aufl. Berlin, Heidelberg u.a.: Springer, 1992. Kap. B, B1–B21.
- [Lar96] K. M. Larson. „Geodesy“. In: *Global Positioning System: Theory and Applications*. Hrsg. von B. Parkinson, J. Spilker, P. Axelrad und P. Enge. Bd. 2. American Institute of Aeronautics und Astronautics, 1996. Kap. 20, S. 539–557.
- [Lom76] N. Lomb. „Least-squares frequency analysis of unequally spaced data“. In: *Astrophysics and Space Science* 39.2 (1976), S. 447–462.
- [LRT15] A. Leick, L. Rapoport und D. Tatarnikov. *GPS satellite surveying*. 4. Aufl. Hoboken, NJ: Wiley, 2015.
- [LVe] LVermGeo. Landesamt für Vermessung und Geoinformation Sachsen-Anhalt. URL: <https://www.lvermgeo.sachsen-anhalt.de/> (besucht am 01.06.2015).
- [Mar99] S. Marple. „Computing the discrete-time analytic signal via FFT“. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 47.9 (1999-09), S. 2600–2603.

- 
- [Mas10] P. R. Massopust. *Interpolation and approximation with splines and fractals*. Oxford University Press, 2010.
- [ME06] P. Misra und P. Enge. *Global Positioning System - Signals, Measurements, and Performance*. 2. Aufl. Ganga-Jamuna Press, 2006.
- [Mer10] A. Mertins. *Signaltheorie*. Vieweg+Teubner, 2010.
- [Min+14] D. Minkwitz, T. Gerzen, V. Wilken und N. Jakowski. „Application of SWACI products as ionospheric correction for single-point positioning: a comparative study“. In: *Journal of Geodesy* 88.5 (2014), S. 463–478.
- [MP07] S. Meignen und V. Perrier. „A New Formulation for Empirical Mode Decomposition Based on Constrained Optimization“. In: *Signal Processing Letters, IEEE* 14.12 (2007-12), S. 932–935.
- [NEJ11] T. Ning, G. Elgered und J. Johansson. „The impact of microwave absorber and radome geometries on GNSS measurements of station coordinates and atmospheric water vapour“. In: *Advances in Space Research* 47.2 (2011), S. 186–196.
- [Nia+09] R. K. Niazy, C. F. Beckmann, J. M. Brady und S. M. Smith. „Performance Evaluation of Ensemble Empirical Mode Decomposition“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 01.02 (2009), S. 231–242.
- [Nie96] A. E. Niell. „Global mapping functions for the atmosphere delay at radio wavelengths“. In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 101.B2 (1996), S. 3227–3246.
- [NP86] A. Nehorai und B. Porat. „Adaptive comb filtering for harmonic signal enhancement“. In: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* 34.5 (1986-10), S. 1124–1138.
- [Nut66] A. Nuttall. „On the quadrature approximation to the Hilbert transform of modulated signals“. In: *Proceedings of the IEEE* 54.10 (1966-10), S. 1458–1459.
- [OSB04] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer und J. R. Buck. *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. 2. Aufl. Pearson Studium, 2004.
- [Pab+10] R. Pabel, R. Koch, G. Jäger und A. Kunoth. „Fast Empirical Mode Decompositions of Multivariate Data Based in Adaptive Spline-Wavelets and a Generalization of the Hilbert-Huang-Transformation (HHT) to Arbitrary Space Dimensions“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 02.03 (2010), S. 337–358.
- [Pan10] T. Pany. *Navigation Signal Processing for GNSS Software Receivers*. Norwood, Mass.: Artech House, 2010.

- [Pap91] A. Papoulis. *Probability, random variables, and stochastic processes*. 3. Aufl. McGraw-Hill, 1991.
- [PBF14] N. Pustelnik, P. Borgnat und P. Flandrin. „Empirical mode decomposition revisited by multicomponent non-smooth convex optimization“. In: *Signal Processing* 102 (2014), S. 313–331.
- [Pey+13] S. Peyraud, D. Betaille, S. Renault, M. Ortiz, F. Mougel, D. Meizel und F. Peyret. „About Non-Line-Of-Sight Satellite Detection and Exclusion in a 3D Map-Aided Localization Algorithm“. In: *Sensors* 13.1 (2013), S. 829.
- [Pic97] B. Picinbono. „On instantaneous amplitude and phase of signals“. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 45.3 (1997-03), S. 552–560.
- [PK96] B. W. Parkinson und E. P. K. „Differential GPS“. In: *Global Positioning System: Theory and Applications*. Hrsg. von B. Parkinson, J. Spliker, P. Axelrad und P. Enge. Bd. 2. American Institute of Aeronautics und Astronautics, 1996. Kap. 1, S. 3–50.
- [PKO11] M. Park, D. Kim und H.-S. Oh. „A Reinterpretation of EMD by cubic spline interpolation.“ In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 3.4 (2011), S. 527–540.
- [PL10] G. Petit und B. Luzum. *IERS Conventions (2010)*. IERS Conventions Centre. 2010.
- [PMP09] M. C. Peel, T. A. McMahon und G. G. S. Pegram. „Assessing the performance of rational spline-based empirical mode decomposition using a global annual precipitation dataset“. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science* 465 (2106 2009), S. 1919–1937.
- [PPM07] M. C. Peel, G. G. S. Pegram und T. A. McMahon. „Empirical Mode Decomposition: Improvement and Application“. In: *MODSIM 2007 International Congress on Modelling and Simulation*. Modelling, Simulation Society of Australia und New Zealand. Christchurch, Neuseeland, 2007-12, S. 2996–3002.
- [PPM08] G. G. S. Pegram, M. C. Peel und T. A. McMahon. „Empirical mode decomposition using rational splines: an application to rainfall time series“. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science* 464 (2094 2008), S. 1483–1501.
- [Prö04] G. W. Pröls. *Physik des erdnahen Weltraums / Eine Einführung*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg u.a.: Springer, 2004.
- [RA99] A. Reichert und P. Axelrad. „GPS Carrier Phase Multipath Reduction Using SNR Measurements to Characterize an Effective Reflector“. In: *Proceedings of the 12th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 1999)*. Nashville, TN, USA, 1999-09, S. 1951–1960.

- [Ray99] J. K. Ray. „Use of Multiple Antennas to Mitigate Carrier Phase Multipath in Reference Stations“. In: *Proceedings of the 2nd International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 99)*. Nashville, TN, USA, 1999-09, S. 269–279.
- [RCF98] J. K. Ray, M. E. Cannon und P. Fenton. „Mitigation of Static Carrier Phase Multipath Effects Using Multiple closely-Spaced Antennas“. In: *Proceedings of the 1st International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 98)*. Nashville, TN, USA, 1998-09, S. 1025–1034.
- [RF06] G. Rilling und P. Flandrin. „On the Influence of Sampling on the Empirical Mode Decomposition“. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2006)*. Bd. 3. 2006-05, S. 444–447.
- [RF08] G. Rilling und P. Flandrin. „One or Two Frequencies? The Empirical Mode Decomposition Answers“. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 56.1 (2008-01), S. 85–95.
- [RF09] G. Rilling und P. Flandrin. „Sampling Effects on the Empirical Mode Decomposition“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 01.01 (2009), S. 43–59.
- [RFB94] A. Reilly, G. Frazer und B. Boashash. „Analytic signal generation-tips and traps“. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 42.11 (1994-11), S. 3241–3245.
- [RFG03] G. Rilling, P. Flandrin und P. Gonçalves. „On Empirical Mode Decomposition and its Algorithms“. In: *Proceedings of the IEEE EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP 2003)*. 2003.
- [ROB08] R. T. Rato, M. D. Ortigueira und A. G. Batista. „On the HHT, its problems, and some solutions“. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 22.6 (2008), S. 1374–1394.
- [Roc+95] C. Rocken, B. Meertens, B. Stephens, J. Braun, T. VanHove, S. Perry, O. Ruud, M. McCallum und J. Richardson. *UNAVCO Academic Research Infrastructure (ARI) Receiver and Antenna Test Report*. Techn. Ber. UNAVCO, 1995.
- [Ros11] C. Rost. „Phasenmehrwegereduzierung basierend auf Signalqualitätsmessungen geodätischer GNSS-Empfänger“. Diss. Technische Universität Dresden, 2011.
- [Sch+09] G. Schlotthauer, M. E. Torres, H. L. Rufiner und P. Flandrin. „EMD of Gaussian White Noise: Effects of Signal Length and Sifting Number on the Statistical Properties of Intrinsic Mode Functions“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* (2009), S. 517–527.



