

Ableitung einer analytische Lösung für die Dämpfung einer Temperaturwelle in einem halboneindlichen Bauteil bei Randbedingung 3. Art

Luisa Sontag, Peter Häupl und Andreas Nicolai

Institut für Bauklimatik
Technische Universität Dresden
D-01062 Dresden, Germany

Zusammenfassung

Im Folgenden wird die analytische Lösung der eindimensionalen, instationären Wärmeleitungsgleichung mit einer Randbedingung 3. Art gegeben. Die Außentemperatur wird dabei als harmonische Schwingung angenommen. Abhängig von den materialspezifischen Eigenschaften des Bauteils (Wärmeleitfähigkeit, Rohdichte, spezifische Wärmekapazität) kommt es zur Dämpfung und zeitlichen Verschiebung der Temperaturwelle im Bauteil. Die analytische Lösung liefert den raum- und zeitaufgelösten Temperaturverlauf innerhalb des Bauteils.

Die analytische Lösung ist primär für die Kalibrierung und Validierung numerischer Approximationsverfahren relevant. Die zeitliche Verfügbarkeit von thermischer Speichermasse ist für die thermische Gebäude- und Raumsimulation von besonderer Wichtigkeit. Daher muss ein numerisches Berechnungsverfahren diese Prozesse gut abbilden können. Die hier gezeigte analytische Lösung kann daher zur Bewertung der Güte der gewählten numerischen Approximation verwendet werden. Zu diesem Zweck werden Ergebnisse beispielhaft für zwei getrennte Konstruktionen angegeben.

Inhaltsverzeichnis

1 Analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung	1
1.1 Allgemeiner Lösungsansatz	2
1.2 Randbedingung 3. Art	2
1.3 Zeitverlauf der Außenlufttemperatur	3
1.4 Lösung	3
2 Beispiel zur Berechnung eines instationären Temperaturfeldes bei sich periodischer ändernder Außenlufttemperatur	6
2.1 Ausgangsparameter	6
2.2 Berechnungsgleichungen	6
2.3 Ergebnisse	6
3 Referenzergebnisse	8

1 Analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung (1)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

- T : Temperatur [K]
- x : Ortskonstante [m]
- t : Zeitkonstante [s]
- λ : Wärmeleitfähigkeit [W/mK]
- ρ : Rohdichte [kg/m³]
- c : Spezifische Wärmekapazität [J/kgK]

kann durch Annahme konstanter Koeffizienten und Einführung der Temperaturleitfähigkeit a in Normalform geschrieben (2) werden.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{mit} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2)$$

a : Temperaturleitfähigkeit [m²/s]

1.1 Allgemeiner Lösungsansatz

Ausgangspunkt für die Berechnung des räumlichen und zeitlichen Temperaturfeldes bei periodischer Belastung bildet der folgende allgemeine Lösungsansatz aus der Standardliteratur für die Wärmeleitungsgleichung (3).

$$T(x, t) = T_0 e^{(-\sqrt{\frac{1}{2}p})x} \cos\left(ap^2 t - \sqrt{\frac{1}{2}p} px\right) \quad (3)$$

T_0 : Temperaturamplitude an der Bauteiloberfläche [K]
 p : Integrationsvariable

Es werden die erste Zeitableitung (4) und zweite Ortsableitung (5) gebildet.

1. Zeitableitung $T_t = \frac{dT}{dt}$:

$$T_t(x, t) = -apT_0 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}px} \sin\left(ap^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}px\right) \quad (4)$$

1. Ortsableitung $T_x = \frac{dT}{dx}$:

$$T_x(x, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}pT_0 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}px} \cos\left(ap^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}px\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}pT_0 \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}px} \sin\left(ap^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}px\right)$$

2. Ortsableitung $T_{xx} = \frac{d^2T}{dx^2}$:

$$T_{xx}(x, t) = -p^2 T_0 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}px} \sin\left(ap^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}px\right) \quad (5)$$

Mit diesen Ableitungen wird die Differentialgleichung erfüllt.

