

# **TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN**

Fakultät für Bauingenieurwesen

Professur für Straßenbau

## ***Methoden zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Straßenplatten aus Beton***

*Procedures for the Calculation of the Probability of Failure of  
Concrete Pavement Slabs*

### **Dissertation**

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen der  
Technischen Universität Dresden zur  
Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte  
Dissertation

von

Dipl.-Ing. Axel Riwe

geb. am 27.8. 1961

in Anklam

Erster Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Frohmut Wellner (TU Dresden)

Zweiter Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Markus Oeser (RWTH Aachen)

Tag der Verteidigung: 24.8.2015

## **Danksagung**

Die vorliegende Arbeit wurde inspiriert durch verschiedene wissenschaftliche Fragestellungen welche in den letzten Jahren bei der Bearbeitung von Forschungsvorhaben der Bundesanstalt für Straßenwesen auftraten. Ich möchte mich deshalb bei allen Berufskollegen bedanken, mit denen ich in diesem Zusammenhang konstruktiv zusammenarbeiten durfte und deren Anregungen und Ratschläge in dieser Arbeit ihren Niederschlag fanden.

Besonderer Dank gebührt selbstverständlich meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Frohmüt Wellner und meinem zweiten Gutachter Prof. Dr.-Ing. habil. Markus Oeser, welche durch ihre Bereitschaft zur Übernahme der Gutachtertätigkeit diese Arbeit erst ermöglichten und durch vielfache Hinweise, Ratschläge und Anregungen die Arbeit maßgebend beeinflussten.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinem Freund und Geschäftspartner Stephan Villaret und bei Frau Dr.-Ing. Lissi Pfeifer für die langjährige konstruktiv-kritische Begleitung meiner wissenschaftlichen Arbeit.

## Kurzfassung

Die Dimensionierung einer Betonfahrbahn zielt darauf ab, den Anteil der im Nutzungszeitraum versagenden Platten auf ein akzeptables Maß zu begrenzen. Der Anteil ausgefallener Platten entspricht der Versagenswahrscheinlichkeit der einzelnen Platte. Damit ergibt sich die Notwendigkeit, die Versagenswahrscheinlichkeit zu berechnen. Innerhalb der vorliegenden Arbeit werden grundlegende Methoden und Verfahrensweisen zur Lösung dieser Aufgabe entwickelt.

Es wird gezeigt, wie die für die Quantifizierung der Versagenswahrscheinlichkeit entscheidenden Streuungen der Einflussgrößen mathematisch beschrieben und im Dimensionierungsverfahren berücksichtigt werden können. Dabei wird regelmäßig Bezug genommen auf das in Deutschland eingeführte Dimensionierungsmodell der RDO Beton [2].

Die Grundlage für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit liefern die Methoden der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie der Zuverlässigkeitstheorie. Es wird gezeigt, dass sowohl die mathematisch exakte Lösung, wie auch verschiedene Näherungsverfahren für die Problematik der Betonfahrbahnen anwendbar sind. Näher untersucht werden die Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung (FORM) sowie die Monte-Carlo-Methode. Die jeweiligen Vor- und Nachteile werden analysiert. Es zeigt sich, dass für die Anwendung des FORM-Algorithmus das Berechnungsmodell der RDO Beton modifiziert werden muss.

Der zeitliche Bezug der Berechnung kann über die Benutzung von Extremwertverteilungen, die Modellierung stochastischer Prozesse oder die Einführung einer Schadensakkumulationshypothese hergestellt werden.

Besondere praktische Bedeutung hat die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit für den Nutzungszeitraum mit zeitlich varianten Bedingungen. Für diesen Fall werden vier verschiedene Lösungsansätze aufgezeigt. Um die teilweise sehr hohen Rechenzeiten zu minimieren, werden Näherungslösungen entwickelt. Die praktische Eignung wird mit beispielhaften Berechnungen demonstriert.

Es zeigt sich, dass die Berechnungsergebnisse stark davon abhängen, wie sich die Werte einzelner Parameter über den Nutzungszeitraum entwickeln. Die betreffenden zeitlichen Verlaufsfunktionen sind gegenwärtig nur unzureichend bekannt.

Um eine hinreichend verlässliche Prognose zu berechnen, sind alle Berechnungsverfahren möglichst objektbezogen zu kalibrieren.

## **Abstract**

The dimensioning of a concrete pavements aims to limit the percentage of failing slabs to an acceptable level. The proportion of failed slabs corresponds to the probability of failure of each slab. This results in the need to calculate the probability of failure. Within the present work, basic methods and procedures for solving this problem are being developed.

It is shown how the variations of parameters can be mathematically described and considered in the dimensioning process. Reference is frequently made to the model of RDO Beton [2].

The methods of statistics and probability theory, and reliability theory provide the basis for calculating the probability of failure. It is shown that both the mathematically exact solution and various approximation methods as well are applicable to the problem of concrete pavements. Be examined more closely the reliability theory 1st order (FORM) and Monte Carlo method. The respective advantages and disadvantages are analyzed. It turns out that the calculation model of the RDO concrete has to be modified for the use of FORM algorithm.

The temporal relation of the calculation can be made on the use of extreme value distributions, modeling of a stochastic process or the introduction of a damage accumulation hypothesis.

Particular practical significance has to calculate the probability of failure for the period of use with time-variant conditions. In this case, four different approaches are discussed. Approximate solutions to minimize the sometimes very high computation times has been developed. The practical suitability is demonstrated by exemplary calculations.

It turns out that the calculation results depend strongly on how to develop the values of individual parameters over the period of use. These time course functions are insufficiently known at present.

To calculate a sufficiently reliable forecast, all calculation methods are possible to calibrate object-related.

## Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Motivation.....	1
1.1	Wirtschaftliche Bedeutung der untersuchten Problematik.....	1
1.2	Notwendigkeit und Nutzen der probabilistischen Berechnung .....	2
1.3	Einordnung der Arbeit .....	4
1.4	Vorgehensweise.....	4
2	Das Berechnungsmodell der RDO-Beton .....	6
3	Die mathematische Beschreibung der Streuungen.....	8
3.1	Parametrische Methoden .....	8
3.2	Nichtparametrische Methoden.....	9
3.3	Verteilungsfunktionen für die Einflussgrößen bei der Berechnung von Betonfahrbahnplatten.....	11
3.3.1	Allgemeines Vorgehen zur Definition von Verteilungsfunktionen .....	11
3.3.2	Verteilungsfunktionen für die Streuung der Deckendicke.....	14
3.3.3	Verteilungsfunktionen für die Streuung der Betonfestigkeit.....	15
3.3.4	Verteilungsfunktionen für die Verkehrsbelastung.....	16
3.3.5	Verteilungsfunktionen für die Temperaturbelastung.....	18
3.3.6	Modellunsicherheiten .....	19
3.3.7	Verteilungsfunktionen für weitere Einflussgrößen.....	20
4	Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit .....	21
4.1	Entwicklung der Zuverlässigkeitstheorie .....	21
4.2	Fundamentalfall.....	21
4.3	Integration von mehrdimensionalen Grenzzustandsfunktionen.....	23
4.4	Näherungsverfahren (FORM-Algorithmus).....	30
4.5	Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Methode).....	41
4.6	Mehrere Versagensmechanismen.....	46
4.7	Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit bei Nutzung der Finite-Elemente- Methode.....	47
4.8	Interpretation der Ergebnisse .....	49
5	Versagenswahrscheinlichkeit für bestimmte Zeiträume .....	50
5.1	Bedeutung für die Dimensionierung von Betonstraßen.....	50
5.2	Extremwertverteilungen.....	50
5.3	Berechnung der Lebensdauerverteilung bei zeitlich invarianten Einflussgrößen .....	55
5.4	Berechnung der Lebensdauerverteilung bei zeitlich varianten Einflussgrößen .....	58
5.4.1	Definition und Bedeutung .....	58
5.4.2	Berechnung durch Integration über den Ausfallbereich .....	58
5.4.3	Berechnung mit der Monte-Carlo-Methode.....	59
5.4.3.1	Prinzipielles Vorgehen.....	59
5.4.3.2	Berechnungsfälle .....	60
5.4.3.3	Ansatz der zeitlich veränderlichen Einflussgrößen .....	62

5.4.3.4	Berechnung der Zufallswerte.....	69
5.4.3.5	Berechnungsergebnisse.....	71
5.4.3.6	Bewertung des Verfahrens.....	74
5.4.4	Modellierung der Belastung als Poissonprozess .....	76
5.4.4.1	Beschreibung des Verfahrens .....	76
5.4.4.2	Verteilungsfunktion für die Grenzzustandsfunktion.....	77
5.4.4.3	Praktische Berechnung der Lebensdauervertelung .....	78
5.4.4.4	Berechnungsergebnisse.....	79
5.4.4.5	Bewertung des Verfahrens.....	82
5.4.5	Berechnung mit Hilfe der Miner-Regel.....	83
5.4.5.1	Beschreibung des Verfahrens .....	83
5.4.5.2	Verteilungsfunktion für die Spannungen .....	85
5.4.5.3	Berechnungsergebnisse.....	87
5.4.5.4	Bewertung des Verfahrens.....	89
5.4.6	Zusammenfassung und Ausblick.....	91
6	Thesen.....	93
7	Literatur.....	95

## 1 Einführung und Motivation

### 1.1 Wirtschaftliche Bedeutung der untersuchten Problematik

Für ein hoch entwickeltes Industrieland wie die Bundesrepublik Deutschland ist die verkehrstechnische Infrastruktur von essentieller Bedeutung. Entsprechend werden Jahr für Jahr beträchtliche finanzielle Mittel aufgewendet, um diese Infrastruktur zu erhalten und auszubauen. Allein für den Neubau und die Erhaltung der Bundesfernstraßen sind jährlich durchschnittlich rund 5 Mrd. Euro erforderlich.

Gerade hoch belastete Autobahnen mit herausragender verkehrstechnischer Bedeutung sind oftmals in Beton ausgeführt. Deshalb wird ein großer Anteil der finanziellen Mittel für Betonstraßen aufgewendet. Entsprechend hoch ist der wirtschaftliche Nutzen, welcher durch Verbesserungen in diesem Bereich erzielt werden kann.

Die Dimensionierung des Straßenoberbaus erfolgt in Deutschland, wie auch in den meisten anderen Ländern, im Regelfall auf der Grundlage von Erfahrungswerten. In Abhängigkeit von der zu erwartenden Verkehrsstärke und einiger anderer Randbedingungen wird aus einem Katalog anerkannter Regelbauweisen eine Konstruktion ausgewählt. Die entsprechende technische Vorschrift ist die Richtlinie für die Standardisierung des Oberbaus von Verkehrsflächen (RStO 12, [47]). Im Zuge der Dimensionierung wird also praktisch die Erfahrung der letzten Jahrzehnte in die Zukunft extrapoliert. Dieses Vorgehen ist aus verschiedenen Gründen problematisch.

Die Verkehrsbelastung hat in den vergangenen Jahrzehnten stark zugenommen und dieser Trend wird sich voraussichtlich auch in der Zukunft fortsetzen. Gleichzeitig gab es Weiterentwicklungen auf dem Gebiet der Baustoffe und auch der Bauweisen. Die Übertragung der Erfahrungswerte aus vergangenen, teilweise weit zurückliegenden Zeiträumen ist deshalb nur bedingt gerechtfertigt.

Darüber hinaus ist festzustellen, dass der Bauweisenkatalog der RStO nicht aus systematisch erhobenen empirischen Daten abgeleitet wurde. Die RStO spiegelt die Erfahrungswerte also nur in pauschaler Form wider. Es ist deshalb unmöglich, systematische Zusammenhänge zwischen den einzelnen Einflussfaktoren und der Tragfähigkeit und Dauerhaftigkeit des Oberbaus zu quantifizieren. Genau dies wäre aber die Voraussetzung für eine zielgerichtete Optimierung des Oberbaus.

Um das Dimensionierungsverfahren für den Oberbau effizienter zu gestalten, ist es also erforderlich, ein theoretisches Modell zu implementieren, welches die Zusammenhänge zwischen den wesentlichen Einflussgrößen hinreichend genau beschreibt. Ein solches Modell wurde von PFEIFER und VILLARET [3] entwickelt und kann im deutschen Betonstraßenbau als Grundlage für die rechnerische Dimensionierung verwendet werden. Die betreffende technische Vorschrift ist die RDO-Beton [2]. Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zur Weiterentwicklung des Berechnungsverfahrens zur rechnerischen Dimensionierung von Betondecken geleistet werden.

## 1.2 Notwendigkeit und Nutzen der probabilistischen Berechnung

Bei der Dimensionierung von Tragwerken werden einwirkende Größen (E) und widerstehende Größen (R) gegenübergestellt. Im Betonstraßenbau sind dies das durch die Einwirkungen erzeugte Moment und das aufnehmbare Moment der Betonplatte. Im Allgemeinen wird gefordert:

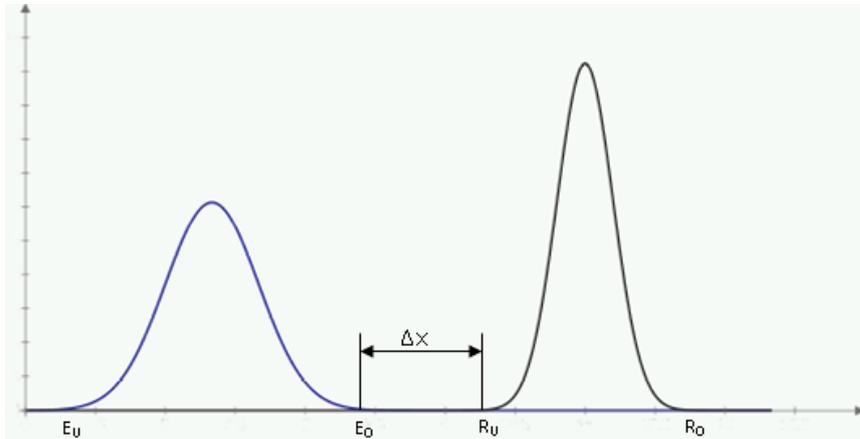
$$R > E \quad (1-1)$$

E – einwirkende Größe

R – widerstehende Größe

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so tritt Versagen ein.

Den Größen E und R werden im Zuge der Berechnung normalerweise eindeutige Zahlenwerte zugeordnet. Praktisch sind diese Größen aber einer gewissen Streuung unterworfen. In Abbildung 1-1 sind beispielhaft solche Streuungsbereiche mit ihren Grenzen  $E_U$  und  $E_O$ , bzw.  $R_U$  und  $R_O$  abgebildet.



**Abbildung 1-1: Darstellung der Streuung einer einwirkenden und einer widerstehenden Größe ohne Überschneidung der Streuungsbereiche**

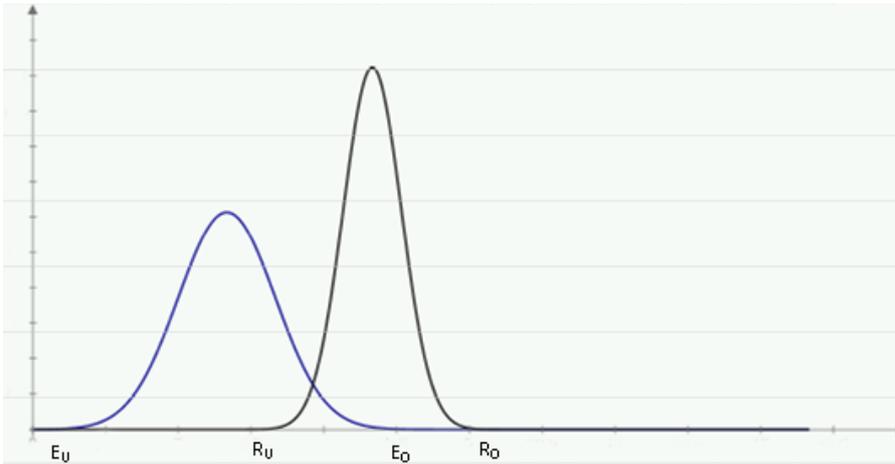
Im dargestellten Fall gibt es keine Überschneidung der Streuungsbereiche. Es gilt:

$$R_U > E_O \quad (1-2)$$

Damit ist die Ungleichung (1-1) immer erfüllt. Der Versagensfall ist absolut ausgeschlossen. Dies gilt unabhängig von der Größe des Abstandes  $\Delta x$ .

In der Praxis tritt dieser Fall aber kaum auf. Es ist vielfach nicht möglich, absolut gültige Grenzen für die Streuungsbereiche anzugeben. In anderen Fällen gibt es zwar solche Grenzen (z.B: Betondeckendicke = 0,0cm), aber diese liegen in praktisch nicht relevanten Bereichen.

Damit ist die Einhaltung der Ungleichung 1-2 nicht gesichert. Es kommt zu einer Überschneidung der Streuungsbereiche. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 1-2 dargestellt.



**Abbildung 1-2: Darstellung der Streuung einer einwirkenden und einer widerstehenden Größe mit Überschneidung der Streuungsbereiche**

Weil  $E_O$  größer ist als  $R_U$ , kann es zum Versagen ( $E > R$ ) kommen. Es ist aber ersichtlich, dass das Versagen ein seltenes Ereignis bleibt, sofern die Mittelwerte der Streuungsbereiche hinreichend weit auseinander liegen. Solange die Einhaltung der Bedingung (1-2) nicht gesichert ist (was normalerweise der Fall ist), verbleibt aber ein Restrisiko. Die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  ist größer als 0.

$$P(E > R) = P_f > 0 \quad (1-3)$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  ist damit ein Maß für die Sicherheit eines Bauteiles.

Es ist offensichtlich, dass die Größe der Versagenswahrscheinlichkeit kausal mit der Streuung der Einflussgrößen verbunden ist. Für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit müssen deshalb die Streuungen mathematisch beschrieben und in ihren Auswirkungen auf das Systemverhalten bestimmt werden. Dies ist mit probabilistischen Berechnungsmethoden möglich.

Im Bauwesen ist es meistens notwendig, eine Dimensionierung so durchzuführen, dass der Versagensfall so selten wird, dass er praktisch überhaupt nicht auftritt. Auch das gelegentliche Versagen eines tragenden Bauteils ist nicht akzeptabel, weil damit eine Gefahr für Leib und Leben verbunden ist.

Im Straßenbau ist dies anders. Hier ist es vertretbar und ökonomisch geboten, den Versagensfall nicht vollkommen auszuschließen. Die Dimensionierung muss also nicht sicherstellen, dass überhaupt keine Platte versagt, sondern der Anteil der versagenden Platten ist auf ein akzeptables Maß zu begrenzen. Dies bedeutet aber, dass der Anteil der versagenden Platten berechnet werden muss. Bei einer hinreichend großen Anzahl von Platten entspricht der Anteil der versagenden Platten der Versagenswahrscheinlichkeit der einzelnen Platte.

Damit ist die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit die Voraussetzung für eine Optimierung des Straßenaufbaus im Dimensionierungsprozess. Die Auswirkungen der Änderungen einzelner Parameter werden quantifizierbar.

Konkret gesagt wird es möglich, z.B. zu entscheiden, ob es besser ist, die Betonklasse zu erhöhen oder die Deckendicke zu vergrößern, bzw. es wird kalkulierbar, in welchem Maße der Erhaltungsaufwand größer wird, wenn man keine dieser Maßnahmen ergreift.

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist auch eine zentrale Kenngröße, um die strukturelle Substanz vorhandener Straßen zu beschreiben. Hier ist sie Grundlage für die Berechnung der Restnutzungsdauer.

### 1.3 Einordnung der Arbeit

Die Betonstraßenplatte ist zwar für sich betrachtet ein relativ einfaches Bauteil, das Beanspruchungsverhalten ist jedoch sehr komplex, und kann durch die gegenwertig verfügbaren Berechnungsmodelle noch nicht mit hinreichender Genauigkeit erfasst werden. Darüber hinaus gibt es innerhalb des Nutzungszeitraumes eine Anzahl von Einflüssen, welche in nicht mit hinreichender Genauigkeit vorausgesehen werden können (z.B. Fugenverschmutzung, temporäre Änderungen der Lage der Fahrspuren u.a.). Damit ist es beim gegenwärtigen Erkenntnisstand praktisch unmöglich, ein Berechnungsverfahren für die Versagenswahrscheinlichkeit zu definieren, welches für den gesamten Nutzungszeitraum Ergebnisse mit hinreichender Genauigkeit und Sicherheit liefert. Dies ist vermutlich die Ursache dafür, dass innerhalb der gegenwärtig international vorhandenen Dimensionierungssysteme dieses Problem kaum behandelt wird. Gewöhnlich wird das Verfahren so kalibriert, dass ein ausreichendes, nicht näher definiertes Sicherheitsniveau entsteht.

Im neuen amerikanischen Designguide für Betonstraßen [44], welcher ein sehr detailliertes, FEM-basiertes Dimensionierungsverfahren beinhaltet, wird die Versagenswahrscheinlichkeit über eine rein empirische Funktion bestimmt. Diese ist allerdings in einem aufwendigen Verfahren für jeden Bundesstaat zu kalibrieren.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Grundlagen für ein Berechnungsverfahren für die Versagenswahrscheinlichkeit zu schaffen, welches dann relativ einfach und objektnah kalibriert werden kann, und damit qualitativ bessere Ergebnisse liefert.

Eine besondere Relevanz haben die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Methoden für die Bewertung der strukturellen Substanz vorhandener Fahrbahnen. Während es bei einer Dimensionierungsaufgabe geboten ist, im Zweifelsfall eine auf der sicheren Seite liegende Berechnung durchzuführen, kommt es bei der Substanzbewertung darauf an, ein möglichst genaues Ergebnis zu liefern. Da die konkret zu bewertende Fahrbahn bereits existiert, gibt es die Möglichkeit, die vorhandene Ausfallrate zum Bemessungszeitpunkt empirisch zu bestimmen. Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit kann damit objektbezogen kalibriert werden, was die Genauigkeit des Verfahrens entscheidend verbessert.

### 1.4 Vorgehensweise

Für die Lösung der skizzierten Aufgabenstellung konnte auf die Methoden der Zuverlässigkeitstheorie zurückgegriffen werden, welche für den Hochbau und den Ingenieurbau entwickelt wurden. Die aus diesen Bereichen bekannten Verfahren wurden für den Betonstraßenbau adaptiert und auf das Berechnungsmodell der RDO Beton angewendet.

Die bekannten Berechnungsverfahren wurden zunächst auf ihre Tauglichkeit für den konkreten Anwendungsfall geprüft und dann dafür benutzt, die Versagenswahrscheinlichkeit einer zufälligen Platte bei einer zufälligen Belastung zu

berechnen (Abschnitt 4). Dabei konnte teilweise auf Ergebnisse zurückgegriffen werden, welche im Rahmen eines Forschungsvorhabens der Bundesanstalt für Straßenwesen [6] erzielt worden waren.

Im folgenden Schritt wurde ein zeitlicher Bezug für die berechneten Versagenswahrscheinlichkeiten hergestellt (Abschnitt 5). Zunächst wurde dafür angenommen, dass die Einflussgrößen über den Betrachtungszeitraum zeitlich konstant bleiben (zeitlich invarianter Fall). Danach wurde die eigentlich praktisch relevante Fragestellung nach der Versagenswahrscheinlichkeit im zeitlich varianten Fall behandelt. Für die Lösung dieser Problematik wurden vier Berechnungsmethoden entwickelt und bezüglich ihrer Praxistauglichkeit analysiert.

## 2 Das Berechnungsmodell der RDO-Beton

In Deutschland wurde in den letzten Jahren für die rechnerische Dimensionierung von Betonstraßen das Berechnungsmodell der RDO-Beton [2] eingeführt. Es wurde von PFEIFER und VILLARET entwickelt. [3]

In diesem Berechnungsverfahren werden aufnehmbare und vorhandene Biegemomente in der Betonplatte für verschiedene Grenzlastfälle gegenübergestellt. Für die Berechnung der Biegemomente infolge Verkehrslast wird die bekannte Formel von WESTERGAARD in der Modifikation von TELLER und SUTHERLAND benutzt.

Die Formel liefert das maßgebende Biegemoment in einer rechteckigen Platte, welches durch eine lokal begrenzte Flächenlast erzeugt wird, die in der Mitte eines Plattenrandes positioniert ist.

$$M_{EV} = m_{bL} \cdot m_{bD} \cdot F_d \cdot 1000 \cdot \left[ 0,55 \cdot \lg \left( \frac{l_v}{b} \right) + 0,1 \cdot \frac{b}{l_v} - 0,011 \right] \quad [\text{Nmm/mm}] \quad (2-1)$$

$M_{EV}$  – Biegemoment infolge Verkehrslast

$F_d$  – Bemessungswert der Radlast (siehe [2])

$m_{bL}$  – Faktor zur Berücksichtigung von Hohllagerungen  
 (Lagerungsfaktor, siehe [2])

$m_{bD}$  – Faktor zur Berücksichtigung der Querkraftübertragung in den Fugen  
 (Dübelfaktor, siehe [2])

$$b = \sqrt{1,6 \cdot r^2 + h_d^2} - 0,675 \cdot h_d > r \quad [\text{mm}] \quad \text{für : } 2 \cdot r > h_d \quad (2-2)$$

$$b = \sqrt{1,6 \cdot r^2 + h_d^2} - 0,675 \cdot h_d + \frac{h_d}{2} \quad [\text{mm}] \quad \text{für : } 2 \cdot r \leq h_d \quad (2-3)$$

$$r = \sqrt{\frac{\gamma_{E2} \cdot F^{(n)} \cdot 1000}{p^{(n)} \cdot \gamma_{EK} \cdot \pi}} \quad (2-4)$$

$\gamma_{E2}$ ,  $\gamma_{EK}$  – Anpassungsfaktoren (siehe [2])

$p^{(n)}$  – Regelkontaktdruck (siehe [2])

$F^{(n)}$  – Grundwert der Radlast

$h_d$  – Dicke der Betondecke

Die Biegemomente für die Temperatureinwirkung werden mit dem Formelwerk von Eisenmann berechnet. Die Formel für das Biegemoment in [2] lautet:

$$M_{ET} = \alpha_{cT} \cdot \gamma_{tot} \cdot E_{ctm} \cdot \frac{h_d^3 \cdot m_{T1} \cdot m_{T2} \cdot m_{T3} \cdot \delta_T}{12} \quad [\text{Nmm/mm}] \quad (2-5)$$

$\gamma_{tot}$ ,  $m_{T1}$ ,  $m_{T2}$ ,  $m_{T3}$  – Anpassungsfaktoren (siehe [2])

$\alpha_{cT}$  – Wärmeausdehnungskoeffizient Beton [1/K]

$E_{ctm}$  – mittleres E-Modul Beton

$\delta_T$  – Temperaturgradient über die Querschnittshöhe

Die Spannung ergibt sich damit zu:

$$\sigma_c = \frac{M_{EV} + M_{ET}}{W} \quad (2-6)$$

W – Widerstandsmoment des Plattenquerschnitts

$\sigma_c$  – Betonspannung infolge der Biegemomente  $M_{EV}$  und  $M_{ET}$

Die Dimensionierung erfolgt mit rein deterministischen Berechnungsverfahren. Die Versagenswahrscheinlichkeit wird allein aus der Streuung der Betonfestigkeit abgeleitet. Es gilt:

$$P_f = F_{ct}(\sigma_c) \quad (2-7)$$

$F_{ct}$  – Verteilungsfunktion der Betonzugfestigkeit

Eine vollständige Beschreibung des Berechnungsmodells ist in [2] enthalten.

Für die praktische Anwendung probabilistischer Verfahren wird im Rahmen dieser Arbeit im Regelfall das Berechnungsmodell der RDO Beton benutzt. Es ist aber festzuhalten, dass diese Verfahren nicht an ein bestimmtes Berechnungsmodell gebunden sind, und prinzipiell auch für beliebige andere Berechnungsmodelle adaptiert werden können.

### 3 Die mathematische Beschreibung der Streuungen

#### 3.1 Parametrische Methoden

Ziel dieser Methodik ist es, die Streuung einer Größe mit einer mathematischen Formel zu beschreiben. Ist ein passender Formeltyp gefunden, so ist eine konkrete Streuung durch die Angabe der Parameter der Formel vollständig festgelegt. Damit ist die weitere mathematische Verarbeitung der Streuungsinformation entscheidend vereinfacht.

Die entsprechenden Formeln werden Verteilungsfunktionen genannt. Die Verteilungsfunktion  $F(x)$  für eine Größe  $X$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass diese Größe einen Wert annimmt, welcher kleiner ist als ein bestimmter Wert  $x$ .

$$P(X < x) = F(x) \quad (3-1)$$

Die mathematische Struktur der Verteilungsfunktionen stellt sicher, dass immer gilt:

$$F(x) \leq 1 \quad (3-2)$$

Die erste Ableitung der Verteilungsfunktion ist die Dichtefunktion  $f(x)$ . Sie gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Wert in einem bestimmten Bereich liegt.

$$P(x \leq X < x + dx) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (3-3)$$

Die Dichtefunktion kann auch Werte  $>1$  annehmen.

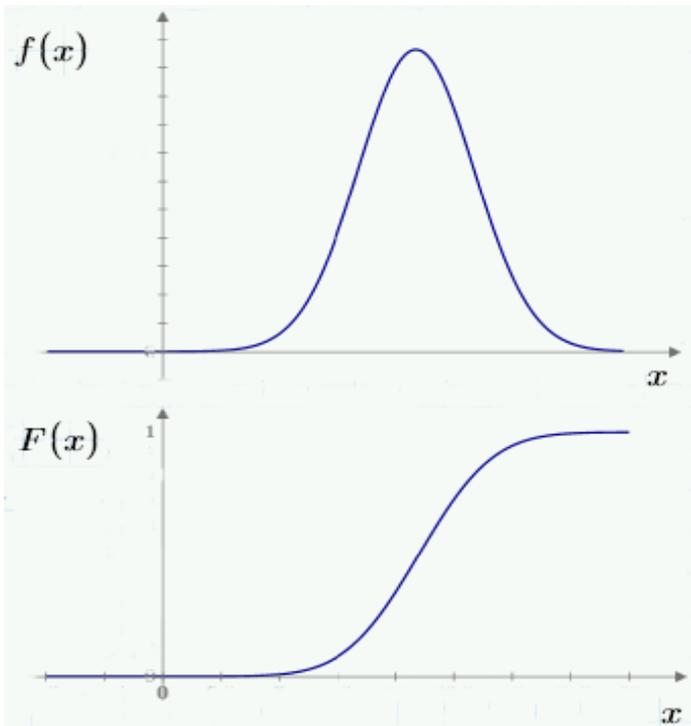


Abbildung 3-1: Bild einer Verteilungsfunktion (unten) mit zugehöriger Dichtefunktion

Die Integration von (3-3) liefert:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (3-4)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen Minus- und Plusunendlich einnimmt ist offensichtlich gleich 1. Damit gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (3-5)$$

Die mathematische Beschreibung der probabilistischen Verfahren zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit setzt im Allgemeinen eine parametrische Beschreibung der Streuungen voraus.

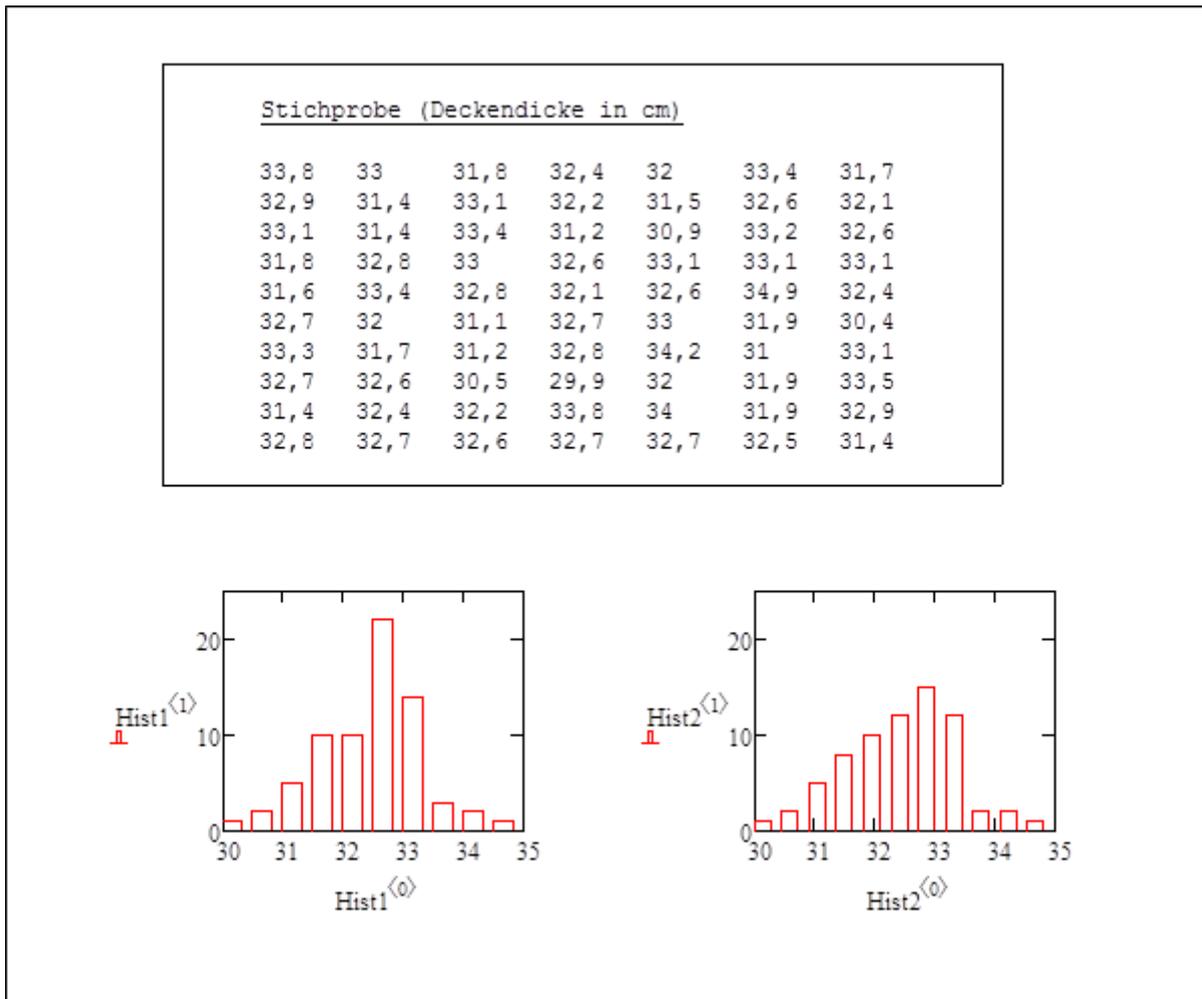
Für weiter gehende Erläuterungen zur Mathematik der Verteilungsfunktionen wird auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen (z.B. [10], [13], [15], [17]).

### 3.2 Nichtparametrische Methoden

Bei Anwendung nichtparametrischer Methoden verzichtet man darauf, die Beschreibung der Streuung durch eine geschlossene Formel auszudrücken. Dies ist vor allem immer dann sinnvoll, wenn nicht bekannt ist, mit welchem Funktionstyp sich die Streuung der Grundgesamtheit hinreichend zutreffend beschreiben lässt. Um die Streuungen mathematisch zu erfassen werden dann allerdings mehr oder weniger umfangreiche Datensätze erforderlich.

Oftmals werden nichtparametrische Methoden angewendet, um die Streuung einer Stichprobe zu visualisieren, und damit einen ersten Anhaltspunkt für einen passenden Verteilungsfunktionstyp zu erhalten. Es ist aber auch möglich, mit nichtparametrisch beschriebenen Streuungen zu rechnen.

Eine grundlegende nichtparametrische Beschreibungstechnik ist das Histogramm. Für das Histogramm wird der Wertebereich der zu beschreibenden Daten aus einer Stichprobe in n gleich große Klassen aufgeteilt. Dann wird der Anteil der Stichprobenwerte ermittelt, welcher in jeder Klasse liegt. Das Ergebnis wird üblicherweise grafisch dargestellt. Das Histogramm gibt damit Auskunft über die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Wert in einem bestimmten Bereich (einer Klasse) liegt. Damit ist das Histogramm ein Analogon zur Dichtefunktion.



**Beispiel 3-1: Histogramme für eine reale Stichprobe aus Messwerten für die Deckendicke einer Betonfahrbahn**

Beispiel 3-1 zeigt zwei aus einer realen Stichprobe erzeugte Histogramme. Das linke Histogramm besteht aus 10 Klassen und das rechte aus 11. Es ist augenfällig, dass sich die Bilder deutlich unterscheiden, obwohl sie auf denselben Daten basieren und die Klasseneinteilung nur geringfügig verändert ist. Das Histogramm wird also stark durch die Wahl der Klasseneinteilung beeinflusst. Für die Wahl der Klasseneinteilung (und damit der Klassenbreite) gibt es keine verbindlichen Vorschriften. Hilfreich sind hier einige Faustregeln (siehe [10]), aber letztlich bleibt die Festlegung der Klassenbreite eine subjektive Entscheidung.

Um diesen Nachteil zu beheben, wurden Methoden entwickelt, welche eine kontinuierliche Darstellung der Streuung ermöglichen. Diese sogenannten Kerndichteschätzer erzeugen eine Art gleitendes Histogramm. Die allgemeine Formel für die Kern-Dichteschätzer lautet:

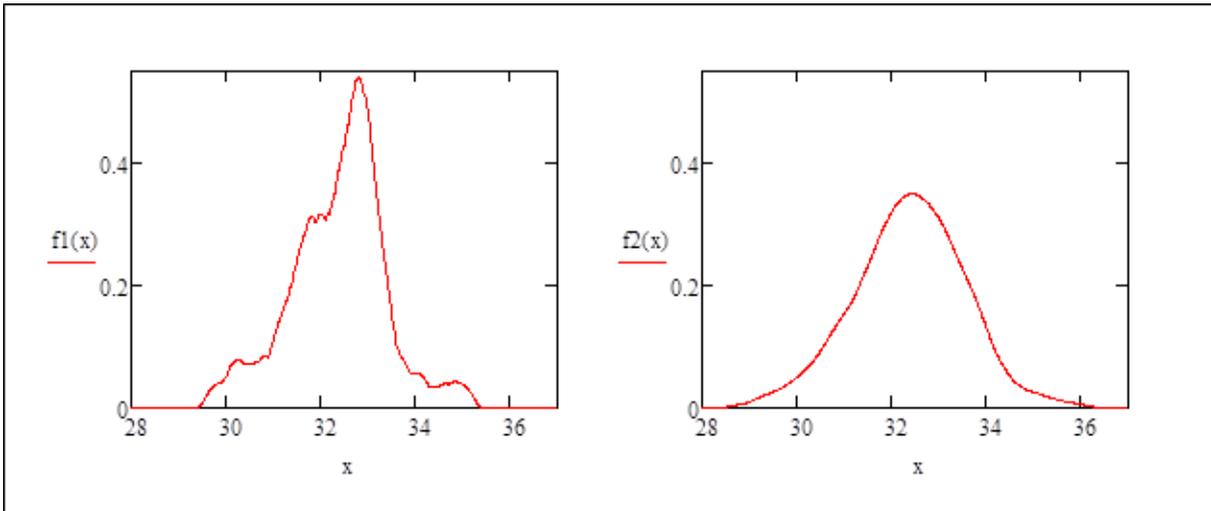
$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n \cdot h_{bb}} \cdot \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h_{bb}}\right) \quad (3-6)$$

- $x_i$  – Stichprobenwert
- $n$  – Stichprobenumfang (Anzahl der Einzelwerte)
- $h_{bb}$  – Bandbreite
- $K$  – Kernfunktion.

Es gibt verschiedene geeignete Kernfunktionen (siehe [10]). Gewissen Optimalitätskriterien genügt der Epanechnikov-Kern:

$$K(u) = \frac{3}{4} \cdot (1 - u^2) \text{ für } -1 \leq u < 1 \text{ sonst } K(u) = 0 \quad (3-7)$$

Der Kern-Dichteschätzer berücksichtigt alle Werte innerhalb eines Fensters mit der Bandbreite  $h_{bb}$ . Die mittig liegenden Werte werden dabei höher gewichtet als die am Rand liegenden. Dies ist eine entscheidende Verbesserung zum Histogramm, welches den am Rand einer Klasse liegenden Werten die gleiche Gewichtung zuweist, wie den mittig liegenden.