- [SD09] T. Springer und F. Dilssner. „SVN49 and other GPS Anomalies“. In: *Inside GNSS* (2009-07), S. 32–36.
- [See03] G. Seeber. *Satellite geodesy*. 2. Aufl. Berlin, New York: de Gruyter, 2003.
- [SM04] E. Souza und J. Monico. „Wavelet Shrinkage: High frequency multipath reduction from GPS relative positioning“. In: *GPS Solutions* 8.3 (2004), S. 152–159.
- [SMB05] N. Stevenson, M. Mesbah und B. Boashash. „A sampling limit for the empirical mode decomposition“. In: *Proceedings of the 8th International Symposium on Signal Processing and Its Applications*. Bd. 2. 2005-08, S. 647–650.
- [Spä90] H. Späth. *Eindimensionale Spline-Interpolations-Algorithmen*. Oldenbourg, 1990.
- [SR03] R. Schmid und M. Rothacher. „Estimation of elevation-dependent satellite antenna phase center variations of GPS satellites“. In: *Journal of Geodesy* 77.7-8 (2003), S. 440–446.
- [SR05] C. Satirapod und C. Rizos. „Multipath mitigation by wavelet analysis for GPS base station applications“. In: *Survey Review* 38.295 (2005), S. 2–10.
- [SSN13] M. Smyrnaio, S. Schön und M. L. Nicolás. „Multipath Propagation, Characterization and Modeling in GNSS“. In: *Geodetic Sciences - Observations, Modeling and Applications*. Hrsg. von S. Jin. Intech, 2013. Kap. 2, S. 99–125.
- [SWA] SWACI. *Space Weather Application Center - Ionosphere*. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt. URL: <http://swaciweb.dlr.de> (besucht am 01.06.2015).
- [TCH10] P.-H. Tsui, C.-C. Chang und N. E. Huang. „Noise-Modulated Empirical Mode Decomposition“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 02.01 (2010), S. 25–37.
- [TM13] S. Tay und J. Marias. „Weighting models for GPS Pseudorange observations for land transportation in urban canyons“. In: *Proceedings of the 6th European Workshop on GNSS Signals and Signal Processing*. München, Deutschland, 2013-12.
- [Tor+11] M. Torres, M. Colominas, G. Schlotthauer und P. Flandrin. „A complete ensemble empirical mode decomposition with adaptive noise“. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2011)*. 2011-05, S. 4144–4147.
- [Tow+95a] B. R. Townsend, P. C. Fenton, K. J. van Dierendonck und D. R. van Nee. „Performance Evaluation of the Multipath Estimating Delay Lock Loop“. In: *Navigation* 42.3 (1995), S. 502–514.

- [Tow+95b] B. R. Townsend, D. R. van Nee, P. C. Fenton und K. J. van Dierendonck. „L1 carrier Phase Multipath Error Reduction Using MEDLL Technology“. In: *Proceedings of the 8th International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 1995)*. Palm Springs, CA, USA, 1995, S. 1539–1544.
- [Tsu+09] P.-H. Tsui, C.-C. Chang, C.-C. Chang, N. E. Huang und M.-C. Ho. „An adaptive threshold filter for ultrasound signal rejection“. In: *Ultrasonics* 49.4–5 (2009), S. 413–418.
- [Tuk94] J. W. Tukey. *Exploratory data analysis*. 18. Aufl. Addison-Wesley, 1994.
- [Van69] P. Vaníček. „Approximate spectral analysis by least-squares fit“. In: *Astrophysics and Space Science* 4.4 (1969), S. 387–391.
- [vDFF92] van Dierendonck A. J., P. Fenton und T. Ford. „Theory and Performance of Narrow Correlator Spacing in a GPS Receiver“. In: *Navigation* 39.3 (1992), S. 265–283.
- [vDie14] A. J. van Dierendonck. „New GNSS Signals: Will modern also be better?“ In: *Inside GNSS* (2014-3-4), S. 42–43.
- [Wan+10] G. Wang, X.-Y. Chen, Z. Qiao Fang-Li ans Wu und H. N. E. „On Intrinsic Mode Function“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 02.03 (2010), S. 277–293.
- [Wan00] L. Wanninger. *Präzise Positionierung in regionalen GPS-Referenzstationsnetzen*. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission bei der C.H. Beck, 2000.
- [WB00] A. Wieser und F. Brunner. „An extended weight model for GPS phase observations“. In: *Earth, Planets and Space* 52.10 (2000), S. 777–782.
- [WB02] A. Wieser und F. Brunner. „SIGMA-F: Variances of GPS Observations Determined by a Fuzzy System“. In: *Vistas for Geodesy in the New Millennium*. Hrsg. von J. Ádám und K.-P. Schwarz. Bd. 125. International Association of Geodesy Symposia. Springer, 2002, S. 365–370.
- [WBH06] P. W. Ward, J. W. Betz und C. J. Hegarty. „Interference, Multipath, and Scintillation“. In: *Understanding GPS : Principles and Applications*. Hrsg. von E. D. Kaplan und C. J. Hegarty. 2. Aufl. Artech House, 2006. Kap. 6, S. 243–299.
- [WFW00] L. Wanninger, V. Frevert und S. Wildt. „Der Einfluss der Signalbeugung auf die präzise Positionierung mit GPS“. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen* 125.1 (2000-01), S. 8–16.

- [WH09] Z. Wu und N. E. Huang. „Ensemble Empirical Mode Decomposition: A Noise-Assisted Data Analysis Method“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 01.01 (2009), S. 1–41.
- [WH10] Z. Wu und N. E. Huang. „On the Filtering Properties of the Empirical Mode Decomposition“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 02.04 (2010), S. 397–414.
- [WL12] J.-L. Wang und Z.-J. Li. „What about the Asymptotic Behaviour of the Intrinsic Mode Functions as the Sifting Times Tend to Infinity?“ In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 04.01n02 (2012).
- [WM00] L. Wanninger und M. May. „Carrier Phase Multipath Calibration of GPS Reference Stations“. In: *Proceedings of the International Technical Meeting of The Institute of Navigation (ION GPS 2000)*. Salt Lake City, UT, USA, 2000-09.
- [WQ08] F. Wu und L. Qu. „An improved method for restraining the end effect in empirical mode decomposition and its applications to the fault diagnosis of large rotating machinery“. In: *Journal of Sound and Vibration* 314.3–5 (2008), S. 586–602.
- [WRC09] U. Weinbach, N. Raziq und P. Collier. „Mitigation of periodic GPS multipath errors using a normalised least mean square adaptive filter“. In: *Journal of Spatial Science* 54.1 (2009), S. 1–13.
- [WWR09] J. Wang, J. Wang und C. Roberts. „Reducing GPS Carrier Phase Errors with EMD-Wavelet for Precise Static Positioning“. In: *Survey Review* 41.312 (2009-04), S. 152–161.
- [XHX08] Z. Xu, B. Huang und S. Xu. „Exact location of extrema for empirical mode decomposition“. In: *Electronics Letters* 44 (8 2008-04), S. 551–552.
- [XHZ09] Z. Xu, B. Huang und F. Zhang. „Improvement of empirical mode decomposition under low sampling rate“. In: *Signal Processing* 89.11 (2009), S. 2296–2303.
- [Xu03] G. Xu. *GPS: Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 2003.
- [XZ09] Y. Xu und H. Zhang. „Recent Mathematical Developments on Empirical Mode Decomposition“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 01.04 (2009), S. 681–702.
- [YSH10] J.-R. Yeh, J.-S. Shieh und N. E. Huang. „Complementary Ensemble Empirical Mode Decomposition: A Novel Noise Enhanced Data Analysis Method“. In: *Advances in Adaptive Data Analysis* 02.02 (2010), S. 135–156.
- [Zho+08] P. Zhong, X. Ding, D. Zheng, W. Chen und D. Huang. „Adaptive wavelet transform based on cross-validation method and its application to GPS multipath mitigation“. In: *GPS Solutions* 12.2 (2008), S. 109–117.

# Anhang

# Anhang A

## Satellitennavigation

### A.1 Linearkombinationen von Beobachtungsgrößen

In Kapitel 2.1.2.1 werden die Beobachtungsmodelle für Code- und Phasenmessungen vorgestellt und ferner daraufhin gewiesen, dass die Kombination verschiedener Beobachtungen Vorteile bringen kann. Die Bildung derartiger Kombinationen ist kein Selbstzweck. Ziel ist es, die Voraussetzung für eine möglichst genaue Bestimmung der Position zu schaffen, wie etwa durch die Eliminierung einzelner Fehleranteile und die Festsetzung der Mehrdeutigkeiten. Welche Genauigkeiten tatsächlich erreicht werden können, hängt unter anderem von Typ und Anzahl der Beobachtungen, sowie der Art der Positionierung ab. Im folgenden seien häufig genutzte Linearkombinationen, wie sie in dieser Arbeit erwähnt werden, vorgestellt. Für umfangreiche Erläuterungen zu Linearkombinationen im Allgemeinen, deren konkreter Verwendung bei der Positionierung sowie zu Algorithmen für die Positionsbestimmung selbst, sei auf Fachliteratur, wie z.B. [ME06], [Wan00] oder [Xu03] verwiesen. Die Indizierung verschiedener Größen erfolgt im Anhang teilweise abweichend von der in der Arbeit. Sie wird hier nur so weit verwendet, wie sie der Erläuterung der spezifischen Charakteristika der einzelnen Kombinationen dient.

Stehen Codemessungen  $R_C$  und Phasenmessungen  $\Phi$  auf ein und derselben Trägerfrequenz zur Verfügung, kann die Code-Glättung (engl. *Code Smoothing*) durchgeführt werden. Hierbei werden die komplementären Eigenschaften von Code- und Phasenmessung ausgenutzt. Die Codemessung ist stark verrauscht und nicht mehrdeutig, die Phasenmessung wenig verrauscht und dafür mehrdeutig. Ziel ist eine geglättete Codemessung, das heißt, eine eindeutige und wenig verrauschte Codemessung. Diese wird durch Anwendung von Gleichung A.1 erreicht, wobei  $F_L$  die Anzahl an Datenpunkten bezeichnet, über die die Glättung erfolgt. Zu beachten ist, dass Messfehler nicht eliminiert werden. Es werden lediglich die Anteile geglättet, die, wie

der Mehrwegeeinfluss und das Rauschen, auf den Code-Messungen um Größenordnungen stärker sind. Die Code-Glättung besitzt demnach Tiefpasscharakter.

$$\overline{R_C(t_i)} = \frac{1}{F_L} R_C(t_i) + \frac{F_L - 1}{F_L} \left( \overline{R_C(t_{i-1})} + \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}) \right) \quad (\text{A.1})$$

Die Streuung  $\sigma_{\overline{R}}$  der geglätteten Codebeobachtungen ist deutlich geringer als die Streuung  $\sigma_R$  der Codebeobachtungen. So gilt nach [Irs08]:

$$\sigma_{\overline{R}} \approx \sigma_R \sqrt{\frac{1}{2F_L}} \quad (\text{A.2})$$

Zu beachten ist, dass bei einer zu kleinen Wahl von  $F_L$  Mehrwegesignale mit einer deutlich längeren Periodendauer im geglätteten Code verbleiben. Wünschenswert ist daher ein möglichst großes  $F_L$ . Dies wiederum hat jedoch den Nachteil, dass im geglätteten Code dann der tatsächliche ionosphärische Trend ebenfalls geglättet und nicht mehr adäquat abgebildet wird, so dass ein Fehlerterm induziert wird, der proportional zu  $F_L$  ist.<sup>1</sup> Wird die Code-Glättung für einfache Differenzen (vgl. Gleichungen 2.40 und 2.42) durchgeführt, sind durch die Differenzbildung, je nach Basislinienlänge, Fehleranteile reduziert. Die Glättung des Codes führt dann zusätzlich, wie im Fall undifferenzierter Beobachtungen, zur Verminderung von Mehrwegefehlern und Rauschen in den Code-Beobachtungen.