$$\underbrace{-ap^2 T_0 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}px} \sin\left(ap^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}px\right)}_{T_t(x, t)} = a \left(\underbrace{-p^2 T_0 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}px} \sin\left(ap^2 t - \frac{\sqrt{2}}{2}px\right)}_{T_{xx}(x, t)} \right)$$

1.2 Randbedingung 3. Art

Die spezielle Lösung kann für ein halbumendliches Bauteil mit Randbedingung 3. Art bestimmt werden. Für die übergende Wärmestromdichte an der Bauteiloberfläche ($x = 0$) gilt Gleichung (6).

$$h [T_L(t) - T(0, t)] = \left(-\lambda \frac{dT}{dx}\right)_{x=0} \quad (6)$$

h : Wärmeübergangskoeffizient [W/m²K]
 T_L : Raum- bzw. Außenluft [K]
 $T(0, t)$: Temperatur an der Bauteiloberfläche [K]

1.3 Zeitverlauf der Außenlufttemperatur

Die Anregung des Temperaturfelds resultiert aus einer harmonischen Schwingung der angrenzenden Raum- bzw. Außenluft T_L (7).

$$T_L(t) = \Delta T_L \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta t}t\right) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta T_L &: \text{Amplitude [K]} \\ \Delta t &: \text{Periodendauer [s]} \end{aligned}$$

Es ist für die Bestimmung der Lösung ausreichend, von einer Cosinuswelle ohne explizit angegebener Temperaturverschiebung auszugehen, da sich eine solche Lösung einfach durch Addition dieser konstanten Temperaturverschiebung/Grundtemperatur in der Randbedingung wie in der Temperaturverteilung ergibt (siehe auch Beispiel in Abschnitt 2.2).

1.4 Lösung

Die zeitabhängige Temperaturverteilung im Bauteil entspricht bei Randbedingung 3. Art und harmonischem Außentemperaturverlauf dem Lösungsansatz (3) mit einer zusätzlichen Phasenverschiebung ϕ (8).

$$T(x, t) = \Delta T_s e^{(-\sqrt{\frac{1}{2}p})x} \cos\left(ap^2t - \sqrt{\frac{1}{2}p}x - \phi\right) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta T_s &: \text{Amplitude der Temperaturschwankung an der Bauteiloberfläche [K]} \\ \phi &: \text{Phasenverschiebung [s]} \end{aligned}$$

In der Randbedingung 3. Art erscheint die erste Ortsableitung $T_x = \frac{dT}{dx}$ der Temperaturverteilungsfunktion, welche für den Lösungsansatz (8) bestimmt wird (Gleichung 9).

$$T_x(x, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}p\Delta T_s e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}px} \cos\left(ap^2t - \frac{\sqrt{2}}{2}px - \phi\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}p\Delta T_s e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}px} \sin\left(ap^2t - \frac{\sqrt{2}}{2}px - \phi\right) \quad (9)$$

Die Oberflächentemperatur (10) und die Raumbewertung der Temperaturverteilung (11) werden an der Bauteiloberfläche ($x = 0$) ausgewertet.

$$T(0, t) = \Delta T_s \cos(ap^2t - \phi) \quad (10)$$

$$T_x(0, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}p\Delta T_s \cos(ap^2t - \phi) + \frac{\sqrt{2}}{2}p\Delta T_s \sin(ap^2t - \phi) \quad (11)$$

Die Gleichungen (7), (10) und (11) können nun in die Gleichung (6) für die Wärmestromdichte an der Bauteiloberfläche eingesetzt werden:

$$h \left[\Delta T_L \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta t}t\right) - \Delta T_s \cos(ap^2t - \phi) \right] = -\lambda \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}p\Delta T_s \cos(ap^2t - \phi) + \frac{\sqrt{2}}{2}p\Delta T_s \sin(ap^2t - \phi) \right]$$