**Beispiel 3-2: Mit den Werten aus Beispiel 3-1 erzeugte Kern-Dichteschätzfunktionen mit verschiedenen Bandbreitenparametern**

Beispiel 3-2 zeigt zwei Kerndichteschätzfunktionen, welche mit den Werten aus Beispiel 3-1 erzeugt wurden. Das linke Bild wurde mit einem Bandbreitenparameter von  $h_{bb}=0,5\text{cm}$  erzeugt, das rechte mit  $h_{bb}=1,5\text{cm}$ . Es ist deutlich, dass ein größerer Bandbreitenparameter zu einem glatteren Kurvenverlauf führt. Die generelle Form der Streuung kann dadurch deutlicher hervortreten. Zufällige Unregelmäßigkeiten werden geglättet. Andererseits gehen Informationen aus der Stichprobe verloren. Der geeigneten Festlegung der Bandbreite kommt also eine große Bedeutung zu. Hinweise zur Wahl einer optimalen Bandbreite sind in [11] zu finden.

### 3.3 Verteilungsfunktionen für die Einflussgrößen bei der Berechnung von Betonfahrbahnplatten

#### 3.3.1 Allgemeines Vorgehen zur Definition von Verteilungsfunktionen

Die Verteilungsfunktionen müssen von empirischen Daten abgeleitet werden. Dabei ist sicherzustellen, dass die jeweiligen Daten aus einer Grundgesamtheit stammen.

Bestehen diesbezüglich Zweifel, so können geeignete Testverfahren (Homogenitätstests) Aufschluss geben. Nähere Angaben zu diesen Tests findet man z.B. in [20] oder [39].

Zur Sicherung einer homogenen Datenbasis ist es weiter erforderlich, eventuell vorhandene Ausreißer aus der Stichprobe auszusondern. Entsprechende statistische Verfahren (Ausreißertests) stehen in großer Zahl zur Verfügung (z.B.: Gruppstest, siehe

auch [12]). In jedem Fall ist aber zu prüfen, ob die Voraussetzungen für die Anwendung des jeweiligen Testverfahrens (Stichprobenumfang, Verteilung der Grundgesamtheit) hinreichend gut erfüllt sind.

Bei der Suche nach geeigneten Verteilungsfunktionen für die einzelnen Einflussgrößen ist zu beachten, dass der Gegenstand der Mathematik immer abstrakte Objekte sind. Die Beschreibung realer Phänomene mit den Mitteln der Mathematik stellt also stets eine Idealisierung dar. Es kann also nie darum gehen, die „richtige“ Verteilungsfunktion für eine real existierende Größe zu finden, sondern nur jeweils hinreichend geeignete. Es ist somit auch möglich, dass verschiedene Verteilungsfunktionen geeignet sind die Streuung einer Größe hinreichend genau zu beschreiben. Ebenso kann es sein, dass sich keine Verteilungsfunktion findet mit deren Hilfe sich die Streuung in befriedigender Qualität abbilden lässt. In diesem Fall sollte man auf nichtparametrische Verfahren zurückgreifen.

Um eine Verteilungsfunktion zu finden, sind zwei Aufgaben zu lösen:

- Finden eines geeigneten Funktionstyps
- Anpassung der Parameter der Funktion.

Zur Auffindung eines geeigneten Funktionstyps können zunächst allgemeine Überlegungen angestellt werden. Es ist sinnvoll, sich zu vergegenwärtigen, welcher konkrete Sachverhalt durch eine bestimmte Verteilungsfunktion beschrieben wird. So ist beispielsweise die Normalverteilung genau die Verteilung, die sich bei der Addition von unendlich vielen unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen ergibt (Zentraler Grenzwertsatz). Die entsprechende Multiplikation führt zur logarithmischen Normalverteilung. Praktisch bedeutet dies, dass diese Verteilungsfunktionen immer dann in Frage kommen, wenn viele verschiedene unabhängige Einflüsse für die Streuung einer Größe ursächlich sind, von denen keine Einflussgröße besonders dominant ist.

Wie bereits oben erwähnt, können erste Anhaltspunkte für den Typ einer geeigneten Verteilungsfunktion auch aus der visuellen Darstellung der empirischen Daten mit nicht parametrischen Methoden gewonnen werden. Dabei ist im Allgemeinen die Nutzung kontinuierlicher Darstellungen (Kerndichteschätzer) aufschlussreicher als die Darstellung mit Histogrammen.

Für die in Frage kommenden Verteilungsfunktionen müssen die Parameter aus den empirischen Daten gewonnen werden. Dafür stehen normalerweise geeignete Schätzfunktionen zur Verfügung. Ein allgemein anwendbares Verfahren zur Bestimmung der Parameter ist die Maximum-Likelihood-Methode. Je umfangreicher der Datenbestand ist, welcher der Parameterschätzung zugrunde gelegt werden kann, desto genau können die Parameter der Verteilungsfunktion bestimmt werden.

Einen Anhaltspunkt für die Genauigkeit der Parameterschätzung kann man durch die Bestimmung der zugehörigen Konfidenzbereiche gewinnen. Für die besonders bedeutsame Normalverteilung liefern selbst wenig umfängliche empirische Stichproben relativ kleine Konfidenzbereiche für den Parameter „Mittelwert“. Die Genauigkeit der Schätzung ist also relativ hoch. Die Schätzung der Standardabweichung als zweiten Parameter ist dagegen deutlich ungenauer.

Die Qualität der Übereinstimmung der gefundenen Verteilungsfunktion mit der Datenlage kann wieder durch Vergleich der grafischen Darstellungen der Verteilungsfunktion und der Kerndichtefunktion überprüft werden. Exakter ist die Prüfung mit geeigneten Testverfahren.

Dabei ist zu beachten, dass die gängigen Testverfahren (Kolmogorov-Smirnov,  $\chi^2$ , Shapiro-Wilk, etc.) eine sichere Kenntnis der Parameter der Verteilungsfunktion voraussetzen. Diese Bedingung ist normalerweise nicht erfüllt, weil die Parameter auch erst aus den empirischen Daten geschätzt wurden. Die entsprechenden Tests sind zwar trotzdem anwendbar, die Schwellenwerte für die Testentscheidung sind aber zu modifizieren. Für den Test auf Normalverteilung kann der Kolmogorov-Smirnov-Test mit den Schwellenwerten nach Lilliefors verwendet werden (siehe [25]).

Formal wird bei den statistischen Testverfahren die Nullhypothese geprüft. Diese lautet: Die Verteilung der untersuchten Grundgesamtheit entspricht der angenommenen Verteilungsfunktion. Der Test liefert die Wahrscheinlichkeit dafür dass die Nullhypothese zu Unrecht abgelehnt wird, wenn der Test nicht erfüllt ist ( $\alpha$ -Fehler) oder anders ausgedrückt eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit mit der die Nullhypothese abgelehnt werden muss, wenn der Test nicht erfüllt ist ( $1-\alpha$ ). Der Test gibt also keine direkte Auskunft darüber mit welcher Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese anzunehmen ist. Dafür wäre es erforderlich den  $\beta$ -Fehler zu ermitteln. Dieser gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Nullhypothese bei erfülltem Test zu Unrecht angenommen wird. Es gibt zwar eine Korrelation zwischen  $\alpha$  und  $1-\beta$ , aber leider keinen festen Zusammenhang. Die eigentlich interessierende Frage nach der Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese wird durch den Test also nicht exakt beantwortet. Die Testverfahren bieten damit zwar eine wertvolle Entscheidungshilfe, können aber nicht als definitives Kriterium betrachtet werden. Nähere Erläuterungen hierzu sind z.B. in [13] und [20] zu finden.

Naturgemäß werden die Testverfahren bei steigendem Umfang der zugrunde liegenden Stichprobe immer restriktiver. Dies führt bei sehr umfangreichen Datenbeständen dazu, dass die Tests kaum noch erfüllt werden können. Hier macht sich der Fakt bemerkbar, dass empirische Daten nie exakt einer bestimmten mathematischen Verteilung entsprechen. Ob die betreffende Verteilungsfunktion für den konkreten Anwendungsfall trotzdem brauchbar ist, muss von Fall zu Fall entschieden werden. Ein exakter Nachweis der Brauchbarkeit einer Verteilungsfunktion für einen konkreten Anwendungsfall ist schwer zu erbringen. In der Ingenieurwissenschaft wird hier gewöhnlich pragmatisch entschieden.

Beispiel 3-3-1 zeigt die Bestimmung einer Verteilungsfunktion für die Werte aus Beispiel 3-1. Hier ist anzumerken, dass der Test auf Normalverteilung nur auf dem 1%-Niveau erfüllt ist. (Ist der Test nicht erfüllt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dennoch um eine Normalverteilung handelt ca. 1%.) Die Übereinstimmung der Stichprobe mit einer normalverteilten Grundgesamtheit ist also nicht sehr gut. Ob die Normalverteilung zur Beschreibung der Streuungen in diesem Fall dennoch verwendet wird, muss der Ingenieur entscheiden.

### Parameterschätzung

empirischer Mittelwert:

$$MW = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_i}{n} \quad \boxed{MW = 32.417}$$

empirische Standardabweichung:

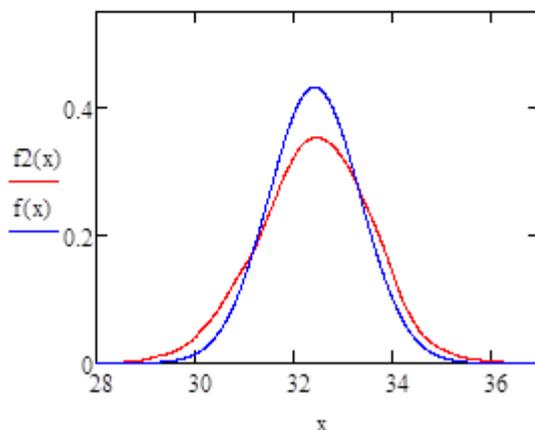
$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (X_i - MW)^2} \quad \boxed{S = 0.923}$$

Test auf Normalverteilung (nach Kolmogorow-Smirnov-Lilliefors)

a-Fehler:  $\alpha = 0.01$

Testwert = 0.121 < Lwert = 0.123 → Normalverteilungshypothese wird angenommen

Vergleich der Verteilungsfunktion mit dem Bild des Kerndichteschätzers



**Beispiel 3-3-1: Bestimmung einer Verteilungsfunktion für die Werte aus Beispiel 3-1**

### 3.3.2 Verteilungsfunktionen für die Streuung der Deckendicke

Die Deckendicke von Betonfahrbahnen kann relativ zielgenau hergestellt werden. Entsprechend sind die Streuungen nicht sehr groß. Weil die Dicke der Betondecke aber die Größe der Biegespannungen in der Platte maßgeblich bestimmt, haben hier auch kleine Schwankungen einen relevanten Einfluss auf die Versagenswahrscheinlichkeit.

Die Abweichungen der Deckendicke vom Sollwert ergibt sich im Wesentlichen aus den Ungenauigkeiten in der Herstellung der Unterlage. Die Ursachen für diese Ungenauigkeiten sind vielfältig und kaum konkret identifizierbar. Es liegt also nahe, hier eine Normalverteilung für die Beschreibung der Streuungen zu verwenden.

Da die Streuung der Deckendicke nur von der Gestalt der Unterlage und nicht vom Absolutwert der Deckendicke abhängt, ist zu vermuten, dass für das durchschnittliche Qualitätsniveau im deutschen Straßenbau ein fester Wert für die Standardabweichung angegeben werden kann.

Durch die Analyse empirischer Daten ([4], [6]) konnten die oben geäußerten Vermutungen bestätigt werden. Die Streuung der Deckendicke kann mit einer Normalverteilung beschrieben werden. Für deutsche Autobahnen wurde eine mittlere Standardabweichung von 1,30cm ermittelt.

### 3.3.3 Verteilungsfunktionen für die Streuung der Betonfestigkeit

Für die Festigkeit von Straßenbetonplatten ist immer die Zugfestigkeit des Betons maßgebend. Aus pragmatischen Gründen wird diese mit dem Spaltzugversuch ermittelt.

Die Druckfestigkeit des Betons wird üblicherweise mit einer Normalverteilung oder einer logarithmischen Normalverteilung beschrieben. Rüsç, Rackwitz und Sell stellten in einer systematischen Untersuchung ([7]) fest, dass die Normalverteilung am besten geeignet ist. Im Probabilistic Model Code ([8]) wird dagegen die Verwendung der logarithmischen Normalverteilung empfohlen. Für die logarithmische Normalverteilung spricht, dass der Definitionsbereich der Verteilungsfunktion bei Null beginnt. Es treten also im Gegensatz zur Normalverteilung keine negativen Festigkeiten auf. Praktisch ist dies aber ohne Bedeutung, da die betreffenden Funktionswerte bei Verwendung der Normalverteilung so klein sind, dass sie für die jeweiligen Berechnungsergebnisse keine Relevanz haben.

Weil eine Korrelation zwischen Druckfestigkeit und Zugfestigkeit (hier Spaltzugfestigkeit) besteht, ist es naheliegend, auch für die Beschreibung der Streuungen der Zugfestigkeit die Normalverteilung bzw. logarithmische Normalverteilung zu verwenden. Wegen des bezüglich der Zugfestigkeit spröden Materialverhaltens des Betons kommt allerdings auch die für die Beschreibung spröden Materialverhaltens bedeutsame Weibullverteilung in Betracht.

Wie bereits oben erwähnt, ist es möglich, dass unterschiedliche Verteilungsfunktionen hinreichend gut geeignet sind, die Verteilung zu beschreiben. Ebenso ist es möglich, durch geeignete Wahl der Parameter eine weitgehende Übereinstimmung der genannten Verteilungsfunktionen herzustellen. In solchen Fällen ist im Allgemeinen der Normalverteilung der Vorzug zu geben. Diese bietet auf Grund ihrer besonderen mathematischen Eigenschaften für die weiteren Berechnungen verschiedene Vorteile.

Durch Auswertung von Stichproben aus dem deutschen Autobahnbau konnte die Eignung der Normalverteilung für die Beschreibung der Streuungen der Spaltzugfestigkeit belegt werden ([6]). Dabei wurden Variationskoeffizienten von 0,1 bis 0,13 ermittelt. Der Erwartungswert (Mittelwert) ist naturgemäß von der Betonklasse abhängig. Es ist zu beachten, dass die Normfestigkeit des Betons als 5%-Quantilwert definiert ist, und damit also nicht dem Erwartungswert entspricht.

Zwischen Mittelwert und Quantilwert besteht der Zusammenhang:

$$f_{ctm} = f_{ctk} + k \cdot \sigma \quad (3-8)$$

$f_{ctk}$  – charakteristische Spaltzugfestigkeit

$f_{ctm}$  – mittlere Spaltzugfestigkeit

$\sigma$  – Standardabweichung

mit

$$k = -\Phi^{-1}(q) \quad (3-9)$$

$\Phi^{-1}(q)$  - Funktionswert der inversen Standardnormalverteilung für den gewählten Quantilwert  $q$  ( $k=1,645$  für das 5%-Quantil).

Durch Einsetzen von

$$\sigma = v \cdot \mu = v \cdot f_{ctm} \quad (3-10)$$

$\mu$  – Erwartungswert

ergibt sich für die mittlere Spaltzugfestigkeit:

$$f_{ctm} = \frac{f_{ctk}}{(1-k \cdot v)} \quad (3-11)$$

### 3.3.4 Verteilungsfunktionen für die Verkehrsbelastung

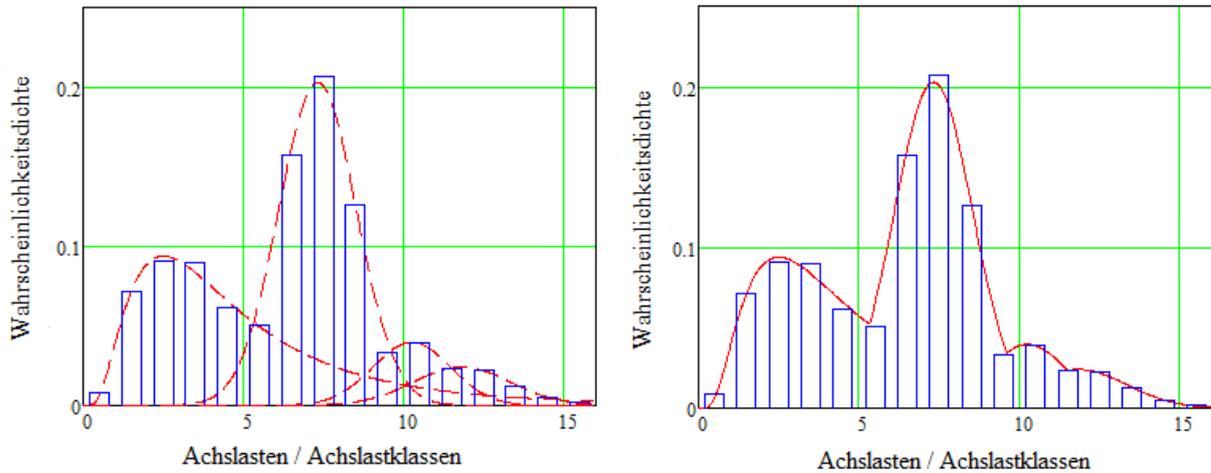
Verteilungsfunktionen für die Verkehrsbelastung wurden in der Vergangenheit vielfach bestimmt, um verlässliche Lastannahmen für den Brückenbau zu generieren. Vereinzelt liegen auch Daten von Achslastwägungen vor, welche allein für den Straßenbau erhoben wurden. Bei der Auswertung solcher Daten ist zu prüfen, ob die dynamische Wirkung der Lasten in den Werten enthalten ist oder bereits durch vorgeschaltete Berechnungen eliminiert wurde.

Alle verfügbaren Auswertungen zeigen, dass eine Verteilungsfunktion für die Verkehrslasten mehrere lokale Maxima (Modalwerte) besitzen muss.

In [6] wurden die Achslastdaten von 13 über das Bundesgebiet verteilten Messstellen an Autobahnen ausgewertet. Im Ergebnis wurde festgestellt, dass die Achslastverteilungen sehr ähnlich waren. Es wurde deshalb eine einzige für die deutschen Autobahnen repräsentative Verteilungsfunktion definiert. Diese besteht aus einer Sequenz aus einer logarithmischen Normalverteilung und 3 Normalverteilungen, welche jeweils mit einem Anpassungsfaktor belegt sind. Für die gesamte Verteilungsfunktion muss selbstverständlich die Bedingung

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (3-12)$$

gelten.



**Abbildung 3-2: Zusammensetzung der Verteilungsfunktion für die Verkehrsbelastung als Sequenz aus einer logarithmischen Normalverteilung und 3 Normalverteilungen**

Eine noch differenziertere Beschreibung der Verteilung der Verkehrslasten erscheint nicht sinnvoll, weil damit zu rechnen ist, dass sich die Verkehrslasten über die Lebensdauer der Straßen auch verändern werden.

Die Formel für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Achslasten [t] lautet damit:

$$f_{AL}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{1}{0.7145 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot x} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(x) - 1.402}{0.696} \right)^2}}{1.916} & \text{if } x \geq 0 \wedge x < 5.32 \\ \frac{1}{1.2441 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - 7.321}{1.212} \right)^2}}{1.624} & \text{if } x \geq 5.32 \wedge x < 9.60 \\ \frac{1}{1.2471 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - 10.251}{1.215} \right)^2}}{8.279} & \text{if } x \geq 9.60 \wedge x < 11.492 \\ \frac{1}{1.5582 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - 11.817}{1.518} \right)^2}}{10.903} & \text{if } x \geq 11.492 \end{cases} \quad (3-13)$$

Die Formel ist gegenüber der Darstellung in [6] geringfügig präzisiert.

Entsprechend der konkreten Erfordernisse ist die Formel in Radlasten oder andere Einheiten (kN oder N) umzurechnen. Für die Radlasten in t ergibt sich beispielsweise:

$$f_{\text{Rad}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{1}{0.7145 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 2x} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\ln(2 \cdot x) - 1.402}{0.696} \right)^2}}{1.916} & \text{if } x \geq 0 \wedge x < 2.66 \\ \frac{1}{1.2441 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2 \cdot x - 7.321}{1.212} \right)^2}}{1.624} & \text{if } x \geq 2.66 \wedge x < 4.8 \\ \frac{1}{1.2471 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2 \cdot x - 10.251}{1.215} \right)^2}}{8.279} & \text{if } x \geq 4.8 \wedge x < 5.746 \\ \frac{1}{1.5582 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2 \cdot x - 11.817}{1.518} \right)^2}}{10.903} & \text{if } x \geq 5.746 \end{cases} \quad (3-14)$$

### 3.3.5 Verteilungsfunktionen für die Temperaturbelastung

Für die Berechnung von Betonstraßenplatten ist besonders die ungleichmäßige Temperaturverteilung über die Plattenhöhe von Bedeutung. Diese führt in Folge der temperaturbedingten Längenänderungen zu Spannungen im Plattenquerschnitt und einer Verformung der Platte. Der nichtlineare Anteil des Temperaturverlaufs erzeugt Wölbspannungen. Durch den linearen Anteil wird eine Biegung der Platte bewirkt. Diese Biegung wird wiederum durch Verkehrslasten und das Platteneigengewicht ganz oder teilweise zurückgestellt. Damit entstehen Biegespannungen in der Platte. Eine differenzierte Darstellung dieser Zusammenhänge findet sich bei [9]. Zur Vereinfachung wird bei der Berechnung vielfach (so auch im Berechnungsmodell nach RDO Beton) nur die Biegespannung betrachtet. Diese ist eine Funktion des linearen Temperaturgradienten über die Querschnittshöhe.

Die empirische Datenbasis für die Ableitung von Verteilungsfunktionen für die Temperaturgradienten wurde von KAYSER ([16], [5]) erarbeitet. Auf Basis real gemessener Lufttemperaturwerte wurden durch Simulationsrechnungen Temperaturgradienten in Betonplatten bestimmt. Diese Berechnungen wurden für 54 Temperaturstationen im gesamten Bundesgebiet realisiert und im Stundenabstand über einen Zeitraum von 15 Jahren geführt.

Auf Grundlage dieser Datenbasis war es in [6] möglich, standortbezogene Verteilungsfunktionen für die Temperaturgradienten anzugeben. Als geeignete Verteilungsfunktion erwies sich eine 3-parametrische logarithmische Normalverteilung. Die allgemeine Formel für die Dichtefunktion lautet damit:

$$f_T(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x + x_0 < 0 \\ \frac{1}{SL \cdot (x + x_0) \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln(x+x_0) - MWL)^2}{2 \cdot SL^2}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3-15)$$

Konkrete Werte für die Parameter  $x_0$ ,  $SL$ , und  $MWL$  können [6] entnommen werden.

Die Parameterwerte variieren nicht nur in Abhängigkeit vom geografischen Standort (also vom Klima), sondern auch in Abhängigkeit von der Deckendicke. In [6] sind deshalb jeweils Werte für 10cm, 20cm, 30cm, 40cm und 50cm Deckendicke angegeben. Es ist zu beachten, dass in den betreffenden Gleichungen die Deckendicke in cm angegeben werden muss.

### 3.3.6 Modellunsicherheiten

Die mit der Definition des mathematisch-mechanischen Berechnungsmodells zwangsläufig einhergehenden Idealisierungen stellen eine mehr oder weniger starke Abweichung von der Realität dar. Diese wird als Modellunsicherheit bezeichnet. Dabei ist zu unterscheiden zwischen einer systematischen Fehlweisung des Modells, welche durch Kalibrierung beseitigt werden kann und einer modellbedingten Streuung. Diese kann ebenfalls als Zufallsgröße betrachtet und entsprechend in der Berechnung berücksichtigt werden. Eine einfache Möglichkeit besteht darin, die Modellfunktion mit einer Zufallsgröße zu addieren oder zu multiplizieren.

$$Y' = \theta \cdot f(X_1, \dots, X_n) \quad (3-16)$$

$$Y' = \theta + f(X_1, \dots, X_n) \quad (3-17)$$

$f(X_1, \dots, X_n)$  – Modellfunktion

$Y'$  – Modellfunktion unter Berücksichtigung der Modellunsicherheit

$\theta$  – Zufallsgröße zur Berücksichtigung der Modellunsicherheit

Für das Berechnungsmodell nach [2] wird die Modellfunktion durch die Formeln zur Berechnung der Spannungen repräsentiert. Die Verteilungsparameter für den  $\theta$ -Wert können theoretisch aus einem Vergleich von Messwerten mit den korrespondierenden Funktionswerten der Modellfunktion gewonnen werden. Bei diesen entsprechenden Messungen sind jeweils die kompletten Parametersätze, welche in den Berechnungen verwendet werden, exakt zu bestimmen. Gegenwärtig sind derartige Datensätze nicht vorhanden, sodass eine empirisch fundierte Bestimmung der Parameter für die Modellunsicherheit nicht möglich ist.

Es ist darauf hinzuweisen, dass ein grundsätzlicher Unterschied zu den übrigen Verteilungsfunktionen besteht. Während diese die tatsächlich vorhandenen Streuungen physikalischer Größen beschreiben (z.B. Dicke, Festigkeit usw.), stellt die Verteilungsfunktion für die Modellunsicherheit nur eine gewisse Quantifizierung des modellbedingten Mangels an Informationen dar. Die Mängel des Berechnungsmodells

werden mit der Berücksichtigung einer Verteilungsfunktion für die Modellunsicherheit also nicht beseitigt. Es wird lediglich abgeschätzt, wie groß die Auswirkungen der Modellunsicherheit auf das Berechnungsergebnis sein können.

### 3.3.7 Verteilungsfunktionen für weitere Einflussgrößen

Prinzipiell ist jede physikalische Einflussgröße, sofern sie keine physikalische Konstante darstellt, als Zufallsgröße zu betrachten. Um weitere Verteilungsfunktionen für die im Berechnungsmodell nach RDO Beton verwendeten Einflussgrößen zu definieren, fehlt allerdings gegenwärtig die Datenbasis. Auch ist nicht die Streuung jeder Einflussgröße relevant für das Berechnungsergebnis.

Um die Auswirkungen der Streuungen einer Einflussgröße auf die Berechnungsergebnisse zu studieren, sind Sensitivitätsanalysen notwendig. Solange keine gesicherten Erkenntnisse über die jeweiligen Verteilungsfunktionen vorliegen, sind diesbezüglich pragmatische Abschätzungen zu treffen. In vielen Fällen kann zunächst von einer Normalverteilung ausgegangen werden. Die Parameter der Normalverteilung haben eine klare physikalische Bedeutung und können in ihrer Größenordnung deshalb aus Erfahrungswerten eingeschätzt werden. Vergleicht man die so gewonnenen Berechnungsergebnisse mit Ergebnissen, welche ohne Berücksichtigung der betreffenden Streuung erzielt wurden, so kann abgeschätzt werden, welche Streuungen relevant sind, also welche Einflussgrößen als Zufallsgrößen behandelt werden müssen.

Durch Anwendung der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung lassen sich sogenannte Wichtungsfaktoren (siehe Abschnitt 4.4) berechnen. Diese geben an, wie stark die Streuung einer bestimmten Zufallsgröße die Versagenswahrscheinlichkeit beeinflusst.

## 4 Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit

### 4.1 Entwicklung der Zuverlässigkeitstheorie

Die Sicherheit von Bauwerken ist vor allem im Hochbau bzw. Ingenieurbau von Bedeutung, da hier unmittelbar eine Gefahr für Leib und Leben besteht. Ingenieurtechnische Regeln zur Gewährleistung der notwendigen Bauwerkssicherheit wurden zunächst aus Erfahrungswerten abgeleitet. Die Weiterentwicklung der Bemessungsmethoden erforderte aber eine konsistente theoretische Grundlage für die zielgerichtete Realisierung eines erforderlichen Sicherheitsniveaus.

Erste grundlegende Überlegungen zur Beschreibung der Bauwerkssicherheit mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik wurden 1926 von MAYER [21] veröffentlicht. Diese wurden ab etwa 1950 von FREUDENTHAL [48] zu einer systematischen Theorie weiterentwickelt. Einen wichtigen Fortschritt erzielten CORNELL [49] u.a. mit der Definition des Sicherheitsindex  $\beta$  auf der Basis der Momentenmethode. Diese beinhaltet die Berechnung eines Sicherheitsmaßes allein auf der Grundlage der ersten beiden Momente (Erwartungswert und Standardabweichung) der Verteilungen der relevanten Zufallsgrößen. Im Zuge der weiteren Forschungen erwies sich diese Vorgehensweise zwar als unzureichend für eine hinreichend genaue Berechnung des Sicherheitsniveaus, sie stellte aber die Basis für die Entwicklungen der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung dar. Wichtige Beiträge für die Theorie in ihrer heutigen Form leisteten HASOFER, LIND [50], RACKWITZ [22] u.a. Die Entwicklung der Zuverlässigkeitstheorie 2. Ordnung ist vor allem mit dem Namen BREITUNG [51] verbunden. Das 1971 gegründete Joint Committee on Structural Safety (JCSS) publizierte im Jahr 2001 die erste Ausgabe des Probabilistic Model Code [8]. Dieser stellt eine Zusammenstellung der grundlegenden Wissensbasis für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Bauwerken dar.

Eine umfassende Beschreibung der Zuverlässigkeitstheorie für Bauwerke findet sich in dem Standardwerk von SPAETHE [1].

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die Grundlagen und die wichtigsten Methoden gegeben und deren Verwendbarkeit für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Betonstraßenplatten untersucht.

### 4.2 Fundamentalfall

Um den Versagensfall mathematisch zu erfassen, wird eine Funktion mit der allgemeinen Form

$$G = R - E \quad (4-1)$$

definiert.

Die Funktion wird als Grenzzustandsfunktion bezeichnet.

Die zugehörige Verteilungsfunktion sei  $F_G$ , mit der Dichtefunktion  $f_G$ .

Definitionsgemäß gilt dann:

$$F_G(x) = \int_{-\infty}^x f_G(u) du \quad (4-2)$$

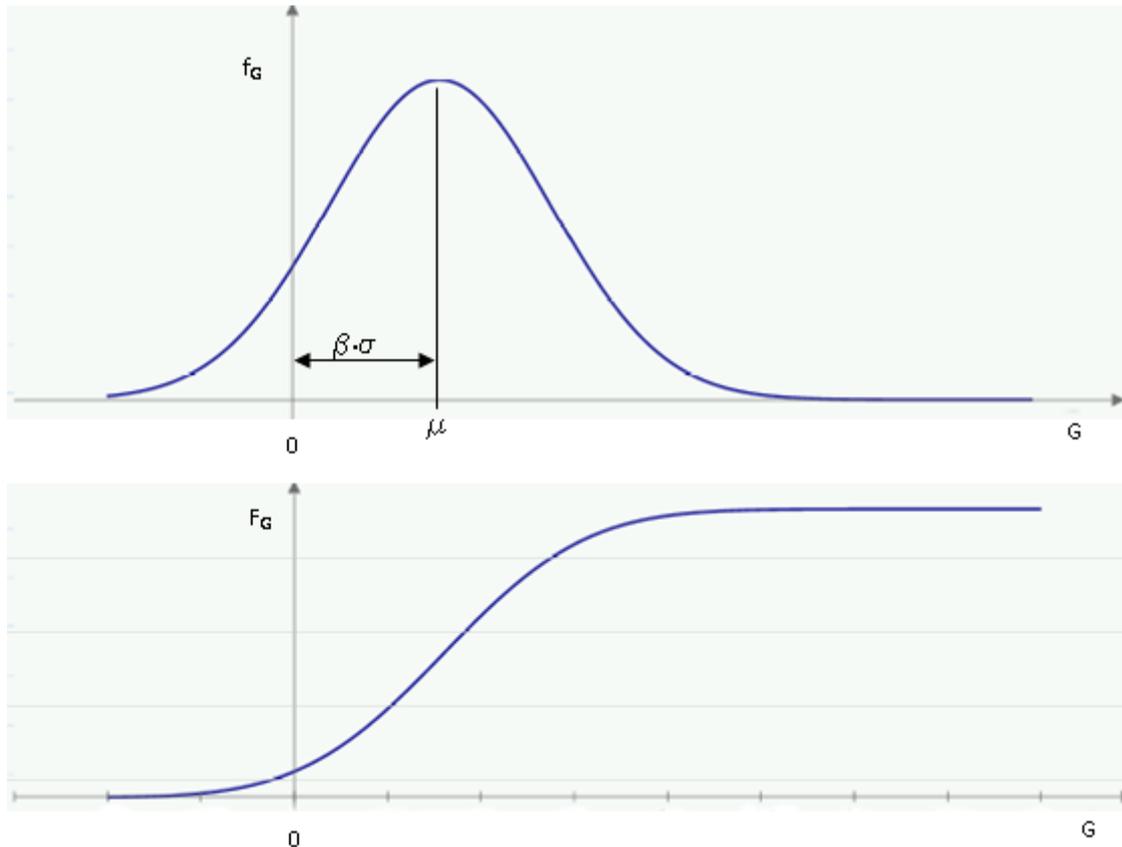
Versagen tritt ein wenn gilt:

$$G < 0 \quad (4-2)$$

Für die Wahrscheinlichkeit des Versagensfalles gilt damit:

$$P_f = P(G < 0) = F_G(0) = \int_{-\infty}^0 f_G(u) du \quad (4-3)$$

$P_f$  - Versagenswahrscheinlichkeit



**Abbildung 4-1: Verteilungs- und Dichtefunktion der Grenzzustandsfunktion**

Die Versagenswahrscheinlichkeit entspricht damit dem Integral der Dichtefunktion  $f_G$  über den Versagensbereich  $G < 0$ , bzw. gleich dem Funktionswert der Verteilungsfunktion  $F_G$  an der Stelle  $F_G(0)$ . Allerdings ist die Verteilungsfunktion von  $G$  normalerweise unbekannt.

Für den Spezialfall, dass  $R$  und  $E$  normalverteilt sind, mit den Parametern  $\mu = \mu_R$  und  $\sigma = \sigma_R$ , bzw.  $\mu = \mu_R$  und  $\sigma = \sigma_E$  ist, ergibt sich für  $G$  ebenfalls eine Normalverteilung mit den Parametern:

$$\mu_G = \mu_R - \mu_E \quad (4-4)$$

und

$$\sigma_G = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2} \quad (4-5)$$

Definiert man

$$\mu_G = \beta \cdot \sigma_G \quad (4-6)$$

Ergibt sich unter Nutzung der Standardnormalverteilung:

$$P_f(G < 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_G}{\sigma_G}\right) = \Phi(-\beta) \quad (4-7)$$

Der Wert  $\beta$  ist damit ein Maß für die Versagenswahrscheinlichkeit oder, je nach Perspektive, für die Sicherheit des betrachteten Bauteils. Es ist üblich  $\beta$  als Sicherheitsindex zu bezeichnen.

#### 4.3 Integration von mehrdimensionalen Grenzzustandsfunktionen

Ist die Grenzzustandsfunktion von einer Zufallsgröße  $x_1$  abhängig, so kann man die Wahrscheinlichkeit für  $G(x_1)$  berechnen mit:

$$P(G(x_1)) = f_{x_1}(x_1) dx_1 \quad (4-8)$$

$f_{x_1}$  – Dichtefunktion für die Zufallsgröße  $x_1$

Für den Fall, dass  $G$  von  $n$  unabhängigen Zufallsgrößen  $x_1 \dots x_n$  abhängt, ergibt sich nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$P(G(x_1, x_2 \dots x_n)) = f_{x_1}(x_1) dx_1 \cdot f_{x_2}(x_2) dx_2 \cdot \dots \cdot f_{x_n}(x_n) dx_n \quad (4-9)$$

bzw.

$$P(G(x_1, x_2 \dots x_n)) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2) \dots f_{x_n}(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (4-10)$$

Für die Versagenswahrscheinlichkeit ergibt sich damit:

$$P_f = P(G(x_1, x_2, \dots x_n) < 0) \quad (4-11)$$

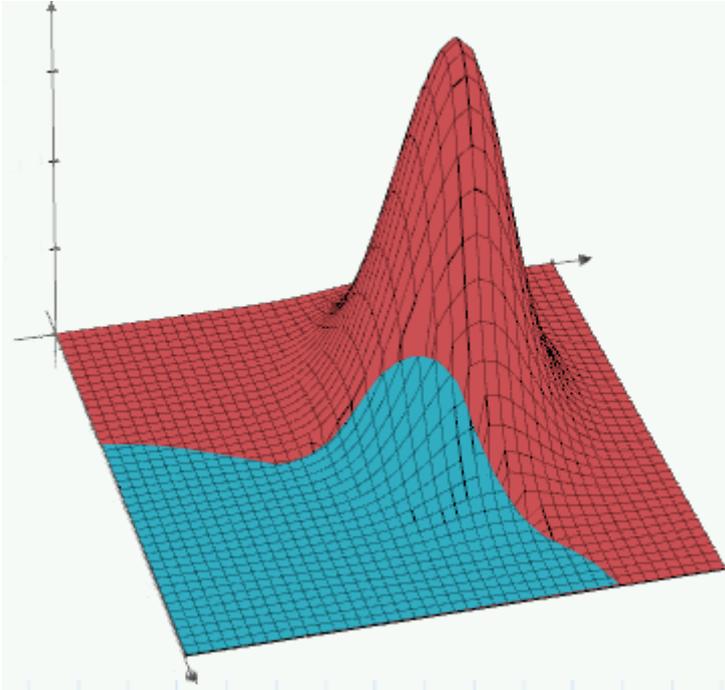
$$P_f = \int_{g_{xu1}}^{g_{xo1}} \int_{g_{xu2}}^{g_{xo2}} \dots \int_{g_{xun}}^{g=0} f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2) \dots f_{x_n}(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (4-12)$$

$g_{xui}$  – untere Grenze des Definitionsbereichs der Dichtefunktion von  $x_i$

$g_{xoi}$  – obere Grenze des Definitionsbereichs der Dichtefunktion von  $x_i$

Gleichung 4-12 lässt sich interpretieren als Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten aller Parameterkombinationen, welche zum Versagen führen. Die Formel erlaubt eine exakte Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit.

Für zwei Zufallsgrößen lässt sich das Faltungsintegral anschaulich darstellen. Der in der Abbildung 4-2 blau eingefärbte Integralabschnitt entspricht der Versagenswahrscheinlichkeit. Die Grenze zwischen dem sicheren Bereich (rot) und dem Versagensbereich (blau) bildet die Grenzzustandsfunktion.



**Abbildung 4-2: Faltungsintegral**

Die Integration der Formel 4-12 ist nur in seltenen Ausnahmefällen in geschlossener Form möglich. Man muss also auf numerische Integrationsverfahren zurückgreifen (z.B. Trapezverfahren, Simpsonsche Regel, Gauss-Quadratur u.a). Diese sind teilweise sehr einfach anwendbar. Die Konvergenz ist bei der üblichen Form der Verteilungsfunktionen im Allgemeinen gesichert.

Besondere Aufmerksamkeit erfordert eine sinnvolle Festlegung der Integrationsgrenzen. Mit wachsendem Abstand vom Erwartungswert streben die Funktionswerte der Dichtefunktionen sehr stark gegen Null. Damit besteht die Gefahr, dass der programmtechnisch vorgegebene Definitionsbereich der Variable überschritten wird, was zu fehlerhaften Ergebnissen führen kann. Andererseits dürfen die Integrationsgrenzen auch nicht zu eng gewählt werden, weil gerade die relativ selten auftretenden Parameterwerte (z.B.: extreme hohe Lasten, extrem geringe Betonfestigkeit) die relevanten Beiträge zur Versagenswahrscheinlichkeit liefern.

Legt man das Berechnungsmodell nach RDO Beton [2] zugrunde und behandelt die Betonfestigkeit, die Deckendicke, die Radlast und die Temperaturlast als Zufallsgrößen, so nimmt das zu lösende Integral die Form an:

$$P_f = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{G=0} f_h(h_d) \cdot f_c(f_{ct}) \cdot f_{Rad}(F_d) \cdot f_T(\delta_T) df_{ct} dF_d d\delta_T dh_d \quad (4-13)$$

mit

$$G = 0 = \frac{M_{EV}(F_d, h_d)}{W(h_d)} + \frac{M_{ET}(\delta_T, h_d)}{W(h_d)} \quad (4-14)$$

- $f_h(h_d)$  – Dichtefunktion für die Deckendicke  $h_d$
- $f_c(f_{ct})$  – Dichtefunktion für die Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$
- $f_{Rad}(F_d)$  – Dichtefunktion für die Bemessungsradlast  $F_d$
- $f_T(\delta_T)$  – Dichtefunktion für den Temperaturgradienten  $\delta_T$
- W – Widerstandsmoment des Plattenquerschnittes

Die Integration über die Betonfestigkeit endet also immer dann, wenn die Betonfestigkeit der für die aktuelle Parameterkombination entsprechenden Betonspannung entspricht. Wie bereits oben erwähnt, sind die Integrationsgrenzen so zu justieren, dass keine numerischen Probleme entstehen und gleichzeitig die Berechnung hinreichend genau wird.