Stehen Code- bzw. Phasenmessung auf zwei Frequenzen zur Verfügung, können für jeden Beobachtungstyp diverse Linearkombinationen gebildet werden. Der allgemeine Ansatz für die Kombination eines Beobachtungstyps verschiedener Frequenzen<sup>2</sup> ist nach [Wan00] mit Gleichung A.3 gegeben. Für Code- und Phasenmessungen gelten dann im Speziellen die Gleichungen A.4 bis A.5 bzw. A.6 bis A.9.

Dabei wird zunächst vereinfacht nur zwischen einem von der Ionosphäre unabhängigen Term ( $R_{IF}$  in m bzw.  $\Phi_{IF}$  in m), einem von ihr abhängigen Term, einem Rauschterm sowie, im Fall von Phasenmessungen, dem Mehrdeutigkeitsterm unterschieden. Für die kombinierte Trägerphasenmessungen  $\Phi_{n,m}$  ergibt sich damit die zugehörige Wellenlänge  $\lambda_{n,m}$  nach Gleichung A.10, die Mehrdeutigkeit  $N_{n,m}$  nach Gleichung A.13, sowie der ionosphärischbedingte Messfehler  $I_{n,m}$ . Unter Beachtung der Gesetzmäßigkeiten für die gewichtete Addition normalverteilter Zufallsgrößen [Bro+05] und der Annahme, dass die Rauschprozesse auf den Beobachtungen unterschiedlicher Frequenzen gleich groß sind, gilt für die Streuung  $\sigma_{n,m}$  der Linear-

<sup>1</sup> Eine ausführliche Herleitung der Zusammenhänge ist in [HMB98] dargestellt.

<sup>2</sup> Die Kennzeichnung der Trägerfrequenz einer Beobachtung erfolgt durch Indizierung. Messungen auf der Trägerfrequenz  $L_1$  werden mit 1 indiziert, Messungen auf der Trägerfrequenz  $L_2$  mit 2

kombination der in Gleichung A.14 dargestellte Zusammenhang.<sup>3</sup>

$$X_{n,m} = n \cdot X_1 + m \cdot X_2 \quad (\text{A.3})$$

$$R_{n,m} = nR_1 + mR_2 \quad (\text{A.4})$$

$$= n(R_{IF} + I_1 + \varepsilon_R) + m(R_{IF} + I_2 + \varepsilon_R) \quad (\text{A.5})$$

$$\Phi_{n,m} = n\Phi_1 + m\Phi_2 \quad (\text{A.6})$$

$$= n \left( \frac{\Phi_{IF}}{\lambda_{L1}} + \frac{I_1}{\lambda_{L1}} + N_1 + \varepsilon_\Phi \right) + m \left( \frac{\Phi_{IF}}{\lambda_{L2}} + \frac{I_2}{\lambda_{L2}} + N_2 + \varepsilon_\Phi \right) \quad (\text{A.7})$$

$$= \Phi_{IF} \left( \frac{n}{\lambda_{L1}} + \frac{m}{\lambda_{L2}} \right) + \left( \frac{nI_1}{\lambda_{L1}} + \frac{mI_2}{\lambda_{L2}} \right) + (nN_1 + mN_2) + (n+m)\varepsilon_\Phi \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{\Phi_{IF}}{\lambda_{n,m}} + I_{n,m} + N_{n,m} + \varepsilon_{n,m} \quad (\text{A.9})$$

mit

$$\lambda_{n,m} = \frac{c_0}{n \cdot f_{L1} + m \cdot f_{L2}} \quad (\text{A.10})$$

$$I_{n,m} = \left( \frac{nI_1}{\lambda_{L1}} + \frac{mI_2}{\lambda_{L2}} \right) \quad (\text{A.11})$$

$$I_{n,m} = \left( \frac{nI_1}{\lambda_{L1}} + \frac{mI_2}{\lambda_{L2}} \right) \cdot \lambda_{n,m} \quad \text{in Metern} \quad (\text{A.12})$$

$$N_{n,m} = n \cdot N_1 + m \cdot N_2 \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma_{n,m} = \sigma_\varepsilon \sqrt{n^2 + m^2} \quad (\text{A.14})$$

$$\sigma_{n,m} = \frac{\lambda_{n,m}}{2\pi} \cdot \sqrt{n^2 + m^2} \cdot \sigma_\varepsilon \quad \text{in Metern} \quad (\text{A.15})$$

Angelehnt an die in [Wan00] vorgestellte, vergleichende Gegenüberstellung der häufig verwendeten Linearkombinationen für Phasenbeobachtungen, seien diese im Folgenden aufgeführt.

<sup>3</sup> Die in den Beobachtungsgleichungen 2.33 und 2.34 verwendeten Indizes für Satellit, Empfänger und Frequenz werden in den folgenden Ausführungen dieses Kapitels nicht angefügt, da es sich hier um eine schematische Darstellung handelt, deren Detailgrad sich darauf beschränkt, die für eine erfolgreiche cm-genaue Positionierung günstigen Voraussetzungen diskutieren zu können.

**Ionosphärenfreie Linearkombination.** Für die GPS-Frequenzen  $f_{L1}$ ,  $f_{L2}$  und demnach für die dazugehörigen Wellenlängen  $\lambda_{L1}$ ,  $\lambda_{L2}$  gilt:

$$\frac{f_{L1}}{f_{L2}} = \frac{1575,42 \text{ MHz}}{1227,60 \text{ MHz}} = \frac{2 \cdot 77 \cdot 10,23}{2 \cdot 60 \cdot 10,23} = \frac{77}{60} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\lambda_{L1}}{\lambda_{L2}} = \frac{\frac{c_0}{f_{L1}}}{\frac{c_0}{f_{L2}}} = \frac{f_{L2}}{f_{L1}} = \frac{60}{77} \quad (\text{A.17})$$

Für den durch die Ionosphäre bedingten Messfehler erster Ordnung gilt nach Gleichung 2.38:

$$I_{f_{Li}} = \frac{40,3 \text{ TEC}}{f_{Li}^2} \quad (\text{A.18})$$

Wird demzufolge  $n = 77$  und  $m = -60$  gewählt, gilt für den ionosphärenbedingten Messfehler  $I_{77,-60}$  in der dazugehörigen Linearkombination der Phasenbeobachtungen  $\Phi_{77,-60}$  nach Umstellen der Gleichungen A.16 und A.17 nach  $f_{L1}$  bzw.  $\lambda_{L1}$  und Einsetzen dieser Zusammenhänge sowie Gleichung A.18 in Gleichung A.11:

$$I_{77,-60} = \frac{77 I_{L1}}{\lambda_{L1}} + \frac{-60 I_{L2}}{\lambda_{L2}} \quad (\text{A.19})$$

$$= \frac{60 \cdot 40,3 \text{ TEC}}{\lambda_{L2} f_{L2}^2} - \frac{60 \cdot 40,3 \text{ TEC}}{\lambda_{L2} f_{L2}^2} \quad (\text{A.20})$$

$$= 0 \quad (\text{A.21})$$

Diese so gebildete Linearkombination (kurz:  $L3$ ) wird daher auch ionosphärenfreie Linearkombination genannt. Für die Wellenlänge  $\lambda_{n,m}$  nach Gleichung A.10, die Mehrdeutigkeit  $N_{n,m}$  nach Gleichung A.13 und die Streuung  $\sigma_{n,m}$  des Rauschens nach Gleichung A.15 gilt:

$$\lambda_{77,-60} = \frac{c_0}{77 \cdot f_{L1} - 60 \cdot f_{L2}} \approx 0,006 \text{ m} \quad (\text{A.22})$$

$$N_{77,-60} = 77 \cdot N_{L1} - 60 \cdot N_{L2} \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma_{77,-60} = \frac{\lambda_{77,-60}}{2\pi} \cdot 97,6 \cdot \sigma_\varepsilon \quad (\text{A.24})$$

$$\approx 0,0977 \cdot \sigma_\varepsilon \quad (\text{A.25})$$

Eine Streuung von  $\sigma_\varepsilon = 0,1$  rad in den originalen Phasenbeobachtungen entspricht ca. 3 mm. Die Linearkombination ist dann mit einem Rauschen überlagert, welches eine ca. dreimal höhere



Streuung  $\sigma_{77,-60} \approx 9,8$  mm aufweist. Dies und die sehr kleine Wellenlänge sind die Nachteile dieser Kombination, die dem Vorteil der Eliminierung des ionosphärisch bedingten Laufzeitfehlers gegenüberstehen.