Um die Winkelfunktionen ineinander überführen zu können, setzen wir:

$$\begin{aligned} ap^2 &= \frac{2\pi}{\Delta t} \\ p &= \sqrt{\frac{2\pi}{a\Delta t}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}p &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{a\Delta t}} = \sqrt{\frac{\pi}{a\Delta t}} = r \end{aligned}$$

wobei r zur Verbesserung der Lesbarkeit eingeführt wird. Daraus folgt

$$h \left[\Delta T_L \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) - \Delta T_s \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t - \phi \right) \right] = -\lambda \left[-r \Delta T_s \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t - \phi \right) + r \Delta T_s \sin \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t - \phi \right) \right]$$

und nach Umstellen und Ausklammern ergibt sich Gleichung (12).

$$\begin{aligned} \Delta T_L h \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) &= h \Delta T_s \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t - \phi \right) + \lambda r \Delta T_s \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t - \phi \right) - \lambda r \Delta T_s \sin \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t - \phi \right) \\ \Delta T_L h \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) &= \Delta T_s \left[(h + \lambda r) \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t - \phi \right) - \lambda r \sin \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t - \phi \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Durch die Anwendung von Additionstheoremen wird die Gleichung (12) in Gleichung 13 umgeformt.

$$\begin{aligned} \Delta T_L h \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) &= \Delta T_s \left[(h + \lambda r) \left(\cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) \cos \phi + \sin \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) \sin \phi \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda r \left(\sin \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) \cos \phi - \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) \sin \phi \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Nun werden die Terme $\cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right)$ und $\sin \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right)$ separiert, wodurch zwei Bestimmungsgleichungen generiert werden.

1. Bestimmungsgleichung:

$$\Delta T_L \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) = \Delta T_s \left(1 + \frac{\lambda r}{h} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) \cos \phi + \Delta T_s \frac{\lambda r}{h} \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) \sin \phi \quad (14)$$

2. Bestimmungsgleichung:

$$0 = \Delta T_s \left(1 + \frac{\lambda r}{h} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) \sin \phi - \Delta T_s \frac{\lambda r}{h} \sin \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right) \cos \phi \quad (15)$$

Aus der 2. Bestimmungsgleichung (15) kann die Phasenverschiebung ϕ berechnet werden (16).

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta T_s \left(1 + \frac{\lambda r}{h} \right) \sin \phi - \Delta T_s \frac{\lambda r}{h} \cos \phi \\ &= \left(1 + \frac{\lambda r}{h} \right) \sin \phi - \frac{\lambda r}{h} \cos \phi \\ &= \left(1 + \frac{\lambda r}{h} \right) \tan \phi - \frac{\lambda r}{h} \\ \tan \phi &= \frac{\frac{\lambda r}{h}}{1 + \frac{\lambda r}{h}} \end{aligned} \quad (16)$$

Hilfreich für die weitere Lösung ist die Substitution

$$A = \frac{\lambda r}{h}$$

welche eingesetzt in Gleichung (16) eine verkürzte Darstellung der Phasenverschiebung ϕ (17) ergibt.

$$\tan \phi = \frac{A}{1 + A} \quad (17)$$

Aus der 1. Bestimmungsgleichung (14) wird anschließend die Temperaturamplitude ΔT_s an der Bauteiloberfläche ermittelt. Gleichung (14) wird zuerst durch $\cos \left(\frac{2\pi}{\Delta t} t \right)$ dividiert, dann wird die Substitution A eingeführt und anschließend wird die Gleichung umgestellt.

$$\begin{aligned} \Delta T_L &= \Delta T_s \left(1 + \frac{\lambda r}{h} \right) \cos \phi + \Delta T_s \frac{\lambda r}{h} \sin \phi \\ \Delta T_s &= \frac{\Delta T_L}{(1 + A) \cos \phi + A \sin \phi} \end{aligned}$$

Die Gleichung wird quadriert

$$\Delta T_s^2 = \frac{\Delta T_L^2}{[(1+A)\cos\phi + A\sin\phi]^2}$$

unter dem Bruch ausmultipliziert und zusammengefasst.

$$\begin{aligned} \Delta T_s^2 &= \frac{\Delta T_L^2}{(1+A+A^2)\cos^2\phi + A^2\sin^2\phi + (1+A)A\cos\phi\sin\phi} \\ &= \frac{\Delta T_L^2}{(1+A)\cos^2\phi + A^2(\underbrace{\cos^2\phi + \sin^2\phi}_{=1}) + (1+A)A\cos\phi\sin\phi} \\ &= \frac{\Delta T_L^2}{\cos^2\phi \left[1 + A + \frac{A^2}{\cos^2\phi} + (1+A)A\tan\phi \right]} \end{aligned} \quad (18)$$