Gleichung 4-13 ist im strengen Sinne nicht mathematisch exakt. Die zu Grunde liegende Produktregel für die Wahrscheinlichkeit gleichzeitiger Ereignisse setzt gegenseitige Unabhängigkeit voraus. Deckendicke und Temperaturgradient sind aber nicht unabhängig, sondern entsprechend Gleichung A2-1 aus den RDO Beton 09 [2] miteinander verknüpft. Es gibt mathematische Möglichkeit, um korrelierte Zufallsgrößen in unabhängige Größen zu transformieren. Üblicherweise werden die Rosenblatt-Transformation oder die Nataf-Transformation genutzt. Nähere Angaben hierzu findet man z.B. in [22], [45] und [46]. Im vorliegenden Fall kann auf dieses aufwendige Verfahren aber verzichtet werden. Es genügt die Parameter der Verteilungsfunktion für die Temperaturgradienten in Abhängigkeit von der Deckendicke zu formulieren. Damit ist sichergestellt, dass für die Integration immer die jeweils zutreffende Verteilungsfunktion angenommen wird. Die relevanten Ausfallwahrscheinlichkeiten treten nur in einem eng begrenzten Parameterbereich auf. In diesem Bereich ändert sich die Verteilungsfunktion für die Temperaturgradienten kaum. Es muss also nur sichergestellt werden, dass in diesem Bereich die zutreffende Verteilungsfunktion angenommen wird. Das ist durch die o.g. Maßnahme gegeben. Die Reihenfolge der Integrale ist dadurch aber nicht mehr beliebig. Die Deckendicke muss in der Integrationsreihenfolge vor den Temperaturgradienten stehen.

Außerdem ist es vorteilhaft, die Betonfestigkeit in der Integrationsreihenfolge ganz zum Schluss anzusetzen. In diesem Fall ist die Grenzzustandsfunktion besonders einfach lösbar.

Im Dimensionierungsmodell der RDO Beton werden nur positive Temperaturgradienten berücksichtigt, weil diese die maßgebenden positiven Biegespannungen an der Plattenunterseite erzeugen. Um die Versagenswahrscheinlichkeit korrekt zu berechnen, ist es aber notwendig, für die Verteilungsfunktion der Temperaturgradienten den gesamten Wertebereich zu berücksichtigen, welcher mit relevanter Wahrscheinlichkeit möglich ist. Die in Abschnitt 3.3.5 beschriebenen Verteilungsfunktionen sind entsprechend definiert. Die Integration über den Bereich der negativen Gradienten liefert nur relevante Beiträge zur Versagenswahrscheinlichkeit, wenn diese relativ hoch ist. Die Formeln zur Berechnung der Biegespannungen in Folge negativer Temperaturgradienten sind z.B. in [24] angegeben. Es gilt:

$$L_{krit} = 167 \cdot h_d \cdot \sqrt{\alpha_{cT} \cdot \delta_T \cdot E_{ctm}} \quad [\text{mm}] \quad (4-15)$$

$$\sigma_w = \frac{h_d}{2} \cdot \alpha_{cT} \cdot \delta_T \cdot E_{ctm} \quad \text{für } L_P \geq L_{krit} \quad (4-16)$$

$$\sigma_{w,red} = \sigma_w \cdot \left(\frac{L_P}{L_{krit}}\right)^2 \quad \text{für } L_P < L_{krit} \quad (4-17)$$

## Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit durch Integration über den Versagensbereich

Berechnungsmodell: RDO Beton 09

Berücksichtigung von 4 Einflussgrößen als Zufallsgrößen:

- Deckendicke
- Betonfestigkeit
- Radlast
- Temperaturgradient

### Eingangsgrößen Platte

Plattengeometrie:  $L_P = 5000$  [mm]       $B_P = 4000$  [mm]

Dübel faktor:  $m_{bD} = 0.8$       (Dübel und Anker)

### Untere Tragschichten

Kontaktfaktor:  $m_{bA} = 1$       (HGT)

Lagerungsfaktor:  $m_{bL} = 0.88$

Bettungszahl:  $K = 0.15$  [N/mm<sup>3</sup>]

### Radlast

Lastfaktoren:  $\gamma_{E1} = 0.99$        $\gamma_{E2} = 1$        $\gamma_{E3} = 1$        $\gamma_{E4} = 1.07$

Reifendruck:  $p_n = 0.65$  [N/mm<sup>2</sup>]

### Temperaturbelastung

Temperaturfaktoren:  $m_{t1} = 1$

### Beton:

StC30/37-3,7    =>     $f_{ctk} = 3.7$  [N/mm<sup>2</sup>]

$E_{ctm} = 39000$  [N/mm<sup>2</sup>]       $\mu = 0.2$

$\gamma_{tot} = 0.67$

$\alpha_{cT} = \frac{13}{1000000}$  [1/K]

**Zufallsgrößen:**

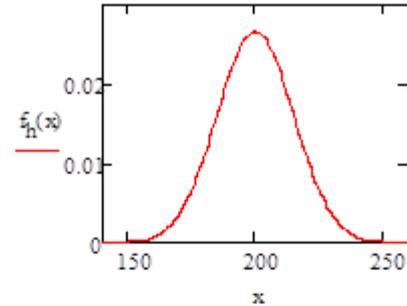
**Deckendicke**

Verteilungsfunktion: Normalverteilung

Parameter:

Mittelwert:  $\mu_h = 200$  [mm]

Standardabweichung:  $\sigma_h = 15$  [mm]



**Betonfestigkeit**

Verteilungsfunktion: Normalverteilung

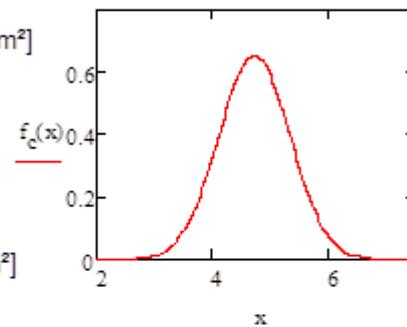
Variationskoeffizient:  $vk = 0.13$

$$\Rightarrow f_{ctm} = \frac{f_{ctk}}{(1 - 1.645 \cdot vk)} = 4.706 \quad [N/mm^2]$$

Parameter:

Mittelwert:  $\mu_c = f_{ctm} \quad \mu_c = 4.706 \quad [N/mm^2]$

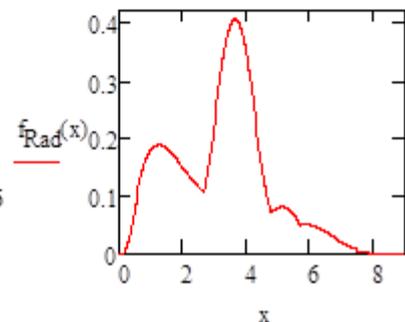
Standardabweichung:  $\sigma_c = \mu_c \cdot vk \quad \sigma_c = 0.612 \quad [N/mm^2]$



**Radlast:**

Verteilungsfunktion: 1 x Log-Normalverteilung + 3 x Normalverteilung

$$f_{Rad}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \frac{1}{0.7145 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 2x} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(2 \cdot x) - 1.402}{0.696} \right)^2}}{1.916} & \text{if } x \geq 0 \wedge x < 2.66 \\ \frac{1}{1.2441 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{2 \cdot x - 7.321}{1.212} \right)^2}}{1.624} & \text{if } x \geq 2.66 \wedge x < 4.8 \\ \frac{1}{1.2471 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{2 \cdot x - 10.251}{1.215} \right)^2}}{8.279} & \text{if } x \geq 4.8 \wedge x < 5.746 \\ \frac{1}{1.5582 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{2 \cdot x - 11.817}{1.518} \right)^2}}{10.903} & \text{if } x \geq 5.746 \end{cases}$$



**Temperatur:**

Verteilungsfunktion: 3-parametrische Log-Normalverteilung

Parameter für Station Aachen für h in cm ([6], Tabelle 4)

$$x_0 = 0.3415 \cdot h^{-0.6594}$$

$$SL = -0.00003 \cdot h^2 + 0.0018 \cdot h + 0.3524$$

$$MWL = 0.0003 \cdot h^2 - 0.0429 \cdot h - 2.2752$$

**Ergebnis der Auswertung des 4-fach-Integrals**

Versagenswahrscheinlichkeit:

$$P1_f = 1.1985786 \times 10^{-3}$$

**Beispiel 4-1: Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit durch Integration über den Versagensbereich**

Die Methode der Integration über den Ausfallbereich ist exakt und relativ leicht handhabbar. Bei einer steigenden Anzahl von Zufallsgrößen wächst der Rechenaufwand aber stark an. Dies führt dazu, dass das Verfahren schon ab 4 bis 5 Zufallsgrößen kaum noch praktikabel ist. Die Berücksichtigung weiterer Zufallsgrößen ist also bei numerischer Lösung des Versagensintegrals kaum möglich.

Es besteht aber eine enge Korrelation zwischen dem Elastizitätsmodul und der Festigkeit des Betons. Diese kann als feste Relation in die Grenzzustandsfunktion eingeführt werden. Damit ist es möglich, auch die Streuung des E-Moduls zu berücksichtigen. Die in der RDO Beton angegebene Abhängigkeit des E-Moduls von der Spaltzugfestigkeit kann in guter Näherung mit der Beziehung

$$E_{ctm} = 4285,7 \cdot f_{ctk} + 24857,1 N/mm^2 \quad (4-18)$$

beschrieben werden.

Durch die Benutzung dieser Gleichung wird die Grenzzustandsfunktion allerdings komplizierter. Die Nullstellen sind jetzt nicht mehr durch elementares Auflösen der Gleichung zu finden, sondern müssen mit numerischen Lösungsverfahren (z.B. Newton-Algorithmus, Regula falsi) ermittelt werden. Mit den Eingangswerten nach Beispiel 4-1 liefert die Berechnung eine Versagenswahrscheinlichkeit von  $1,366 \cdot 10^{-3}$ . Die Berücksichtigung der Abhängigkeit des E-Moduls von der Betonfestigkeit erhöht also in diesem Beispiel die rechnerische Versagenswahrscheinlichkeit um ca. 15%. Die Rechenzeit wird nicht wesentlich beeinflusst.

#### 4.4 Näherungsverfahren (FORM-Algorithmus)

Um auch bei Berücksichtigung vieler Zufallsgrößen die Versagenswahrscheinlichkeit mit vertretbarem Aufwand berechnen zu können, wurden Näherungsverfahren entwickelt. Diese Verfahren vermeiden die Lösung des mehrdimensionalen Integrals indem näherungsweise die Verteilungsfunktion für die Grenzzustandsgleichung bestimmt wird. Die Versagenswahrscheinlichkeit ergibt sich dann aus Gleichung 4-3.

Wie unter Abschnitt 4.2 beschrieben existiert eine einfache Lösung, wenn die Größen R und E normalverteilt sind. (Gleichung 4-4, 4-5)

Betrachtet man E und R als lineare Funktionen mit der allgemeinen Form

$$R(x_1) = c_{01} + c_1 \cdot x_1 \quad (4-19)$$

und

$$E(x_2) = c_{02} + c_2 \cdot x_2 \quad (4-20)$$

dann ergibt sich die Grenzzustandsfunktion  $G(x_1, x_2)$  zu

$$G(x_1, x_2) = c_0 + c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = 0 \quad (4-21).$$

Die Normalverteilung für  $x_1$  und  $x_2$  sei weiterhin vorausgesetzt. Dem Additionstheorem für Normalverteilungen folgend, können dann die Parameter für die ebenfalls normalverteilte Grenzzustandsfunktion berechnet werden mit

$$\mu_G = c_0 + c_1 \cdot \mu_{x1} + c_2 \cdot \mu_{x2} \quad (4-22)$$

$\mu_{x_i}$  – Erwartungswert der Variable  $x_i$

und

$$\sigma_G = \sqrt{(c_1 \cdot \sigma_{x1})^2 + (c_2 \cdot \sigma_{x2})^2} \quad (4-23)$$

$\sigma_{x_i}$  – Standardabweichung der Variable  $x_i$ .

Eine weitere Vereinfachung ist möglich, wenn man die Basisvariablen standardisiert. Man transponiert dazu die Variablen mit der Beziehung

$$u_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (4-24).$$

Die Variable  $u_i$  ist normalverteilt mit dem Erwartungswert 0 und der Standardabweichung 1.

Die transponierte Grenzzustandsfunktion ergibt sich zu

$$H(u_1, u_2) = c_0 + c_1 \cdot \mu_{x1} + c_2 \cdot \mu_{x2} + c_1 \cdot \sigma_{x1} \cdot u_1 + c_2 \cdot \sigma_{x2} \cdot u_2 = 0 \quad (4-25).$$

Durch Multiplikation mit dem Normierungsfaktor

$$m = \frac{1}{\sqrt{(c_1 \cdot \sigma_{x1})^2 + (c_2 \cdot \sigma_{x2})^2}} \quad (4-26)$$

kann die Gleichung in die Hessische Normalform überführt werden:

$$H(u_1, u_2) = p - \alpha_1 \cdot u_1 - \alpha_2 \cdot u_2 = 0 \quad (4-27)$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{-c_1 \cdot \sigma_{x1}}{\sqrt{(c_1 \cdot \sigma_{x1})^2 + (c_2 \cdot \sigma_{x2})^2}} \quad (4-28)$$

$$\alpha_2 = \frac{-c_2 \cdot \sigma_{x2}}{\sqrt{(c_1 \cdot \sigma_{x1})^2 + (c_2 \cdot \sigma_{x2})^2}} \quad (4-29)$$

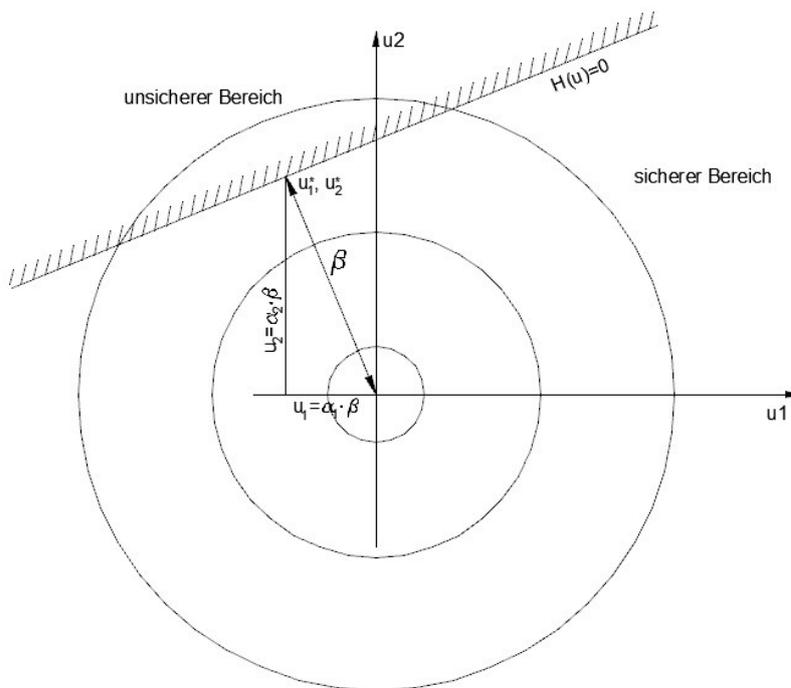
und

$$p = \frac{c_0 + c_1 \cdot \mu_{x1} + c_2 \cdot \mu_{x2}}{\sqrt{(c_1 \cdot \sigma_{x1})^2 + (c_2 \cdot \sigma_{x2})^2}} \quad (4-30).$$

Unter Beachtung von Gleichung 4-22, 4-23 und 4-7 ergibt sich aus Gleichung 4-30

$$p = \frac{\mu_G}{\sigma_G} = \beta \quad (4-31).$$

Der Sicherheitsindex  $\beta$  kann also direkt aus der Hessischen Normalform der Grenzzustandsfunktion entnommen werden. Der Wert entspricht dem Abstand der Funktion vom Koordinatenursprung. In Abbildung 4-3 sind die mathematischen Beziehungen anschaulich dargestellt.



**Abbildung 4-3: Verteilungsdichte und Grenzzustandsfunktion im Standardnormalraum (nach [1])**

Im Standardnormalraum ist die Wahrscheinlichkeitsdichte rotationssymmetrisch um den Koordinatenursprung und nimmt mit steigender Entfernung vom Koordinatenursprung ab.

Der Punkt auf der Grenzzustandsfunktion mit dem geringsten Abstand zum Koordinatenursprung hat deshalb die höchste Wahrscheinlichkeitsdichte. Dieser Punkt mit den Koordinaten  $u_1^*$  und  $u_2^*$  repräsentiert also die Parameterkombination mit der höchsten Versagenswahrscheinlichkeit. Er wird allgemein als Bemessungspunkt bezeichnet.

Die Werte  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  werden Wichtungsfaktoren genannt. Sie geben an, wie groß der Anteil der Streuung der zugehörigen Zufallsgröße an der Streuung der Grenzzustandsgleichung ist. Die Absolutwerte der Wichtungsfaktoren liegen zwischen 0 und 1. Je größer der Wert ist, desto gewichtiger ist der Einfluss der Streuung des zugehörigen Parameters. Die Wichtungsfaktoren sind damit ein brauchbares Werkzeug um zu entscheiden, welche Einflussfaktoren bei der Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit als streuende Zufallsgrößen berücksichtigt werden müssen.

Besteht die Grenzzustandsfunktion nicht mehr aus 2 sondern stattdessen aus einer Linearkombination von n Zufallsgrößen, so ergeben sich die mathematischen Beziehungen analog. Es gilt:

$$G(\mathbf{X}) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \quad (4-32)$$

$$H(\mathbf{U}) = \beta - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i = 0 \quad (4-33)$$

$$\alpha_i = \frac{-c_i \cdot \sigma_{xi}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot \sigma_{xi})^2}} \quad (4-34)$$

$$\beta = \frac{c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i \cdot \mu_{xi})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot \sigma_{xi})^2}} \quad (4-35).$$

Ist die Grenzzustandsfunktion also eine Linearkombination normalverteilter Zufallsgrößen, so kann der Sicherheitsindex  $\beta$  direkt aus Gleichung 4-35 berechnet werden. Mit Gleichung 4-7 ergibt sich dann sofort die Versagenswahrscheinlichkeit.

In praktischen Anwendungsfällen ist die Grenzzustandsfunktion aber normalerweise keine Linearkombination normalverteilter Zufallsgrößen. Um das beschriebene Instrumentarium nutzen zu können, ist es daher erforderlich, die Grenzzustandsfunktion zu linearisieren und die Verteilungsfunktionen in Normalverteilungen zu überführen.

Für die Linearisierung kann eine Taylorentwicklung benutzt werden, welche nach dem Linearglied abgebrochen wird. Das beschriebene Verfahren wird deshalb auch Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung (First Order Reliability Method – FORM) genannt. Die bezüglich der Versagenswahrscheinlichkeit beste Näherung wird offensichtlich erreicht, wenn die Taylorentwicklung im Bemessungspunkt  $\mathbf{U}^*$  durchgeführt wird.

Für die Überführung der Verteilungsfunktionen in möglichst äquivalente Normalverteilungen wird häufig die sogenannte Normal-Tail-Approximation verwendet. Diese zielt wiederum darauf ab, in der Nähe des Bemessungspunktes eine möglichst gute Übereinstimmung zu erzielen. Die Parameter der Normalverteilungen werden deshalb so bestimmt, dass im Bemessungspunkt sowohl die Werte der Verteilungsfunktionen, wie auch der Dichtefunktionen übereinstimmen. Für die Parameterberechnung gelten also die Forderungen:

$$f_x(x^*) = \frac{1}{\sigma_x^*} \cdot \varphi\left(\frac{x^* - \mu_x^*}{\sigma_x^*}\right) \quad (4-36)$$

$$F_x(x^*) = \Phi\left(\frac{x^* - \mu_x^*}{\sigma_x^*}\right) \quad (4-37)$$

$f_x(x)$  – Dichtefunktion des Parameters  $x$

$F_x(x)$  – Verteilungsfunktion des Parameters  $x$

$\varphi$  – Standardnormalverteilung (Dichtefunktion)

$\Phi$  – Standardnormalverteilung (Verteilungsfunktion)

$x^*$  - Parametervektor im Bemessungspunkt

$\mu_x^*$  - Erwartungswert der äquivalenten Normalverteilung

$\sigma_x^*$  - Standardabweichung der äquivalenten Normalverteilung

Die Parameter der äquivalenten Normalverteilung im Originalraum können durch Auflösen der Gleichungen 4-36 und 4-37 berechnet werden:

$$\sigma_x^* = \frac{1}{f_x(x^*)} \cdot \varphi\left(\Phi^{-1}(F_x(x^*))\right) \quad (4-38)$$

$$\mu_x^* = x^* - \sigma_x^* \cdot \Phi^{-1}(F_x(x^*)) \quad (4-39).$$

Die Parameter der äquivalenten Normalverteilungen sind also, ebenso wie die linearisierte Grenzzustandsfunktion von der Lage des zunächst noch unbekanntes Bemessungspunktes abhängig. Die eigentliche Aufgabe besteht deshalb darin, die Koordinaten des Bemessungspunktes zu bestimmen. Ein einfacher Iterationsalgorithmus wurde von RACKWITZ und FIEßLER entwickelt [siehe z.B. in [1], [22], [42]].

Der Bemessungspunkt ist definiert als Parametervektor mit der maximalen Versagenswahrscheinlichkeit. Gesucht ist also ein Punkt, für den die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einen Maximalwert annimmt unter der Bedingung, dass dieser Punkt auf der Versagensfläche liegt. Damit handelt es sich um eine Optimierungsaufgabe mit einer Nebenbedingung.

Zu optimieren ist die Funktion

$$f_P(u_1, u_2 \dots u_n) = f_{u_1}(u_1) \cdot f_{u_2}(u_2) \dots f_{u_n}(u_n) \quad (4-40)$$

und die Nebenbedingung ist die Grenzzustandsfunktion

$$H(\mathbf{U}) = 0 \quad (4-41)$$

Aufgaben dieses Typs können mit Hilfe der Lagrangefunktion gelöst werden. Für den gesuchten Punkt gilt (Kuhn-Tucker-Bedingung):

$$\nabla f_P(\mathbf{U}^*) = -\lambda \cdot \nabla H(\mathbf{U}^*) \quad (4-42)$$

$\lambda$  – Lagrange-Multiplikator

Die Funktion  $f_p$  hat durch die Transformation in den Standardnormalraum eine rotationssymmetrische Form angenommen. Das Zentrum liegt mit im Koordinatenursprung. Damit geht der Gradient durch den Koordinatenursprung und Gleichung 4-42 vereinfacht sich zu

$$\mathbf{U}^* = -\lambda^* \cdot \nabla H(\mathbf{U}^*) \quad (4-43)$$

Wenn man  $\mathbf{U}^{(k)}$  als eine Näherung auf  $H(\mathbf{U})$  für den gesuchten Punkt  $\mathbf{U}^*$  betrachtet, dann kann mit einer Taylorentwicklung ein weiterer Funktionswert erzeugt werden:

$$H(\mathbf{U}^{(k+1)}) = H(\mathbf{U}^{(k)}) + (\mathbf{U}^{(k+1)} - \mathbf{U}^{(k)})^T \cdot \nabla H(\mathbf{U}^{(k)}) \quad (4-44)$$

Wenn man für  $\mathbf{U}^{(k+1)}$  die Forderung 4-41 einführt und die Gleichung umstellt, so ergibt sich

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = \nabla H(\mathbf{U}^{(k)}) \cdot \frac{(\mathbf{U}^{(k)})^T \cdot \nabla H(\mathbf{U}^{(k)}) - H(\mathbf{U}^{(k)})}{\|\nabla H(\mathbf{U}^{(k)})\|^2} \quad (4-45)$$

$\mathbf{U}^{(k+1)}$  ist damit ein Punkt der Näherungsweise die Bedingung 4-41 erfüllt. Die Fortführung des Verfahrens führt zu einer weiteren Annäherung. Die Abstände zwischen den berechneten Punkten werden immer geringer und damit gilt nach hinreichend vielen Iterationsschritten

$$\mathbf{U}^{(k+1)} \approx \mathbf{U}^{(k)} \quad (4-46)$$

Das bedeutet, dass sich Gleichung 4-45 schrittweise der Form

$$\mathbf{U}^{(k)} = \nabla H(\mathbf{U}^{(k)}) \cdot \frac{(\mathbf{U}^{(k)})^T \cdot \nabla H(\mathbf{U}^{(k)}) - H(\mathbf{U}^{(k)})}{\|\nabla H(\mathbf{U}^{(k)})\|^2} \quad (4-47)$$

annähert.

Mit

$$\lambda = \frac{(\mathbf{U}^{(k)})^T \cdot \nabla H(\mathbf{U}^{(k)}) - H(\mathbf{U}^{(k)})}{\|\nabla H(\mathbf{U}^{(k)})\|^2} \quad (4-48)$$

zeigt sich, dass auch die Bedingung 4-43 erfüllt ist. Der Algorithmus liefert demzufolge den gesuchten Punkt.

Wenn das Verfahren wie beschreiben realisiert wird, dann wird die Tail-Approximation nur für den Startwert durchgeführt. Die Näherung ist deshalb nur dann gut, wenn alle Zufallsgrößen normalverteilt sind oder bereits der Startwert eine hinreichend gute Näherung für den Bemessungspunkt darstellt. Besser ist es deshalb die Iteration im Originalraum auszuführen und in jedem Iterationsschritt eine Tail-Approximation zu realisieren.

Der Iterationsschritt im Originalraum kann geschrieben werden als:

$$x_i^{(k+1)} = \mu_{xi}^{(k)} + \alpha_i^k \cdot \sigma_i^{(k)} \cdot \delta^{(k)} \quad (4-50)$$

$\sigma_{X_i}^{(k)}$  – Standardabweichung der Zufallsgröße  $X_i$  nach der Tailapproximation im  $k$ -ten Iterationsschritt (Gleichung 4-38)

$\mu_{X_i}^{(k)}$  – Mittelwert der Zufallsgröße  $X_i$  nach der Tailapproximation im  $k$ -ten Iterationsschritt (Gleichung 4-39)

mit

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\nabla H(\mathbf{U}^{(k)})}{\|\nabla H(\mathbf{U}^{(k)})\|} = \frac{\frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_i} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_j} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}} \right)^2}} \quad (4-51)$$

und

$$\delta^{(k)} = \frac{(\mathbf{U}^{(k)})^T \cdot \nabla H(\mathbf{U}^{(k)}) - H(\mathbf{U}^{(k)})}{\|\nabla H(\mathbf{U}^{(k)})\|} = \frac{\sum_{j=1}^n u_j^{(k)} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_j} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}} - H(\mathbf{u}^{(k)})}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_j} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(k)}} \right)^2}} \quad (4-52)$$

Für eine sichere Konvergenz des Verfahrens ist es erforderlich, dass die Grenzzustandsfunktion hinreichend glatt ist. Dies ist für das Berechnungsmodell nach RDO Beton leider in vielen Fällen nicht gegeben. Infolgedessen liefert der Algorithmus in den interessierenden Parameterbereichen auch nicht immer korrekte Ergebnisse.

Das beschriebene Näherungsverfahren wird für Problemstellungen des konstruktiven Hochbaus oder Ingenieurbaus vielfach angewendet. Es erlaubt die effektive Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten auch unter Berücksichtigung zahlreicher Zufallsgrößen. Die Genauigkeit der Näherung ist im Allgemeinen sehr gut.

Es ist aber zu beachten, dass die Näherung der Tail-Approximation, ebenso wie die Näherung der Taylorentwicklung nur in der Nähe des Bemessungspunktes gut ist. Das Verfahren liefert also nur genaue Ergebnisse, wenn sich die Parameterkombinationen, welche relevante Beiträge zur Versagenswahrscheinlichkeit liefern, alle dicht am Bemessungspunkt befinden. Mit steigenden Werten für die Versagenswahrscheinlichkeit vergrößert sich aber der relevante Bereich um den Bemessungspunkt. Die Genauigkeit des Verfahrens nimmt also tendenziell ab. Da die im Straßenbau zulässigen Versagenswahrscheinlichkeiten um Größenordnungen größer sind als im Hochbau, kann also die Eignung des Verfahrens für die Probleme des Straßenbaus nicht als gesichert gelten.

Bei der Anwendung der beschriebenen Methodik auf das Berechnungsmodell der RDO Beton ist ferner zu beachten, dass für die Taylorentwicklung die Stetigkeit und Differenzierbarkeit in der Nähe des Bemessungspunktes vorausgesetzt wird. Ein Blick auf die Struktur der Eisenmannformeln zur Berechnung der Temperaturspannungen zeigt, dass die Funktion zwar stetig aber nicht glatt ist. Entsprechend muss auch hier die Anwendbarkeit des Verfahrens überprüft werden.

Ein weiteres Problem liegt in der Abhängigkeit der Verteilungsfunktion für den Temperaturgradienten von der Deckendicke. Eine pragmatische Lösung ist der Ansatz der für die mittlere Deckendicke gültigen Verteilungsfunktion. Auch ein Ansatz für einen

Quantilwert der Deckendicke ist möglich. Genauer, aber auch aufwendiger ist eine iterative Ermittlung der zutreffenden Verteilungsfunktion für die Temperaturgradienten in der Nähe des Bemessungspunktes. Auch eine Entkopplung der Zufallsgrößen mit Hilfe der Rosenblatt-Transformation oder der Nataf-Transformation ist möglich. Für die weiteren Untersuchungen innerhalb dieser Arbeit wurde zunächst die Verteilungsfunktion angesetzt, welche für die mittlere Deckendicke gültig ist.

Eine beispielhafte Berechnung (Beispiel 4-2) mit den Eingangswerten aus Beispiel 4-1 zeigt, dass sich die Ergebnisse zwar im plausiblen Bereich bewegen, das Iterationsverfahren aber nicht konvergiert.

### Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung (FORM)

Eingangswerte entsprechend Beispiel 4-1.

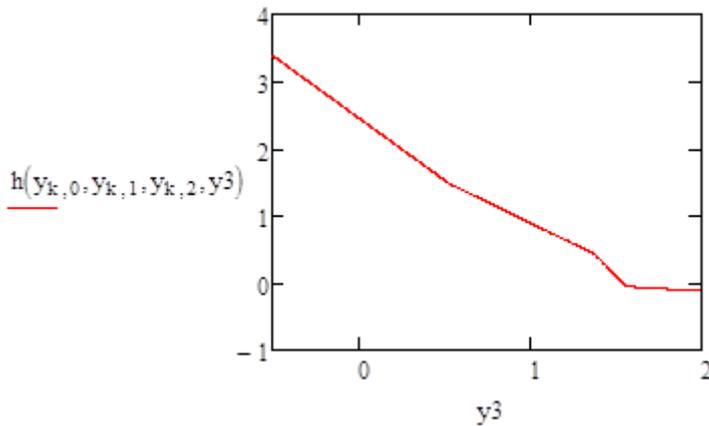
Ergebnisse nach 13 Iterationsschritten (Iterationalgorithmus nach [1]):

	Dicke	Festigkeit	Radlast	Temperatur	Versagenswahrscheinlichkeit		
	0	1	2	3	0		
$\alpha =$	0	-0.253	-0.433	0.561	0.659	0	$1.274 \cdot 10^{-3}$
	1	-0.446	-0.656	0.609	0	1	0.016
	2	-0.291	-0.507	0.713	0.386	2	$2.602 \cdot 10^{-4}$
	3	-0.337	-0.621	0.227	0.67	3	$2.719 \cdot 10^{-3}$
	4	0.018	-0.245	0.31	0.918	4	0.014
	5	-0.379	-0.81	0.448	0	5	$7.064 \cdot 10^{-3}$
	6	-0.317	-0.605	0.567	0.46	6	$6.618 \cdot 10^{-5}$
	7	-0.27	-0.565	0.441	0.643	7	$1.192 \cdot 10^{-3}$
	8	-0.344	-0.577	0.724	0.154	8	$7.94 \cdot 10^{-3}$
	9	-0.248	-0.508	0.437	0.699	9	$2.87 \cdot 10^{-3}$
	10	0.017	-0.251	0.377	0.891	10	0.012
	11	-0.383	-0.804	0.455	0	11	$7.318 \cdot 10^{-3}$
	12	-0.309	-0.594	0.578	0.466	12	$8.881 \cdot 10^{-5}$

#### Beispiel 4-2: Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit den Methoden der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung

Die Ursache liegt offensichtlich im Knick der Funktionen für die Temperaturspannung. Mit dem Erreichen der vollen Aufwölbung der Platte hat die weitere Entwicklung des Temperaturgradienten keinen Einfluss mehr auf die Spannung. Somit wird auch die Streuung bedeutungslos. Dieser Übergang wird in der Formel als scharfer Knick abgebildet ([2], Tabelle A2.4, 2./3. Zeile). Da der Bemessungspunkt bei üblichen

Parameterkonstellationen im betreffenden Bereich liegt, kommt es zu einer Störung der Iteration.



**Abbildung 4-4: Grenzzustandsfunktion im Standardnormalraum in Abhängigkeit vom Verlauf des Temperaturgradienten**

Bild 4-4 zeigt den Verlauf der Grenzzustandsfunktion aus Beispiel 4-2 im 2. Iterationsschritt. Die Bemessungspunktcoordinate für den Temperaturgradienten im Standardnormalraum hat hier den aktuellen Wert 1,954. Damit befindet sich der Wert auf dem horizontalen Abschnitt unten links in der Nähe des Knicks. Der Wechsel zwischen den Abschnitten vor und hinter dem Knick im Verlauf der Iteration lässt sich auch an den  $\alpha$ -Werten ablesen. Alle Werte  $\alpha=0$  bedeuten, dass die aktuelle Coordinate des Bemessungspunktes in diesem Iterationsschritt auf dem horizontalen Abschnitt der Grenzzustandsfunktion liegt.

Wenn die Eingangsparameter für die Berechnung so gewählt werden, dass die Iteration außerhalb des kritischen Bereiches stattfindet (z.B. für durch Vorgabe einer sehr dünnen Platte), ist eine sichere Konvergenz des Verfahrens zu verzeichnen.

In Beispiel 4-3 wurde das Verfahren ohne Berücksichtigung der Streuung der Temperaturwerte durchgeführt. Für die Temperaturspannung wurde angenommen, dass in jedem Fall die volle Wölbspannung vorhanden ist, wodurch die Ausfallwahrscheinlichkeit natürlich erhöht wird. Im Übrigen wurden wieder die Eingangswerte aus Beispiel 4-1 verwendet.

### Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung (FORM)

Eingangswerte entsprechend Beispiel 4-1, ohne Berücksichtigung der Streuung des Temperaturgradienten.

Die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit durch die Auswertung des zugehörigen Dreifachintegrals ergibt:

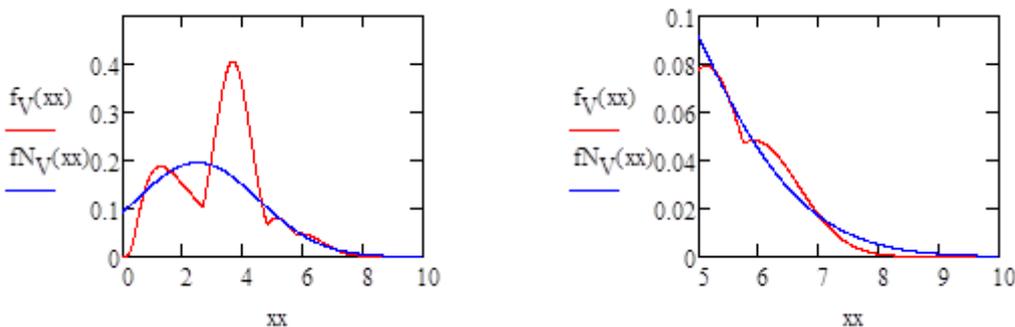
$$P_f = 0,014$$

Ergebnisse der FORM-Berechnung nach 7 Iterationsschritten:

Dicke    Festigkeit    Radlast				Versagenswahrscheinlichkeit			
$\alpha =$		0	1	2	AW =		0
	0	-0.481	-0.435	0.761		0	$8.528 \cdot 10^{-3}$
	1	-0.451	-0.595	0.665		1	0.016
	2	-0.388	-0.57	0.724		2	0.015
	3	-0.378	-0.557	0.739		3	0.015
	4	-0.37	-0.543	0.754		4	0.015
	5	-0.362	-0.53	0.767		5	0.015
	6	-0.377	-0.55	0.745		6	0.015

**Beispiel 4-3: Berechnung von Beispiel 4-2 ohne Berücksichtigung der Streuung des Temperaturgradienten**

In Beispiel 4-3 zeigt sich, dass das Verfahren sehr schnell konvergiert. Die Abweichung zum Ergebnis der Integration kann auf die schlechte Näherung der Tail-Approximation für die Verteilung der Radlast zurückgeführt werden. In Bild 4-5 ist das Ergebnis der Tail-Approximation für die Verteilung der Radlast dargestellt.



**Abbildung 4-5: Tail-Approximation der Verteilungsfunktion für die Radlast (Beispiel 4-2/4-3)**

Es ist erkennbar, dass im besonders relevanten hinteren Bereich die Näherungsfunktion (blau) deutlich über der Ursprungsfunktion liegt. Die besonders hohen Radlasten werden in der Berechnung also mit zu hohen Wahrscheinlichkeiten angesetzt.

Die Analyse zeigt, dass das Berechnungsmodell nach [2] nur bedingt für die Anwendung der Methoden der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung geeignet ist. Um hier Kompatibilität herzustellen, muss vor allem eine Beschreibung der Temperaturspannungen gefunden werden, welche einen glatteren Verlauf zeigt.

In diesem Zusammenhang muss festgestellt werden, dass der beschriebene Knick im Verlauf der temperaturbedingten Spannungen nicht aus dem tatsächlichen Plattenverhalten resultiert, sondern eine Folge der Idealisierungen im Berechnungsmodell ist. Der Fehler besteht darin, dass zwei Lastfälle bei nichtlinearem Modellverhalten superponiert werden. Die Spannungen welche aus der Radlast und aus dem Temperaturgradienten resultieren werden separat berechnet und einfach addiert. Damit bleibt unberücksichtigt, dass die temperaturbedingte Plattenverformung die Wirkung der Radlast beeinflusst. Eine Radlast erzeugt auf einer aufgewölbten Platte eine höhere Spannung als auf einer homogen aufliegenden Platte. Je größer die Aufwölbung ist, desto größer werden die Spannungen. Der Knick im Spannungsverlauf gibt also nicht das real vorhandene Tragwerksverhalten wieder. Mit der Anwendung eines realitätsnäheren Berechnungsmodells (z.B. FEM-Berechnung) würde sich also das Haupthindernis für die Anwendung der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung automatisch erledigen.

Als problematisch sind weiterhin die Unstetigkeiten in der Verteilungsfunktion für die Radlasten anzusehen. Diese können im Zuge der Iteration zu einer sprunghaften Änderung in der Tail-Approximation führen.

Ein interessantes Nebenprodukt der Berechnung mit dem FORM-Algorithmus sind die  $\alpha$ -Faktoren. Wie bereits oben erwähnt, geben diese an, wie groß der Einfluss der Streuung der zugehörigen Größe auf die Gesamtstreuung der Grenzzustandsfunktion ist. Um Aufschluss darüber zu erhalten, welche Parameter aus dem Berechnungsmodell der RDO Beton mit ihren Streuungen berücksichtigt werden müssen, wurde das Beispiel 4-3 derart erweitert, dass die meisten der Eingangsgrößen als Zufallsgrößen behandelt wurden. Weil empirische Daten fehlen, wurden für die Verteilungsfunktionen plausible Annahmen getroffen. Für alle zusätzlich eingeführten Zufallsgrößen wurde eine Normalverteilung unterstellt. Die Festlegung der Parameter orientiert sich an den in [2] vorkommenden Werten. Die Einflussgrößen, welche sich vorwiegend auf die Temperaturspannungen auswirken, wurden nicht als Zufallsgrößen berücksichtigt.

### Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung (FORM)

Eingangswerte entsprechend Beispiel 4-3, mit Berücksichtigung der Streuung weiterer Einflussgrößen.