**Wide-Lane-Kombination.** Seien  $n = 1$  und  $m = -1$  gewählt. Dann gilt für die Wellenlänge  $\lambda_{1,-1}$  der so gebildeten Linearkombination nach Gleichung A.10:

$$\lambda_{1,-1} = \frac{c_0}{f_{L1} - f_{L2}} \approx 0,86 \text{ m} \quad (\text{A.26})$$

Die Wellenlänge vergrößert sich demnach auf ungefähr das Vierfache. Daher wird diese Linearkombination auch als *Wide-Lane-Kombination* bezeichnet. Für den ionosphärisch bedingten Messfehler gilt unter Verwendung der Gleichungen A.16 bis A.18:

$$I_{1,-1} = \left( \frac{I_{L1}}{\lambda_{L1}} - \frac{I_{L2}}{\lambda_{L2}} \right) \cdot \lambda_{1,-1} \quad (\text{A.27})$$

$$= \frac{I_{L1}}{\lambda_{L1}} \left( 1 - \frac{77}{60} \right) \cdot \lambda_{1,-1} \quad (\text{A.28})$$

$$= -\frac{77}{60} I_{L1} \approx -1,3 I_{L1} \quad (\text{A.29})$$

Für das Rauschen gilt (mit Gleichung A.15):

$$\sigma_{n,m} = \frac{\lambda_{1,-1}}{2\pi} * \sqrt{2} \cdot \sigma_\epsilon \quad (\text{A.30})$$

$$\approx 0,19 \cdot \sigma_\epsilon \quad (\text{A.31})$$

Wieder unter der Annahme von  $\sigma_\epsilon \approx 0,1$  rad  $\approx 3$  mm beträgt die Streuung  $\sigma_{1,-1} \approx 0,019$  m der Wide-lane-Kombination ca. das Sechsfache der Streuung der originalen Phasenbeobachtungen. Der Vorteil der großen Wellenlänge und damit der einfacheren Bestimmung der Mehrdeutigkeiten wird also durch einen größeren ionosphärisch bedingten Einfluss und ein stark erhöhtes Rauschen im Vergleich zu den originalen Phasenbeobachtungen kompensiert.

**Narrow-Lane-Kombination.** Sei nun  $n = m = 1$  gewählt. Dann gilt für die Wellenlänge  $\lambda_{1,1}$  der so gebildeten Linearkombination nach Gleichung A.10:

$$\lambda_{1,1} = \frac{c_0}{f_{L1} + f_{L2}} \approx 0,11 \text{ m} \quad (\text{A.32})$$

Die Wellenlänge ist demnach geringer als die Wellenlängen der originalen Phasenbeobachtungen, was zur Bezeichnung *Narrow-Lane-Kombination* führt. Für den ionosphärisch bedingten Messfehler gilt unter Verwendung der Gleichungen A.16 bis A.18:

$$I_{1,1} = \left( \frac{I_{L1}}{\lambda_{L1}} + \frac{I_{L2}}{\lambda_{L2}} \right) \cdot \lambda_{1,1} \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{I_{L1}}{\lambda_{L1}} \left( 1 + \frac{77}{60} \right) \cdot \lambda_{1,1} \quad (\text{A.34})$$

$$= \frac{77}{60} I_{L1} \approx 1,3 I_{L1} \quad (\text{A.35})$$

Für das Rauschen gilt (mit Gleichung A.15):

$$\sigma_{n,m} = \frac{\lambda_{1,1}}{2\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_\varepsilon \quad (\text{A.36})$$

$$\approx 0,024 \cdot \sigma_\varepsilon \quad (\text{A.37})$$

Wieder unter der Annahme von  $\sigma_\varepsilon \approx 0,1 \text{ rad} \approx 3 \text{ mm}$  ist die Streuung  $\sigma_{1,1} \approx 0,0024 \text{ m}$  der Narrow-Lane-Kombination geringer als die Streuung der originalen Phasenbeobachtungen. Der Vorteil ist demnach die geringe Streuung. Ihr gegenüber steht ein größerer ionosphärisch bedingter Einfluss und eine kleine Wellenlänge im Vergleich zu den originalen Phasenbeobachtungen.

Die Bildung von Linearkombinationen kann ebenfalls dazu genutzt werden, den Mehrwegefehler auf den Codemessungen abzuschätzen. Stehen Code- und Phasenmessungen auf zwei Frequenzen zur Verfügung, kann der ionosphärisch bedingte Laufzeitfehler unter Verwendung der Differenz der Phasenmessungen geschätzt werden. Mit dieser Schätzung kann der ionosphärisch bedingte Laufzeitfehler in den Beobachtungsgleichungen von Code und Phase eliminiert werden. Die Differenz der Beobachtungsgleichungen von Code- und Phasenmessung auf derselben Frequenz, umgestellt nach dem Mehrwegefehler auf der Codebeobachtung ergibt die in den Gleichungen A.38 und A.39 dargestellten Beschreibungen für die Mehrwegefehler  $M_{i,1,R}^k$  auf L1 bzw.  $M_{i,2,R}^k$  auf L2.<sup>4</sup>

$$M_{i,1,R}^k = R_{i,1}^k - \left( 1 + \frac{2}{\alpha_f - 1} \right) \Phi_{i,1}^k + \left( \frac{2}{\alpha_f - 1} \right) \Phi_{i,2}^k - B_{M1} + \hat{\varepsilon}_1 \quad (\text{A.38})$$

$$M_{i,2,R}^k = R_{i,2}^k - \left( \frac{2\alpha_f}{\alpha_f - 1} \right) \Phi_{i,1}^k + \left( \frac{2\alpha_f}{\alpha_f - 1} - 1 \right) \Phi_{i,2}^k - B_{M2} + \hat{\varepsilon}_2 \quad (\text{A.39})$$

<sup>4</sup> Die hier dargestellten Zusammenhänge sind an die ausführliche Herleitung in [Roc+95] unter Beachtung der in dieser Arbeit verwendeten Variablen angelehnt.

mit

$$\alpha_f = \frac{f_1^2}{f_2^2} \quad (\text{A.40})$$

Die Terme  $B_{M1}$  bzw.  $B_{M2}$  sind konstant (solange keine Phasensprünge (engl. *cycle slips*) auftreten) und enthalten Mehrdeutigkeiten und Hardware-Biases. Die Terme  $\hat{\varepsilon}_1$  bzw.  $\hat{\varepsilon}_2$  enthalten das Code-Rauschen, den Mehrwegefehler auf den Phasemessungen sowie die nach Anwendung der Antennenkorrekturparameter noch vorhandenen Restfehler der Antennenphasenvariationen.

Die Linearkombination von Beobachtungsgrößen kann auch mit der Differenzbildung verbunden werden. Dies hat zum Vorteil, dass sich zahlreiche Fehlerterme in Abhängigkeit der Basislinienlänge verringern bzw. eliminieren lassen.<sup>5</sup> Diese Strategie wird auch in der Basislinienauswertung der SAPOS Stationen angewandt und sei im Folgenden vorgestellt.<sup>6</sup> Auf Grund der Basislinienlänge wird der ionosphärisch bedingte Fehleranteil dadurch eliminiert, dass die doppelten Differenzen mit den ionosphärenfreien Linearkombinationen anstelle der originalen Phasenbeobachtungen gebildet werden. Die Eingangsgrößen für die Basislinienauswertung lassen sich demnach nach Gleichung 2.50 wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \nabla\Delta\Phi_{ij,L3}^{kl} &= \nabla\Delta\rho_{ij}^{kl} + \nabla\Delta T_{ij}^{kl} + \nabla\Delta M_{ij,L3,\Phi}^{kl} + \nabla\Delta O_{ij}^{kl} \\ &+ \nabla\Delta G_{ij}^{kl} + \nabla\Delta F_{ij}^{kl} + \nabla\Delta A_{ij,L3,\Phi}^{kl} + \lambda_{L3}\nabla\Delta N_{ij,L3}^{kl} + \varepsilon_{ij,L3,\Phi}^{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Es werden hochpräzise IGS-Orbits sowie Antennenkorrekturparameter verwendet. Ferner liegen die Restfehler auf Grund geodynamischer Prozesse  $\nabla\Delta G_{ij}^{kl}$  sowie relativistischer Effekte  $\nabla\Delta F_{ij}^{kl}$  in vernachlässigbarer Größenordnung. Gleichung A.41 vereinfacht sich demzufolge zu Gleichung A.42. Gleichung A.43 gibt diese in der Notation nach Gleichung A.9 wieder:

$$\nabla\Delta\Phi_{ij,L3}^{kl} = \underbrace{\nabla\Delta\rho_{ij}^{kl} + \nabla\Delta T_{ij}^{kl} + \nabla\Delta M_{ij,L3,\Phi}^{kl}}_{\nabla\Delta\Phi_{IF}} + \lambda_{L3}\nabla\Delta N_{ij,L3}^{kl} + \varepsilon_{ij,L3,\Phi}^{kl} \quad (\text{A.42})$$

$$= \nabla\Delta\Phi_{IF} + \lambda_{77,-60}\nabla\Delta N_{77,-60} + \varepsilon_{77,-60} \quad (\text{A.43})$$

Ziel ist es, die Mehrdeutigkeiten korrekt zu bestimmen, was auf Grund der geringen Wellenlänge nicht möglich ist. Es gilt jedoch nach einigen algebraischen Umformungen:

<sup>5</sup> vgl. Ausführungen in Kapitel 2.1.3.