Mit Hilfe der Identität (19)

$$\frac{1}{\cos^2\phi} = 1 + \tan^2\phi \quad (19)$$

und Anwendung der binomischen Formel verkürzt sich Gleichung (18) zu

$$\begin{aligned} \Delta T_s^2 &= \frac{\Delta T_L^2}{\cos^2\phi [1 + A + A^2(1 + \tan^2\phi) + (1+A)A\tan\phi]} \\ &= \frac{\Delta T_L^2}{\cos^2\phi [(1+A)^2 + (1+A)A\tan\phi + A^2\tan^2\phi]} \\ &= \frac{\Delta T_L^2}{\cos^2\phi (1 + A + A\tan\phi)^2} \end{aligned}$$

und durch erneutes Anwenden der Identität (19) zu

$$\Delta T_s^2 = \frac{\Delta T_L^2 (1 + \tan^2\phi)}{(1 + A + A\tan\phi)^2}$$

Nun wird die Gleichung für die Phasenverschiebung (17) eingesetzt

$$\begin{aligned} \Delta T_s^2 &= \Delta T_L^2 \frac{1 + \frac{A^2}{(1+A)^2}}{\left(1 + A + A\frac{A}{1+A}\right)^2} \\ &= \Delta T_L^2 \frac{\frac{(1+A)^2 + A^2}{(1+A)^2}}{\left(\frac{(1+A)^2 + A^2}{1+A}\right)^2} \\ &= \Delta T_L^2 \frac{(1+A)^2 + A^2}{((1+A)^2 + A^2)^2} \\ &= \frac{\Delta T_L^2}{(1+A)^2 + A^2} \end{aligned}$$

Durch Rücksubstitution und Ziehen der Quadratwurzel ergibt sich damit für die Temperaturamplitude ΔT_s an der Bauteiloberfläche:

$$\Delta T_s = \frac{\Delta T_L}{\sqrt{1 + \frac{2\lambda r}{h} + 2\left(\frac{\lambda r}{h}\right)^2}}$$

Für den zeitabhängigen Temperaturverlauf innerhalb des Materials ergibt sich somit Gleichung (20).

$$T(x, t) = \frac{\Delta T_L}{\sqrt{1 + \frac{2\lambda r}{h} + 2\left(\frac{\lambda r}{h}\right)^2}} e^{-rx} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta t}t - rx - \phi\right) \quad \text{mit } r = \sqrt{\frac{\pi\rho c}{\Delta t\lambda}} \quad (20)$$

2 Beispiel zur Berechnung eines instationären Temperaturfeldes bei sich periodischer ändernder Außenlufttemperatur

2.1 Ausgangsparameter

Als Beispiel wird das instationäre Temperaturfeld in zwei verschiedenen Materialien bei periodischer Tagesschwankung der Lufttemperatur zwischen 18 °C und 30 °C berechnet. Dabei werden folgende Parameter gewählt:

		Material 1	Material2
ΔT_L	: Temperaturamplitude	6 K	6 K
Δt	: Periodendauer	24 h	24 h
T_0	: Grundtemperatur	24 °C	24 °C
h	: Wärmeübergangskoeffizient	15 W/m ² K	8 W/m ² K
λ	: Wärmeleitfähigkeit	0,75 W/mK	2,1 W/mK
ρ	: Rohdichte	1400 kg/m ³	2100 kg/m ³
c	: spezifische Wärmekapazität	850 J/kgK	850 J/kgK