<u>Normalverteilungen:</u>	<b>Lagerungsfaktor:</b>	<b>Dübelfaktor:</b>	<b>Bettungsmodul:</b>
	$\mu_{bL} = m_{bL}$	$\mu_{bD} = m_{bD}$	$\mu_K = K$
	$\sigma_{bL} = 0.03$	$\sigma_{bD} = 0.05$	$\sigma_K = 0.03$
	<b>Reifenfaktor:</b>	<b>Stoßfaktor:</b>	<b>Regelkontaktdruck:</b>
	$\mu_R = \gamma E I$	$\mu_S = \gamma E A$	$\mu_{pn} = p n$
	$\sigma_R = 0.01$	$\sigma_S = 0.03$	$\sigma_{pn} = 0.02$

Ergebnisse nach 5 Iterationsschritten:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$\alpha =$	0	-0.467	-0.342	0.792	0.075	0.133	-0.094	0.024	0.065	0.024
	1	-0.496	-0.608	0.569	0.099	0.179	-0.099	0.029	0.081	0.029
	2	-0.371	-0.539	0.736	0.071	0.127	-0.069	0.021	0.058	0.02
	3	-0.371	-0.54	0.734	0.073	0.132	-0.07	0.022	0.06	0.021
	4	-0.372	-0.541	0.733	0.073	0.132	-0.07	0.022	0.06	0.021

- 0 - Dicke
- 1 - Festigkeit
- 2 - Verkehr
- 3 - Lagerungsfaktor
- 4 - Dübelfaktor
- 5 - Bettungsmodul
- 6 - Reifenfaktor
- 7 - Stoßfaktor
- 8 - Regelkontaktdruck

	0
AW =	$5.773 \cdot 10^{-3}$
	1
	0.022
	2
	0.017
	3
	0.017
	4
	0.017

#### Beispiel 4-4: Neuberechnung des Beispiels 4-3 mit Berücksichtigung weiterer Zufallsgrößen

Die Berechnungen zeigen, dass offenbar Deckendicke, Festigkeit, Radlast und Temperaturgradient tatsächlich die Einflussgrößen sind, deren Streuungen den entscheidenden Einfluss auf die Versagenswahrscheinlichkeit haben. Alle weiteren Parameter liefern deutlich kleinere  $\alpha$ -Werte. Die  $\alpha$ -Werte sind allerdings nicht so klein, dass auf eine Berücksichtigung der Streuungen der zugehörigen Einflussgrößen offensichtlich in jedem Fall verzichtet werden könnte. Die Versagenswahrscheinlichkeit als Berechnungsergebnis hat sich durch die Berücksichtigung weiterer Zufallsgrößen erwartungsgemäß leicht erhöht.

#### 4.5 Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Methode)

Eine besonders einfache Möglichkeit zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit ist die Simulation. Das Grundprinzip dieser Methode besteht darin die Berechnung der interessierenden Zielfunktion mit jeweils entsprechend ihrer Streuung variierenden Eingangsgrößen vielfach zu wiederholen. Damit gewinnt man einen Satz von Ergebnisdaten, welchen man statistisch auswerten kann. Die mathematischen Grundlagen für diese Methode wurden in der Mitte des 20. Jahrhunderts von STANISLAW ULAM und JOHN von NEUMANN entwickelt. Weil für die mathematische Simulation der Streuungen Zufallszahlen verwendet werden, wurde unter Bezugnahme auf das bekannte Spielkasino in Monte Carlo für dieses Verfahren der Begriff Monte-Carlo-Methode geprägt.

Bei Anwendung der Monte-Carlo-Methode auf die vorliegende Problematik ist die Grenzzustandsfunktion vielfach wiederholt zu berechnen. Für jeden Rechendurchlauf sind zufällige Werte für die streuenden Einflussgrößen zu verwenden. Die Versagenswahrscheinlichkeit ergibt sich näherungsweise aus dem Verhältnis der negativen Ergebniswerte zur Gesamtzahl der Rechendurchläufe. Mathematisch ausgedrückt:

$$P_f \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n I(g(\mathbf{X}_i)) \quad (4-53)$$

n – Anzahl der Simulationsrechnungen

X – Vektor der zufälligen Eingangsgrößen

g – Grenzzustandsfunktion

I - Indikatorfunktion

Die Indikatorfunktion gibt an, ob der Funktionswert der Grenzzustandsfunktion positiv oder negativ (Versagensfall) ist:

$$I = \begin{cases} 0 & \text{für } g(\mathbf{X}) \geq 0 \\ 1 & \text{für } g(\mathbf{X}) < 0 \end{cases} \quad (4-54)$$

Mit einer steigenden Anzahl von Rechendurchläufen verbessert sich die Genauigkeit des Ergebnisses. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n I(g(\mathbf{X}_i)) \right] = P_f \quad (4-55)$$

Die Verteilung der zufällig ermittelten Werte für die streuenden Einflussgrößen muss der tatsächlichen Streuung dieser Einflussgrößen entsprechen. Zufallszahlen, die dieser Bedingung genügen, kann man gewinnen, indem man zunächst gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugt und anschließend den jeweils zugehörigen Funktionswert der inversen Verteilungsfunktion der betreffenden Einflussgröße berechnet.

$$X = F^{-1}(GV_{01}) \quad (4-56)$$

X – zufälliger Wert für die Einflussgröße X mit der Verteilungsfunktion F

F<sup>-1</sup> – inverse Funktion der Verteilungsfunktion der Einflussgröße X

GV<sub>01</sub> – gleichverteilte Zufallszahl zwischen 0 und 1

Die inversen Verteilungsfunktionen sind oftmals schwierig zu bestimmen. Für einige häufig vorkommende Verteilungsfunktionen sind die entsprechenden Formeln in [1] angegeben. Moderne Softwarelösungen stellen Standardfunktionen zur Verfügung. Für kompliziertere Verteilungsfunktionen ist Formel 4-56 numerisch zu lösen. Dies trifft auch für die Verteilungsfunktion der Verkehrsbelastung (Gleichung 3-14) zu. Hier sind Funktionswerte für die inverse Funktion von

$$F_{Rad}(x) = \int_0^x f_{Rad}(u) du \quad (4-57)$$

zu bestimmen.

Es ist offenkundig, dass die Anwendung gebräuchlicher numerischer Lösungsverfahren hier aufwendig ist. Weil im Zuge der Iteration das Integral immer wieder neu numerisch berechnet werden muss, ergeben sich lange Rechenzeiten. Dies ist problematisch, weil für eine Simulation eine große Anzahl von Zufallszahlen bestimmt werden muss.

Es wird deshalb ein anderes einfaches und robustes Verfahren vorgeschlagen: Der relevante Wertebereich für die Radlasten wird in gleich große Intervalle aufgeteilt. Für jeden der so entstehenden Zwischenwerte  $x_i$  wird der zugehörige Funktionswert  $F_{Rad}(x_i)$  berechnet. Anschließend kann für jede erzeugte Zufallszahl  $0 \leq y_r \leq 1$  das zugehörige Intervall  $F_{Rad}(x_i) \leq y_r < F_{Rad}(x_{i+1})$  gesucht werden. Der  $y_r$  zugeordnete  $x$ -Wert kann näherungsweise durch Interpolation bestimmt werden. Das Verfahren ist einfach und effizient und mit 100 Intervallpunkten ausreichend genau.

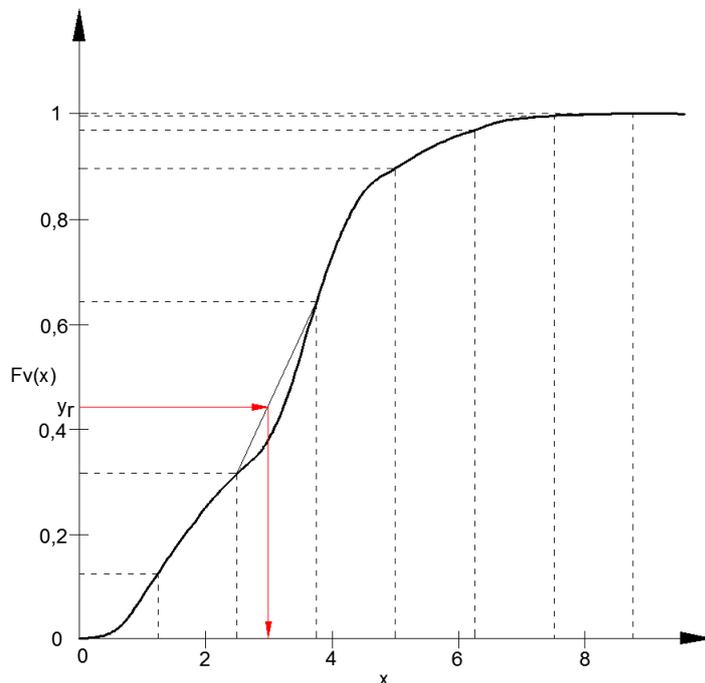


Abbildung 4-6: Prinzip des Verfahrens zur Ermittlung der inversen Werte der Verteilungsfunktion

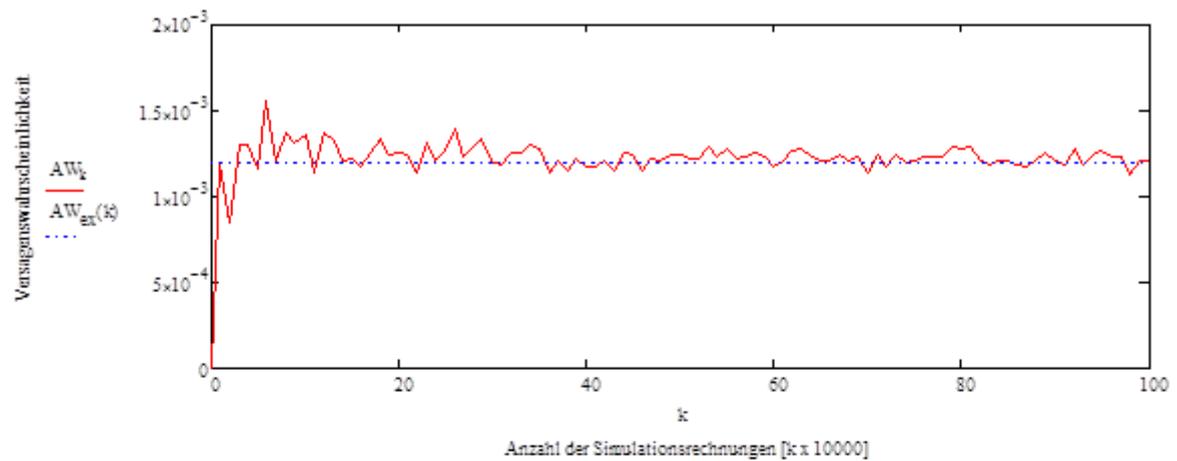
Für die Erzeugung der gleichverteilten Zufallszahlen werden in gängiger wissenschaftlicher Software normalerweise Zufallszahlengeneratoren bereitgestellt.

Um das Verhalten einer Straßenbetonplatte auf Basis des Modells der RDO Beton zu simulieren, ist es notwendig, die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion für die Temperaturgradienten von der Deckendicke zu berücksichtigen. Dies ist problemlos möglich, indem für jede zufällige Realisierung eines Dickenwertes die zugehörige Verteilungsfunktion für den Temperaturgradienten berechnet wird und auf dieser Grundlage eine zugehörige zufällige Realisierung des Temperaturgradienten bestimmt wird.

Eine Nachrechnung von Beispiel 4-1 mit der Monte-Carlo-Methode zeigt eine gute Annäherung an das exakte Ergebnis. Nach ca. 1 Mio. Rechendurchläufen liegt die Abweichung mit großer Sicherheit im Bereich  $\pm 5\%$ .

## Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit der Monte-Carlo-Methode

Eingangswerte und Zufallsgrößen entsprechend Beispiel 4-1.



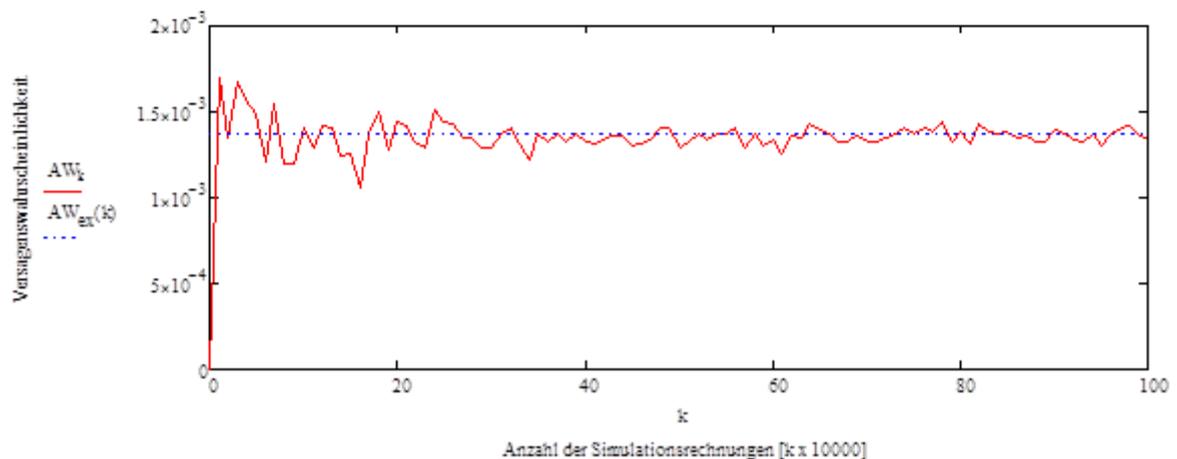
Exakter Wert für die Versagenswahrscheinlichkeit:  $1,198 \cdot 10^{-3}$

Berechneter Wert nach  $10^6$  Simulationsrechnungen:  $1,201 \cdot 10^{-3}$

Bei Berücksichtigung der Abhängigkeit zwischen Betonfestigkeit und E-Modul:

Exakter Wert für die Versagenswahrscheinlichkeit:  $1,366 \cdot 10^{-3}$

Berechneter Wert nach  $10^6$  Simulationsrechnungen:  $1,336 \cdot 10^{-3}$



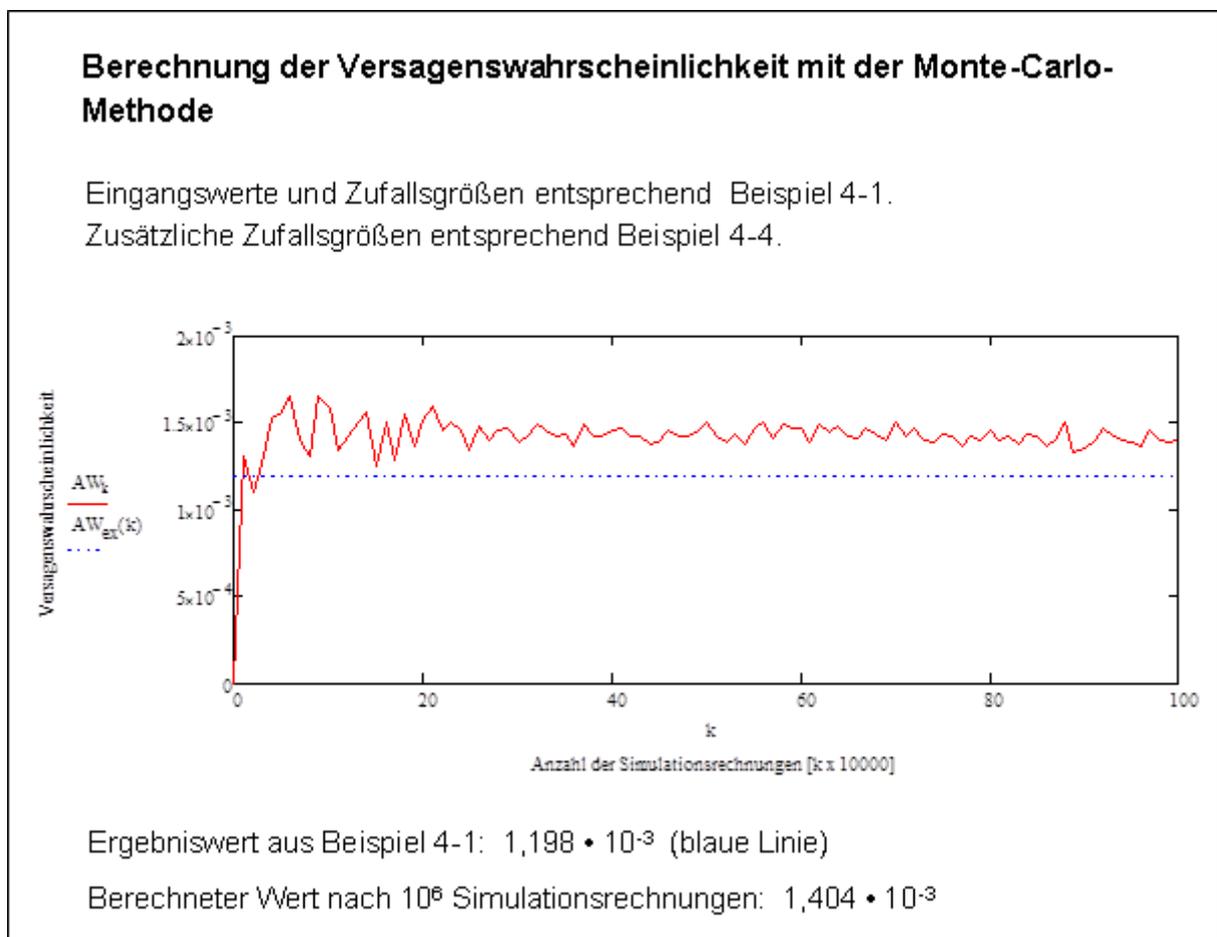
### Beispiel 4-5: Nachrechnung von Beispiel 4-1 mit der Monte-Carlo-Methode

Gleichzeitig ist aber auch erkennbar, dass die Genauigkeit nur sehr langsam zunimmt. Um die Genauigkeit um eine Zehnerpotenz zu verbessern, muss die Anzahl der Rechendurchläufe um zwei Zehnerpotenzen erhöht werden.

Gleichwohl kann man konstatieren, dass die mit 1 Mio. Simulationsrechnungen erreichbare Genauigkeit für die vorliegende Problemstellung im Allgemeinen ausreichend ist. Die modellimmanenten Unsicherheiten und die Unsicherheiten der Datenbasis wiegen deutlich schwerer.

Die Rechenzeit für 1 Mio. Rechendurchläufe lag im Beispiel 4-5 bei ca. 20s und damit etwa im Bereich der Berechnung durch Integration über den Ausfallbereich. Ein wesentlicher Vorteil der Monte-Carlo-Methode besteht aber darin, dass die Rechenzeit nur in relativ geringem Maße von der Anzahl der berücksichtigten Zufallsgrößen abhängt. So ist die Integration mit mehr als vier Zufallsgrößen kaum noch praktikabel, die Monte-Carlo-Simulation kann aber auch unter Berücksichtigung zahlreicher Zufallsgrößen noch mit akzeptablen Rechenzeiten durchgeführt werden.

In Beispiel 4-6 wurde die Monte-Carlo-Simulation um die in Beispiel 4-4 definierten zusätzlichen Zufallsgrößen erweitert.



#### Beispiel 4-6: Erweiterung von Beispiel 4-5 um weitere Zufallsgrößen

Die Rechenzeit ist gegenüber Beispiel 4-5 nur unwesentlich gestiegen. Mit der Monte-Carlo-Methode können also auch höherdimensionale Probleme gelöst werden, für die eine numerische Lösung des Versagensintergrals praktisch unmöglich ist.

Im berechneten Beispiel ist durch die Berücksichtigung der Streuungen weiterer Einflussgrößen die berechnete Versagenswahrscheinlichkeit um etwa 15% gestiegen. Dies stellt naturgemäß nur eine vorsichtige Abschätzung der Größenordnung dar. Um hier

gesicherte Aussagen zu treffen, sind systematische Berechnungen notwendig, welche den gesamten relevanten Wertebereich der einzelnen Parameter abdecken. Voraussetzung sind aber in jedem Fall gesicherte Aussagen über die einzelnen Verteilungsfunktionen.

Die Monte-Carlo-Methode ist sehr gut geeignet komplizierte Problemstellungen zu bearbeiten, deren exakte mathematische Lösung Schwierigkeiten bereitet. Nachteilig ist, dass die berechneten Ergebniswerte jeweils nur eine Näherungslösung darstellen, deren Genauigkeit nicht mit Sicherheit bestimmt werden kann. Außerdem ergibt sich der ungewohnte Umstand, dass zwei Berechnungen mit gleichem Eingangsvektor unterschiedliche Ergebnisse liefern. Dies kann sich nachteilig auf die Akzeptanz des Verfahrens, besonders bei unkundigen Anwendern auswirken.

Das beschriebene Verfahren stellt die einfachste Variante der Monte-Carlo-Methode dar. Es wird auch als Simple-Sampling oder Crude-Monte-Carlo-Methode (CMC) bezeichnet.

Es existieren zahlreiche Weiterentwicklungen der CMC, welche die Performance des Verfahrens für bestimmte Anwendungsfälle wesentlich verbessern können.

Wenn die zu berechnenden Versagenswahrscheinlichkeiten sehr klein sind, wie es z.B. im Hochbau oder Ingenieurbau der Fall ist, sind möglicherweise viele Millionen Rechendurchläufe notwendig, um überhaupt erst einen einzigen Versagensfall zu detektieren. Damit werden sehr umfangreiche Simulationen erforderlich, um ein Ergebnis mit hinreichender Genauigkeit zu erzielen. Eine Hauptrichtung zur Weiterentwicklung der Monte-Carlo-Methode besteht deshalb darin, die Problemstellung so zu modifizieren, dass die Simulation sich auf den besonders relevanten Bereich des Parameterraumes konzentriert, also den Bereich um den Bemessungspunkt. Die entsprechenden Methoden werden als Importance Sampling bezeichnet. Eine kurze Beschreibung dieser Verfahren findet sich z.B. in [1], [26] und [42]. Weil die Versagenswahrscheinlichkeiten in dem hier interessierenden Fall der Straßenbetonplatte vergleichsweise groß sind, ist keine wesentliche Verbesserung der Effizienz der Monte-Carlo-Methode durch die Anwendung des Importance Sampling zu erwarten.

Eine andere Entwicklungsrichtung zielt darauf ab, eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Zufallszahlen im Parameterraum zu erreichen (Latin Hypercube Sampling, Quasi Monte-Carlo-Methode u.a., siehe z.B.: [27], [42]). Es ist aber zu beachten, dass ein erhöhter Aufwand für die Generierung der Zufallszahlen notwendig wird. Die Anwendung des Latin Hypercube Samplings für die vorliegende Problemstellung brachte bei Testrechnungen keine wesentlichen Performancegewinne.

#### 4.6 Mehrere Versagensmechanismen

Kann ein Versagen des Tragwerkes infolge unterschiedlicher Schadensmechanismen auftreten, so verkompliziert sich die Berechnung. Eine relativ einfache Lösung kann aber gefunden werden, wenn die Schadensmechanismen als unabhängig angesehen werden können. In diesem Fall handelt es sich um ein Seriensystem, d.h. ein Versagen tritt ein, wenn ein Versagenskriterium erfüllt wird. Oder anders ausgedrückt: Das Tragwerk versagt nicht, wenn alle Überlebenskriterien erfüllt sind. Für die Überlebenswahrscheinlichkeit gilt also:

$$P_s = \prod_{i=1}^m (1 - P_{fj}) \quad (4-58)$$

$P_s$  – Überlebenswahrscheinlichkeit

$P_{fj}$  – Versagenswahrscheinlichkeit für den Versagensmechanismus j

m - Anzahl der Versagensmechanismen

Die Versagenswahrscheinlichkeit für alle Schadensmechanismen ergibt zu damit zu

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - P_{fj}) \quad (4-59)$$

Wenn man die in [2] vorgesehenen Nachweise an Längs- und Querfuge als zwei unabhängige Schadensmechanismen definiert, dann ergibt sich aus Gleichung 4-59

$$P_f = P_{fLF} + P_{fQF} - P_{fLF} \cdot P_{fQF} \quad (4-60)$$

$P_{fLF}$  – Versagenswahrscheinlichkeit an der Längsfuge

$P_{fQF}$  – Versagenswahrscheinlichkeit an der Querfuge

#### 4.7 Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit bei Nutzung der Finite-Elemente-Methode

Wird für die Berechnung der Spannungen und Verformungen der Betonplatte die Finite-Elemente-Methode (FEM) benutzt, so liegt die Grenzzustandsfunktion nicht in geschlossener Form vor. Grundsätzlich können trotzdem die unter den Abschnitten 4.3 bis 4.5 beschriebenen Methoden zur Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit benutzt werden. Jede dieser Methoden erfordert aber eine vielfache Berechnung der Grenzzustandsfunktion. Dafür wird jedes Mal eine FEM-Kalkulation notwendig. Für die Integration oder die Monte-Carlo-Methode bedeutet dies, dass die FEM im Zuge der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit hunderte oder möglicherweise auch tausende Male ausgeführt werden muss. Damit ergeben sich wochenlange Rechenzeiten, was eine praktische Nutzung ausschließt. Der FORM-Algorithmus erfordert zwar erheblich weniger Aufrufe der Grenzzustandsfunktion, es sind aber für die iterative Bestimmung des Bemessungspunktes die partiellen Ableitungen zu berechnen. Dies muss jeweils numerisch erfolgen und erfordert für jede Ableitung mindestens zwei FEM-Berechnungen. Damit ergibt sich ebenfalls eine gewisse Anzahl an notwendigen FEM-Berechnungen und damit verbunden möglicherweise problematische Rechenzeiten.

Eine Möglichkeit, mit akzeptablen Rechenzeiten zu verwertbaren Ergebnissen zu kommen bietet die Nutzung sogenannter Metamodelle. Das Metamodell konstituiert einen möglichst einfachen Zusammenhang zwischen den Eingangsparametern und den Ergebnissen, welcher keinen direkten Bezug zu den zugrundeliegenden physikalischen Zusammenhängen haben muss und auch nur im jeweils interessierenden Parameterbereich annähernd gelten muss. Das Metamodell wird aus Berechnungsergebnissen des Primärmodells aufgebaut. Nachdem das Metamodell definiert wurde, können alle weiteren Berechnungen damit ausgeführt werden.

Eine vielfach angewendete Methode, welche praktisch ein Metamodell nutzt, ist das Antwortflächenverfahren. Beschreibungen dieses Verfahrens können z.B. [23], [28] und [29] entnommen werden.

Die Grundidee des Antwortflächenverfahrens besteht darin, den Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen und dem Berechnungsergebnis (der Systemantwort) mit einem einfachen funktionalen Ansatz zu beschreiben. Die unbekannte Grenzzustandsfunktion wird also durch eine genäherte Funktion ersetzt.

$$G(\mathbf{X}) = 0 \rightarrow \tilde{G}(\mathbf{X}) = 0 \quad (4-61)$$

$G$  – exakte Grenzzustandsfunktion (unbekannt)

$\tilde{G}$  – genäherte Grenzzustandsfunktion (Antwortfläche)

Mit der Näherungslösung für die Grenzzustandsfunktion ist eine Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit den oben beschriebenen Verfahren möglich. Es ist offenkundig, dass bei einer komplizierten Form der Grenzzustandsfunktion eine gute Näherung nur in Teilbereichen möglich ist. Dies ist für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit aber auch ausreichend. Da nur ein bestimmter Bereich des Parametervektors, nämlich der Bereich um den Bemessungspunkt relevante Beiträge zur Ausfallwahrscheinlichkeit liefert, ist es ausreichend, in diesem Gebiet eine gute Näherung zu erzielen. Damit ergibt sich die Notwendigkeit, den Bemessungspunkt iterativ zu bestimmen. Einen brauchbaren Algorithmus hierfür gibt BUCHER an ([30], siehe auch [28]). Geeignete Anfangswerte für die Iteration können gewonnen werden, indem zunächst eine Berechnung mit dem FORM-Algorithmus unter Nutzung einer analytischen Grenzzustandsfunktion durchgeführt wird.

Als funktionaler Ansatz für die Systemantwort der Betonplatte ist ein Polynom 2. Grades geeignet

$$\tilde{g}(\mathbf{X}) = a + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i^2 \quad (4-62)$$

Werden nur die vier wichtigsten Zufallsgrößen entsprechend Beispiel 4-1 berücksichtigt, so gilt  $n=4$ . Auch wenn die Grenzzustandsfunktion unbekannt ist, kann angenommen werden, dass der Einfluss der Zufallsgröße „Betonfestigkeit“ nur linear ist. Der entsprechende Koeffizient für das quadratische Glied kann also zu Null gesetzt werden. Damit sind noch 8 Koeffizienten zu bestimmen. Dies ist möglich, indem mit der FE-Methode für 8 Suchpunkte  $\mathbf{X}$  die zugehörigen Werte der Antwortfläche berechnet werden. Für eine sinnvolle Festlegung der Suchpunkte sind in [28] Hinweise gegeben. Das so gewonnene Gleichungssystem kann mit geeigneten Methoden gelöst werden und liefert die Werte für die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Es ist auch möglich, durch eine größere Anzahl an Suchpunkten ein überbestimmtes Gleichungssystem zu erzeugen. Die Performance des Verfahrens kann damit möglicherweise verbessert werden. Im ersten Iterationsschritt ist dies allerdings schwierig, weil noch keine geeigneten Schätzwerte für die numerische Lösung des Gleichungssystems zur Verfügung stehen.

Definitionsgemäß ist die Näherung der Antwortfläche an die Grenzzustandsfunktion in der Nähe des Bemessungspunktes besonders gut. Es ist deshalb offenkundig, dass ähnlich wie beim FORM-Algorithmus die Genauigkeit des Verfahrens nur gut ist, wenn sich die Parameterbereiche mit relevanten Ausfallwahrscheinlichkeiten dicht um den Bemessungspunkt gruppieren, d.h. wenn die zu berechnende Versagenswahrscheinlichkeit klein ist.

Generell ist es schwierig, die Qualität der mit dem Antwortflächenverfahren gewonnenen Ergebnisse zu überprüfen, sofern keine entsprechenden Referenzwerte zur Verfügung stehen.

Speziell für die Lösung des hier interessierenden Problems der Berechnung von Betonstraßenplatte bietet sich eine weitere Möglichkeit:

Weil das statische System vom Grundmuster her immer gleich ist, ist es denkbar, den gesamten interessierenden Parameterbereich mit systematischen Vorberechnungen zu untersuchen und die Ergebnisse in einer Datenbank zu speichern. Es ist auch möglich, mit diesen aus dem Primärsystem gewonnenen Daten ein neuronales Netz zu trainieren. In diesem Fall wäre die Datenbank bzw. das neuronale Netz das Metamodell. Dieses Vorgehen erfordert eine große Anzahl an FEM-Berechnungen. Weil das Metamodell aber den kompletten Parameterbereich abdeckt, ist bei der Benutzung keine weitere Kalibrierung notwendig. Im Zuge der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit wird also keine einzige weitere FEM-Berechnung notwendig. Damit dürfte sich die Rechenzeit gegenüber dem Antwortflächenverfahren dramatisch verkürzen.

#### 4.8 Interpretation der Ergebnisse

Die in diesem Abschnitt berechnete Versagenswahrscheinlichkeit bezieht sich auf eine zufällige Belastung einer zufällig ausgewählten Fahrbahnplatte. Wenn man also eine große Anzahl von Platten betrachtet, deren Dicke und Festigkeit der vorausgesetzten Verteilung folgt und jede dieser Platten wird einmal mit zufälligen Lasten beaufschlagt, welche auch den angenommenen Verteilungen folgen, so wird der Anteil der versagenden Platten der berechneten Ausfallwahrscheinlichkeit entsprechen. Die hier berechnete Versagenswahrscheinlichkeit ist also ein allgemeines Sicherheitsmaß, erlaubt aber keine Aussage darüber wie viele Platten nach dem Ende der Nutzungsdauer versagt haben werden.

Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass eine berechnete Versagenswahrscheinlichkeit von  $x$  keineswegs bedeutet, dass eine zufällige Platte im Mittel nach  $1/x$  Belastungen versagen wird.

## 5 Versagenswahrscheinlichkeit für bestimmte Zeiträume

### 5.1 Bedeutung für die Dimensionierung von Betonstraßen

Die mit den in Abschnitt 4 beschriebenen Methoden berechneten Versagenswahrscheinlichkeiten, beschreiben die Wahrscheinlichkeit des Plattenversagens bei einer einmaligen zufälligen Belastung. Die berechneten Werte stellen damit ein geeignetes Maß für die Sicherheit der Fahrbahnplatte dar und können als Bemessungskriterium bei der Dimensionierung verwendet werden. Eine Aussage darüber, wie viele Platten im Nutzungszeitraum versagen werden, liefern diese Werte aber nicht. Es fehlt der zeitliche Bezug.

Bei der Dimensionierung von Fahrbahnplatten ist aber gerade sicher zu stellen, dass der Anteil der im Nutzungszeitraum ausfallenden Platten einen bestimmten, noch akzeptablen Wert nicht überschreitet. Betrachtet man eine große Anzahl gleichartiger Fahrbahnplatten, so ist die Versagenswahrscheinlichkeit der Einzelplatte gleich dem Anteil versagender Platten an der Grundgesamtheit, jeweils bezogen auf den Betrachtungszeitraum. Es ist also für die Dimensionierungspraxis von besonderer Bedeutung, die auf einen bestimmten Zeitraum  $t$  bezogene Versagenswahrscheinlichkeit  $P_F(t)$  zu berechnen. Diese ist offensichtlich gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer (Zeit bis zum Versagen) der Platte kleiner ist als der Betrachtungszeitraum.

$$F_L(t) = P_f(T \leq t) \quad (5-1)$$

$F_L(t)$  – Wahrscheinlichkeit dass die Platte bis zum Zeitpunkt  $T$  versagt  
(Lebensdauerverteilung)

$t$  – Betrachtungszeitraum

$T$  – Zeitraum bis zum Versagen der Platte (Lebensdauer der Platte)

Gesucht ist also die Lebensdauerfunktion der Platte.

### 5.2 Extremwertverteilungen

Zur Lösung des o.g. Problems ist die Frage relevant, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Einwirkung im Betrachtungszeitraum einen bestimmten Extremwert annimmt. Diese Frage ist mit einer einfachen Überlegung leicht zu beantworten:

Betrachtet man  $n$  unabhängige Realisierungen  $x_i$  ( $i=1 \dots n$ ) einer Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion  $F(x)$  und der Dichtefunktion  $f(x)$ , so ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Wert  $x_i$  nicht größer ist als  $x$ , gegeben mit:

$$P(x_i < x) = F(x) \quad (5-2)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Werte von  $x_1$  bis  $x_n$  größer ist als  $x$  ergibt sich zu:

$$P(x_1 \dots x_n < x) = F^n(x) \quad (5-3)$$

Dies ist aber genau die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Extremwert unter  $n$  zufälligen Werten nicht größer als  $x$  ist und damit per Definition die Extremwertverteilung für den Maximalwert.

$$F_{ex,max}(x) = F^n(x) \quad (5-4)$$

Für die Minimalwerte ergibt sich analog:

$$F_{ex,min}(x) = 1 - (1 - F(x))^n \quad (5-5)$$

Die Differentiation liefert die zugehörigen Dichtefunktionen:

$$f_{ex,max}(x) = n \cdot F^{n-1}(x) \cdot f(x) \quad (5-6)$$

$$f_{ex,min}(x) = n \cdot (1 - F(x))^{n-1} \cdot f(x) \quad (5-7)$$

Die zugrunde liegende Verteilungsfunktion für die zufälligen Werte von  $x$ ,  $F(x)$  wird in diesem Zusammenhang als Momentanwertverteilung bezeichnet.

Die mit den Gleichungen 5-4 und 5-5 gegebenen Verteilungsfunktionen für Extremwerte sind mathematisch exakt und einfach strukturiert. Trotzdem sind die Gleichungen für praktische Anwendungen nicht praktikabel. Die konkreten Zahlenwerte für die Ausdrücke  $F(x)$  bzw.  $(1-F(x))$  sind bei praktischen Berechnungen nur mit endlicher Genauigkeit bekannt bzw. durch die EDV darstellbar. Diese Differenz zum exakten Wert erhöht sich durch die Potenzierung mit dem Parameter  $n$ . Da normalerweise in den interessierenden Betrachtungszeiträumen eine Vielzahl von unabhängigen Realisierungen der Zufallsgröße auftreten, nimmt der Parameter  $n$  oftmals sehr große Werte an. Die Terme  $F^n(x)$  bzw.  $(1-F(x))^n$  nehmen damit faktisch immer den Wert 0 an. Diese numerische Schwierigkeit ist in der Struktur des mathematischen Problems begründet. Das Problem ist schlecht konditioniert. Es ist damit nicht möglich, durch einen verbesserten Berechnungsalgorithmus zu praktikablen Ergebnissen zu kommen.

Die Lösung dieses Problems besteht in der Nutzung der sogenannten Gumbelverteilungen. Der deutsche Mathematiker Emil Gumbel konnte beweisen, dass für ein hinreichend großes  $n$  jede Extremwertverteilung asymptotisch gegen eine bestimmte mathematische Form, die Gumbelverteilung strebt. Dies gilt unabhängig von der Art der zugrundeliegenden Momentanwertverteilung. In Abhängigkeit von den ggf. vorhandenen Grenzen der Momentanwertverteilung ergeben sich die Verteilungskurven des Typs I, II oder III. Die größte praktische Bedeutung hat der Typ I, welcher auch im engeren Sinne als Gumbelverteilung bezeichnet wird. Die entsprechende Formel lautet:

$$F_{gum}(x) = e^{-e^{-\frac{1}{\beta}(x-\alpha)}} \quad (5-8)$$

Die zugehörige Dichtefunktion ergibt sich zu:

$$f_{gum}(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{1}{\beta}(x-\alpha)} \cdot e^{-e^{-\frac{1}{\beta}(x-\alpha)}} \quad (5-9).$$

Für die inverse Verteilungsfunktion gilt:

$$F_{gum}^{-1}(x) = \alpha - \beta \cdot \ln(-\ln(q)) \quad (5-10)$$

Der Parameter  $\beta$  bestimmt die Form der Funktion und der Parameter  $\alpha$  die Lage bezüglich der x-Achse. Je größer die betrachtete Stichprobe ist, auf die sich der Extremwert bezieht, desto wahrscheinlicher werden besonders extreme Werte. Die Funktion rückt also bei steigendem Wert n auf der x-Achse nach rechts. Der Parameter  $\alpha$  wird größer,  $\beta$  bleibt unverändert. Dieser Zusammenhang lässt sich durch eine einfache Formel beschreiben:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \cdot \beta \quad (5-11)$$

$\alpha_1, \alpha_2$  – Lageparameter der Gumbelverteilung

$n_1, n_2$  – zugehörige Parameter der exakten Extremwertverteilung

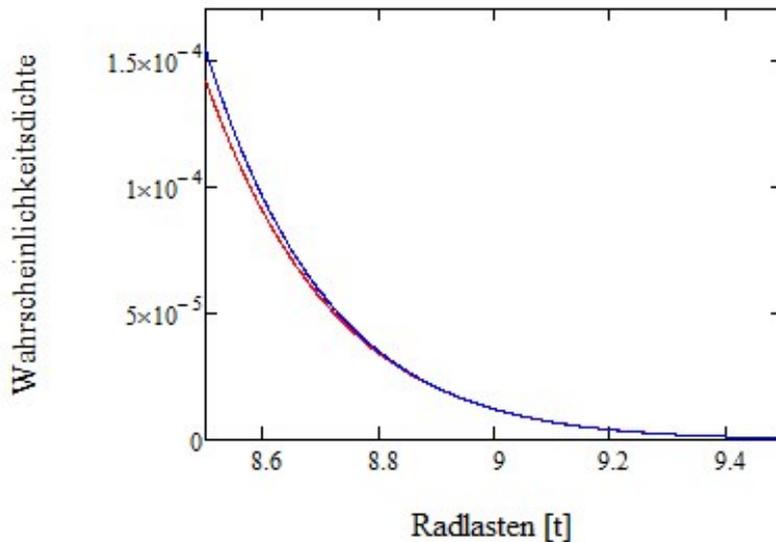
$\beta$  – Formparameter der Gumbelverteilung

Sind also für einen bestimmten Wert  $n_1$  die zugehörigen Gumbelparameter  $\alpha_1$  und  $\beta$  bekannt, so können die  $\alpha$ -Parameter für beliebige andere n-Werte mit Hilfe der Formel (5-10) berechnet werden.