<sup>6</sup> Für ausführlichere Erläuterungen sei auf [Dac+15] verwiesen.

$$\lambda_{77,-60} \nabla \Delta N_{77,-60} = \frac{c_0}{77f_{L1} - 60f_{L2}} \left( 77 \nabla \Delta N_{ij,f_{L1}}^{kl} - 60 \nabla \Delta N_{ij,f_{L2}}^{kl} \right) \quad (\text{A.44})$$

$$= c_0 \frac{f_{L2}}{f_{L1}^2 - f_{L2}^2} (\nabla \Delta N_{ij,f_{L1}}^{kl} - \nabla \Delta N_{ij,f_{L2}}^{kl}) + c_0 \frac{1}{f_{L1} + f_{L2}} \nabla \Delta N_{ij,f_{L1}}^{kl} \quad (\text{A.45})$$

$$= c_0 \frac{f_{L2}}{f_{L1}^2 - f_{L2}^2} \nabla \Delta N_{1,-1} + c_0 \lambda_{1,1} \nabla \Delta N_{ij,f_{L1}}^{kl} \quad (\text{A.46})$$

Der Mehrdeutigkeitsterm in den doppelten Differenzen der L3-Kombinationen lässt sich demnach als Summe aus einem Term, der die Wide-Lane-Mehrdeutigkeiten  $\nabla \Delta N_{1,-1}$  enthält (wobei der Vorfaktor berechnet werden kann) und einem Term, der die Mehrdeutigkeiten der ursprünglichen Phasenbeobachtungen enthält, schreiben, wobei die Wellenlänge vor diesen Mehrdeutigkeiten der Wellenlänge der Narrow-Lane-Kombination entspricht. Daher wird die Mehrdeutigkeit  $\nabla \Delta N_{ij,f_{L1}}^{kl}$  auch Narrow-Lane-Mehrdeutigkeit genannt. Die Auswertestrategie ist demnach die folgende. Zunächst werden aus der Auswertung der Wide-Lane-Kombination die Wide-Lane-Mehrdeutigkeiten bestimmt. In einem zweiten Schritt wird die L3-Kombination gebildet und die Wide-Lane-Mehrdeutigkeiten eingeführt. Anstelle der L3-Mehrdeutigkeiten sind dann, wie aus Gleichung A.46 ersichtlich, die Narrow-Lane-Mehrdeutigkeiten  $\nabla \Delta N_{ij,f_{L1}}^{kl}$  zu bestimmen. Aus Gleichung A.42 geht hervor, dass nicht modellierte Fehleranteile der Troposphäre und der Mehrwegeausbreitung die Bestimmung der Mehrdeutigkeiten und der Koordinaten beeinflussen.

## A.2 Troposphärenmodelle

Der durch die Troposphäre verursachte Fehleranteil wird in einen Trocken- und einen Feuchtanteil unterteilt, wobei jeder dieser Anteile als Produkt der Zenitverzögerung und einer elevationsabhängigen Mapping-Funktion geschrieben wird.<sup>7</sup> Der in dieser Arbeit in Kapitel 6 gewählte Ansatz besteht darin, den Trockenanteil a priori zu modellieren und die Zenitverzögerung des Feuchtanteils während der Ausgleichung als weitere Unbekannte zu schätzen. Die Mapping-Funktion für den Feuchtanteil ist ebenfalls a priori festgelegt.

Als Mapping-Funktion wird sowohl für den Trocken- als auch für den Feuchtanteil die in [Boe+06] vorgestellte Global Mapping Function (kurz: *GMF*) verwendet. Ausgangspunkt ist die von [Nie96] vorgestellte Mapping-Funktion, deren Parameter konstant für einen spezifischen Breitengrad und einen bestimmte Tag sind, wobei sich die Parameterwerte für den

<sup>7</sup> vgl. dazu die Ausführungen in Kapitel 2.1.2.1.

Feucht- und den Trockenanteil unterscheiden. Für die GMF werden diese Parameter, wieder trocken- und feuchtanteilspezifisch, abgeleitet aus globalen Messwerten für Druck, Temperatur und Feuchtigkeit über 36 Monate, was auch die Modellierung der Längengradabhängigkeit ermöglicht. Für nähere Ausführungen sei auf [Boe+06] verwiesen. Aus den gleichen Daten wird das Modell für die Zenitverzögerung des Trockenanteils, welches in dieser Arbeit verwendet wird, abgeleitet. Es handelt sich um das in [BHS07] vorgestellte Global Pressure and Temperature Modell (kurz: *GPT*).

## Anhang B

# Elektrotechnische Grundlagen

### B.1 Elektromagnetische Felder und Wellen

Die in diesem Abschnitt gegebenen Definitionen und beschriebenen Zusammenhänge sind, wenn nicht anders gekennzeichnet, [Lan92b] entnommen bzw. daran angelehnt.

**Elektromagnetische Welle.** Unter einer *elektromagnetischen Welle* wird eine sich ausbreitende Wechselwirkung zwischen elektrischem und magnetischem Feld verstanden. Die beiden Felder werden über die vektoriellen Größen elektrische Feldstärke  $E$  in Volt/Meter bzw. magnetische Feldstärke  $H$  in Ampere/Meter beschrieben. Diese, die beiden Felder charakterisierenden Vektoren sind orthogonal zueinander sowie orthogonal zur Ausbreitungsrichtung. Wellen mit dieser Eigenschaft werden *Transversalwellen* genannt.

**Polarisation.** Die Richtung des Feldstärkevektors  $E$  wird als *Polarisation* der Welle bezeichnet. Bleibt die Richtung des Vektors konstant, wird von *linearer Polarisation* gesprochen. Insbesondere im Hinblick auf Reflexionen der elektromagnetischen Wellen sind die Begriffe der Polarisations- sowie der Einfallsebene von Bedeutung. Die Polarisations- sowie der Einfallsebene wird aufgespannt von dem Vektor der elektrischen Feldstärke und dem Vektor in Ausbreitungsrichtung. Dieser Vektor spannt, gemeinsam mit dem Normalenvektor der Reflexionsebene die Einfallsebene auf. Sind Polarisations- und Einfallsebene parallel, wird von vertikaler Polarisation der Welle gesprochen, sind beide Ebenen orthogonal, von horizontaler Polarisation.<sup>1</sup> Eine *zirkuläre Polarisation* kann durch die Überlagerung zweier orthogonal zueinander und zur Ausbreitungsrichtung ausgerichteteter und um  $\pi/2$  zueinander versetzter linear polarisierter Wellen gleicher Amplitude realisiert werden. Ist mindestens eine der drei Voraussetzungen (Orthogo-

---

<sup>1</sup> Voraussetzung für diese Begriffsbildung ist die Annahme, dass die Reflexionsebene parallel zur Erdoberfläche liegt ([Lan92b]).

nalität, Phasenversatz von  $\pi/2$ , gleiche Amplitude) verletzt, führt die Überlagerung der beiden linear polarisierten Wellen zu einer *elliptisch polarisierten Welle* ([LRT15]). Im Fall der GNSS-Signale handelt es sich um eine zirkulare Polarisation mit Drehrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn aus Sicht der Empfangsantenne (engl. *right hand circular polarized*, kurz: *RHCP*).

**Reflexion und Brechung.** Treten elektromagnetische Wellen bei ihrer Ausbreitung von einem Medium 1 in ein Medium 2 ein, werden sie an der Grenzschicht der beiden Medien in Abhängigkeit von deren elektrischen und magnetischen Eigenschaften anteilig reflektiert und transmittiert.<sup>2</sup> Die elektrischen Eigenschaften werden mittels der Dielektrizitätszahlen  $\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}$  und der elektrischen Leitfähigkeiten  $\sigma_{r1}, \sigma_{r2}$  in  $(\text{Ohm} \cdot \text{Meter})^{-1}$  der beiden Medien, die magnetischen Eigenschaften mittels der Permeabilitäten  $\mu_{r1}, \mu_{r2}$  beschrieben. Bei der Betrachtung der Mehrwegeausbreitung von GNSS-Signalen interessieren Betrag und Richtung des elektrischen Feldstärkevektors des an Hindernissen im Ausbreitungsweg reflektierten Signals, da dessen Eigenschaften entscheiden, inwiefern es an der Antenne des Empfängers zu einer signifikanten Überlagerung von direktem und reflektierten Signal(en) kommt. Es wird bei Reflexionen von GNSS-Signalen demnach der Übergang von Luft als Medium 1 mit  $\epsilon_{r1} \approx 1, \sigma_{r1} = 0, \mu_{r1} \approx 1$  ([LRT15]) auf ein Hindernis als Medium 2 untersucht. Üblicherweise wird die Annahme getätigt<sup>3</sup>, dass es sich bei den Hindernissen um nicht magnetische Objekte handelt, d.h.  $\mu_r := \mu_{r2} \approx 1$ . Ferner gilt stets  $\epsilon_{r2} \geq \epsilon_{r1}$ , d.h. es erfolgt ein Übergang in ein optisch dichteres Medium, sowie  $\sigma_{r2} \geq 0$ . Abhängig von der Größenordnung von  $\epsilon_r := \epsilon_{r2}$  und  $\sigma := \sigma_{r2}$ <sup>4</sup> sowie dem Einfallswinkel und der Wellenlänge des GNSS-Signals bestimmen sich transmittierter und reflektierter Anteil des Feldstärkevektors nach Gleichung 2.76 und Gleichung 2.77.

## B.2 Antennen

Die in diesem Abschnitt gegebenen Definitionen und beschriebenen Zusammenhänge sind, wenn nicht anders gekennzeichnet, [Lan92a] entnommen bzw. daran angelehnt.

Während die Aufgabe einer Sendeantenne in der Wandlung einer leitungsgebundenen elektromagnetischen Welle in eine nicht leitungsgebundene Freiraumwelle besteht, kommt der Empfangsantenne die dazu inverse Aufgabe zu. Antennen werden durch ihre *Richtcharakteristik* beschrieben. Diese gibt, im Fall einer Sendeantenne, an, welchen Eigenschaften (Amplitude, Phase, Polarisation) der von der Antenne erzeugte Feldstärkevektor in Abhängigkeit der

<sup>2</sup> Ausführliche Herleitung sind beispielsweise in [Kar14] zu finden.

<sup>3</sup> So z.B. bei [LRT15] oder [Eis97]

<sup>4</sup> In Kapitel 2.2.2.3 werden die Bezeichnungen  $\mu_r, \epsilon_r$  und  $\sigma$  verwendet.

Abstrahlrichtung genügt. Im Fall der Empfangsantenne beschreibt die Richtcharakteristik die Abhängigkeit der aufgenommenen Feldstärke der elektromagnetischen Welle einer bestimmten Polarisation bzw. der durch sie in der Antenne induzierten Spannung von der Richtung der einfallenden Welle. Die graphische Darstellung der Richtcharakteristik wird als *Richtdiagramm* bezeichnet, wenn es sich um die Beschreibung der Winkelabhängigkeit der Amplitude handelt. Sie heißt *Phasendiagramm*, wenn die Winkelabhängigkeit der Phasenlage dargestellt werden soll. Für die Darstellung im Richtdiagramm werden die Amplituden der Feldstärke üblicherweise auf den erreichbaren Maximalwert normiert und im logarithmischen Maßstab (dB) angegeben.

In Zusammenhang mit der Auswertung der GNSS-Signale, d.h. der Entfernungsbestimmung zwischen Satellit und Empfänger, spielt das Phasendiagramm eine wichtige Rolle. Abhängig von der Elevation des GNSS-Satelliten wird der Feldstärkevektor des zugehörigen Signals mit unterschiedlicher Phasenlage empfangen. Demzufolge hängt die (bei der Auswertung der durch ihn in der Antenne induzierten Spannung) ermittelte Laufzeit und somit die resultierende Entfernung zwischen Satellit und Empfänger unerwünschterweise vom Einfallswinkel des Signals ab. Um diesen Effekt zu korrigieren, wird ein sogenanntes *mittleres Phasenzentrum* bestimmt. Dabei wird unter dem Phasenzentrum einer Empfangsantenne ganz allgemein der Punkt der Antenne verstanden, für den gilt, dass die Phasenlage des empfangenen Feldstärkevektors unabhängig von seinem Einfallswinkel ist.<sup>5</sup> Im Fall einer realen GNSS-Empfangsantenne ist seine Phasenlage jedoch von der Elevation abhängig, das Phasenzentrum variiert demnach winkelabhängig. Das mittlere Phasenzentrum gibt den Punkt des Phasenzentrums einer hypothetischen Antenne an, deren zugehöriges (ideales, winkelunabhängiges) Phasendiagramm das Phasendiagramm der Empfangsantenne im Least-Squares-Sinn annähert ([LRT15]). Die Abweichungen des Phasendiagramms der Empfangsantenne von dem der hypothetischen Antenne werden Phasenzentrumsvariationen (engl. *phase centre variations*, kurz: *PCV*) genannt. Für GNSS-Empfangsantennen ebenfalls von Bedeutung ist die Tatsache, dass das mittlere Phasenzentrum, als Bezugspunkt für den Signalempfang und damit für die Laufzeitmessung und Entfernungsbestimmung, nicht mit dem Punkt, auf den sich die Positionsangabe beziehen soll, übereinstimmen muss. Der Unterschied zwischen diesem Bezugspunkt und dem mittleren Phasenzentrum wird als Phasenzentrumsabweichung (engl. *phase centre offset*, kurz: *PCO*) bezeichnet. Die PCO- und PCV-Werte der Satelliten und Empfangsantennen ergeben die in Kapitel 2.1.2.1 diskutierten Antennenphasenexzentrizitäten.

---

<sup>5</sup> Die Definition für eine Sendeantenne ist im IEEE-Standard [IEE93] festgelegt. Die hier gegebene Definition für den Empfangsfall ist dazu reziprok.



# Anhang C

## Mathematische Grundlagen

### C.1 Begrifflichkeiten

Für eine Einführung in die für die Signalanalyse wichtigen Begriffe und ihre Definitionen (u.a. Vektorraum, metrischer Raum, normierter Raum, Hilbertraum, Skalarprodukt) sei auf [Mer10] und [Bro+05] verwiesen. Ausführlichere mathematische Herleitungen finden sich in [Heu06].

**Cauchy'schen Hauptwert.** Sei  $g : [a, c) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die auf dem Intervall  $[a, b]$  definiert, im Punkt  $c \in [a, b]$  jedoch nicht beschränkt ist. Existiert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} g(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b g(x) dx \right\} \quad (\text{C.1})$$

dann heißt dieser Grenzwert *Cauchy'scher Hauptwert* (vgl. [Bro+05]).

### C.2 Interpolation

Das allgemeine Interpolationsproblem lässt sich in Anlehnung an die allgemeine Formulierung in [Mas10] für die in dieser Arbeit zu analysierenden Daten wie folgt formulieren. Sei  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  und

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t; a) &\mapsto S(t; a) \end{aligned}$$

eine Abbildung. Sei nun eine Menge  $M$  gegeben mit  $M := \{(t_k, y_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid k = 0, \dots, n\}$ , wobei  $t_i \neq t_j$  für  $i \neq j$ . Unter Interpolation wird nun das Bestimmen eines  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  verstanden, sodass gilt:

$$\forall k = 0, 1, \dots, n : \quad S(t_k; a) = y_k \quad (\text{C.2})$$

Man nennt  $a$  ein Parameterset, die Menge  $T := \{t_k | k = 0, \dots, n\}$  Stützstellen, die Menge  $Y := \{y_k | k = 0, \dots, n\}$  Stützwerte und die Menge  $T \times Y := \{(t_k, y_k) | k = 0, \dots, n\}$  Stützpunkte. Das Interpolationsproblem heißt linear, wenn es Abbildungen  $S_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\forall t \in [t_0, t_n] : \quad S(t; a) = \sum_{i=0}^n a_i S_i(t) \quad (\text{C.3})$$

Lineare Interpolationsprobleme werden nach Definition der  $S_i$  unterschieden. Am geläufigsten sind polynomiale, trigonometrische oder rationale Interpolation.

### Polynomiale Interpolation.

$$\forall t \in [t_0, t_n] : \quad S(t; a) := \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad (\text{C.4})$$

### Trigonometrische Interpolation.

$$\forall t \in [t_0, t_n] : \quad S(t; a) := \sum_{i=0}^n a_i e^{jit} \quad (\text{C.5})$$

### Rationale Interpolation.

Seien  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $p + q = n$  und  $b = (b_0, \dots, b_p) = (a_0, \dots, a_p)$  und  $c = (c_0, \dots, c_{q-1}) = (a_{p+1}, \dots, a_n)$

$$\forall t \in [t_0, t_n] : \quad S(t; b, c) := \frac{\sum_{i=0}^p b_i t^i}{\sum_{j=0}^{q-1} c_j t^j} \quad (\text{C.6})$$

Worin das Problem der Interpolation liegt, sei am Beispiel der polynomialen Interpolation erläutert. Je größer die Anzahl an vorgegebenen Stützstellen ist, desto hochgradiger wird das zu ermittelnde Polynom. Dies kann jedoch zu unerwünschten Oszillationen zwischen den Stützpunkten führen. Lösungsidee für dieses Problem sind stückweise zusammengesetzte Funktionen, sogenannte Spline-Interpolierende (kurz: *Splines*), da diese "lokal sehr einfach und global sehr flexibel"<sup>1</sup> sind. Sie seien hier im Folgenden in Anlehnung an [Spä90] definiert.

**Definition (Spline).** Sei  $M := \{(t_k, y_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | k = 0, \dots, n\}$  die Menge aller Stützpunkte und sei  $m \in \mathbb{N}$ . Ein Spline  $S \in C^m([t_0, t_n])$  ist dann die Menge der  $n$  jeweils auf dem Intervall  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$  definierten Funktionen  $s_k$ , wobei gilt:

- $S$  ist auf dem Intervall  $(t_0, t_n)$   $m$ -mal stetig differenzierbar, also insbesondere auch an den Stützstellen  $t_k$ .

<sup>1</sup> vgl. [De 90]

- Die  $s_k$  genügen den Interpolationsbedingungen  $s_k(t_k) = y_k$  und  $s_k(t_{k+1}) = y_{k+1}$ .

Sind die  $s_k$  Polynome vom Grad  $m + 1$  heißt  $S$  polynomialer Spline. Polynomiale Splines haben auf Grund ihrer Praktikabilität eine hohe Relevanz. Der Höchstgrad *grad* eines solchen Splines wird üblicherweise  $grad \leq 3$  gewählt, da für höhere Grade die bereits erwähnten, unerwünschten Oszillationseigenschaften auftreten. Ein wichtiger Vertreter ist der kubische Spline ( $grad = 3$ ), da er unter allen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen die geringste Krümmungsenergie aufweist.

Gegenüber polynomialen Splines liegt der Vorteil rationaler Splines mit einem frei wählbaren, aber festem Polparameter  $p$ , dem *Tensionsparameter* (engl. *Spannung*), in ihrer Flexibilität. So kann die Forderung nach  $m$ -mal stetiger Differenzierbarkeit unabhängig davon aufrecht erhalten werden, wie straff der Spline *gespannt* ist<sup>2</sup>. Der in dieser Arbeit verwendete rationale Spline  $S : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}$  besteht aus der Menge der Funktionen  $\{s_k : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R} | k = 0, \dots, n - 1\}$  mit

$$s_k(t) = A_k u + B_k x + \frac{C_k u^3}{1 + px} + \frac{D_k x^3}{1 + pu} \quad (\text{C.7})$$

mit

$$u = 1 - x \quad (\text{C.8})$$

und

$$x = \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (\text{C.9})$$

und den Unbekannten  $A_k, B_k, C_k, D_k, k = 0, \dots, n - 1$ . Bei  $n$  Intervallen sind demzufolge  $4n$  Parameter zu ermitteln. Für eine eindeutige Bestimmung sind dafür  $4n$  Bedingungen festzulegen. Diese ergeben sich aus der Übereinstimmung der  $s_k$  an den Stützstellen  $t_k$  mit den Stützwerten  $y_k$ , der Forderung nach zweimal stetiger Differenzierbarkeit von  $S$  im Inneren des Intervalls  $[t_0, t_n]$  sowie zwei frei wählbaren Bedingungen zu Anstieg oder Krümmung an den Intervallgrenzen  $t_0$  und  $t_n$ . Im Einzelnen wird gefordert:

$$s_k(t_k) = y_k \quad k = 0, \dots, n - 1 \quad (\text{C.10})$$

$$s_{k-1}(t_k) = y_k \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{C.11})$$

$$s'_{k-1}(t_k) = s'_k(t_k) \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (\text{C.12})$$

$$s''_{k-1}(t_k) = s''_k(t_k) \quad k = 1, \dots, n - 1 \quad (\text{C.13})$$

<sup>2</sup> vgl. dazu Anmerkungen und Abbildungen in Kapitel 3.1.2.1

Die Gleichungen C.10–C.13 ergeben  $4n - 2$  Bedingungen. Für die Formulierung der zwei noch notwendigen, frei wählbaren Bedingungen sind verschiedene Ansätze üblich. Bei der Vorgabe von Anstiegen  $m_0$  bzw.  $m_n$  des Splines in  $t_0$  bzw.  $t_n$  spricht man von *Hermite-Randbedingungen*. Die Forderung nach Nullsetzen der Krümmung  $s''_0$  bzw.  $s''_{n-1}$  in  $t_0$  bzw.  $t_n$  führt zu sogenannten *natürlichen Splines*.