Praktisch bedeutet dies, dass zunächst ein n-Wert angenommen werden kann, welcher so klein ist, dass die Gleichung 5-4 noch benutzt werden kann. Damit lassen sich beliebig viele Funktionswerte berechnen. Diese bilden die Grundlage für eine Anpassung der Parameter der zugehörigen Gumbelverteilung. Anschließend kann mit Gleichung 5-11 der  $\alpha$ -Parameter für beliebige andere n-Werte umgerechnet werden.

In baupraktischen Anwendungsfällen besteht oft ein Zusammenhang zwischen dem n-Wert und dem Betrachtungszeitraum (z.B. wenn n die Anzahl von Achsübergängen darstellt). In diesen Fällen bietet die Formel 5-11 auch die Möglichkeit, die Extremwertverteilungen für bestimmte Betrachtungszeiträume zu bestimmen.

Bei der Berechnung der Extremwertverteilung für die Radlasten bereitet die komplizierte Struktur der Dichtefunktion (Gleichung 3-14) zusätzliche Schwierigkeiten. Eine Vereinfachung ist hier möglich, indem die Verteilungsfunktion durch eine angepasste Normalverteilung ersetzt wird. Dabei kann man sich den Umstand zu Nutze machen, dass für die Extremwertverteilung nur die größten Radlasten von Bedeutung sind. Es ist also ausreichend, die Anpassung für die rechte Seite der letzten der vier Teilbereiche der Dichtefunktion vorzunehmen.



**Abbildung 5- 1: Anpassung einer Normalverteilung (blau) an das hintere Ende der Dichtefunktion der Radlasten**

Abbildung 5-1 zeigt die den maßgebenden Bereich der Anpassung. Wie zu erkennen ist, gibt es eine sehr gut Übereinstimmung.

Mit Gleichung 5-4 bzw. 5-6 lässt sich die Extremwertverteilung für 10000 Achsübergänge bestimmen. Es ergibt sich:

$$f_{ex.10000}(x) = 10000 \cdot F_{N.app}(x)^{9999} \cdot f_{N.app}(x) \quad (5-11)$$

$f_{N.app}$  – Dichtefunktion der angepassten Normalverteilung

$F_{N.app}$  – Verteilungsfunktion der angepassten Normalverteilung

$f_{ex.10000}$  – Extremwertverteilung der Radlasten bei 10000 Achsübergängen.

Die Parameter der zugehörige Gumbelverteilung lassen sich leicht bestimmen. Dazu werden einige Punkte ausgewählt, für welche Übereinstimmung zwischen Extremwertverteilung und Gumbelverteilung gefordert wird. Das sich so ergebende Gleichungssystem ist numerisch zu lösen. Im vorliegenden Fall wurden drei Passpunkte definiert ( $x_1=7,5t$ ,  $x_2=8,25t$ ,  $x_3=8,75t$ ). Für die Parameteranpassung wurde der Levenberg-Marquardt-Algorithmus benutzt. Damit ergeben sich die Gumbelparameter:

$$\alpha=8,252$$

$$\beta=0,214.$$

Abbildung 5-2 zeigt die nahezu perfekte Übereinstimmung der Extremwertverteilung und der Gumbelverteilung.

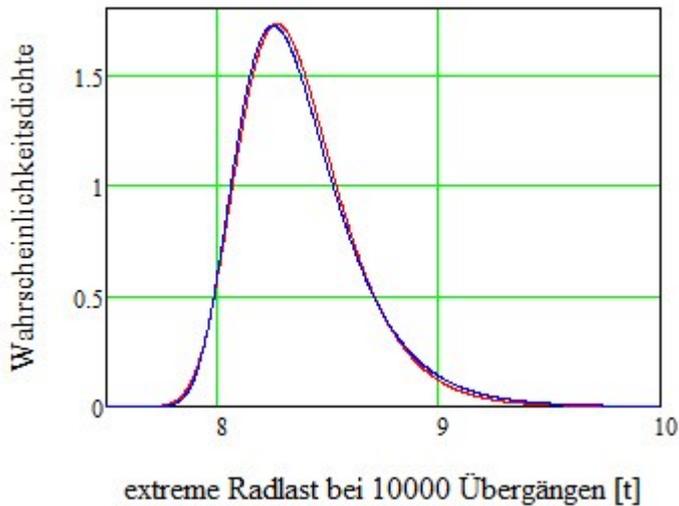


Abbildung 5- 2: Extremwertverteilung (rot) und Gumbelverteilung (blau) für 10000 Radübergänge

Aus [BASt HES 2000] geht hervor, dass ein Fahrzeug des Schwerverkehrs durchschnittlich 4,25 Achsen hat. Damit gilt die gefundene Verteilungsfunktion für 2350 Fahrzeugübergänge und hat die Form:

$$f_{gum}^{(NSV=2350)}(x) = \frac{1}{0,214} \cdot e^{-\frac{1}{0,214}(x-8,252)} \cdot e^{-e^{-\frac{1}{0,214}(x-8,252)}} \quad (5-12)$$

NSV – Anzahl der Fahrzeuge des Schwerverkehrs im Betrachtungszeitraum

Unter Verwendung der Formel 5-11 kann leicht die Gumbelverteilung für andere NSV-Werte bestimmt werden. Es gilt:

$$f_{gum}^{(NSV)}(x) = \frac{1}{0,214} \cdot e^{-\frac{1}{0,214}(x-(\ln(\frac{NSV}{2350}) \cdot \beta + \alpha_1))} \cdot e^{-e^{-\frac{1}{0,214}(x-(\ln(\frac{NSV}{2350}) \cdot \beta + \alpha_1))}} \quad (5-13)$$

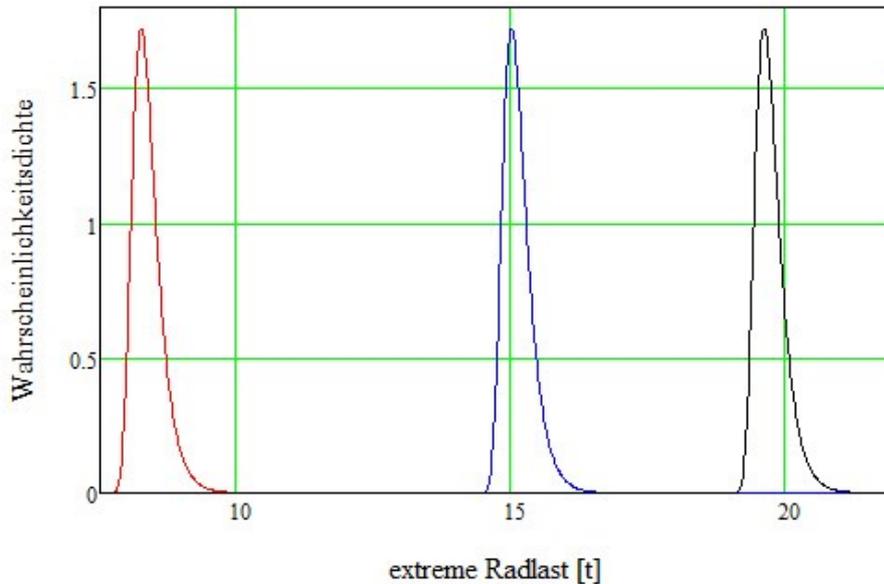
mit

$$\alpha_1 = 8,252$$

und

$$\beta = 0,214.$$

In Abbildung 5-3 sind die Gumbelverteilungen für 10000, 2 Mio. und 200 Mio. Fahrzeugübergänge dargestellt. Der bereits oben beschriebene Effekt, dass sich die Kurve mit steigenden n-Werten immer weiter nach rechts verschiebt, ist deutlich erkennbar.



**Abbildung 5-3: Gumbelverteilung für 10000 (rot), 2 Mio. (blau) und 200 Mio. (magenta) Fahrzeugübergänge**

Mit analogem Vorgehen lässt sich die Gumbelverteilung für die Temperaturgradienten herleiten. Da es sich hierbei aber um einen kontinuierlichen Prozess handelt, stellt sich die Frage, wie der Parameter  $n$  anzunehmen ist. Die Antwort lässt sich aus den empirischen Daten gewinnen. Die entsprechende Basis bilden die von KAYSER berechneten Gradientenverläufe (siehe Abschnitt 3.3.5). Aus den Daten kann jeweils ein konkreter Extremwert für einen Zeitraum von 15 Jahren abgelesen werden. Offensichtlich ist der Parameter  $n$  so zu wählen, dass der Erwartungswert der Extremwertverteilung in etwa dem empirisch ermittelten Extremwert entspricht. Für alle Simulationsreihen war dies für einen Wert von  $n=500$  der Fall. Für ein Jahr gilt also  $n=500/15=33,3$  und für 30 Jahre  $n=1000$ . Weil die Verteilungsfunktion für die Momentanwerte der Temperaturgradienten stetig ist, lässt sich die exakte Extremwertverteilung auch für den Wert  $n=1000$  noch gut berechnen.

Es ist zu beachten, dass die Temperaturgradienten von der Deckendicke abhängen. Entsprechend ergibt sich auch für jede Deckendicke eine andere Extremwertfunktion.

Mit den beschriebenen Vorgehensweisen können die Parameter der interessierenden Extremwertverteilungen auf einfache Art und Weise bestimmt werden. Es muss aber darauf hingewiesen werden, dass für die Extremwertverteilung allein die extremen Endbereiche der jeweils zugehörigen Momentanwertverteilung entscheidend sind. Für die entsprechend kleinen Funktionswerte ergeben sich bereits bei niedrigen Potenzierungen numerische Grenzen. Es wäre deshalb nützlich, die Parameter der Gumbelverteilungen direkt aus empirischen Werten zu bestimmen.

### 5.3 Berechnung der Lebensdauerverteilung bei zeitlich invarianten Einflussgrößen

Die Ermittlung der Lebensdauerverteilung wird wesentlich vereinfacht, wenn angenommen werden kann, dass die wesentlichen Einflussgrößen über den Betrachtungszeitraum unverändert bleiben. Für die Zufallsgrößen bedeutet dies, dass auch die Streuungsparameter konstant bleiben.

Verändern sich die Widerstandsgrößen über den Betrachtungszeitraum nicht, so ist es offensichtlich, dass die Versagenswahrscheinlichkeit innerhalb dieser Zeitspanne im Moment der maximalen Beanspruchung am größten ist. Wenn das Bauteil die Maximalbeanspruchung übersteht, wird es auch bei den anderen Belastungsfällen nicht versagen. Die Versagenswahrscheinlichkeit für den Betrachtungszeitraum entspricht also der Versagenswahrscheinlichkeit für den Belastungsfall mit maximaler Beanspruchung. Geht man von einer einzigen zeitlich veränderlichen Einflussgröße aus, so ist die maximale Bauteilbeanspruchung offensichtlich identisch mit einem Extremwert dieser zeitlich veränderlichen Größe. Die Versagenswahrscheinlichkeit lässt sich also mit den im Kapitel 4 beschriebenen Methoden berechnen, wenn für die zeitlich veränderliche Größe die Extremwertverteilung verwendet wird.

Betonstraßenplatten werden aber durch zwei zeitlich veränderliche und sich überlagernde Größen beansprucht: Die Radlast und die Temperaturlast.

Diese beiden Lasten können mathematisch als stochastische Prozesse beschrieben werden. Für den aktuellen Wert eines Prozesses gilt zu jedem Zeitpunkt eine bestimmte Verteilungs- bzw. Dichtefunktion. In diesem Fall  $f_{\text{Rad}}$  (Formel 3-14) für die Radlast und  $f_T$  (Formel 3-15) für die Temperaturlast. Im zeitlich invarianten Fall bleiben die Parameter dieser Verteilungsfunktionen konstant. Der Prozess wird als stationär bezeichnet.

Die Überlagerung dieser Prozesse ist meist mathematisch anspruchsvoll. Nur für Spezialfälle (Gaußprozesse, Ferry-Borges-Castangheta-Prozesse) sind Vereinfachungen bekannt.

Eine einfache und effektive Möglichkeit für die Überlagerung stochastischer Prozesse bildet die Turkstra-Regel. Sie besagt, dass das betrachtete Bauteil dann versagt, wenn einer der zeitlich veränderlichen Größen einen Extremwert annimmt. Für die praktische Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit bedeutet dies, dass die Verfahren aus Kapitel 4 angewendet werden können und dabei für eine zeitlich veränderliche Einflussgröße die Extremwertverteilung benutzt werden muss. Gibt es einen klar dominierenden Einfluss, so ist dieser mit der Extremwertverteilung anzusetzen. Ist keine eindeutige Dominanz gegeben, so sind alle zeitlich veränderlichen Größen nacheinander mit ihrer Extremwertverteilung anzusetzen. Der jeweils errechnete Maximalwert für die Versagenswahrscheinlichkeit ist maßgebend.

Die Turkstra-Regel ist zwar nicht im strengen Sinne mathematisch exakt, findet aber im Ingenieurwesen breite Anwendung und hat sich in der Praxis bewährt. In einer vergleichenden Studie [31] empfehlen SIKORA und HOLICKY die Turkstra-Regel zur Anwendung.

Bezogen auf Straßenbetonplatten bedeutet das also, dass die Berechnung zweimal durchzuführen ist, einmal mit der Extremwertverteilung für die Radlasten und einmal mit der Extremwertverteilung für die Temperaturgradienten. In den meisten Fällen ist der Einfluss der Radlast dominierend. Da dies aber nicht immer der Fall ist, sind generell beide Varianten zu überprüfen.

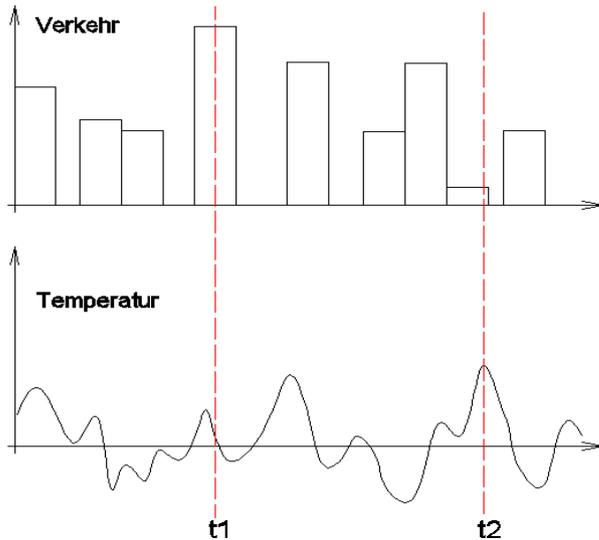


Abbildung 5- 4: Prinzip der Turkstra-Regel (aus [6])

Ausgehend von Gleichung 4-13 ergibt sich damit für die Versagenswahrscheinlichkeit:

$$P_f = \max \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{G=0} f_h(h_d) \cdot f_c(f_{ct}) \cdot f_{Rad.ex}(F_d) \cdot f_T(\delta_T) df_{ct} dF\delta_T dF_d dh_d \right. \\ \left. \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^{G=0} f_h(h_d) \cdot f_c(f_{ct}) \cdot f_{Rad}(F_d) \cdot f_{T.ex}(\delta_T) df_{ct} dF\delta_T dF_d dh_d \right. \quad (5-14)$$

$f_{Rad.ex}$  – Extremwertverteilung für die Radlast bezogen auf den Betrachtungszeitraum

$f_{T.ex}$  – Extremwertverteilung für die Temperaturgradienten bezogen auf den Betrachtungszeitraum

Wendet man die Extremwertverteilungen aus Beispiel 5-1 und 5-2 in Verbindung mit der Turkstra-Regel auf das Beispiel 4-1 an, so ergibt sich für einen Betrachtungszeitraum von 30 Jahren eine Versagenswahrscheinlichkeit von 0,133. Der Zusammenhang zwischen Betonfestigkeit und E-Modul wurde bei dieser Berechnung berücksichtigt. Die Nachrechnung mit der Monte-Carlo-Methode führt zum selben Ergebnis.

Bei solchen relativ hohen Versagenswahrscheinlichkeiten können selbst Parameterkombinationen mit negativen Temperaturgradienten mit relevanter Wahrscheinlichkeit zum Versagen führen. Werden die negativen Temperaturgradienten nicht berücksichtigt, so ergibt sich eine Versagenswahrscheinlichkeit von 0,128. Bei Versagenswahrscheinlichkeiten unter 10% ist der Anteil der Parameterkombinationen mit negativen Gradienten aber so gering, dass es ausreicht, nur die positiven Temperaturgradienten zu berücksichtigen.

Mit dem beschriebenen Verfahren lässt sich die zeitlich invariante Versagenswahrscheinlichkeit für bestimmte Zeiträume relativ einfach berechnen. Die Ergebnisse sind aber, speziell für den Anwendungsfall Betonfahrbahn, nicht realistisch. Die Lebensdauer von Betonstraßenplatten ist stark von zeitlich veränderlichen Einflussgrößen (Betonermüdung, Auflagerbedingungen, Querkraftübertragung usw.) abhängig. Deshalb ist es notwendig, die Lebensdauerverteilung für den zeitlich varianten Fall zu berechnen.

## 5.4 Berechnung der Lebensdauerverteilung bei zeitlich varianten Einflussgrößen

### 5.4.1 Definition und Bedeutung

Die Verteilungsfunktion für die Lebensdauer gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Versagen vor dem Zeitpunkt  $t$  eintritt. Auf die Grundgesamtheit der Platten eines Fahrbahnabschnittes bezogen ist dies gleichbedeutend mit dem Anteil der Platten die bis zum Zeitpunkt  $t$  versagt haben. Für die Praxis ist dies die eigentlich interessante Frage.

Für die Lebensdauerverteilung gelten die gleichen grundlegenden Definitionen, wie für andere Verteilungsfunktionen. Die Dichtefunktion gibt also die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Versagen zu einem bestimmten Zeitpunkt eintritt:

$$f_L(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t \leq T < t + \Delta t) \quad (5-15)$$

Die kumulative Versagenswahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit dass ein Versagen bis zum Zeitpunkt  $t$  eintritt, ist die Summe aller Versagenswahrscheinlichkeiten bis zum Zeitpunkt  $t$ .

$$P(T \leq t) = F_{L(t)} = \int_0^t f_L(u) du \quad (5-16)$$

Näherungsweise gilt:

$$F_L(t) \approx \sum_{i=0}^{it} f_L(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \quad (5-17)$$

mit

$$\sum_{i=0}^{it} \Delta t = t \quad (5-18).$$

### 5.4.2 Berechnung durch Integration über den Ausfallbereich

Es liegt nahe, die Lebensdauerverteilung zu bestimmen, indem der Betrachtungszeitraum in eine Anzahl gleicher Abschnitte unterteilt wird, für die die Versagenswahrscheinlichkeit separat berechnet. Wenn für jeden dieser Abschnitte angenommen werden kann, dass die Einflussgrößen konstant bleiben, so kann die Versagenswahrscheinlichkeit mit dem in Abschnitt 5.3 beschriebenen Verfahren berechnet werden. In jedem Zeitabschnitt werden die jeweils aktuellen Werte der zeitlich veränderlichen Größen für die Berechnung benutzt. Die für die Beanspruchung von Betonstraßenplatten relevanten Einflussgrößen ändern sich sehr langsam, sodass davon ausgegangen werden kann, dass eine Unterteilung des Nutzungszeitraumes in Jahresscheiben ausreichend genaue Ergebnisse liefert.

Es ist allerdings zu beachten, dass sich für die Grundgesamtheit der verbliebenen intakten Straßenplatten in jedem Jahr neue Verteilungsfunktionen ergeben. Es ist davon auszugehen, dass die Gesamtheit der betrachteten Straßenplatten in jedem Berechnungsjahr nicht gleichmäßig von Versagensfällen betroffen sein wird, sondern dass in höherem Maß die Platten betroffen sind, welche eine schlechtere Betonqualität und eine geringere Dicke aufweisen als der Durchschnitt der noch intakten Platten.

Die für die Dicke und Festigkeit der Platten angesetzten Verteilungsfunktionen (in diesem Fall Normalverteilungen) haben also bereits im zweiten Jahr keine Gültigkeit mehr. Weil besonders die schwächeren Platten ausgefallen sind, ist die Grundgesamtheit der verbleibenden Platten wesentlich robuster. Die Verteilungsfunktionen für die Dicke und Festigkeit nehmen komplizierte Formen an und werden von Jahr zu Jahr komplexer. Das Berechnungsverfahren ist deshalb nicht praktikabel.

Einfacher ist es, die Berechnung der zeitlich varianten Versagenswahrscheinlichkeit zunächst für eine zufällige Einzelplatte durchzuführen. Dicke und Festigkeit sind damit klar determinierte Werte und nicht mehr als Zufallsgrößen zu berücksichtigen. Anschließend wird über die Gesamtheit der Platten, also über Dicke und Festigkeit integriert.

Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies:

$$P_{f,nj} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_h(h_d) \cdot f_c(f_{ct}) \cdot \left[ \sum_{ij=1}^{nj} (1 - P_{f,ij-1|f_{ct},h_d}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f_{Rad}(F_d) \cdot f_T(\delta_T) dF_d dF\delta_T \right] df_{ct} dh_d \quad (5-19)$$

$P_{f,nj}$  – Versagenswahrscheinlichkeit bis zum Jahr  $nj$

$P_{f,ij|f_{ct},h_d}$  – Versagenswahrscheinlichkeit bis zum Jahr  $ij$  unter der Voraussetzung, dass die Dicke den Wert  $h_d$  und die Festigkeit den Wert  $f_{ct}$  hat.

$G_{ij}$  – Grenzzustandsfunktion im Jahr  $ij$

Die Lösung des Integrals ist mit geeigneten numerischen Verfahren möglich. Es ist aber zu beachten, dass die Berechnung der Nullstellen für die Grenzzustandsfunktion nicht in geschlossener Form möglich ist. Es müssen also auch hier numerische Verfahren benutzt werden. Im Übrigen ist das Turkstra-Verfahren entsprechend Abschnitt 5.3 anzuwenden und die Berechnung ist für die Längs- und die Querrufe durchzuführen.

Es liegt auf der Hand, dass die Bestimmung der Lebensdauerverteilung mit dem beschriebenen Verfahren zu langen Rechenzeiten führt und zahlreiche numerische Schwierigkeiten beinhaltet. Eine Erweiterung auf weitere Zufallsgrößen ist mit praktikablem Rechenaufwand kaum realisierbar. Im Folgenden werden deshalb einfachere Verfahren entwickelt.

### 5.4.3 Berechnung mit der Monte-Carlo-Methode

#### 5.4.3.1 Prinzipielles Vorgehen

Die Grundidee besteht darin, dass jeder simulierten Platte nur am Anfang der Berechnung eine zufällige Dicke und Festigkeit zugeordnet wird. Dieser Anfangswert bleibt für alle Berechnungsjahre erhalten (Dicke) bzw. wird auf Basis des Anfangswertes jeweils aktualisiert (Festigkeit). Ist ein Nachweis für eine Platte nicht erfüllt, so wird diese für alle weiteren Berechnungsjahre als ausgefallen markiert. Weil auch im Verlauf der Simulation

die besonders schwachen Platten bevorzugt ausfallen werden, ergibt sich so automatisch für jedes Berechnungsjahr die korrekte Verteilung der Grundgesamtheit. Die kumulative Versagenswahrscheinlichkeit, also der Wert der Lebensdauervertelung, ergibt sich für jedes Berechnungsjahr als Quotient aus der Anzahl der als ausgefallen markierten Platten und der Anzahl der simulierten Platten.

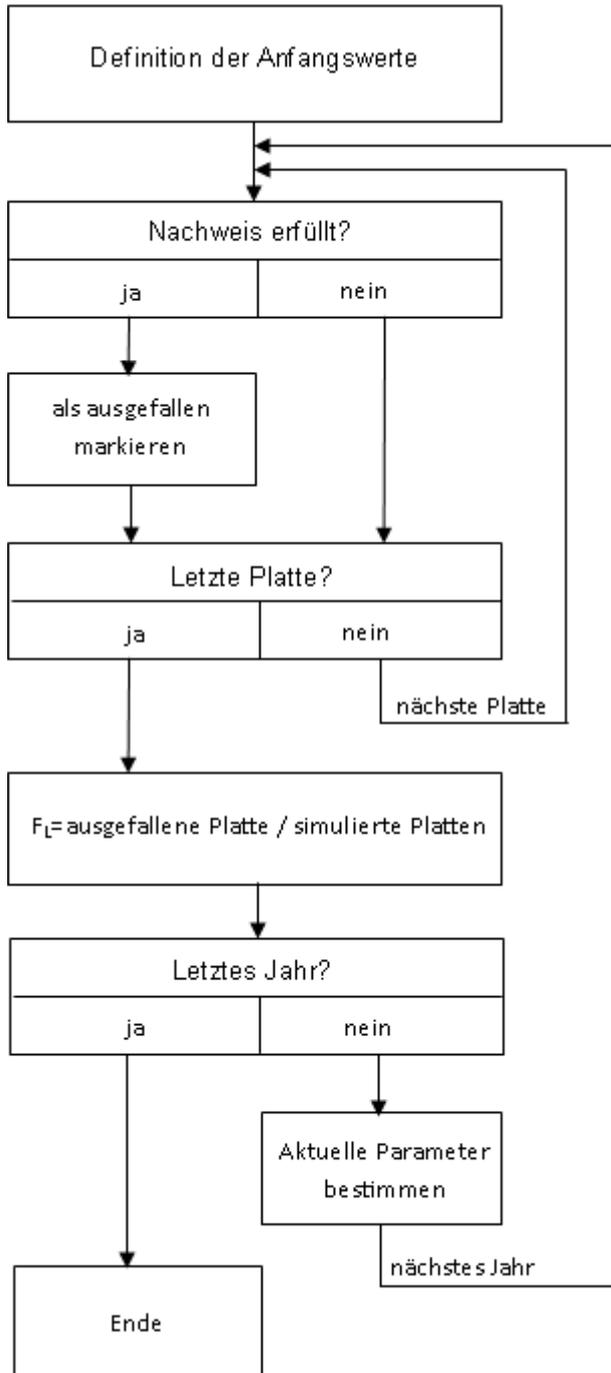


Abbildung 5- 5: Prinzipieller Ablauf der Berechnung

#### 5.4.3.2 Berechnungsfälle

Die Grundlage für die Simulation bildet wiederum das Berechnungsverfahren nach [2]. Hier sind drei verschiedene Grenzlastfälle unterschieden:

- Grenzzustand der Tragfähigkeit für extreme Lasten
- Grenzzustand der Tragfähigkeit für Ermüdung
- Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit.

Diese Nachweise sind jeweils an der Längsfuge und Querfuge zu führen. Damit ergeben sich insgesamt 6 Berechnungsfälle.

Der Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit ist aber per Definition für das Versagen der Platten nicht relevant. Die Erfahrungen der letzten Jahre haben darüber hinaus gezeigt, dass dieser Lastfall praktisch nie maßgebend wird. Für die Simulationsrechnungen braucht der Grenzlastfall der Gebrauchstauglichkeit also nicht berücksichtigt werden.

Die Sicherheit gegen Ermüdung wird in [2] nach dem folgenden Verfahren nachgewiesen: Zunächst werden die Achslasten des gesamten Achslastkollektivs des Schwerverkehrs ihrem Betrag entsprechend in Klassen eingeteilt. Danach erfolgt über die Vierte-Potenz-Regel eine Umrechnung der Lastwechselzahlen jeder Klasse in eine äquivalente Lastwechselzahl für eine äquivalente Achslast. Über eine Ermüdungsfunktion ist dieser Lastwechselzahl ein zulässiges Spannungsniveau zugeordnet. Der Ermüdungsnachweis wird erbracht, indem nachgewiesen wird, dass beim äquivalenten Lastwechsel dieses Spannungsniveau nicht überschritten wird. Es wird also lediglich der Nachweis für den äquivalenten Lastfall geführt.

Um die Anzahl der Berechnungsfälle zu reduzieren, wird für die Monte-Carlo-Simulation ein anderes Nachweiskonzept für die Ermüdung verfolgt. Dabei wird der Spannungsnachweis für die extremen Lasten jeweils mit der Festigkeit des bereits ermüdeten Betons geführt. Dadurch sind beide Aspekte des Grenzzustandes der Tragfähigkeit in einem Nachweis vereinigt. Dieser ist an der Längsfuge und an der Querfuge zu führen.

Für diese Nachweisfälle sind in [2] jeweils unterschiedliche Parameter definiert. Auch die Anzahl der Lastübergänge wird entsprechend der statistischen Überfahungshäufigkeit unterschiedlich angesetzt.

Die Anwendung der Turkstra-Regel erfordert es, beide Nachweisfälle in zwei Varianten zu führen. Für die Monte-Carlo-Simulation verbleiben also vier Berechnungsfälle:

- Nachweis an der Längsfuge für extrem Radlast und zufällige Temperaturlast
- Nachweis an der Querfuge für extrem Radlast und zufällige Temperaturlast
- Nachweis an der Längsfuge für zufällige Radlast und extreme Temperaturlast
- Nachweis an der Querfuge für zufällige Radlast und extreme Temperaturlast

Wenn einer der Nachweise nicht erfüllt ist, wird die zugehörige Platte innerhalb der Simulation als ausgefallen markiert. Dabei werden für die Turkstrafälle zunächst gesonderte vorläufige Markierungen verwendet. Erst wenn beide Fälle für ein Jahr vollständig berechnet sind, lässt sich entscheiden, welcher Fall maßgebend war, also im betreffenden Jahr mehr Ausfälle verursachte. Die Markierungen dieses Turkstrafalles werden dann als endgültige Ausfallmarkierungen für das betreffende Jahr definiert.

#### 5.4.3.3 Ansatz der zeitlich veränderlichen Einflussgrößen

Wie bereits oben erläutert, ist es erforderlich, für verschiedene im Berechnungsmodell enthaltene Einflussgrößen eine Veränderung über den Betrachtungszeitraum zu berücksichtigen. Konkret betrifft dies die Parameter:

- Stoßfaktor
- Dübelfaktor
- Lagerungsfaktor
- Verkehrsaufkommen
- Betonfestigkeit.

Für den Ansatz der zeitlichen Veränderung dieser Einflussfaktoren gibt es kaum gesicherte Grundlagen. So sind für jeden Parameter auf der Basis der vorhandenen Erkenntnisse plausible Annahmen zu treffen, welche mehr oder weniger empirisch belegbar sind. Wenn diesbezüglich Erkenntnisfortschritte vorliegen, kann die zeitliche Verlaufsfunktion entsprechend präzisiert werden. Auf die Methodik der probabilistischen Berechnung hat dies keinen Einfluss.

Um innerhalb der vorliegenden Arbeit eine grundsätzliche Form für die zeitlichen Verlaufsfunktionen zu definieren, wurden die folgenden Betrachtungen angestellt:

Die Fahrbahn befindet sich am Anfang der Nutzungszeit in ihrem theoretischen Idealzustand, d.h. die zeitlichen Funktionswerte der Faktoren haben ihren Minimalwert. Weiter wird davon ausgegangen, dass sich die Verhältnisse zunächst nur sehr langsam verschlechtern. Die Funktionswerte bleiben also nahezu konstant. Minimale Schädigungen akkumulieren sich aber und verstärken sich gegenseitig. So führt z.B. die Abnahme der Querkraftübertragung an den Fugen zu einer Zunahme der dynamischen Belastung, diese führt wiederum zu einer weiteren Verschlechterung der Auflagerbedingungen. Durch beide Effekte wird der Stoßfaktor weiter erhöht usw. Es wird also angenommen, dass die zeitliche Zunahme der Faktoren progressiv verläuft. Andererseits ist aber auch zu berücksichtigen, dass die Funktionswerte der Faktoren nicht unbegrenzt ansteigen können. Damit ist die Verlaufsfunktion so zu definieren, dass sich der Faktor dem Höchstwert asymptotisch annähert. Die Verlaufsfunktion muss also zunächst progressiv und dann degressiv verlaufen und sich schließlich dem Höchstwert asymptotisch annähern. Damit kann eine Funktion aus der Gruppe der sogenannten Simoidfunktionen verwendet werden. Es wird eine Tangens Hyperbolicus-Funktion gewählt.

Für die Festlegung der Minimal- und Maximalwerte können die in den RDO Beton [2] enthaltenen Angaben verwendet werden. An dieser Stelle sei aber darauf hingewiesen, dass die Tabellenwerte der RDO Beton auf der Grundlage neuerer Forschungsergebnisse präzisiert werden können. So sind in jüngerer Zeit in Deutschland mehrere Forschungsvorhaben bearbeitet worden, welche den Zusammenhang zwischen Fahrbahnnunehinheit und dynamischer Radlast thematisieren ([53], [54], [55], [56]). Auch zur Querkraftübertragung in den Fugen liegen neuere Ergebnisse vor [57]. Einer entsprechenden Überarbeitung der RDO Beton soll an dieser Stelle aber nicht vorgegriffen werden.

Für den Stoßfaktor werden in [2] Werte zwischen 1,03 und 1,10 für die Längsfuge bzw. 1,03 und 1,24 für die Querfuge angegeben (Tabelle A 1.4, Werte für Normalverkehr,

Geschwindigkeit über 30km/h, B-Zahl >800000). Diese Werte können als obere bzw. untere Grenzen angesehen werden. Für die Längsfuge wird angesetzt:

$$\gamma_{E4L_j} = \gamma_{E4L_0} + \frac{\gamma_{E4L_o} - \gamma_{E4L_0}}{2} + \tanh\left(\frac{GSV_j}{3 \cdot 10^7} - 2,5\right) \cdot \left(\frac{\gamma_{E4L_o} - \gamma_{E4L_0}}{2}\right) \quad (5-20)$$

$\gamma_{E4L_j}$  – Stoßfaktor ( $\gamma_{E4}$  nach [2]) für die Längsfuge im Jahr j

$\gamma_{E4L_0}$  – Stoßfaktor für die Längsfuge im Jahr 0 (unterer Grenzwert)

$\gamma_{E4L_o}$  – oberer Grenzwert für den Stoßfaktor an der Längsfuge

GSV<sub>j</sub> – Anzahl der Fahrzeugübergänge bis zum Ende des Jahres j.

Für die Querfuge gilt entsprechend:

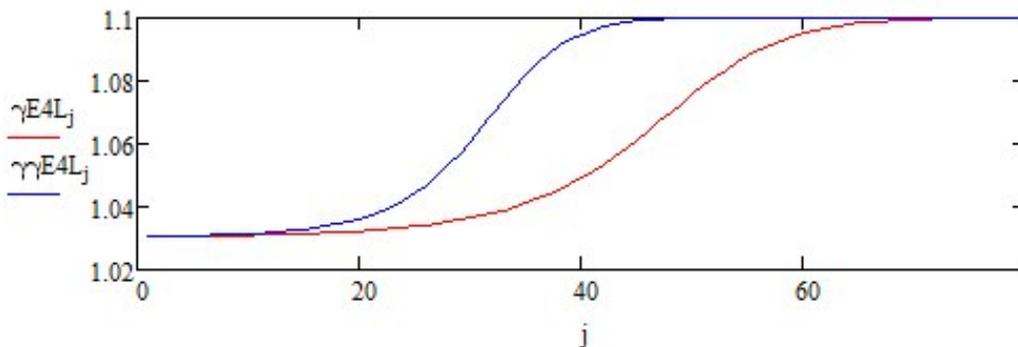
$$\gamma_{E4Q_j} = \gamma_{E4Q_0} + \frac{\gamma_{E4Q_o} - \gamma_{E4Q_0}}{2} + \tanh\left(\frac{GSV_j}{3 \cdot 10^7} - 2,5\right) \cdot \left(\frac{\gamma_{E4Q_o} - \gamma_{E4Q_0}}{2}\right) \quad (5-21)$$

$\gamma_{E4Q_j}$  – Stoßfaktor ( $\gamma_{E4}$  nach [2]) für die Querfuge im Jahr j

$\gamma_{E4Q_0}$  – Stoßfaktor für die Querfuge im Jahr 0 (unterer Grenzwert)

$\gamma_{E4Q_o}$  – oberer Grenzwert für den Stoßfaktor an der Querfuge.

In Abbildung 5-6 ist beispielhaft die Verlaufsfunktion für den Stoßfaktor an der Längsfuge über 80 Jahre dargestellt. Die rote Kurve gilt für 4 Mio. Achsübergänge im ersten Jahr und eine jährliche Steigerung von 2%. Für die blaue Kurve wurden 6 Mio. Achsübergänge im ersten Jahr vorausgesetzt und eine jährliche Steigerungsrate von 3% berücksichtigt.



**Abbildung 5- 6: Verlaufsfunktion für den Stoßfaktor an der Längsfuge**

Für den Dübelfaktor ist der Maximalwert natürlicherweise mit 1,0 anzusetzen (keine Wirkung der Querkraftübertragung). Die Minimalwerte (Anfangswerte) können aus [2] (Tabelle 4.4) entnommen werden. Die Funktion für die Längsfuge lautet damit:

$$mbDL_j = mbDL_0 + \frac{mbDL_o - mbDL_0}{2} + \tanh\left(\frac{GSV_j}{3 \cdot 10^7} - 2,5\right) \cdot \left(\frac{mbDL_o - mbDL_0}{2}\right) \quad (5-22)$$

mbDL<sub>j</sub> – Dübelfaktor ( $m_{bD}$  nach [2]) für die Längsfuge im Jahr j

mbDL<sub>0</sub> – Dübelfaktor für die Längsfuge im Jahr 0 (unterer Grenzwert)

mbDL<sub>o</sub> – oberer Grenzwert für den Dübelfaktor an der Längsfuge (mbDL<sub>o</sub>=1).

Für die Querfuge ergibt sich:

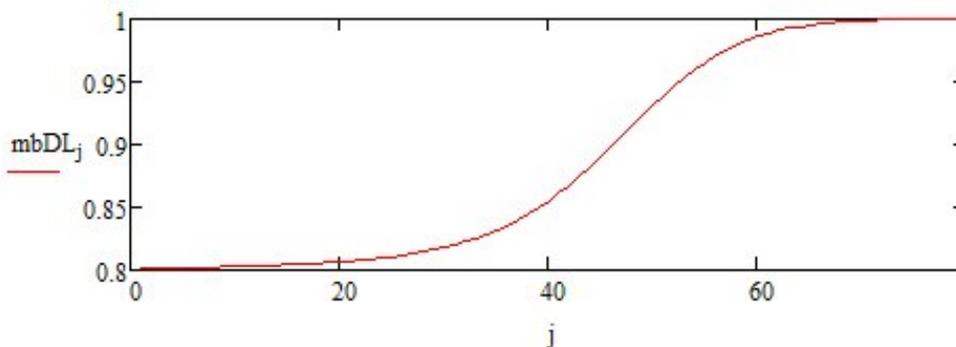
$$mbDQ_j = mbDQ_0 + \frac{mbDQ_0 - mbDQ_0}{2} + \tanh\left(\frac{GSV_j}{3 \cdot 10^7} - 2,5\right) \cdot \left(\frac{mbDQ_0 - mbDQ_0}{2}\right) \quad (5-23)$$

$mbDQ_j$  – Dübelfaktor ( $m_{bD}$  nach [2]) für die Querfuge im Jahr  $j$

$mbDQ_0$  – Dübelfaktor für die Querfuge im Jahr 0 (unterer Grenzwert)

$mbDQ_0$  – oberer Grenzwert für den Dübelfaktor an der Querfuge ( $mbDLo=1$ ).

Abbildung 5-7 zeigt beispielhaft die zeitliche Verlaufsfunktion für den Dübelfaktor für eine verankerte Längsfuge und eine B-Zahl über 800000. Auch hier wurden 4 Mio. Achsübergänge im ersten Jahr und eine jährlich Steigerung von 2% unterstellt.



**Abbildung 5-7: Verlaufsfunktion für den Dübelfaktor (verankerte Längsfuge, B-Zahl über 800000)**

Für den qualitativen Verlauf des Lagerungsfaktors gilt sinngemäß das Gleiche wie für den Stoßfaktor bzw. den Dübelfaktor. Entsprechend kann auch hier eine Tangens-Hyperbolicus-Funktion benutzt werden. Minimalwerte (Anfangswerte) für den Lagerungsfaktor sind in [2] (Tabelle A 2.1) angegeben. Der in der Tabelle enthaltene maximale Wert ist 1. Eine Präzisierung des realistischen Wertebereiches wäre mit systematischen FEM-Berechnungen möglich. Dafür müssten die Lagerungsbedingungen für eine Platte in realistischen Wertebereichen variiert werden. Die FEM-Berechnung zeigt dann die resultierenden Auswirkungen auf die maximale Biegespannung. Weil bei der vorliegenden Arbeit der Schwerpunkt auf der Definition des Berechnungsmodelles für die probabilistische Berechnung liegt, wird hier auf diese Analyse verzichtet. Als Maximalwert wird zunächst der Wert 1 angenommen. Für den Lagerungsfaktor gilt damit:

$$mbL_j = mbL_0 + \frac{mbLo - mbL_0}{2} + \tanh\left(\frac{GSV_j}{3 \cdot 10^7} - 2,5\right) \cdot \left(\frac{mbLo - mbL_0}{2}\right) \quad (5-24)$$

$mbL_j$  – Lagerungsfaktor ( $m_{bL}$  nach [2]) im Jahr  $j$

$mbL_0$  – Lagerungsfaktor im Jahr 0 (unterer Grenzwert)

$mbLo$  – oberer Grenzwert für den Lagerungsfaktor ( $mbLo=1$ ).

In Abbildung 5-8 ist beispielhaft die Verlaufsfunktion für den Lagerungsfaktor bei Existenz einer HGT über 80 Jahre dargestellt.

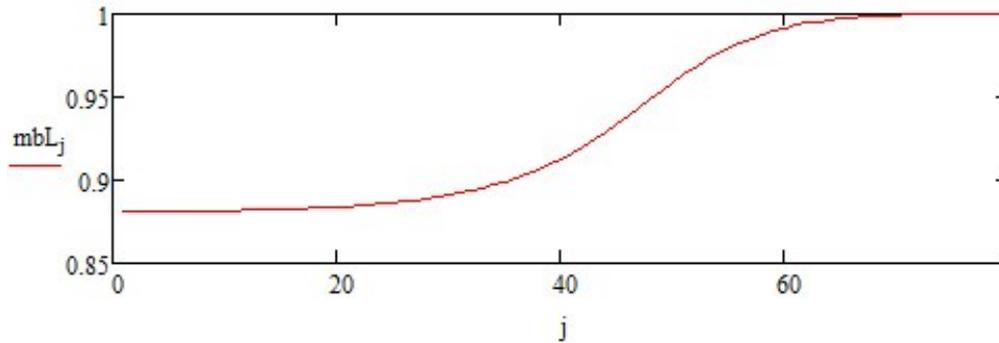


Abbildung 5- 8: Verlaufsfunktion für den Lagerungsfaktor (HGT, B-Zahl über 800000)

Einfacher gestaltet sich der Ansatz der jährlichen Verkehrsbelastung. Für die Berechnung relevant ist die Anzahl der jährlichen Achsübergänge  $SVa$ . Die Zuordnung der Achsübergänge zu den Radlasten erfolgt über die Dichtefunktion der Radlasten (Formel 3-14). Wenn eine jährliche Steigerungsrate  $p_v$  vorgegeben wird, dann ergibt sich die Anzahl der Achsübergänge im Jahr  $j$  zu:

$$SVa_j = SVa_1 \cdot (1 + p_v)^{j-1} \quad (5-25)$$

$SVa_j$  – Anzahl der Achsübergänge im Jahr  $j$

$p_v$  – Steigerungsrate pro Jahr.

Die Gesamtzahl der Achsübergänge bis zum Ende des Jahres  $j$  entspricht der Summe der einzelnen Jahreswerte:

$$GSV_j = \sum_{i=1}^j SVa_i \quad (5-26).$$

Prinzipiell bereitet es keine Schwierigkeiten, jedem Jahr einen beliebigen Wert für die Verkehrsbelastung zuzuweisen. So ist es z.B. problemlos möglich, Jahre mit besonders vielen Lastwechselzahlen oder besonders wenigen Lastwechselzahlen (z.B. in Folge einer Langzeitbaustelle) zu berücksichtigen.

Von besonderer Bedeutung ist die Entwicklung der Zugfestigkeit des Betons (Degradationsfunktion) im Verlauf der Ermüdung. Die international zu dieser Problematik verfügbare Literatur ist äußerst spärlich. Zu nennen sind die Veröffentlichungen von KESSLER-KRAMER [33], PFANNER [34] und ZHANG/WU [35]. Die ausgewerteten Laborversuche erreichen aber in keinem Fall die für den Straßenbau relevanten Lastwechselzahlen. Innerhalb eines Forschungsvorhabens der Bundesanstalt für Straßenwesen [52] wurden Ermüdungsversuche mit hohen Lastwechselzahlen durchgeführt. Die Streuungen der Ergebnisse waren aber zu hoch um gesicherte Degradationskurven abzuleiten. Die Arbeit von PFANNER ist rein theoretischer Natur. Es liegen also praktisch keine Versuchsergebnisse vor, welche das Degradationsverhalten des Straßenbetons realistisch erfassen. Ursächlich dafür ist die Tatsache, dass die für eine empirische Forschung notwendigen Ermüdungsversuche sehr aufwendig und teuer sind. Zudem sind die Versuchsergebnisse starken Streuungen unterworfen. Folglich wird eine große Anzahl von Versuchen notwendig, um belastbare Ergebnisse zu erzielen.

Weniger aufwendig ist es, den prinzipiellen Verlauf der Degradationsfunktion aus theoretischen Überlegungen abzuleiten. Die theoretische Basis dafür bildet üblicherweise

die Bruchmechanik. (siehe z.B. [32], [33] ). Die klassische Formel von Paris und Erdogan beschreibt die Zunahme der Risslänge pro Lastwechsel:

$$\frac{da}{dn} = C \cdot \Delta K^m \quad (5-27)$$

$$\Delta K = \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y(a) \quad (5-28)$$

C, m – Materialfaktoren

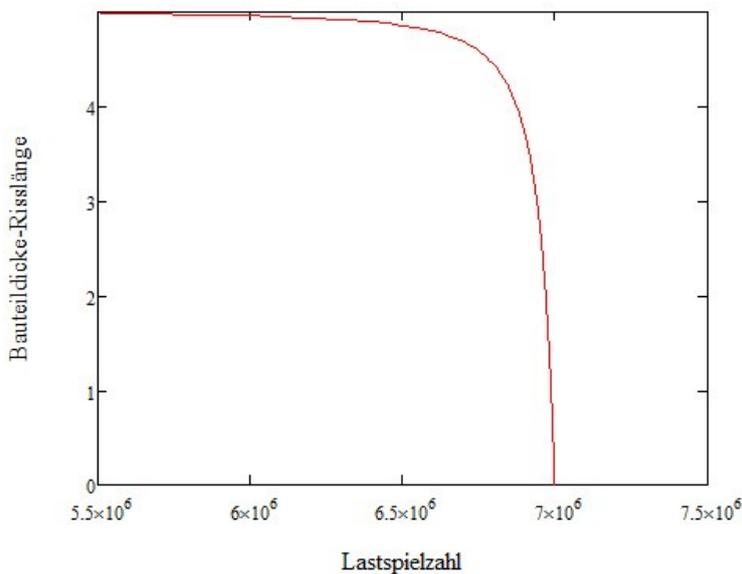
$\Delta\sigma$  – Spannungsamplitude

n – Lastspielzahl

a– Risslänge

Y(a) – Geometriefaktor.

Die Integration dieser Formel liefert die Risslänge nach n Lastwechseln (siehe [32]). Die Zunahme der Risslänge kann als Abnahme der Festigkeit interpretiert werden. Im Ergebnis zeigt sich eine Degradationsfunktion, welche progressiv verläuft. Die Abnahme der Betonfestigkeit infolge Ermüdung verläuft zunächst sehr langsam, sodass über den größten Teil des Ermüdungsprozesses die Festigkeit nahezu konstant bleibt. Am Ende des Ermüdungsprozesses kommt es dann zu einer starken Beschleunigung der Degradation, welche schließlich zum Versagen führt. Abbildung 5-9 zeigt beispielhaft eine durch Integration der Paris-Erdogan-Formel erzeugte Degradationskurve. Von Interesse ist hier nur der qualitative Verlauf.



**Abbildung 5- 9: Durch Integration der Paris-Erdogan-Formel erzeugte Degradationskurve**

Mit einem völlig anderen theoretischen Ansatz kommt Pfanner [34] zu ähnlichen Kurvenverläufen, welche auch konkrete Festigkeitswerte liefern. Pfanner geht davon aus, dass für die Erzeugung des Ermüdungsbruchs die gleiche Bruchenergie aufgewendet werden muss, wie für den Bruch bei einmaliger Belastung. Auf der Grundlage dieser These entwickelt der Autor ein Verfahren zur Berechnung der Degradationsfunktion in

Abhängigkeit vom Belastungsniveau. Abbildung 5-10 zeigt Degradationskurven, welche mit diesem Verfahren berechnet wurden.

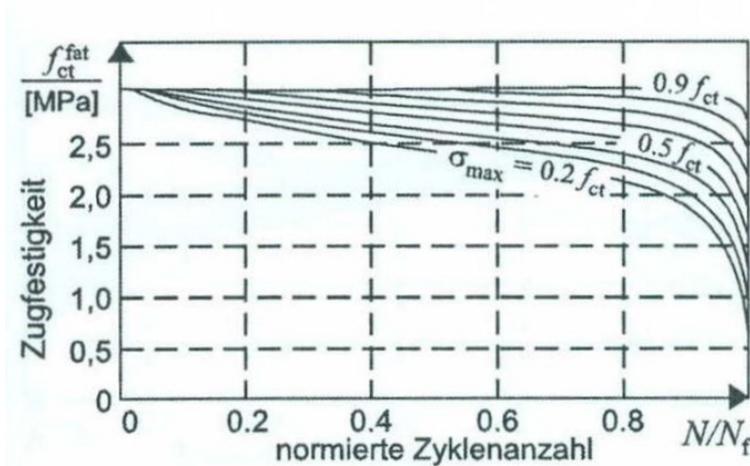


Abbildung 5- 10: Degradationskurven nach Pfanner (aus [34])

Trotz der insgesamt spärlichen vorliegenden Forschungsergebnisse kann also als sicher gelten, dass die Degradationskurve den in Abbildung 5-9 und 5-10 gezeigten grundsätzlichen Verlauf hat.

Die einzige verfügbare Untersuchung, welche durch eine akzeptable Anzahl empirischer Versuche untermauert ist, stammt von Zhang und Wu [35]. Die Autoren haben Ermüdungsversuche mit insgesamt 300 Probekörpern durchgeführt. Der so ermittelte Kurvenverlauf entspricht den oben beschriebenen Kurvenverläufen, welche auf rein theoretischer Basis bestimmt wurden. Auch Zhang und Wu gehen zunächst von einer theoretisch bestimmten Degradationsformel aus, verbessern diese dann aber auf der Grundlage der Versuchsergebnisse. Die von Zhang und Wu gefundene Formel lautet:

$$f_{ct, fat} = \frac{1 - (1 - R') \cdot \beta \cdot \log(N_{fat})}{1 - (1 - R') \cdot \beta \cdot \log(N_{fat} - N_1)} \cdot e^{-A \cdot \left(\frac{N_1}{N_{fat}}\right)^B} \cdot \left(1 - \frac{N_1}{N_{fat}}\right)^C \cdot f_{ct} \quad (5-29)$$

$f_{ct, fat}$  – Betonzugfestigkeit nach  $N_1$  Lastwechseln

$f_{ct}$  – Betonzugfestigkeit vor dem Beginn der Ermüdung

A – Materialparameter ( $A=0,144$ )

B – Materialparameter ( $B=1,89$ )

C – Materialparameter ( $C=0,224$ )

$N_{fat}$  – Bruchlastwechselzahl

$N_1$  – aktuelle Lastwechselzahl

$\beta$  – Anpassungsfaktor ( $\beta=0,0807$ )

$R'$  – Verhältnis des Lastniveaus bei Druckbeanspruchung zum Lastniveau bei Zugbeanspruchung.

Die Betonplatte wird im Wesentlichen auf Biegung beansprucht, wobei die Druckspannung an einer Plattenseite der Zugspannung auf der anderen Plattenseite entspricht. Weil die

Druckfestigkeit viel höher ist als die Zugfestigkeit, ist das Lastniveau bei der Druckbeanspruchung sehr klein. Vereinfachend kann deshalb von  $R'=0$  ausgegangen werden. Formel 5-29 vereinfacht sich damit zu:

$$f_{ct, fat} = \frac{1-0,0807 \cdot \log(N_{fat})}{1-0,0807 \cdot \log(N_{fat}-N_1)} \cdot e^{-0,144 \cdot \left(\frac{N_1}{N_{fat}}\right)^{1,89}} \cdot \left(1 - \frac{N_1}{N_{fat}}\right)^{0,224} \cdot f_{ct} \quad (5-30)$$

Obleich auch die von Zhang und Wu durchgeführten Laborversuche nicht annähernd die Lastwechselzahlen erreichten, welche für den Straßenbau relevant sind, kann auf Grund der Übereinstimmung mit den theoretischen Überlegungen davon ausgegangen werden, dass die gefundene Degradationskurve den Verlauf der Betonfestigkeit im Ermüdungsprozess annähernd korrekt wiedergibt. Formel 5-29 wurde deshalb den Berechnungen mit der Monte-Carlo-Simulation zu Grunde gelegt.

Für die Berechnung der Bruchlastwechselzahl werden die Formeln 7-6 bzw. 7-7 aus [2] verwendet:

$$\gamma_{c, fat} = 0,15 \cdot \log(N_{fat}) + 0,653 \quad (5-31)$$

$\gamma_{c, fat}$  – reziproker Wert des Belastungsniveaus bei der Ermüdung

Die Umstellung der Formel liefert die:

$$N_{fat} = 10^{6,67 \cdot \gamma_{c, fat} - 4,353} \quad (5-32)$$

bzw.

$$N_{fat} = 10^{\frac{6,67}{SSR} - 4,353} \quad (5-33)$$

SSR – Belastungsniveau bei der Ermüdung (stress-strength-ratio)

Weil sich die o.g. Einflussparameter in jedem Jahr ändern, erhöht sich in jedem Jahr das Belastungsniveau der Platte. Dadurch wird der Ermüdungsprozess maßgeblich beeinflusst. Es ist deshalb zwingend erforderlich, diesen Effekt im Zuge der Simulation zu berücksichtigen. Konkret erfolgt dies durch die Realisierung der folgenden Teilschritte:

- Berechnung des Belastungsniveaus für jedes Jahr:  
Für jedes Jahr wird ein Belastungsniveau für die Ermüdungsberechnung ermittelt. Dazu werden die Belastungen verwendet, welche in [2] für den Ermüdungsnachweis angesetzt werden. Die zeitlich veränderlichen Parameter werden jeweils mit ihren aktuellen Werten angesetzt.
- Ermittlung der Bruchlastwechselzahl für jedes Lastniveau:  
Für jedes der berechneten Belastungsniveaus wird die Bruchlastwechselzahl nach Formel 5-32 bestimmt.
- Berechnung der Ermüdungsfestigkeit:  
Die Ermüdungsfestigkeit für jedes Jahr wird nach Formel 5-29 berechnet. Dabei ergibt sich der aktuelle Wert der erfolgten Lastwechsel als Summe aus den

Lastwechseln im aktuellen Jahr und den vorher erfolgten Lastwechseln. Die Lastwechsel aus den Vorjahren werden dabei auf das aktuelle Lastniveau umgerechnet. Es gilt:

$$N'_{1.vj} = \frac{N_{1.vj}}{N_{fat.vj}} \cdot N_{fat.j} \quad (5-34)$$

$N'_{1.vj}$  – umgerechnete Lastwechselzahl aus einem Vorjahr

$N_{1.vj}$  – Lastwechselzahl aus einem Vorjahr

$N_{fat.vj}$  – Bruchlastwechselzahl aus dem Vorjahr

$N_{fat.j}$  – Bruchlastwechselzahl im aktuellen Jahr

Wenn die so berechnete Gesamtlastwechselzahl über der Bruchlastwechselzahl liegt, wird die Betonfestigkeit auf Null gesetzt.

- Berücksichtigung der Nacherhärtung:  
Die Nacherhärtung wird berücksichtigt, indem die nach dem beschriebenen Verfahren berechneten Festigkeitswerte mit einem Erhöhungsfaktor modifiziert werden. Dafür wird die Formel aus [36] verwendet:

$$f_c(t) = \left( e^{s \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{60}{t}}\right)} \right)^{0,67} \cdot f_c \quad (5-35)$$

$f_c(t)$  – Betonfestigkeit nach t Tagen

$f_c$  – Betonfestigkeit nach 60 Tagen

s – Anpassungsfaktor für den Zementtyp

s=0,2 für CEM 42,5 R, CEM 52,5 N, CEM 52,5 R

s=0,25 für CEM 32,5 R, CEM 42,5 N

s=0,38 für CEM 32,5 N

Auf die beschriebene Weise wird die Betonfestigkeit für jede simulierte Platte für jedes Jahr jeweils an der Längs- und an der Querruge berechnet.

#### 5.4.3.4 Berechnung der Zufallswerte

Für die Durchführung der Monte-Carlo-Simulation sind die Zufallswerte für die berücksichtigten Zufallsgrößen zu bestimmen. Im vorliegenden Fall sind dies:

- die Deckendicke
- die Betonfestigkeit
- die Momentanwerte der Radlasten
- die Extremwerte der Radlasten an den Längsfugen
- die Extremwerte der Radlasten an den Querrugen
- die Momentanwerte der Temperaturgradienten
- die Extremwerte der Temperaturgradienten.

Die Zufallswerte werden so bestimmt, dass ihre Streuung der Streuung der jeweils simulierten Parameter entspricht. Die entsprechenden Verteilungsfunktionen wurden in Abschnitt 3.3 bzw. 5.2 (Extremwerte) beschrieben.

Jeder simulierten Platte wird eine Deckendicke zugeordnet. Diese Dicke wird am Anfang der Simulation als Zufallsgröße erzeugt. Dabei muss die Anzahl der simulierten Platten nicht notwendig der tatsächlich vorhandenen Plattenzahl im betrachteten Streckenabschnitt entsprechen. Für die Deckendicke werden normalverteilte Zufallswerte verwendet. Dafür stellen moderne Programmiersprachen in den mathematischen Bibliotheken entsprechende Routinen zur Verfügung. Im konkreten Fall wird die Simulationsrechnung mit der Software MathCad realisiert. Das Programm verfügt ebenfalls über eine Funktion zur Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen.

Ähnlich wird mit den Werten für die Betonfestigkeit verfahren. Diese werden ebenfalls nur am Beginn der Simulation erzeugt und den Platten zugeordnet. Es handelt sich dabei um die Werte für die Anfangsfestigkeit, welche im Weiteren für die einzelnen Jahre des Betrachtungszeitraumes modifiziert werden (siehe Abschnitt 5.4.1.4). Es werden wiederum normalverteilte Werte berechnet. Für jede simulierte Platte werden gleiche Anfangsfestigkeiten für die Bereiche an der Längsfuge- und der Quertfuge erzeugt. Die weitere Entwicklung im Zuge der Ermüdung unterscheidet sich aber.

Die Zufallswerte für die Radlasten werden in jedem Jahr neu erzeugt. Die Verteilung der Momentanwerte entspricht nicht einer gebräuchlichen Verteilungsfunktion. Entsprechend steht auch keine Standardprozedur zur Verfügung. Für die Berechnung der Zufallswerte werden zunächst gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugt. Über die inverse Verteilungsfunktion werden die Zufallswerte für die Momentanwerte der Radlast berechnet. Zur Lösung dieser Gleichung wird das Verfahren benutzt, welches in Abschnitt 4.5 beschrieben wird.

Die Extremwertverteilungen (Gumbelverteilung) für die Radlasten müssen in jedem Jahr entsprechend der Verkehrsbelastung neu berechnet werden. Dafür wird die Formel 5-1 benutzt. Die Anzahl der jährlichen Achsübergänge wird auf die Längs- und Quertfuge aufgeteilt. Die Grundlage für diese Aufteilung bildet Tabelle 7.2 in [2]. Hier sind Faktoren angegeben, welche in Abhängigkeit von der Plattenbreite den Anteil der Radlasten definiert, welche die Längs- bzw. Quertfuge überfahren. Auf Basis der so gewonnenen Gumbelverteilungen werden die Zufallswerte erzeugt. Das entsprechende Verfahren entspricht dem für die Momentanwerte der Radlast. Für die inverse Verteilungsfunktion steht in diesem Fall aber eine geschlossene Lösung bereit (Formel 5-10).

Die Zufallswerte für die Temperaturlasten werden ebenfalls in jedem Jahr neu erzeugt. Es ist aber zusätzlich zu berücksichtigen, dass der Temperaturgradient von der Plattendicke abhängt. Es wird also für jede Platte separat eine Verteilungsfunktion berechnet und dann ein Zufallswert erzeugt. Weil die Momentanwerte einer logarithmischen Normalverteilung folgen, kann wieder eine Standardprozedur benutzt werden. Die Verteilungsfunktion für die Extremwerte hat die Form der Formel 5-4. Die inverse Funktion lässt sich damit leicht berechnen.

#### 5.4.3.5 Berechnungsergebnisse

Das entwickelte Simulationsverfahren erlaubt die Berechnung der Lebensdauerverteilung für Betonfahrbahnen bei unterschiedlichsten Randbedingungen. Beispielhaft wurde eine Berechnung für eine Fahrbahn mit folgenden Parametern über 50 Jahre durchgeführt:

Plattenlänge: 5,0m

Plattenbreite: 4,0m

Mittlere Plattendicke: 260mm

Standardabweichung der Plattendicke: 15mm

Beton: StC30/37-3,7

Variationskoeffizient Betonfestigkeit: 13%

Wärmedehnzahl:  $11,5 \cdot 10^{-6}$

Verkehrsbelastung: 1 Mio. Fahrzeugübergänge (SV) im 1. Jahr

Temperatur: Aachen

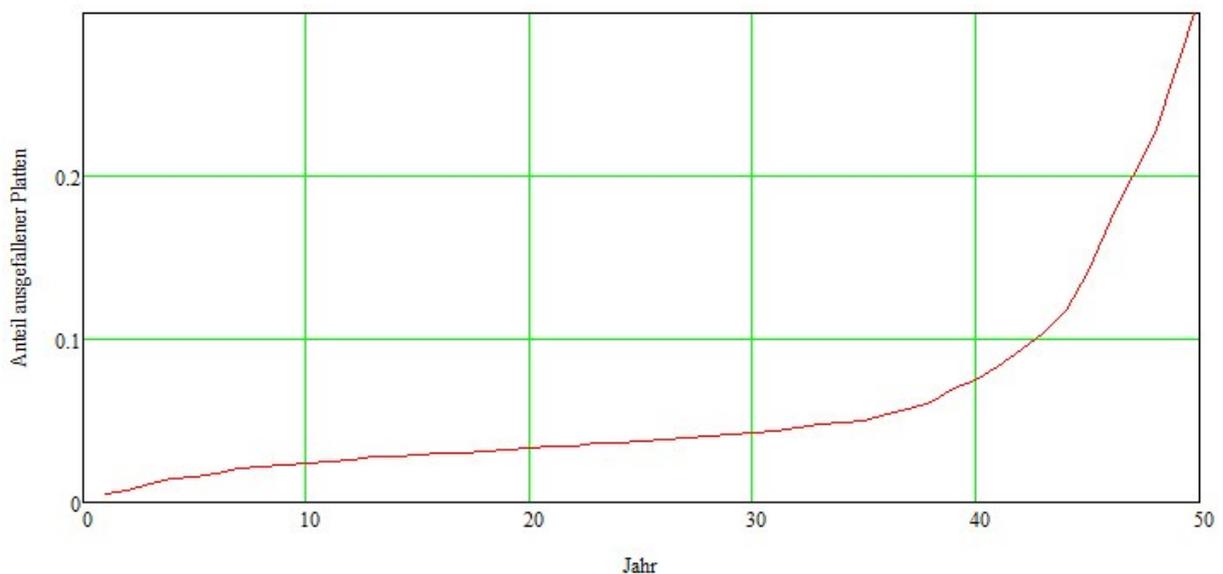
Jährliche Erhöhung: 2%

Längsfuge: verankert

Querfuge: verdübelt

Untere Tragschicht: HGT

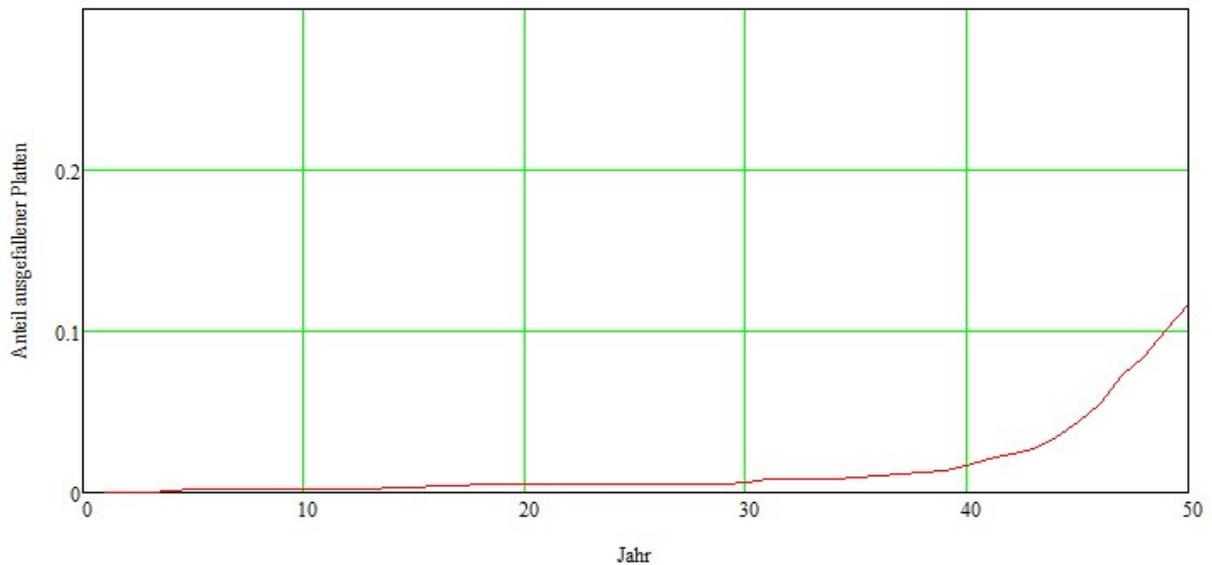
Für die Berechnung wurden 2000 Platten simuliert. Die berechnete Lebensdauerverteilung ist in Abbildung 5-11 dargestellt.



**Abbildung 5- 11: Lebensdauerverteilung für das oben definierte Beispiel**

Es zeigt sich, dass der Anteil ausgefallener Platten über ca. 30 Jahr nur langsam und nahezu linear ansteigt. Danach kommt es zu einer progressiven Zunahme der Ausfälle. Dieser Verlauf ist plausibel und deckt sich mit den praktischen Erfahrungen.

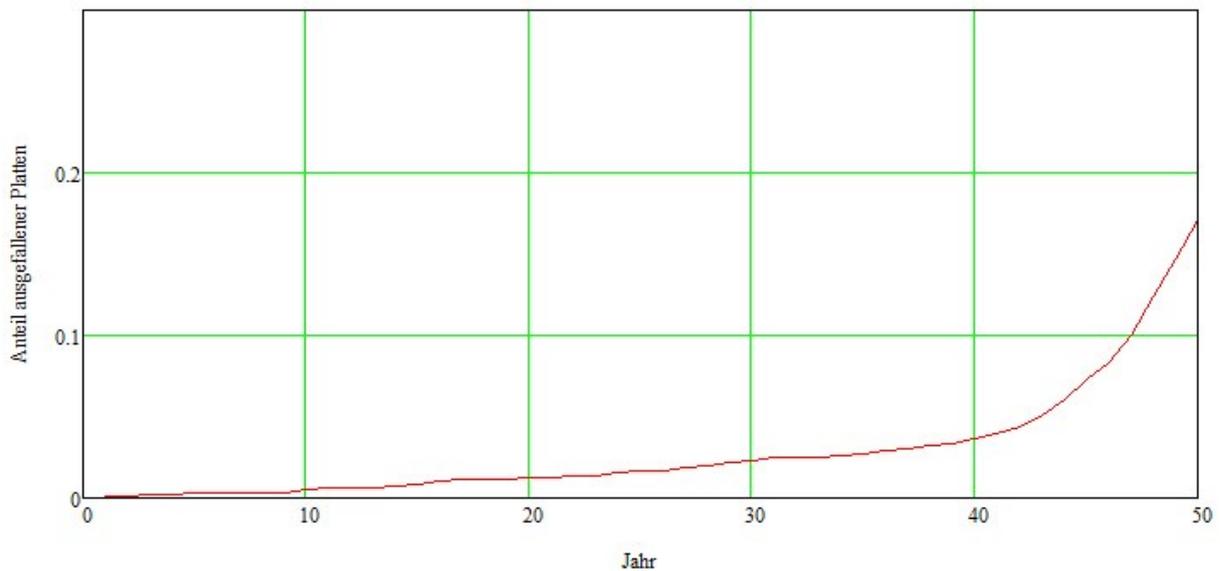
In einer ersten Variation des Beispiels wird die mittlere Deckendicke auf 280mm erhöht.



**Abbildung 5- 12: Lebensdauererwartung für das oben definierte Beispiel mit 280mm Deckendicke**

Erwartungsgemäß verkleinert sich der Anteil ausgefallener Platten deutlich. Der progressive Anstieg der Lebensdauerfunktion beginnt aber etwa zum gleichen Zeitpunkt.

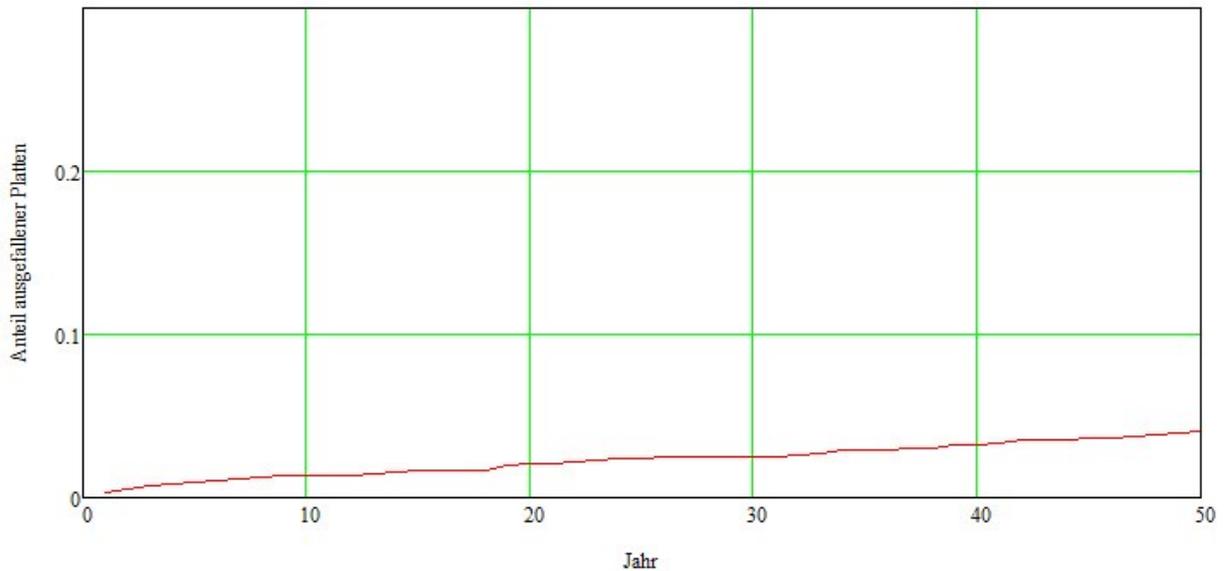
In einer zweiten Variation wird dem Ausgangsbeispiel eine Betonklasse StC35/45-4,0 zugeordnet.



**Abbildung 5- 13: Lebensdauererwartung für das oben definierte Beispiel mit höherer Betonfestigkeit**

Es zeigt sich, dass die zu erwartende Reduzierung des Anteils der ausgefallenen Platten auch hier durch das Berechnungsmodell ausgewiesen wird (Abbildung 5-13).

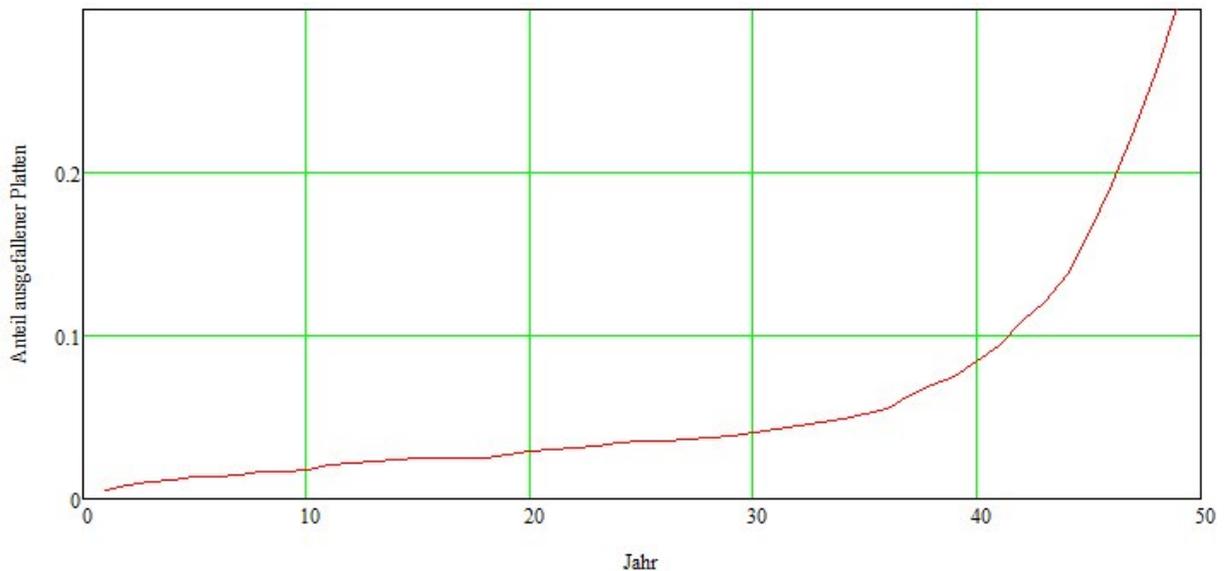
In einer dritten Variation des Ausgangsbeispiels wird die Verkehrsbelastung halbiert.



**Abbildung 5- 14: Lebensdauervertelung für das oben definierte Beispiel mit halbiertes Verkehrsbelastung**

Wie in Abbildung 5-14 dargestellt, bleibt bei dieser deutlich geringeren Anzahl von Achsübergängen der Anteil ausgefallener Platten über 50 Jahre relativ klein. Der progressive Anstieg der Ausfallrate wird in diesem Zeitraum noch nicht erreicht.

Schließlich wird in einer weiteren Variation des Ausgangsbeispiels eine einjährige Baustelle im zwanzigsten Jahr simuliert. Es wird angenommen, dass die Baustelle dazu führt, dass sich die Verkehrsbelastung in diesem Jahr praktisch verdoppelt.



**Abbildung 5- 15: Lebensdauervertelung für das oben definierte Beispiel mit doppelter Verkehrsbelastung im 20. Nutzungsjahr**

Es zeigt sich, dass zunächst keine signifikante Erhöhung der Plattenausfälle eintritt. Der praktische Nutzungsausfall der Fahrbahn, also der Beginn des progressiven Anstiegs der Plattenausfälle tritt aber früher ein.

Häufig kommt es durch Baumaßnahmen zu einer Verengung oder Verschiebung der Fahrstreifen. Dadurch kann es vorkommen, dass die Längsfuge viel häufiger überfahren

wird, als im planmäßigen Nutzungszustand. Auch die Auswirkungen dieses Effektes können mit dem Modell simuliert werden.

#### 5.4.3.6 Bewertung des Verfahrens

Eine direkte Überprüfung der Berechnungsergebnisse an Hand empirisch erhobener Daten ist nicht realisierbar, weil das entsprechende Datenmaterial nicht vorhanden ist.

Für die Bewertung des Verfahrens können also nur allgemeine Erfahrungswerte über die Lebensdauer technischer Bauteile herangezogen werden. (siehe z.B.: [1], [22], [42], [46]) Diese Erfahrungen besagen, dass es zunächst zu einigen Ausfällen kommt, welche auf Herstellungsfehler zurückzuführen sind. Danach folgt eine längere Phase mit nur gelegentlichen Ausfällen. Zum Ende der Lebensdauer hin kommt es zu einem exponentiellen Anstieg der Ausfälle, weil sich die durch Alterung und Verschleiß bedingten Schädigungen überlagern und gegenseitig verstärken. Mit Alterung ist in diesem Zusammenhang die Gesamtheit aller Prozesse gemeint, die zu einer Abnahme der Widerstandskraft gegen äußere Belastung führen. (Materialermüdung, chemische Schädigung, Erosion, Verschmutzung usw.) Auch für die Schadensentwicklung bei Betonfahrbahnen wird das beschriebene allgemeine Muster beobachtet.

Mathematisch wird dieser Zusammenhang über die Hazardfunktion ausgedrückt. Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauteil zu einem bestimmten Zeitpunkt versagt, unter der Bedingung, dass es bis dahin nicht versagt hat.

$$\lambda_T(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot (t \leq T < t + \Delta t | T \geq t) \quad (5-36)$$

t – betrachteter Zeitpunkt

T – Ausfallzeitpunkt.

Für die Hazardfunktion gilt:

$$hz(t) = \frac{f_L(t)}{1-F_L(t)} = \frac{1}{1-F_L(t)} \cdot \frac{dF_L(t)}{dt} \quad (5-37)$$

Näherungsweise ist eine Berechnung möglich mit:

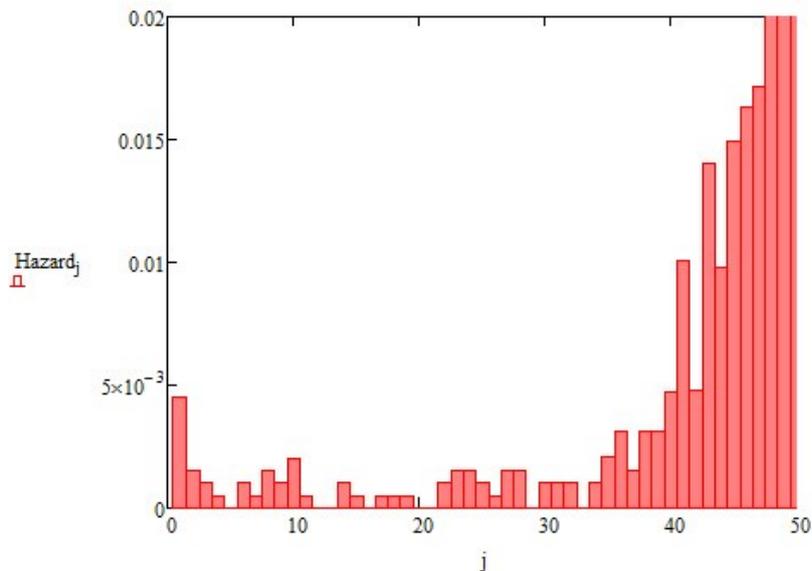
$$hz(j) = \frac{P_{f,j} - P_{f,j-1}}{j - (j-1)} \cdot \frac{1}{1 - P_{f,j}} \quad (5-38)$$

$P_{f,j}$  – Versagenswahrscheinlichkeit für j Jahre

$P_{f,j-1}$  – Versagenswahrscheinlichkeit für j-1 Jahre

hz(j) – Funktionswert der Hazardfunktion im Jahr j.

Der oben beschriebenen allgemeinen Erfahrung folgend fällt die Hazardfunktion zunächst ab, verbleibt dann längere Zeit nahezu konstant auf einem niedrigen Niveau und steigt zum Ende hin wieder an. Dem Verlauf entsprechend wird die Kurvenform vielfach als Badewannenkurve bezeichnet. Abbildung 5-16 zeigt den Verlauf der Hazardfunktion für das in Abschnitt 5.4.1.6 definierte Ausgangsbeispiel.



**Abbildung 5- 16: Werte der Hazardfunktion für das in Abschnitt 5.4.1.6 definierte Beispiel**

Es ist erkennbar, dass der Verlauf im Prinzip der Badewannenkurve entspricht. Die Ergebnisse der Berechnungen entsprechen also den langjährigen Erfahrungen und sind in diesem Sinne plausibel.

Das Berechnungsmodell ist sehr flexibel und erlaubt es, unterschiedlichste Einflüsse auch in ihrem zeitlichen Verlauf zu berücksichtigen. So ist es z.B. möglich, das Verfahren so zu erweitern, dass auch eine regelmäßige Reparatur der ausgefallenen Platten in der Simulation berücksichtigt werden kann. Darüber hinaus sind auch singuläre Ereignisse simulierbar und werden mit ihren Auswirkungen in der Berechnung berücksichtigt.