### C.3 Box-Whisker-Plot

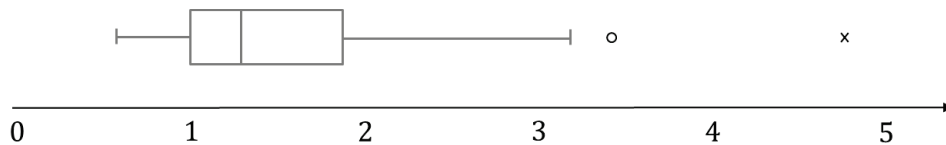


Abbildung C.1: Box-Whisker-Plot nach [Tuk94]

Ein Box-Whisker-Plot stellt die Verteilung einer Menge von Datenpunkten dar. Strukturiert wird die Darstellung dabei durch die Begrenzung der Box (0,25-Quantil und 0,75-Quantil der Daten) sowie die Länge der Whisker. Die Whisker setzen an den Box-Begrenzungen an und betragen maximal das 1,5-fache der Boxlänge. Wie lang der Whisker tatsächlich ist, wird durch den größten Wert in den Datenpunkten bestimmt, der noch innerhalb der 1,5-fachen Boxlänge liegt. Der Whisker kann also auch kürzer sein als die 1,5-fachen Boxlänge. Werte außerhalb der 3-fachen Boxlänge gelten als extreme Ausreißer (in der Abbildung gekennzeichnet durch das Kreuz). Werte zwischen der 1,5-fachen und der 3-fachen Boxlänge gelten als (einfache) Ausreißer (in der Abbildung gekennzeichnet durch den Kreis). Des Weiteren enthält die Darstellung den Median der Daten (0,5-Quantil) als Markierung innerhalb der Box. Für weitere Ausführungen sei auf [Tuk94] verwiesen.

### C.4 Fehleranalyse

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und sei  $I = [a, a + h] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, auf dem  $g$  stetig mit stetigen Ableitungen bis einschließlich der Ordnung  $m - 1$  ist und in dessen Inneren auch die Ableitung  $m$ -ter Ordnung existiert. Dann kann die Funktion  $g$  in einer Taylorreihe entwickelt werden<sup>3</sup>. Es gilt (mit  $0 < \zeta < 1$ ):

$$g(a + da) = g(a) + \frac{1}{1!} \frac{dg}{dx} \Big|_a da + \frac{1}{2!} \frac{d^2g}{dx^2} \Big|_a da^2 + \dots + \frac{1}{m!} \frac{d^m g}{dx^m} \Big|_{a+\zeta da} da^m \quad (\text{C.14})$$

<sup>3</sup> vgl. [Bro+05]

Unter der Annahme, dass die Terme höherer Ordnung vernachlässigbar klein sind, kann die Taylorreihe nach dem linearen Glied abgebrochen werden. Der Unterschied  $\Delta g$  zwischen den Funktionswerten  $g(a + da)$  und  $g(a)$  kann somit in linearer Abhängigkeit der Koordinatenabweichung  $da$  dargestellt werden:

$$\Delta g = g(a + da) - g(a) = \left. \frac{dg}{dx} \right|_a da \quad (\text{C.15})$$

Für die Taylorreihe einer Funktion von  $n$  Veränderlichen (Koordinaten) und deren Abbruch nach den linearen Gliedern gilt:

$$\Delta g = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x_i} dx_i \quad (\text{C.16})$$

Da bei der Fehleranalyse der Maximalwert des auftretenden Fehlers  $\Delta g$  interessiert, der durch Fehler  $dx_i$  in den Koordinaten  $x_i$  verursacht wird, werden für die Fehler  $dx_i$  ihre Maximalwerte  $\Delta x_i$  angenommen und die Fehler aller Koordinaten betragsmäßig aufsummiert, so dass einzelne Fehleranteile sich nicht aufheben können. Somit gilt:

$$\Delta g = \sum_{i=1}^n \left| \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x_i} \right| \Delta x_i \quad (\text{C.17})$$

## Anhang D

# Signaltheoretische Grundlagen

### D.1 Signale und Eigenschaften

**Signalleistung.** Die mittlere Signalleistung  $C$  eines sinusförmigen Signals  $x$  mit

$$x(t) = A_C \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{D.1})$$

auch als quadratischer Mittelwert oder Erwartungswert von  $x^2$  bezeichnet, ist definiert als:

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (\text{D.2})$$

Der Zusammenhang zwischen dieser Leistung  $C$  und der Amplitude  $A_C$  des Signals leitet sich demnach unter Nutzung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen wie folgt ab.

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (\text{D.3})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |A_C \sin(\omega t + \phi)|^2 dt \quad (\text{D.4})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_C^2}{4T} \int_{-T}^T (1 - \cos(2\omega t + 2\phi)) dt \quad (\text{D.5})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_C^2}{4T} \left( t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\phi) \right) \Big|_{-T}^T \quad (\text{D.6})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{A_C^2}{2} - \frac{A_C^2}{4\omega T} \cos(2\phi) \sin(4\omega T) \right) \quad (\text{D.7})$$

$$= \frac{A_C^2}{2} \quad (\text{D.8})$$

Für zeitdiskrete Signale  $x$  mit

$$x(n) = A_C \sin(\omega n + \phi) \quad (\text{D.9})$$

mit  $n = kT_s$  gilt analog:

$$C = \lim_{N_A \rightarrow \infty} \frac{1}{2N_A + 1} \sum_{k=-N_A}^{N_A} |x(kT_s)|^2 \quad (\text{D.10})$$

und damit:

$$C = \lim_{N_A \rightarrow \infty} \frac{1}{2N_A + 1} \sum_{k=-N_A}^{N_A} |A_C \sin(\omega kT_s + \phi)|^2 \quad (\text{D.11})$$

$$= \lim_{N_A \rightarrow \infty} \frac{A_C^2}{2N_A + 1} \sum_{k=-N_A}^{N_A} \sin^2(\omega kT_s + \phi) \quad (\text{D.12})$$

$$= \lim_{N_A \rightarrow \infty} \frac{A_C^2}{2N_A + 1} \sum_{k=-N_A}^{N_A} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega kT_s + 2\phi)) \quad (\text{D.13})$$

$$= \lim_{N_A \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{A_C^2}{2N_A + 1} \left( \sum_{k=-N_A}^{N_A} 1 - \sum_{k=-N_A}^{N_A} \cos(2\omega kT_s + 2\phi) \right) \quad (\text{D.14})$$

$$= \lim_{N_A \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{A_C^2}{2N_A + 1} \left( (2N_A + 1) - \sum_{k=-N_A}^{N_A} \cos(2\omega kT_s + 2\phi) \right) \quad (\text{D.15})$$

$$= \lim_{N_A \rightarrow \infty} \left( \frac{A_C^2}{2} - \frac{A_C^2}{2(2N_A + 1)} \sum_{k=-N_A}^{N_A} \cos(2\omega kT_s + 2\phi) \right) \quad (\text{D.16})$$

$$= \frac{A_C^2}{2} \quad (\text{D.17})$$

**Erwartungswert von  $q_P^2$ .** Sei  $q_P$  der in Gleichung 2.24 definierte Korrelationswert des prompten Quadratur-Arms. Dann gilt für den quadrierten Mittelwert  $\overline{q_P^2}$  von  $q$ , das heißt, den Erwartungswert von  $q_P^2$ :

$$\overline{q_P^2} = \mathbb{E} \left\{ \left( 2 \sum_{k=1}^{k_A} B(kT_s) \varepsilon(kT_s) \sin(\omega_{IF} kT_s + \phi) \right)^2 \right\} \quad (\text{D.18})$$

$$= \mathbb{E} \left\{ 4 \sum_{k=1}^{k_A} B(kT_s) \varepsilon(kT_s) \sin(\omega_{IF} kT_s + \phi) \sum_{l=1}^{k_A} B(lT_s) \varepsilon(lT_s) \sin(\omega_{IF} lT_s + \phi) \right\} \quad (\text{D.19})$$

$$= \mathbb{E} \left\{ 4 \sum_{k=1}^{k_A} \sum_{l=1}^{k_A} B(kT_s) \varepsilon(kT_s) \sin(\omega_{IF} kT_s + \phi) B(lT_s) \varepsilon(lT_s) \sin(\omega_{IF} lT_s + \phi) \right\} \quad (\text{D.20})$$

Auf Grund der Linearität des Erwartungswert-Operators dürfen dieser Operator und die Summation vertauscht werden. Es gilt demnach:

$$\overline{q_P^2} = 4 \sum_{k=1}^{k_A} \sum_{l=1}^{k_A} \mathbb{E} \{ B(kT_s) \varepsilon(kT_s) \sin(\omega_{IF} kT_s + \phi) B(lT_s) \varepsilon(lT_s) \sin(\omega_{IF} lT_s + \phi) \} \quad (\text{D.21})$$