Mit dem beschriebenen Berechnungsverfahren wird die Trennung zwischen dem Ermüdungsnachweis und dem Nachweis für extreme Belastung aufgehoben. Dies vereinfacht die Berechnung und entspricht dem tatsächlichen Tragwerksverhalten. Es ist aber kritisch anzumerken, dass für die Berechnung der Ermüdungsfestigkeit des Betons das gesamte Lastkollektiv auf eine äquivalente Lastwechselzahl (B-Zahl) umgerechnet werden muss. Die Verteilung der Radlasten, welche für die probabilistische Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit berücksichtigt wird, wird also für die Ermittlung wesentlicher Materialparameter nicht beachtet.

Für die beispielhaft durchgeführten Berechnungen wurden die Simulationen mit jeweils 2000 Zufallszahlen durchgeführt. Die damit verbundenen Rechenzeiten sind unproblematisch. Die Genauigkeit der Berechnung kann mit einem höheren Simulationsaufwand noch merklich gesteigert werden.

Obwohl das benutzte Monte-Carlo-Verfahren mathematisch exakt ist und mit steigendem Umfang der Simulationsrechnungen immer genauere Ergebnisse liefert, kann nicht der Anspruch erhoben werden, dass das Modell ohne eine Kalibrierung korrekt Ergebnisse liefert. Die Ursachen dafür liegen in den Idealisierungen des zugrunde liegenden Berechnungsmodells der RDO und in der unzureichenden Kenntnis des zeitlichen Verlaufs verschiedener Einflussgrößen. Fortschritte auf diesen Gebieten lassen sich problemlos in das Verfahren integrieren. Damit können die Erkenntnisse aus zukünftigen Forschungsprojekten direkt zur Verbesserung der beschriebenen Berechnungsverfahren benutzt werden. Parallel ist eine Kalibrierung an praktisch ermittelten Daten notwendig.

Unter diesen Voraussetzungen ist es möglich, die künftige Schadensentwicklung für konkrete Betonfahrbahnen zu simulieren.

#### 5.4.4 Modellierung der Belastung als Poissonprozess

##### 5.4.4.1 Beschreibung des Verfahrens

Ein alternativer methodischer Ansatz besteht darin die zeitabhängige Belastung der Fahrbahnplatte als stochastischen Prozess aufzufassen und entsprechend mathematisch zu beschreiben. Auch mit diesem Wege ist es möglich realistische Werte für die Versagenswahrscheinlichkeit im zeitlich varianten Fall zu berechnen.

Eine besondere Klasse der stochastischen Prozesse sind die sogenannten Punktprozesse oder Zählprozesse. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass bestimmte Ereignisse zu diskreten Zeitpunkten eintreten. Die Überfahrt eines Rades kann als ein solches Ereignis aufgefasst werden. Damit lässt sich die Belastung der Straßenplatten durch einen Zählprozess beschreiben. Der Zählprozess beschreibt zunächst nur die Anzahl der Ereignisse pro Zeitintervall  $N(t)$ . Ein in der Zuverlässigkeitstheorie häufig benutzter Zählprozess ist der Poissonprozess. Dieser liegt vor, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Die Anzahl der Ereignisse in zwei sich nicht überschneidenden Zeitintervallen sind unabhängig voneinander.
- Die Wahrscheinlichkeit für mehr als ein Ereignis im Zeitintervall  $\Delta t$  für  $\Delta t \rightarrow 0$  ist vernachlässigbar klein.
- Die Wahrscheinlichkeit für  $k$  Ereignisse bis zum Zeitpunkt  $t$  hängt nur von  $k$  und  $t$  ab. Insbesondere gilt:

$$E[N(t)] = \lambda \cdot t \quad (5-39)$$

mit:

$$\lambda = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N(\Delta t) = 1) + \text{vernachlässigbar kleiner Term} \quad (5-40)$$

Wenn jedem Ereignis auch ein bestimmter Wert zugeordnet wird, spricht man von einem markierten Poissonprozess.

Eine eingehendere mathematische Beschreibung der Poissonprozesse findet sich in [22].

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von  $n$  Ereignissen im Intervall  $[0,t]$  beträgt:

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda \cdot t)^n \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{n!} \quad (5-41).$$

Von besonderem Interesse ist die Frage mit welcher Wahrscheinlichkeit überhaupt kein Ereignis bis zum Zeitpunkt  $t$  eintritt. Die entsprechende Formel ergibt sich aus Gleichung 5-41:

$$P(N(t) = 0) = \frac{(\lambda \cdot t)^0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{0!} = e^{-\lambda \cdot t} \quad (5-42)$$

Wenn der Zählprozess nicht die einfache Überfahrt eines Rades beschreibt, sondern das Versagensereignis, so spricht man von einem Austrittsprozess. Der Prozess beschreibt die Häufigkeit der Ereignisse, welche zum Austritt aus dem sicheren Bereich führen. Die Formel 5-42 gibt dann die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass bis zum Zeitpunkt  $t$  kein Versagen eintritt. Für die Lebensdauerverteilung, also die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer kleiner ist als  $t$  gilt also:

$$F_L(t) = 1 - e^{-\lambda_a t} \quad (5-43)$$

$\lambda_a$  – mittlere Anzahl der Versagensereignisse pro Zeiteinheit

Es kann davon ausgegangen werden, dass der Versagensfall immer mit der Überfahrt eines Rades verbunden ist. Diese Überfahrt muss eine Beanspruchung der Platte erzeugen, die zum Versagen führt, d.h. die Grenzzustandsfunktion  $G$  muss kleiner als Null sein. Damit ergibt sich:

$$F_L(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot P(g < 0) \cdot t} = 1 - e^{-\lambda \cdot F_g(0) \cdot t} \quad (5-44)$$

$F_g$  – Verteilungsfunktion der Grenzzustandsfunktionswerte bei Radüberfahrt

Wenn sich die Einflussgrößen im betrachteten Zeitintervall ändern, sind die einzelnen Abschnitte gesondert zu berechnen und aufzusummieren. Es ergibt sich damit:

$$F_L(t) = 1 - e^{\int_0^t -\lambda(u) \cdot F_g(0,u) \cdot du} \quad (5-45)$$

In Analogie zu dem unter Abschnitt 5.4.2 beschriebenen Verfahren ist es auch hier vorteilhaft die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit zunächst für die Einzelplatte durchzuführen und anschließend über die Gesamtheit der Platten (Dicke und Festigkeit) zu integrieren.

Gleichung 5-44 ist damit in folgender Weise zu modifizieren:

$$F_L(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left( 1 - e^{\int_0^t -\lambda(u) \cdot F_g(0,u) \cdot du} \right) \cdot f_h(h_d) \cdot f_c(f_{ct}) \, df_{ct} \, dh_d \quad (5-46)$$

Mit  $f_{ct}$  sind in diesem Fall die Anfangsfestigkeiten gemeint.

Die Berechnung konkreter Funktionswerte ist im Allgemeinen nur numerisch möglich.

#### 5.4.4.2 Verteilungsfunktion für die Grenzzustandsfunktion

Die in Formel 5-46 vorkommende Verteilungsfunktion  $F_g$  gibt die Versagenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von den beiden Einwirkungen an. Es gilt damit:

$$F_g(0) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^{G=0} f_{Rad}(F_d) \cdot f_T(\delta_T) \, dF \, d\delta_T \, dF_d \quad (5-47)$$

Bei der Berechnung ist wiederum zu beachten, dass für jede Deckendicke eine neue Verteilungsfunktion für die Temperaturgradienten zu erzeugen ist. Die Berechnung der Nullstellen für die Grenzzustandsfunktion ist nur mit numerischen Verfahren möglich.

Die Ermittlung der Lebensdauerverteilung gestaltet sich einfacher, wenn eine Näherungsfunktion für  $F_g$  verwendet wird. Simulationsrechnungen über die relevanten Parameterbereiche haben gezeigt, dass eine Normalverteilung angenommen werden kann.

Da  $F_g$  die Verteilung der Werte für die Grenzzustandsfunktion beschreibt, ist es notwendig, dass der Erwartungswert der gesuchten Verteilungsfunktion einem Wert der Grenzzustandsfunktion entspricht, der sich bei Ansatz von häufig vorkommenden Parametern ergibt.

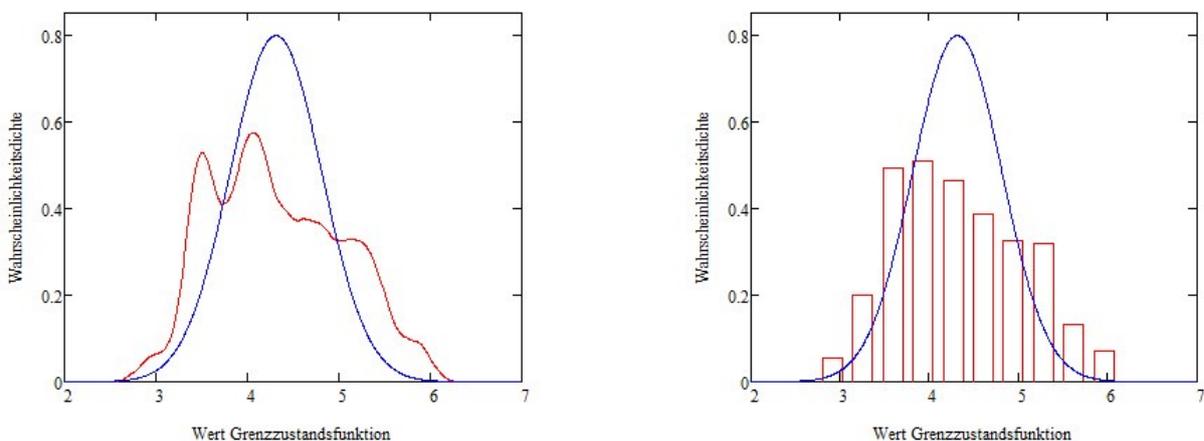
Die Streuung der beiden Belastungsgrößen variiert gar nicht (Radlast) bzw. nur geringfügig (Temperatur). Es kann deshalb für  $F_g$  ein fester Wert angesetzt werden.

Systematische Versuche haben gezeigt, dass für die Verteilungsfunktion  $F_g$  eine Normalverteilung mit folgenden Parametern angesetzt werden kann:

$$\mu_g(t) = G(h, f_{ct}(t), 3, 0.001, m_{bL}(t), m_{bD}(t), \gamma_{E4}(t)) \quad (5-48)$$

$$\sigma_g = 0,5 \quad (5-49)$$

Abbildung 5-17 zeigt die Anpassung der Normalverteilung an ein Histogramm bzw. eine Kerndichteschätzung, welche aus simulierten Daten für eine typische Parameterkombination erzeugt wurden. Für die Simulation wurden 2000 Werte berechnet. Weil der Erwartungswert aus allen relevanten Parametern berechnet wird, passt sich die Verteilungsfunktion jeder Parameterkombination an.



**Abbildung 5-17: Anpassung der Verteilungsfunktion  $F_g$  an simulierte Werte**

#### 5.4.4.3 Praktische Berechnung der Lebensdauerverteilung

Wie bereits oben erwähnt, ist die Berechnung der Formel 5-46 nur numerisch möglich. Die einfache Möglichkeit besteht darin, die Integrale jeweils durch eine Summe der Differenzen zu ersetzen.

Dies führt zu der Formel:

$$F_L(t) = \sum_{ic=1}^{nc} \sum_{ih=0}^{nh} \left( 1 - e^{-\sum_{ij=1}^{nj} \lambda_{ij} \cdot F_{g,j}(0) \cdot \Delta t} \right) \cdot f_h(h_{ih}) \cdot f_c(f_{ct,ic}) \cdot \Delta f_{ct} \cdot \Delta h_d \quad (5-50)$$

Als Zeitschritt wurde ein Jahr gewählt. Damit entspricht der Lamdawert der Anzahl der Achsübergänge im jeweiligen Jahr. Gleichung 5-50 modifiziert sich zu:

$$F_L(t) = \sum_{ic=1}^{nc} \sum_{ih=0}^{nh} \left( 1 - e^{-\sum_{ij=1}^{nj} SV a_{ij} \cdot F_{g,j}(0)} \right) \cdot f_h(h_{ih}) \cdot f_c(f_{ct,ic}) \cdot \Delta f_{ct} \cdot \Delta h_d \quad (5-51)$$

Die Unterteilung der Wertespektren für die Dicke und die Betonfestigkeit muss hinreichend fein sein. Im vorliegenden Fall wurde für  $n_c$  und  $n_h$  jeweils der Wert 29 gewählt.

Der Ansatz der weiteren Eingangsgrößen, insbesondere der zeitlich veränderlichen Parameter erfolgt analog zum Monte-Carlo-Verfahren (Abschnitt 5.4.1.3).

Die Berechnung berücksichtigt praktisch jede Überfahrt eines Rades. Es ist deshalb nicht erforderlich, Extremwertverteilungen für die einzelnen Jahre zu bestimmen. Damit entfällt auch die Anwendung der Turkstra-Regel.

Die Versagenswahrscheinlichkeit für den jeweiligen Betrachtungszeitraum wird jeweils separat für die Längs- und Querfuge berechnet und anschließend addiert. Dabei ist zu beachten, dass nur jeweils einer der beiden Versagensmechanismen eintreten kann. Die Versagenswahrscheinlichkeit für die Längs- und Querfuge gilt also jeweils nur unter der Bedingung, dass der andere Versagensfall nicht eingetreten ist. Für die Addition gilt damit:

$$P_f = P_{fLF} \cdot (1 - P_{fQF}) + P_{fQF} \quad (5-52)$$

bzw.

$$P_f = P_{fQF} \cdot (1 - P_{fLF}) + P_{fLF} \quad (5-53)$$

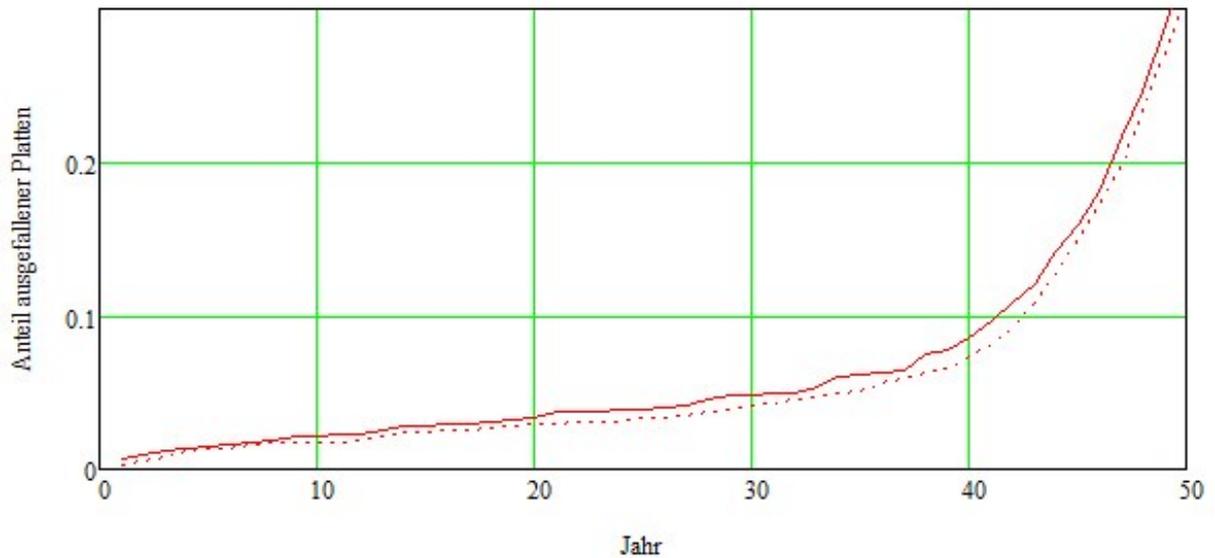
$P_{fLF}$  – Versagenswahrscheinlichkeit an der Längsfuge

$P_{fQF}$  – Versagenswahrscheinlichkeit an der Querfuge.

Die Berechnungen zeigen, dass der Nachweis an der Querfuge den weitaus größeren Anteil zur gesamten Versagenswahrscheinlichkeit beiträgt. Dies deckt sich mit den Erfahrungen aus der Dimensionierungspraxis, wo fast immer der Nachweis an der Querfuge maßgebend wird.

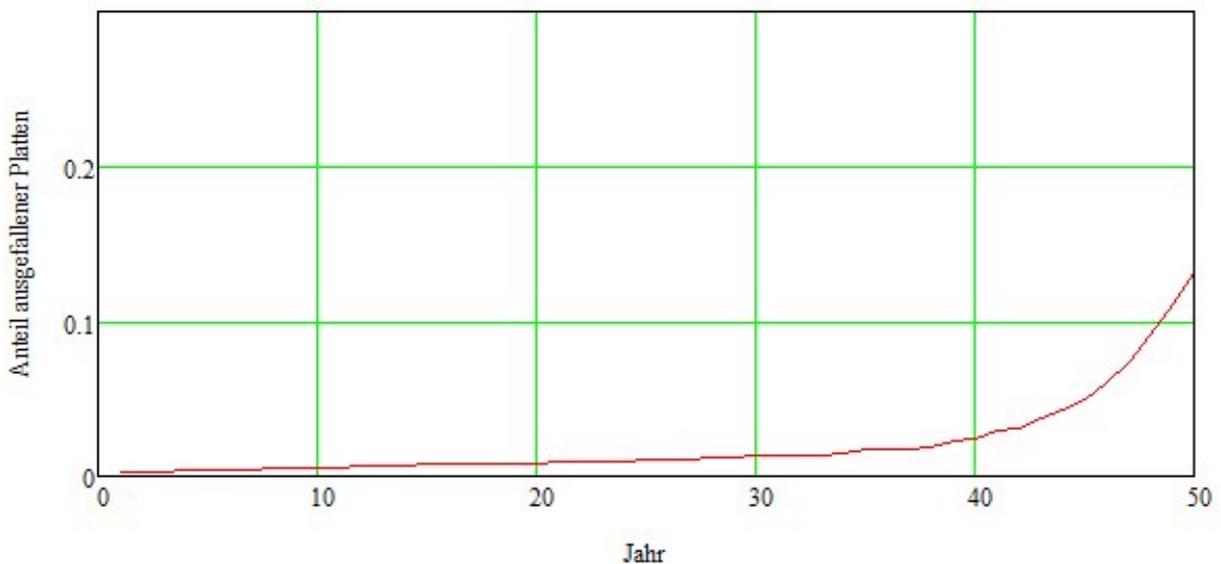
#### 5.4.4.4 Berechnungsergebnisse

Um das Verfahren zu testen, wurden die gleichen Berechnungen wie mit dem Monte-Carlo-Verfahren durchgeführt. Abbildung 5-18 zeigt die Lebensdauerverteilungsfunktion für das unter Abschnitt 5.4.1.5 definierte Basisbeispiel. Die berechneten Funktionswerte liegen um 5% bis 10% über den Werten, welche mit der Monte-Carlo-Simulation ermittelt wurden. Die Ursache für diese Abweichung kann in der Bildung der Extremwertverteilungen für die einzelnen Jahre, sowie der Verwendung der Turkstra-Regel liegen, wie sie für die Monte-Carlo-Simulation vorgenommen werden. Andererseits stellt auch die Beschreibung der Verteilung der Werte für die Grenzwertfunktion, wie sie für den Poissonprozess verwendet wird, eine erhebliche Idealisierung dar.



**Abbildung 5- 18: Lebensdauervertelung für das unter Abschnitt 5.2.1.5 definierte Ausgangsbeispiel (gestrichelt: Ergebnisse aus der Monte-Carlo-Berechnung)**

In Abbildung 5-19 ist die Lebensdauervertelungsfunktion für das Ausgangsbeispiel mit einer auf 28cm erhöhten Deckendicke zu sehen. Der Funktionsverlauf entspricht wieder prinzipiell dem mit der Monte-Carlo-Methode berechneten Kurvenverlauf. Die konkreten Funktionswerte sind wiederum um etwa 5% bis 10% höher.



**Abbildung 5- 19: Lebensdauervertelung für das Ausgangsbeispiel mit auf 28cm erhöhter Deckendicke**

Die Erhöhung der Betonfestigkeit auf  $4,0\text{N/mm}^2$  (Spaltzug) führt erwartungsgemäß ebenfalls zu Ausfallwahrscheinlichkeiten, welche niedriger sind als im Ausgangsbeispiel (Abbildung 5-20). Die berechneten Funktionswerte zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Werten, welche mit der Monte-Carlo-Methode ermittelt wurden (Abbildung 5-13).

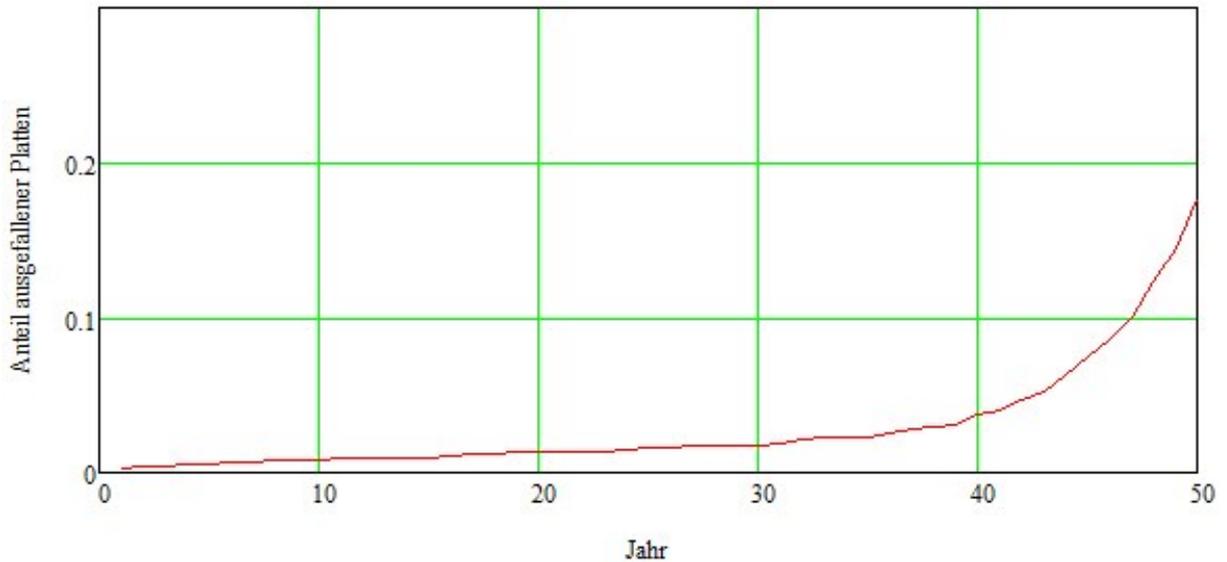


Abbildung 5-20: Lebensdauervertelung für das Ausgangsbeispiel mit höherer Betonfestigkeit

Im nächsten Beispiel wird die Verkehrsbelastung um die Hälfte reduziert. Die Ergebnisse entsprechen wieder im Wesentlichen denen, die mit der Monte-Carlo-Methode ermittelt wurden (Abbildung 5-21, 5-14).

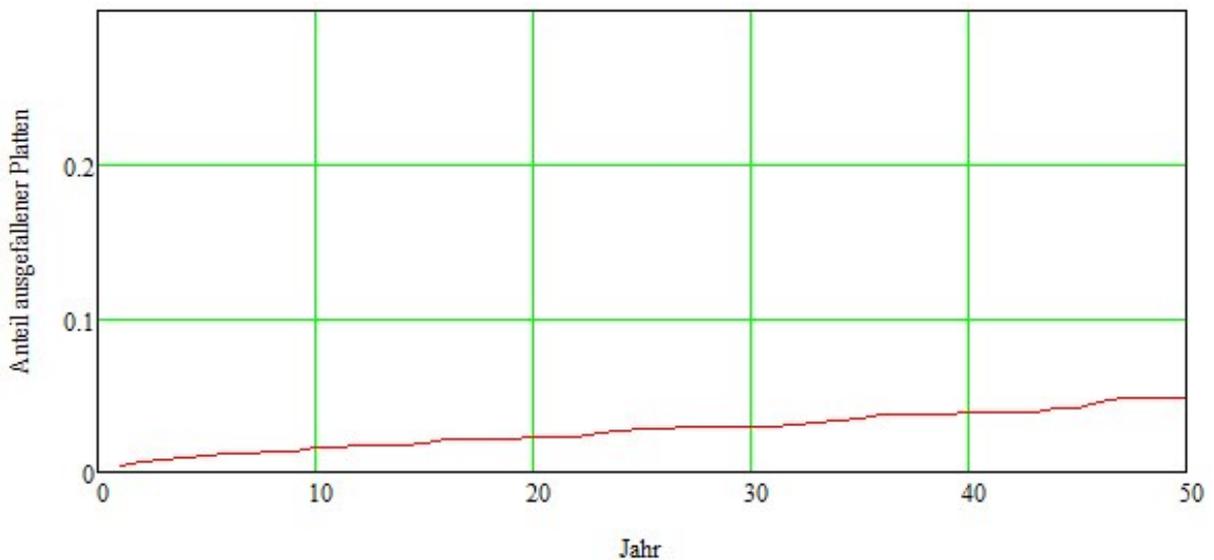
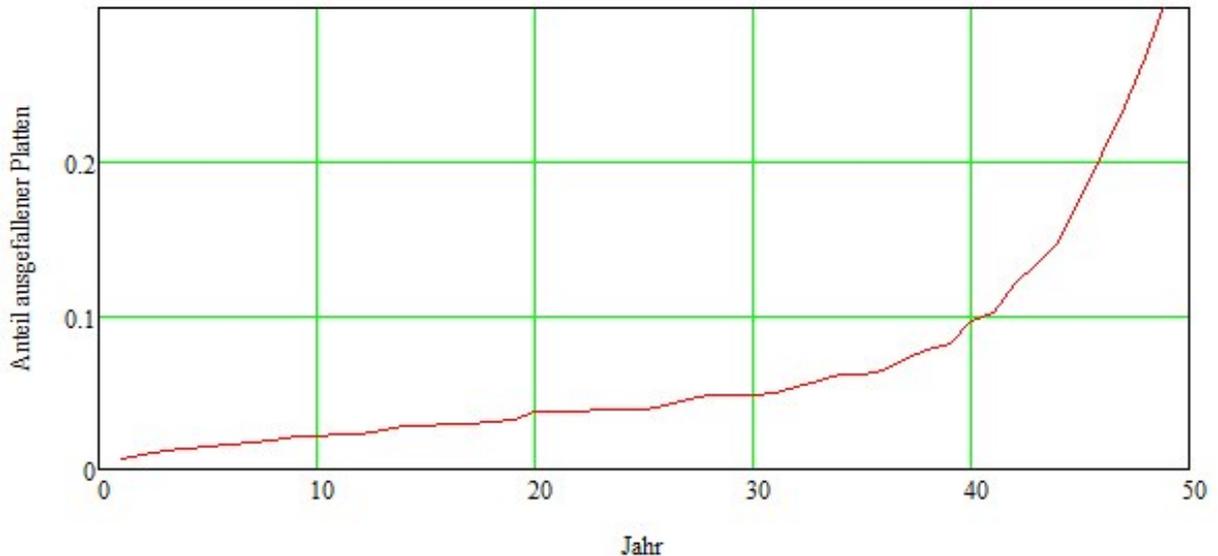


Abbildung 5-21: Lebensdauervertelung für das Ausgangsbeispiel mit halber Verkehrsbelastung

In einer letzten Variation wird eine doppelte Verkehrsbelastung im zwanzigsten Nutzungsjahr unterstellt. Der hierfür berechnete Kurvenverlauf entspricht wiederum weitgehend dem Funktionsverlauf, welcher mit der Monte-Carlo-Methode ermittelt wurde (Abbildung 5-22, 5-15).



**Abbildung 5- 22: Lebensdauervertelung für das Ausgangsbeispiel mit doppelter Verkehrsbelastung im zwanzigsten Nutzungsjahr**

#### 5.4.4.5 Bewertung des Verfahrens

Das Berechnungsverfahren liefert, ähnlich wie die Monte-Carlo-Methode, realistische Werte für die Lebensdauervertelungsfunktion. Die Vorzüge des Verfahrens lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Weil direkt mit der Verteilung der Momentanwerte gerechnet wird, erübrigt sich die Bildung der Extremwertvertelungen und die Benutzung der Turkstraregel.
- Für die Berechnung ist es nicht notwendig, Zufallszahlen zu erzeugen. Deshalb liefert jede Berechnung mit gleichen Eingangsparametern auch exakt gleiche Ergebnisse.
- Für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit infolge extremer Belastung und Materialermüdung sind keine getrennten Berechnungen erforderlich.

Dem stehen einige Nachteile gegenüber:

- Das Verfahren ist nicht ganz so flexibel modifizierbar und erweiterbar wie die Monte-Carlo-Methode. Beispielsweise ist es nicht möglich, die regelmäßige Reparatur von Fahrbahnplatten im Verfahren zu berücksichtigen.
- Die Anwendung des genauen Berechnungsverfahrens unter Verwendung von Gleichung 5-47 ist sehr aufwendig. Die Grenzzustandsfunktion ist in jedem Jahr mit den jeweils gültigen Parametern anzusetzen und die Nullstellen sind numerisch zu ermitteln. Dies ist mit entsprechender Software realisierbar, führt aber zu langen Rechenzeiten.
- Die Einführung einer parametrisierten Funktion (hier die Normalverteilung) für die Verteilung der Werte der Grenzzustandsfunktion führt zu einem einfacheren und schnelleren Berechnungsverfahren. Die Einführung der Verteilungsfunktion stellt aber eine weitreichende Idealisierung dar. Abbildung 5-17 zeigt, dass die Übereinstimmung nicht sehr gut ist. Selbst wenn die berechnete Betonfestigkeit für das betreffende Jahr gleich Null ist, wird für  $F_0(0)$  ein Wert  $<1$  ausgewiesen. Es wird also noch eine Überlebenswahrscheinlichkeit  $>0$  berechnet. Trotzdem liefern die Berechnungen

offensichtlich brauchbare Ergebnisse. Vor einer breiten Anwendung des Verfahrens ist aber sicher zu stellen, dass die vorgeschlagene Parameterberechnung für die Verteilung der Grenzzustandsfunktion im gesamten relevanten Parameterbereich eine hinreichend gute Anpassung liefert. Es ist zu beachten, dass das Verfahren relativ sensibel auf die Wahl des Parameters  $\sigma$  für die Normalverteilung reagiert.

- Für die Berechnung der Ermüdungsfestigkeit des Betons ist eine Umrechnung des Lastkollektivs auf eine äquivalente Lastwechselzahl notwendig.

Auch für diese Berechnungsmethode gilt, dass erst durch eine Kalibrierung sichergestellt werden kann, dass hinreichend exakte Ergebnisse erzielt werden.

#### 5.4.5 Berechnung mit Hilfe der Miner-Regel

##### 5.4.5.1 Beschreibung des Verfahrens

Es ist üblich, die allmähliche Schädigung eines Bauteils, welche schließlich zum Versagen führt, mit einer Schadensakkumulationshypothese mathematisch darzustellen ([32], [58]). Weil das Versagen der Betonstraßenplatten im Wesentlichen auf die Ermüdung des Betons zurückgeführt werden kann, ist es naheliegend, diesen Ermüdungsprozess als Schädigungsprozess aufzufassen und mit Hilfe einer Akkumulationshypothese die Schädigung bis zum Versagen zu beschreiben. Es kann gezeigt werden, dass auch dieser mathematische Ansatz zur Berechnung der Lebensdauerverteilung geeignet ist.

Eine einfache und vielfach angewendete Akkumulationshypothese ist die Miner-Regel, gelegentlich auch Palmgren-Miner-Regel genannt. Die Regel besagt, dass jede Belastung eine abstrakte Teilschädigung  $\Delta D$  im Material bewirkt. Diese Schädigungen werden linear akkumuliert. Die Größe der Schädigung entspricht damit dem Quotienten aus vorhandener Lastwechselzahl und der ertragbaren Lastwechselzahl. Weil die ertragbare Lastwechselzahl vom Belastungsniveau abhängt, ist für jedes Lastniveau ein separater Quotient zu bilden. Es ergibt sich:

$$D = \sum_{i=1}^{nl} \frac{n_i(\Delta\sigma_i)}{N_{fat,i}(\Delta\sigma_i)} \quad (5-54)$$

D – Schädigung

nl – Anzahl der unterschiedlichen Lastniveaus im Lastkollektiv

$n_i(\Delta\sigma_i)$  – vorhandene Anzahl Lastwechsel mit dem Spannungsniveau  $\Delta\sigma_i$

$N_{fat,i}(\Delta\sigma_i)$  – ertragbare Anzahl Lastwechsel mit dem Spannungsniveau  $\Delta\sigma_i$

Versagen tritt ein wenn  $D=1$  erreicht ist.

Die Gültigkeit der Miner-Hypothese für den Beton wird vielfach bestritten (siehe z.B.: [33], [37], [38], [49]). Insbesondere kann gezeigt werden, dass die Schadensakkumulation von der Reihenfolge des Auftretens der Belastungsniveaus abhängt. Trotzdem wird die Miner-Hypothese für die Lösung von Ermüdungsproblemen des Betons häufig verwendet. In [41] wird die Anwendung der Miner-Regel ausdrücklich empfohlen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Anwendungsgrenzen der Miner-Regel respektiert werden müssen und in jedem Fall kritisch zu überprüfen ist, ob die Regel im Rahmen eines konkreten Rechenmodells zu realistischen Ergebnissen führt. Im vorliegenden Fall ist dies gegeben.

Ausgangspunkt für das Verfahren zur Bestimmung der Lebensdauerverteilung bildet Gleichung 5-54. Die vorhandene Lastwechselzahl für ein bestimmtes Lastniveau ergibt sich aus der Gesamtlastwechselzahl und der Auftretenswahrscheinlichkeit der betreffenden Spannung:

$$n_i(\Delta\sigma_i) = n \cdot P(\Delta\sigma_i) \quad (5-55)$$

Wenn keine Lastklassen gebildet werden gilt:

$$n(\Delta\sigma) = n \cdot f(\Delta\sigma) d\Delta\sigma \quad (5-56)$$

$f(\Delta\sigma)$  – Wahrscheinlichkeitsdichte der Spannung

Weil die Druckfestigkeit des Betons weit über der Zugfestigkeit liegt, wird davon ausgegangen, dass die Druckspannungen keine relevante Schädigung hervorrufen. Es werden nur die Zugspannungen berücksichtigt. Damit ergibt sich:

$$n(\sigma) = n \cdot f(\sigma) d\sigma \quad (5-57)$$

Für die ertragbare Lastwechselzahl kann unter Verwendung von Gleichung 5-32 geschrieben werden:

$$N_{fat} = 10^{\frac{6,67 \cdot f_{ct}}{\sigma} - 4,353} \quad (5-58)$$

Für D ergibt sich damit:

$$D = \int_0^\infty \frac{n \cdot f(\sigma) d\sigma}{10^{\frac{6,67 \cdot f_{ct}}{\sigma} - 4,353}} \quad (5-59)$$

Elementare Umformungen liefern:

$$D = n \cdot 10^{4,353} \cdot \int_0^\infty \frac{f(\sigma)}{10^{\frac{6,67 \cdot f_{ct}}{\sigma}}} d\sigma \quad (5-60)$$

Um die Änderung des durchschnittlichen Beanspruchungsniveaus über den Nutzungszeitraum zu berücksichtigen, werden die Schädigungsquotienten separat für die einzelnen Nutzungsjahre berechnet.

$$D = \sum_{ij=1}^{nj} SVa_{ij} \cdot 10^{4,353} \cdot \int_0^\infty \frac{f_{ij}(\sigma)}{10^{\frac{6,67 \cdot f_{ct}}{\sigma}}} d\sigma \quad (5-61)$$

$f_{ij}(\Delta\sigma)$  – Wahrscheinlichkeitsdichte der Spannung im Jahr ij

Die Dichtefunktion  $f_{ij}(\sigma)$  berücksichtigt nur die Streuung der beiden Belastungsgrößen (Radlast, Temperaturgradient). Für die Entwicklung dieser Verteilungsfunktion über den Nutzungszeitraum lässt sich relativ leicht eine zufriedenstellende Näherung finden (siehe Abschnitt 5.4.5.2). Die Streuung der Dicke und der Festigkeit wird berücksichtigt, indem jeder Versagensfall mit der Wahrscheinlichkeit der zugehörigen Parameterkombination aus Dicke und Festigkeit multipliziert wird.

$$P_f = \sum_{ic=1}^{nc} \sum_{ih=0}^{nh} f_h(h_{ih}) \cdot f_c(f_{ct,ic}) | (D(h_d, f_{ct}) \geq 1) \cdot \Delta h_d \cdot \Delta f_{ct} \quad (5-62)$$

Weil die Spannung  $\sigma$  von der Radlast und dem Temperaturgradienten abhängt, kann auch über diese Größen integriert werden. Gleichung 5-61 modifiziert sich damit zu:

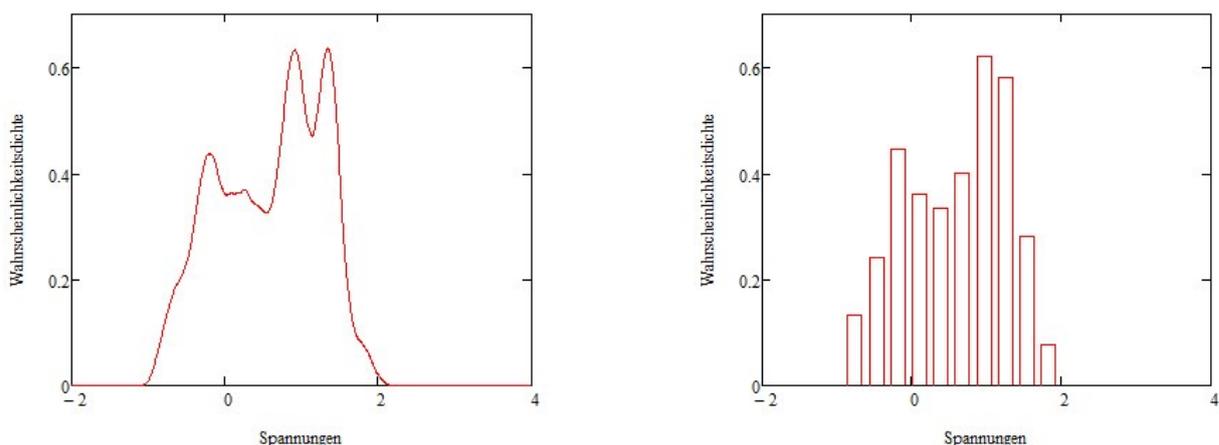
$$D = \sum_{ij=1}^{nj} SV a_{ij} \cdot 10^{4,353} \cdot \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{f_{Rad}(F_d) \cdot f_T(\delta_T)}{10^{\frac{6,67 \cdot f_{ct}}{\sigma(F_d, \delta_T)}}} dF_d d\delta_T \quad (5-63)$$

Diese Formulierung hat den Vorteil, dass die verwendeten Verteilungsfunktionen bekannt sind. Die praktische Anwendung dieser Formel führt allerdings zu mehrstündigen Rechenzeiten. Es ist deshalb erstrebenswert, eine Anwendung der vereinfachten Formel 5-60 zu ermöglichen. Dafür ist es erforderlich, die Form der Funktion  $f(\sigma)$  mit hinreichender Genauigkeit abzuschätzen und in geeigneter Form zu beschreiben.

#### 5.4.5.2 Verteilungsfunktion für die Spannungen

Um eine Vorstellung über den Verlauf der Verteilungsfunktion  $f(\sigma)$  zu gewinnen, wurden systemische Simulationsrechnungen durchgeführt.

Abbildung 5-23 zeigt eine Verteilung für eine typische Parameterkombination. Es wird deutlich, dass eine gut angepasste Verteilungsfunktion eine komplizierte Struktur haben muss.



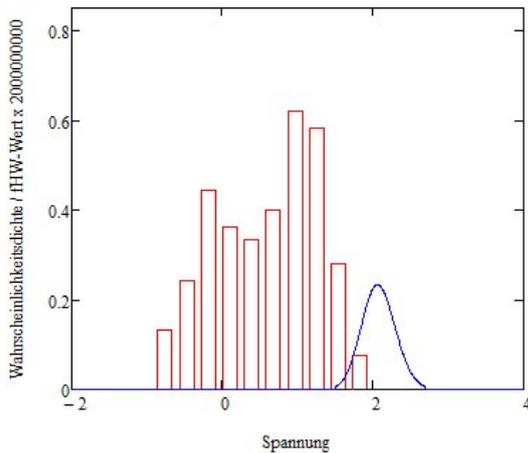
**Abbildung 5-23: Durch Simulation ermittelte Verteilung der Spannungen in Abhängigkeit von der Streuung der Belastungsgrößen**

Außerdem wurde untersucht, welcher Wertebereich für die Berechnung der Lebensdauerverteilung relevant ist. Dafür wurde zunächst eine Normalverteilung

unterstellt, welche sich annähernd an die empirische Verteilung anpasst. Mit dieser Annahme wurde der Verlauf der Funktion

$$f_{HW}(\sigma) = \frac{f_{ij}(\sigma)}{10 \frac{6,67 \cdot f_{ct}}{\sigma}} \quad (5-64)$$

untersucht. Abbildung 5-24 ist zu entnehmen, dass die relevanten Werte ausschließlich durch die höchsten Spannungsbeträge erzeugt werden. Dies ist plausibel, weil für niedrige Spannungsniveaus sehr hohe mögliche Lastwechselzahlen gelten.



**Abbildung 5-24: Verlauf der Funktion  $f_{HW}(\sigma)$  im Vergleich zum Verlauf der empirischen Spannungsverteilung**

Es ist also nicht sinnvoll, eine Verteilungsfunktion zu suchen, welche die gesamte empirische Spannungsverteilung gut abbildet. Relevant ist allein der Verlauf am hinteren Ende der Verteilungsfunktion.

Durch systematische Berechnungen wurde festgestellt, dass für die Verteilungsfunktion  $f_{ij}(\sigma)$  eine Normalverteilung mit folgenden Parametern angesetzt werden kann:

$$\mu_g(ij) = \sigma(6,0.001, m_{bL,ij}, m_{bD,ij}, \gamma_{E4,ij}) \quad (5-65)$$

$$\sigma_\sigma = 0,3 \quad (5-66)$$

$\sigma(6,0.001, m_{bL,ij}, m_{bD,ij}, \gamma_{E4,ij})$  – Spannung nach Gleichung 2-5 mit der Radlast 6t, dem Temperaturgradient 0,001 K/mm, dem Lagerungsfaktor  $m_{bL,ij}$ , dem Dübelfaktor  $m_{bD,ij}$  und dem Stoßfaktor  $\gamma_{E4,ij}$

$m_{bL,ij}$  - Lagerungsfaktor im Jahr ij

$m_{bD,ij}$  – Dübelfaktor im Jahr ij

$\gamma_{E4,ij}$  – Stoßfaktor im Jahr ij

Die Position der Verteilungsfunktion auf der x-Achse passt sich damit automatisch der Veränderung des Spannungsniveaus über den Nutzungszeitraum an.

### 5.4.5.3 Berechnungsergebnisse

Um einen Vergleich mit den Ergebnissen der anderen Verfahren zu ermöglichen, wurden die gleichen Beispiele berechnet wie in Abschnitt 5.4.2 bis 5.4.4. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 5-25 bis 5-29 dargestellt.

Abbildung 5-25 zeigt die berechneten Kurven für die Lebensdauerverteilung aus dem genauen Verfahren nach Gleichung 5-63 (blau) und dem vereinfachten Verfahren nach Gleichung 5-61 (rot). Das vereinfachte Verfahren liefert offensichtlich etwas kleinere Werte. Insgesamt ist die Übereinstimmung aber zufriedenstellend.

Alle weiteren Abbildungen zeigen die Ergebnisse welche mit dem vereinfachten Verfahren erzielt wurden.

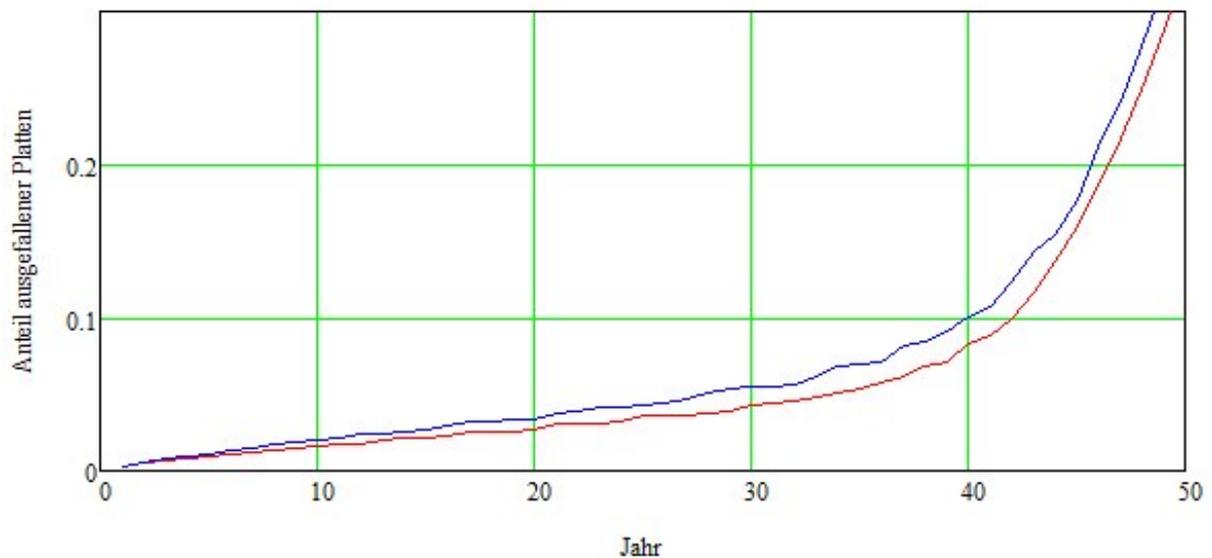


Abbildung 5- 25: Lebensdauerverteilung für das unter Abschnitt 5.2.1.5 definierte Ausgangsbeispiel (genaues Verfahren: blau, vereinfachtes Verfahren: rot)

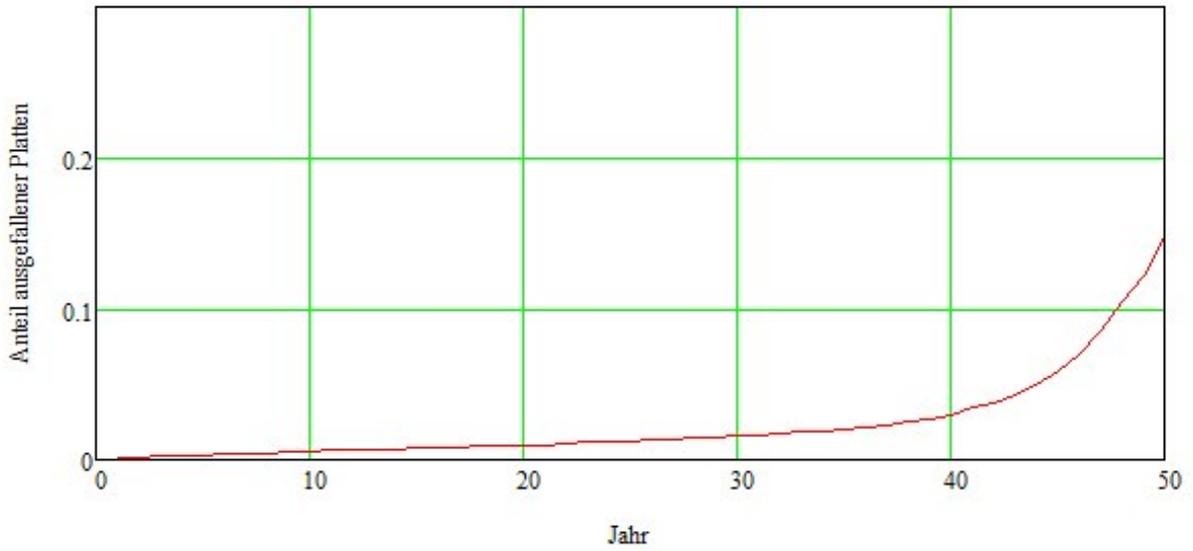


Abbildung 5-26: Lebensdauerverteilung für das Ausgangsbeispiel mit auf 28cm erhöhter Deckendicke

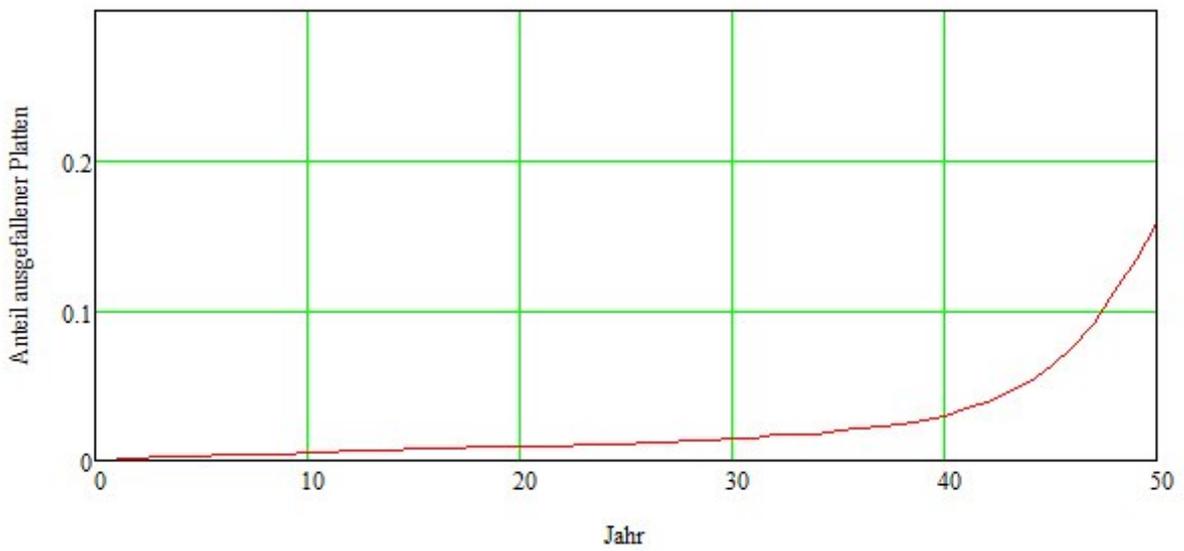


Abbildung 5-27: Lebensdauerverteilung für das Ausgangsbeispiel mit höherer Betonfestigkeit

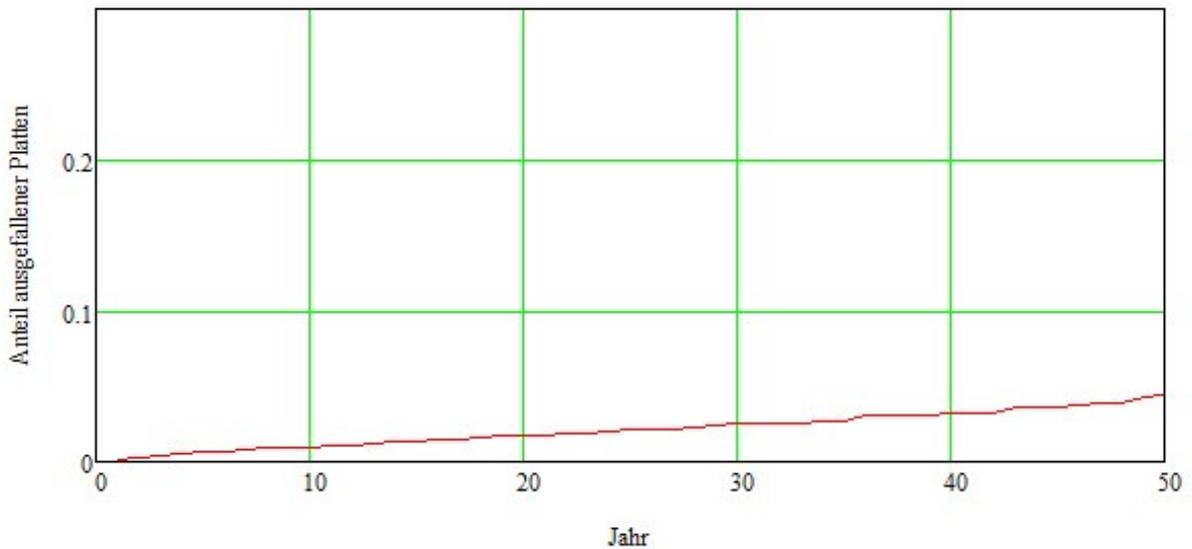


Abbildung 5-28: Lebensdauererterteilung für das Ausgangsbeispiel mit halber Verkehrsbelastung

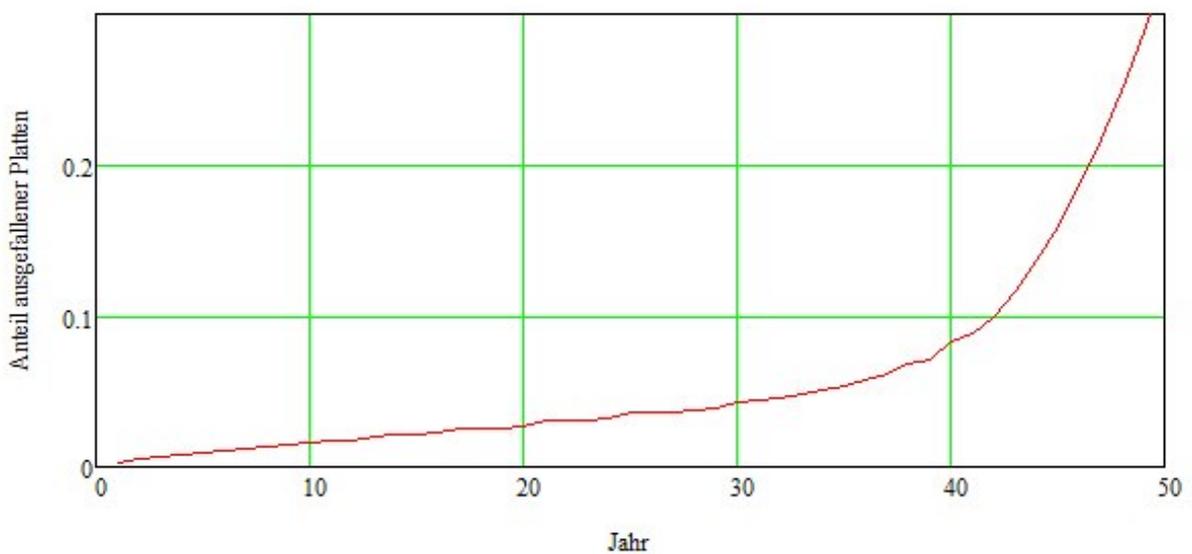


Abbildung 5-29: Lebensdauererterteilung für das Ausgangsbeispiel mit doppelter Verkehrsbelastung im zwanzigsten Nutzungsjahr

Es wird deutlich, dass die Berechnungsergebnisse im Wesentlichen mit den Werten übereinstimmen, die mit den beiden anderen Verfahren ermittelt wurden.

#### 5.4.5.4 Bewertung des Verfahrens

Das Berechnungsverfahren liefert, ähnlich wie die beiden anderen Verfahren, realistische Werte für die Lebensdauererterteilungsfunktion. Es bietet aber gegenüber den anderen Verfahren einigen wesentliche Vorteile:

- Im Unterschied zu den vorher beschriebenen Verfahren wird es nicht notwendig, das Lastkollektiv auf eine äquivalente Lastwechselzahl umzurechnen. Die Nutzung der problematischen Vierte-Potenz-Regel entfällt damit. Damit erübrigt sich auch die

Definition eines äquivalenten Lastwechsels für die Ermüdung, welcher als implizite Kalibrierung angesehen werden muss. Indem das Belastungskollektiv in seiner Gesamtheit berücksichtigt wird, sind auch die extremen Lasten erfasst. Ein gesonderter Nachweis kann also entfallen. Die Ermüdungsformel der RDO Beton ist allerdings für hohe Lastniveaus nicht exakt. Für den Fall einer Gleichheit von Spannung und Festigkeit wird immer noch eine zulässige Lastwechselzahl von 207 angegeben. Die Auswertungen auf die berechnete Versagenswahrscheinlichkeit sind aber minimal.

- Es ist nicht notwendig Extremwertverteilungen zu bestimmen.
- Die Anwendung der Turkstraregel entfällt.

Dem stehen folgende Nachteile gegenüber:

- Die Anwendung des genauen Berechnungsverfahrens ist sehr zeitintensiv.
- Das vereinfachte Verfahren beinhaltet mit der Definition der Verteilungsfunktion für die Spannungen eine weitgehende Idealisierung. Die getroffenen Annahmen für die Parameter der Verteilungsfunktion sind noch nicht hinreichend abgesichert.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Verwendung der Schadensakkumulationshypothese vorteilhaft ist, die Anwendung des Verfahrens aber durch die langen Berechnungszeiten erschwert wird. Das Problem wird erheblich verschärft, wenn die Grenzzustandsfunktion mit der Finite-Elemente-Methode berechnet wird. In diesem Fall wird die Berechnungszeit im Wesentlichen von der Anzahl der notwendigen Aufrufe der FEM-Berechnungen bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wurden die Beispielrechnungen mit dem vereinfachten Verfahren nach Formel 5-61 und 5-62 durchgeführt. Die Werte  $n_c$  und  $n_h$  wurden mit jeweils 29 angenommen. Damit ergeben sich schon allein 900 Kombinationen für die Deckendicke und die Festigkeit. Es ist also 900-mal die Formel 5-65 mit Hilfe der FEM zu berechnen. Geht man davon aus, dass mit einem optimierten Iterationsalgorithmus ca. 4 Iterationsschritte für die Deckendicke erforderlich sind, dann werden für eine Dimensionierung 216000 FEM-Aufrufe notwendig (900 Kombinationen Dicke/Festigkeit x 30 Jahresscheiben x 2 Berechnungsfälle (Längs-, Querfuge) x 4 Iterationsschritte).

Der Berechnungsaufwand steigt offensichtlich in nicht mehr praktikable Größenordnungen. Selbst mit der Benutzung von Meta-Systemen für die FEM-Berechnungen (siehe Abschnitt 4.7) kann es nicht als sicher gelten, dass akzeptable Rechenzeiten realisiert werden können. Die Berücksichtigung weiterer Zufallsgrößen erscheint ebenso ausgeschlossen.

Es wird deshalb vorgeschlagen die Grenzzustandsfunktion in der Form

$$G = 1 - \sum_{ij=1}^{n_j} S V a_{ij} \cdot 10^{4,353} \cdot \int_0^{\infty} \frac{f_{ij}(\sigma)}{10^{\frac{6,67 \cdot f_{ct}}{\sigma}}} d\sigma \quad (5-67)$$

zu definieren und die Versagenswahrscheinlichkeit mit dem FORM-Algorithmus zu berechnen.

Für jeden Iterationsschritt innerhalb des FORM-Algorithmus sind dann vier FEM-Berechnungen notwendig (zur numerischen Berechnung der partiellen Ableitungen der Grenzzustandsfunktion). Unterstellt man, dass 4 Iterationsschritte notwendig werden, dann vermindert sich die Gesamtzahl der erforderlichen FEM-Berechnungen auf 3840 (16

Berechnungen im FORM Algorithmus x 30 Jahresscheiben x 2 Berechnungsfälle (Längs-, Querfuge) x 4 Iterationsschritte).

Wenn keine hinreichende Glattheit der Grenzzustandsfunktion gesichert ist, ergibt sich allerdings die Notwendigkeit die numerische Berechnung der partiellen Ableitungen als Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotienten zu berechnen und ggf. auch den zentralen Differenzenquotienten zu ermitteln. Damit kann die Anzahl der notwendigen FEM-Berechnungen sich verdoppeln.

#### 5.4.6 Zusammenfassung und Ausblick

Die Versagenswahrscheinlichkeit von Betonfahrbahnplatten über einen definierten Betrachtungszeitraum bei zeitlich varianten Bedingungen ist von vielfältigen Einflüssen abhängig, welche zum großen Teil nur unzureichend bekannt sind. Darüber hinaus sind die Berechnungsmodelle zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens der Platten stark idealisiert. Aus diesem Grund ist es unmöglich, ein Berechnungsverfahren zu entwickeln, welches per se realitätsnahe Ergebnisse liefert. Vielmehr geht es darum, ein Verfahren zu etablieren, welches die Wirkung der wesentlichen Einflussgrößen hinreichend genau abbildet. Nach einer Kalibrierung an den Ausfallraten, welche in der Praxis festgestellt werden, ergeben sich damit brauchbare Berechnungsergebnisse. In der vorliegenden Arbeit wurden Methoden und Verfahren vorgestellt, welche potentiell als Grundlage für eine solche Vorgehensweise geeignet sind.

Die weitere Entwicklung muss sich auf zwei grundsätzliche Richtungen konzentrieren:

1. Weiterentwicklung und Präzisierung der Berechnungsverfahren
2. Erweiterung der empirischen Basis für die Kalibrierung.

Bezüglich der Berechnungsverfahren sind folgende Problembereiche für die weitere Entwicklung von besonderer Relevanz:

- Anpassung der Verfahren an neue Bemessungsmodelle:  
Das Dimensionierungsmodell der RDO Beton wird derzeit überarbeitet und wesentlich verändert. Insbesondere ist vorgesehen, für die Berechnung der Beanspruchungszustände der Betonplatten die FEM zu nutzen. Die beschriebenen probabilistischen Methoden sind zwar prinzipiell unabhängig vom Berechnungsmodell, in der konkreten Umsetzung ergeben sich aber vielfältige Probleme. Dies betrifft insbesondere die Beschränkung der Rechenzeit auf ein akzeptables Maß.
- Nutzung des FORM-Algorithmus für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Betonstraßenplatten:  
Der FORM-Algorithmus stellt die Standardmethode für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit innerhalb der Zuverlässigkeitstheorie dar. Das Verfahren ist äußerst effektiv und theoretisch weit entwickelt. Wie bereits in Abschnitt 4.4 erläutert, ist die hinreichende Genauigkeit des Verfahrens für den hier interessierenden Anwendungsfall nicht gesichert. Berechnungen, welche für die vorliegende Arbeit durchgeführt wurden, lassen aber vermuten, dass die erforderliche Genauigkeit gegeben ist. Vermutlich wird die Anwendung des FORM-Algorithmus

nützlich sein, um die mit der Verwendung der FEM verbundenen Probleme bezüglich der Rechenzeit zu lösen.

Die durch das Verfahren bereitgestellten Wichtungsfaktoren geben außerdem Auskunft über die Relevanz der Streuungen der verschiedenen Zufallsgrößen.

- Eindeutige Identifikation der relevanten Zufallsgrößen:  
Prinzipiell kann jede Einflussgröße als Zufallsgröße definiert werden. Praktisch ist es aber vorteilhaft, die probabilistische Beschreibung auf die Zustandsgrößen zu beschränken, deren Streuung die Ausfallwahrscheinlichkeit wesentlich beeinflusst. Für die bisher berücksichtigten Zufallsgrößen trifft dies offenbar zu. Ob noch weitere Zufallsgrößen beachtet werden müssen, ist eindeutig zu klären.
- Definition weiterer Verteilungsfunktionen:  
Die Streuungen weiterer Einflussfaktoren können derzeit nicht in ihrer Wirkung untersucht werden, weil keine verlässlichen Verteilungsfunktionen vorliegen.
- Detaillierte Untersuchung der in den vereinfachten Berechnungsverfahren verwendeten Verteilungsfunktionen für die Grenzzustandsfunktion bzw. die Spannungen:  
Die o.g. Verteilungsfunktionen wurden in den unter Abschnitt 5.4.4 bzw. 5.4.5 entwickelten Berechnungsverfahren verwendet. Form und Parameter der Funktionen wurden auf der Grundlage von Simulationen ermittelt. Die so erzielten Ergebnisse sind offenbar plausibel. Für eine breite Anwendung dieser Verfahren ist es aber notwendig, den gefundenen Ansatz mit einer systematischen Testung über das gesamte relevante Parameterspektrum zu verifizieren und ggf. zu präzisieren.

Für die Verbesserung der empirischen Datenbasis sind folgende Schwerpunkte zu setzen:

- Daten zum Verlauf der Schadensentwicklung:  
Um die Berechnungsverfahren tatsächlich verifizieren zu können, brauchte man die Werte sämtlicher berechnungsrelevanten Parameter über den gesamten Nutzungszeitraum, sowie zusätzlich die Daten zur Schadensentwicklung. Da derartige vollständige Datensätze nicht verfügbar sind und auch in absehbarer Zukunft nicht verfügbar sein werden, muss man versuchen, aus dem verfügbaren Datenmaterial größtmögliche Informationen zu schöpfen. Dafür sind die empirischen Werte sinnvoll mit theoretischem Wissen zu verknüpfen. Besonders wertvoll sind Daten über die zeitliche Entwicklung der Ausfallraten homogener Fahrbahnabschnitte. Aufschlussreich ist der Vergleich berechneter Prognosen mit tatsächlichen Schadensverläufen.
- Daten zum zeitlichen Verlauf von bestimmten Einflussfaktoren:  
Für die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Berechnungsverfahren wurden die zeitlichen Verläufe verschiedener Einflussfaktoren allein auf Grund theoretischer Überlegungen abgeschätzt. Es ist notwendig, diese Annahmen mit Hilfe empirischer Daten zu verbessern.

## 6 Thesen

(1) Voraussetzung für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Straßenbetonplatten ist die mathematische Beschreibung der Streuung der Einflussgrößen.

(2) Legt man das Berechnungsmodell der RDO Beton zu Grunde, so haben die Streuung der Deckendicke, der Betonfestigkeit und der Lasten (Verkehr, Temperatur) den größten Einfluss auf die Ausfallwahrscheinlichkeit. Ob es für praktische Berechnungsfälle im Allgemeinen ausreichend ist diese Größen als Zufallsgrößen zu berücksichtigen, kann auf der Grundlage der vorliegenden Erkenntnisse noch nicht abschließend entschieden werden. Um diese Frage zu beantworten, sind vor Allem Untersuchungen zu den Verteilungsfunktionen der einzelnen Einflussgrößen notwendig.

(3) Die Abhängigkeit des E-Moduls des Betons von der Betonfestigkeit sollte bei der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit berücksichtigt werden.

(4) Die Versagenswahrscheinlichkeit für eine Straßenbetonplatte kann durch Integration über den Versagensbereich berechnet werden. Bei Beschränkung auf die o.g. 4 Zufallsgrößen ist die Integration mit praktikablen Rechenzeiten realisierbar. Ist im Zuge iterativer Bemessungsalgorithmen die vielfache Wiederholung der Berechnung notwendig, so können unakzeptabel hohe Rechenzeiten entstehen. Das Verfahren liefert die exakten Werte für die Versagenswahrscheinlichkeit, ist unabhängig von der Struktur der Verteilungsfunktionen und kann mit numerischen Integrationsverfahren problemlos realisiert werden. Die Integrationsgrenzen sind für jeden Berechnungsfall sinnvoll festzulegen.

(5) Für eine Berechnung nach der Zuverlässigkeitstheorie I. Ordnung (FORM) ist das Berechnungsmodell nach RDO Beton nur sehr bedingt geeignet. Die Grenzzustandsfunktion ist im interessierenden Bereich nicht hinreichend glatt, um eine Konvergenz zu ermöglichen. Ursächlich ist die Form der mathematischen Beschreibung der temperaturbedingten Spannungen.

(6) Die Monte-Carlo-Methode ist für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Straßenbetonplatten grundsätzlich geeignet. Das Verfahren bietet die Möglichkeit, sämtliche relevante Zufallsgrößen mit ihren Streuungen zu berücksichtigen. Die notwendigen Rechenzeiten werden durch die Anzahl der Zufallsgrößen nur minimal beeinflusst.

(7) Wird für die Berechnung der Spannungen und Verformungen der Betonplatte die Finite-Elemente-Methode (FEM) benutzt, so entstehen bei der Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit sehr lange Rechenzeiten. Es wird deshalb für diesen Fall die Verwendung von Meta-Modellen empfohlen.

(8) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Extremwerte für einen definierten Nutzungszeitraum kann mit einer Gumbelverteilung beschrieben werden.

(9) Die Belastungen aus Verkehr und Temperatur können als stochastische Prozesse beschrieben und auf einfache Weise mit Hilfe der Turkstra-Regel überlagert werden.

(10) Liegt die Versagenswahrscheinlichkeiten über 10% so können selbst Parameterkombinationen mit negativen Temperaturgradienten mit relevanter Wahrscheinlichkeit zum Versagen führen. Sie sind also in diesen Fällen in der Berechnung zu berücksichtigen.

(20) Um zu berechnen, wie viele Platten eines Fahrbahnabschnittes in einem bestimmten Zeitraum versagen, ist es notwendig, die Lebensdauervertelung für den zeitlich varianten Fall zu berechnen.

(21) Die Lebensdauervertelung für den zeitlich varianten Fall kann effektiv mit der Monte-Carlo-Methode berechnet werden. Mit dem Verfahren ist es möglich, vielfältige Einflüsse mit ihrem zeitlichen Verlauf zu berücksichtigen.

(22) Eine andere Möglichkeit zur Berechnung der Lebensdauervertelung besteht darin, den Belastungsprozess als Poissonprozess zu modellieren.

(23) Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Lebensdauervertelung eröffnet die Nutzung der Miner-Regel.

(24) Die Einflussfaktoren für die Lebensdauervertelung sind sehr vielfältig und ihre zeitliche Entwicklung ist nur unzureichend bekannt. Darüber hinaus sind die Berechnungsmodelle zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens der Platten stark idealisiert. Aus diesem Grund ist es derzeit unmöglich, ein Berechnungsverfahren zu entwickeln, welches ohne vorherige Kalibrierung realitätsnahe Ergebnisse liefert.

## 7 Literatur

- [1] SPAETHE, G.: Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen, 2. Auflage, Springer Verlag Wien, 1992
- [2] Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen: Richtlinien für die rechnerische Dimensionierung von Betondecken im Oberbau von Verkehrsflächen, Ausgabe 2009 (RDO-Beton 09), FGSV 2009
- [3] PFEIFER, L.; KIEHNE, A.; VILLARET, ST.: Dimensionierungsverfahren für Betonoberbau, Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Heft 856, Bonn, 2002
- [4] PFEIFER, U.; KIEHNE, A.; VILLARET, ST.; KAYSER, S.; RIWE, A.: Weiterentwicklung der Bemessungsmethoden für Verkehrsflächen – Teil Betonstraßen, Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Heft 976, Bonn, 2007
- [5] PFEIFER, L.; KIEHNE, A.; VILLARET, ST.; KAYSER, S.; RIWE, A.: Grundlagen zur Erfassung der Belastung für die analytische Dimensionierung von Straßenbefestigungen - Teil Betonstraßen, Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Heft 1050, Bonn, 2010
- [6] VILLARET, ST.; KIEHNE, A.; RIWE, A.: Probabilistische Verfahrensweisen für die Dimensionierung von Fahrbahnbefestigungen – Teil Betonstraßen, Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Heft 1072, Bonn, 2012
- [7] RÜSCH, SELL, RACKWITZ: Statistische Analyse der Betonfestigkeit, DAfStB Heft 206, 1969
- [8] Joint Committee on Structural Safety: Probabilistic Model Code, 2001-2007
- [9] LECHNER, B.: Der Temperaturgradient als Bemessungsgröße bei der Dimensionierung von dicken Betondecken, Dissertation, TU München, 1996
- [10] FAHRMEIR, L.; KÜNSTLER, R.; PIGEOT, I.; TUTZ, G.: Statistik, 2. Auflage, Springer Verlag Berlin, 2001
- [11] KORUS, D.: Selektivschätzung von Bereichsanfragen auf metrischen Attributen mit nichtparametrischen Verfahren, Dissertation Philipps-Universität Marburg, 1999
- [12] DEUTLER, T. et al: „Merkblatt über die statistische Auswertung von Prüfergebnissen, Teil 2: Erkennen und behandeln von Ausreißern“, FGSV-Verlag 2003
- [13] STORM, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Statistische Qualitätskontrolle, 5. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, 1974
- [14] MELCHERS, R. E.: "Structural reliability analysis and prediction", Wiley & Sons 2002
- [15] PLATE, E.: Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 1993
- [16] KAYSER, S.: Grundlagen zur Erfassung klimatischer Einflüsse für Dimensionierungsrechnungen von Asphaltbefestigungen. Dissertation, Technische Universität Dresden, Professur für Straßenbau, 2007
- [17] BEYER, O. / HACKEL, H. / PIEPER, V. / TIEDGE, J.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 3. Auflage, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982
- [18] DITLEVSEN, O.; MADSEN, H. O.: Structural Reliability Methods, Technical University of Denmark, 2005

- [19] SCHNEIDER, J.: Sicherheit und Zuverlässigkeit im Bauwesen, Vieweg+Teubner Verlag, 1996
- [20] SACHS, L.: Angewandte Statistik, Springer-Verlag, 1999
- [21] MEYER, M.: Die Sicherheit der Bauwerke, Springer-Verlag Berlin, 1926
- [22] RACKWITZ, R.: Zuverlässigkeit und Lasten im konstruktiven Ingenieurbau, Teil 1: Zuverlässigkeitstheoretische Grundlagen, TU München 1993-2006
- [23] SCHUELLER, G.: Der Ingenieurbau, Teil Tragwerkszuverlässigkeit, Einwirkungen, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1996
- [24] EISENMANN, J., LEYKAUF, G.: Betonfahrbahnen, Verlag Ernst & Sohn, A. Wiley Company, 2003
- [25] FISCHER, L.: Sicherheitskonzepte für neue Normen, Zeitschrift Bautechnik, Heft 1999/1-12, Verlag Ernst & Sohn, 1999
- [26] REUTER, U.: Ermittlung des zeitabhängigen Sicherheitsniveaus nachträglich verstärkter Stahlbeton-Tragwerke unter Berücksichtigung von Fuzzy-Zufallsfunktionen, Diplomarbeit TU Dresden, 2003
- [27] SCHWUCHOW, R.: Probabilistische Zuverlässigkeits- und Sensitivitätsanalyse für schlanke Stahlbetonstützen auf Basis der Quasi-Monte Carlo Methode, Dissertation TU Cottbus, 2009
- [28] CURBACH, M.; WEILAND, S.: Das Antwort-Flächen -Verfahren, Vortrag 1. Dresdner 1. Probabilistik Symposium, 2003
- [29] PROSKE, D.; LIEBERWIRTH, P.; van GELDER, P.: Sicherheitsbeurteilung historischer Bogenbrücken, Sonderdruck zum 16. Dresdner Brückenbausymposium, 2006
- [30] BUCHER, C. G.: A fast and efficient response surface approach for structural reliability Problems, Structural Safety 7, 1990
- [31] SIKORA, M.; HOLICKY, M.: Competitive comparison of load combination models, 1<sup>st</sup> International Symposium on Uncertainty Modeling in Engineering, Prague 2011
- [32] HAIBACH, E.: Betriebsfestigkeit, Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung, VDI-Verlag, 2006
- [33] KESSLER-KRAMER, C.: Zugtragverhalten von Beton unter Ermüdungsbeanspruchung, Dissertation Uni Karlsruhe, 2002
- [34] PFANNER, D.: Zur Degradation von Stahlbetonbauteilen unter Ermüdungsbeanspruchung, Fortschrittsberichte VDI Nr.189, Ruhr-Universität Bochum, 2003
- [35] ZHANG, B.; WU, K.: Residual fatigue strength and stiffness of ordinary concrete under bending, Cement and Concrete Research, 1997
- [36] DIN EN 1992-1-1.: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetonbauwerken, Ausgabe 1.11, Beuth-Verlag, 2011
- [37] IBUK, HURSI: Ermüdungsverhalten von Beton unter Druckschwellbelastung, Dissertation RU Bochum, 2008
- [38] HOHBERG, R.: Zum Ermüdungsverhalten von Beton, Dissertation TU Berlin, 2004

- [39] RINNE, H.: Taschenbuch der Statistik, Verlag Harry Deutsch, 2008
- [40] GRÜNBERG, J.; GÖHLMANN, J.: Schädigungsberechnung an einem Spannbetonbauteil für eine Windenergieanlage unter mehrstufiger Ermüdung, Beton- und Stahlbetonbau 8/2006, Verlag Ernst & Sohn 2006
- [41] DIN EN 1992-1-1 Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln für den Hochbau (Ausgabe 1.11)
- [42] CHOI, S.; GRANDHI, R. V.; CANFIELD, A. C.: Reliability-based Structural Design, Springer-Verlag London 2007
- [43] MÖLLER, B.: Stochastik, Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken, Studienmaterial TU Dresden
- [44] AASHTO: Mechanistic-Empirical Pavement Design Guide, MEPDG, American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington DC, 7/2008
- [45] MELCHERS, R. E.: Structural Reliability Analysis and Prediction, Wiley & Sons, 2002
- [46] VERMA, A. K.; AJIT, S.; KARANKI, D. R.: Reliability and Safety Engineering, Springer Verlag, 2009
- [47] Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen: Richtlinien für die Standardisierung des Oberbaus von Verkehrsflächen, Ausgabe 2009 (RStO 12), FGSV 2012
- [48] FREUDENTHAL, A. M.: Safety and Probability of Structural Failure, Trans ASME, 121, 1956
- [49] CORNELL, C. A.: A Probability Based Structural Code. ACI-Journal, Vol.66, pp., 974-985
- [50] HASOFER, A. M.; LIND, N.C.: An Exact and Invariant First Order Reliability Format, Journal of Engineering Mechanics. Div. Proc. ASCE.100(EMI), pp. 111-121, 1974
- [51] BREITUNG, K. W.: (1974). Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 110, No. 3, 1984
- [52] VILLARET, ST.; RIWE, A.; ZANDER, U.; PICHOTTKA, ST.; EICKSCHEN, E.: Grundlagen für eine vergleichende Bewertung der Restsubstanz von Fahrbahnbefestigungen in Betonbauweise nach mehrjähriger Nutzung, Bundesanstalt für Straßenwesen Forschungsvorhaben, FE 04.0433/2009
- [53] UECKERMANN, A.: Bestimmung statischer und dynamischer Achslasten von Nutzfahrzeugen unter Berücksichtigung innovativer Fahrzeugkonzepte und Fahrwerkstechnologien zur Minderung statischer und dynamischer Radlasten, RWTH Aachen, 2012
- [54] UECKERMANN, A.: Integrale Bewertung der Ebenheit, RWTH Aachen, 2013
- [55] UECKERMANN, A.; OESER, M.: Ansatz für eine 3-D-Bewertung der Straßenebenheit auf Basis räumlicher Fahrzeugmodelle, Straße + Autobahn, Kirschbaum Verlag Bonn, 2014
- [56] OESER, M.: "3D-Unebenheiten" - Auswirkungen auf die dynamischen Achslasten, D-A-C-H-Tagung, Konstanz, 2013

- [57] EOM, I.; PARSONS, I. D.; HJELMSTAD, K.: Nonlinear Analysis of the Load Transfer Mechanism in Rigid Pavement Systems Considering Various Interface Conditions , University of Illinois, 2000
- [58] PETRYNA, Y.: Schädigung, Versagen und Zuverlässigkeit von Tragwerken des Konstruktiven Ingenieurbaus, Shaker Verlag, 2004

## Häufig verwendete Formelzeichen und Symbole

$E$  – Einwirkungen allgemein

$f()$  – Dichtefunktion einer Zufallsgröße

$F()$  – Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße

$f_{ctk}$  – charakteristische Betonzugfestigkeit

$f_{ctm}$  – mittlere Betonzugfestigkeit

$f_{ct, fat}$  – Betonzugfestigkeit des ermüdeten Betons

$F_L$  – Lebensdauervertelung

$D$  – Schädigung (bzgl. Miner-Regel)

$G()$  – Grenzzustandsfunktion im Originalraum

$H()$  – Grenzzustandsfunktion im Standardnormalraum

$h_d$  – Bemessungsdicke der Betondecke

$h_m$  – mittlere Dicke der Betondecke

$N_{fat}$  – Bruchlastwechselzahl

$P$  – Wahrscheinlichkeit allgemein

$P_f$  – Versagenswahrscheinlichkeit

$P_{fLF}$  – Versagenswahrscheinlichkeit an der Längsfuge

$P_{fQF}$  – Versagenswahrscheinlichkeit an der Querfuge

$R$  – Widerstände allgemein

$SV_{aj}$  – Anzahl der Achsübergänge im Jahr  $j$

$T$  – Ausfallzeitpunkt

$\mu$  – Erwartungswert der Normalverteilung (Mittelwert)

$\sigma$  – Standardabweichung, Spannung

$\Phi$  – Standardnormalverteilung