Sind Variablen unkorreliert, ist der Erwartungswert ihres Produktes gleich dem Produkt der Erwartungswerte. Da dies für das GWR  $\varepsilon$ , den Code  $B$  und den sinusförmigen Träger zutrifft, gilt demnach:

$$\overline{q_P^2} = 4 \sum_{k=1}^{k_A} \sum_{l=1}^{k_A} \mathbb{E} \{B(kT_s)B(lT_s)\} \mathbb{E} \{\varepsilon(kT_s)\varepsilon(lT_s)\} \mathbb{E} \{\sin(\omega_{IF}kT_s + \phi) \sin(\omega_{IF}lT_s + \phi)\} \quad (\text{D.22})$$

Das GWR  $\varepsilon$  hat die Eigenschaft, dass seine Autokorrelationsfunktion und damit der Erwartungswert (Gleichung D.36) für Werte  $k \neq l$  einen Wert gleich Null annimmt. Es verbleiben demnach nur die Summanden für die gilt  $k = l$ . Ferner nimmt der Code  $B$  nur Werte  $\pm 1$  an. Daher gilt für alle  $k$ :  $B^2(kT_s) = 1$ . Gleichung D.22 vereinfacht sich daher zu:

$$\overline{q_P^2} = 4 \sum_{k=1}^{k_A} \mathbb{E} \{\varepsilon^2(kT_s)\} \mathbb{E} \{\sin^2(\omega_{IF}kT_s + \phi)\} \quad (\text{D.23})$$

Der Erwartungswert für das quadrierte Rauschen ist auf Grund der Mittelwertfreiheit gleich seiner Varianz  $\sigma_\varepsilon^2$ . Der Erwartungswert des quadrierten Trägers (hier mit Amplitude  $A_C = 1$ ) ist nach Gleichung D.17 gleich 0,5. Demzufolge gilt:

$$\overline{q_P^2} = 4 \sum_{k=1}^{k_A} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \quad (\text{D.24})$$

$$= 2k_A \sigma_\varepsilon^2 \quad (\text{D.25})$$

**Linearität.** Eine Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *linear*, wenn  $\forall u, v \in \mathbb{R}$  und  $\forall k \in \mathbb{R}$  gilt:<sup>1</sup>

$$x(u + v) = x(u) + x(v) \quad (\text{D.26})$$

$$x(ku) = kx(u) \quad (\text{D.27})$$

## D.2 Stochastische Prozesse

Dieser Abschnitt stellt die für diese Arbeit benötigten wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen zusammen, wobei sich die Ausführungen an [Pap91] orientieren. Vektorielle Größen werden in diesem Abschnitt fett gedruckt.

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable (kurz: ZV)  $\mathbf{x}$  ist eine Funktion, die jedem Element  $\xi \in \mathcal{A}$  ein Element  $\mathbf{x}(\xi)$  zuordnet und die Bedingungen D.28-D.30 erfüllt. Dabei ist  $\{\mathbf{x} < x\} := \{\xi | \mathbf{x}(\xi) < x\}$ .

<sup>1</sup> Die hier gegebene Definition ist an die Definition in [Bro+05] angelehnt und für die in dieser Arbeit verwendeten Daten angepasst.



$$\{\xi | \mathbf{x}(\xi) < x\} \in \mathcal{A} \quad (\text{D.28})$$

$$P\{\mathbf{x} = \infty\} = 0 \quad (\text{D.29})$$

$$P\{\mathbf{x} = -\infty\} = 0 \quad (\text{D.30})$$

Zufallsvariablen  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  heißen *unabhängig*, wenn die Ereignisse  $\{\mathbf{x} \in A\}$  und  $\{\mathbf{y} \in B\}$  für beliebige  $A \in \mathcal{A}$  und  $B \in \mathcal{B}$  gilt:

$$P\{\mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\} = P\{\mathbf{x} \in A\}P\{\mathbf{y} \in B\} \quad (\text{D.31})$$

Eine Funktion  $F_x : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,  $x \mapsto P\{\mathbf{x} \leq x\}$  heißt *Verteilungsfunktion* von  $\mathbf{x}$ . Mit ihr verbunden ist der Begriff des  $k$ -ten *Perzentils* einer Zufallsvariable  $\mathbf{x}$ . Dies ist der kleinste Wert  $x_k$ , so dass  $k = P\{\mathbf{x} \leq x_k\} = F_x(x_k)$ . Die Ableitung der Verteilungsfunktion  $F_x$  nach  $x$  wird als Dichtefunktion  $f_x$  von  $\mathbf{x}$  bezeichnet. Die Dichtefunktion wird benötigt, um sogenannte Momente von Zufallsvariablen zu definieren. Am gebräuchlichsten sind das erste Moment  $\eta$ , auch Mittelwert bzw. Erwartungswert  $\mathbb{E}\{\mathbf{x}\}$  genannt und das zweite, zentrale Moment  $\sigma_x^2$ , die Varianz. Ihre Definition ist in den Gleichungen D.32 und D.33 gegeben.

$$\eta = \mathbb{E}\{\mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad (\text{D.32})$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}\{\mathbf{x}\})^2 f_x(x) dx \quad (\text{D.33})$$

Während eine Zufallsvariable  $\mathbf{x}$  einem Element  $\xi \in \mathcal{A}$  einen einzelnen Wert  $\mathbf{x}(\xi)$  zuordnet, weist ein *Stochastischer Prozess* einem Element  $\xi \in \mathcal{A}$  eine Funktion zu. Umfasst der Definitionsbereich dieser Funktion die reellen Zahlen, spricht man von *(zeit-)kontinuierlichen, stochastischen Prozessen*. Umfasst er nur eine abzählbare Menge, spricht man von *(zeit-)diskreten, stochastischen Prozessen*. Ein stochastischer Prozess  $\mathbf{x}$  kann demnach als Funktion zweier Variablen  $t$  und  $\xi$  aufgefasst werden. Wird entweder  $t$  oder  $\xi$  fixiert, kann  $\mathbf{x}$  als Funktion nur einer Variablen angesehen werden. Im ersten Fall ist  $\mathbf{x}$  o.g. Zufallsvariable. Für jedes  $t$  lassen sich demnach eine Verteilungs- und eine Dichtefunktion *erster Ordnung*<sup>2</sup> (die abhängig vom jeweiligen  $t$  ist) angeben. Somit sind auch die damit verbundenen Momente (bspw. der Mittelwert) zeitabhängig (vgl. Gleichung D.34).

$$\eta(t) = \mathbb{E}\{\mathbf{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x, t) dx \quad (\text{D.34})$$

Von großem Interesse sind sogenannte *stationäre* Prozesse, da sie besonders angenehme Eigenschaften besitzen. Um diese Prozesse zu definieren, ist zunächst der Begriff der *Verteilung*

<sup>2</sup> Erste Ordnung bezieht sich auf die Anzahl der betrachteten Zeitpunkte, in diesem Fall ein einziger.

$n$ -ter Ordnung zu klären. Wie bereits erläutert, kann bei Fixierung eines Zeitpunktes  $t$  der stochastische Prozess  $\mathbf{x}$  als Funktion von  $\xi$  und damit als Zufallsvariable aufgefasst und eine Verteilungsfunktion angegeben werden. Seien nun  $n$  Zeitpunkte und somit  $n$  Zufallsvariablen  $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_n}$  fixiert. Dann heißt die Verbund-Verteilungsfunktion  $F = P\{\mathbf{x}_{t_1} \leq x_1, \dots, \mathbf{x}_{t_n} \leq x_n\}$  die *Verteilung  $n$ -ter Ordnung*, die zugehörige Verbund-Dichtefunktion  $f$  *Dichte  $n$ -ter Ordnung*.

Unter einem *streng stationärem Prozess*  $\mathbf{x}$  wird nun ein stochastischer Prozess verstanden, dessen Dichte und Verteilung  $n$ -ter Ordnung invariant gegen Zeitverschiebungen  $\tau$  sind, das heißt es gilt:

$$f_{x_{t_1}, \dots, x_{t_n}} = f_{x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau}} \quad (\text{D.35})$$

Ein Prozess  $\mathbf{x}$  heißt *schwach stationär*, wenn sein Erwartungswert (Gleichung D.34) zeitunabhängig, also konstant ist und seine in Gleichung D.36 definierte Autokorrelation nur von der Zeitverschiebung  $\tau$ , nicht aber der  $t_i$  abhängt (Gleichung D.37).

$$R(t_1, t_2) = \mathbb{E}\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} \quad (\text{D.36})$$

$$R(\tau) = \mathbb{E}\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)\} \quad (\text{D.37})$$

Neben der Autokorrelation ist die in Gleichung D.38 definierte Autokovarianz von Bedeutung.

$$c_R(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2) \quad (\text{D.38})$$

Gilt  $c_R(t_1, t_2) = 0 \forall t_1, t_2$  mit  $t_1 \neq t_2$  heißt  $\mathbf{x}$  *unkorreliert* oder *Weißes Rauschen*. Gilt ferner, dass  $\mathbf{x}_{t_1}$  und  $\mathbf{x}_{t_2} \forall t_1, t_2$  mit  $t_1 \neq t_2$  unabhängig sind, heißt  $\mathbf{x}$  *Strenges Weißes Rauschen* (engl. *strictly white noise*)<sup>3</sup>. Ist der stochastische Prozess  $\mathbf{x}$  zusätzlich normal, das heißt, sind die  $\mathbf{x}_{t_i}$  normal verteilt, spricht man von *Strengem Gaußschen Weißen Rauschen* (kurz: *Strenges GWR*).

<sup>3</sup> Sind zwei ZV unabhängig, sind sie auch unkorreliert. Die Umkehrung muss nicht gelten.