Hilfsgrößen:

$$r_1 = \sqrt{\frac{\pi \rho c}{\Delta t \lambda}} = \sqrt{\frac{3,14157 \cdot 1400 \cdot 850}{24 \cdot 3600 \cdot 0,75}} = 7,596$$

$$\phi_1 = \arctan\left(\frac{\frac{\lambda r}{h}}{1 + \frac{\lambda r}{h}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{0,75 \cdot 7,596}{15}}{1 + \frac{0,75 \cdot 7,596}{15}}\right) = 0,269$$

$$r_2 = 5,559$$

$$\phi_2 = 0,536$$

2.2 Berechnungsgleichungen

Die folgenden Berechnungsgleichungen werden für die Berechnung der Außenlufttemperatur und Bauteiltemperatur mit der Grundtemperatur T_0 verwendet.

$$T_L(t) = \Delta T_L \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta t}t\right) + T_0$$

$$T(x,t) = \frac{\Delta T_L}{\sqrt{1 + \frac{2\lambda r}{h} + 2\left(\frac{\lambda r}{h}\right)^2}} e^{-rx} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta t}t - rx - \phi\right) + T_0$$

2.3 Ergebnisse

In Abbildung 1 ist die analytische Lösung des Temperaturverlaufs an verschiedenen Stellen der Konstruktion zu sehen. Abbildung 2 zeigt die räumliche Temperaturverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten. Dabei ist deutlich die Temperaturdämpfung und damit verbunden die Phasenverschiebung mit zunehmender Schichtdicke zu erkennen.

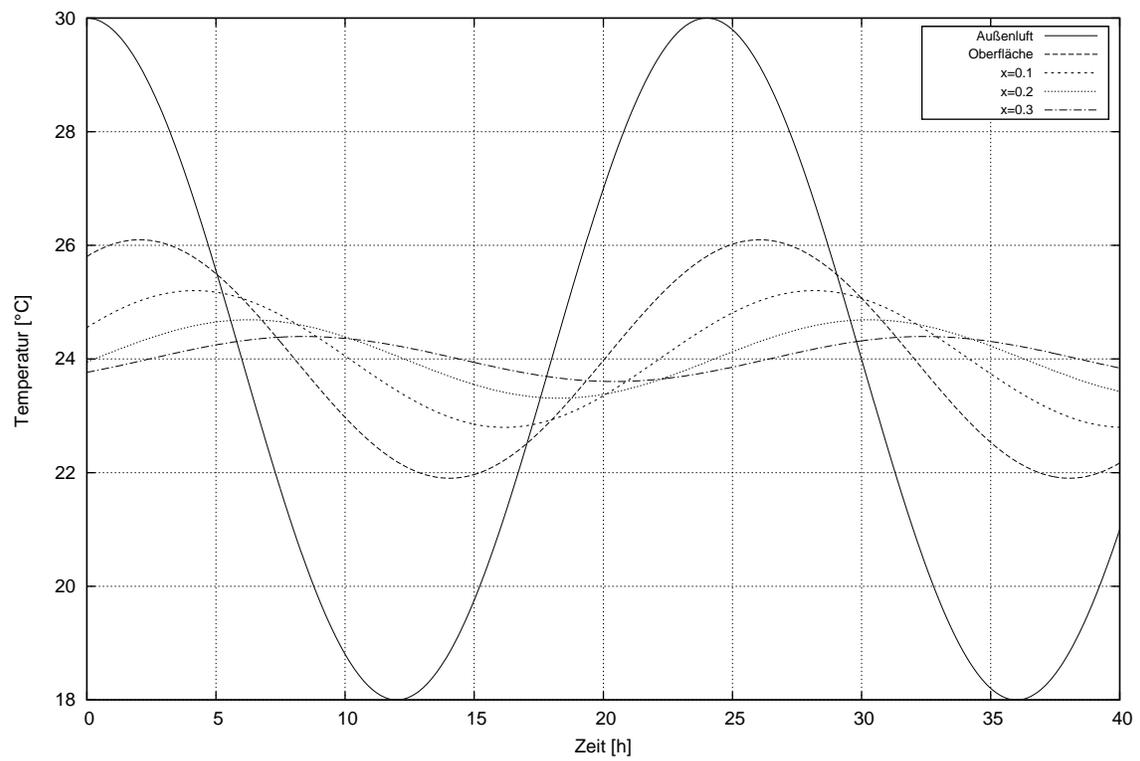
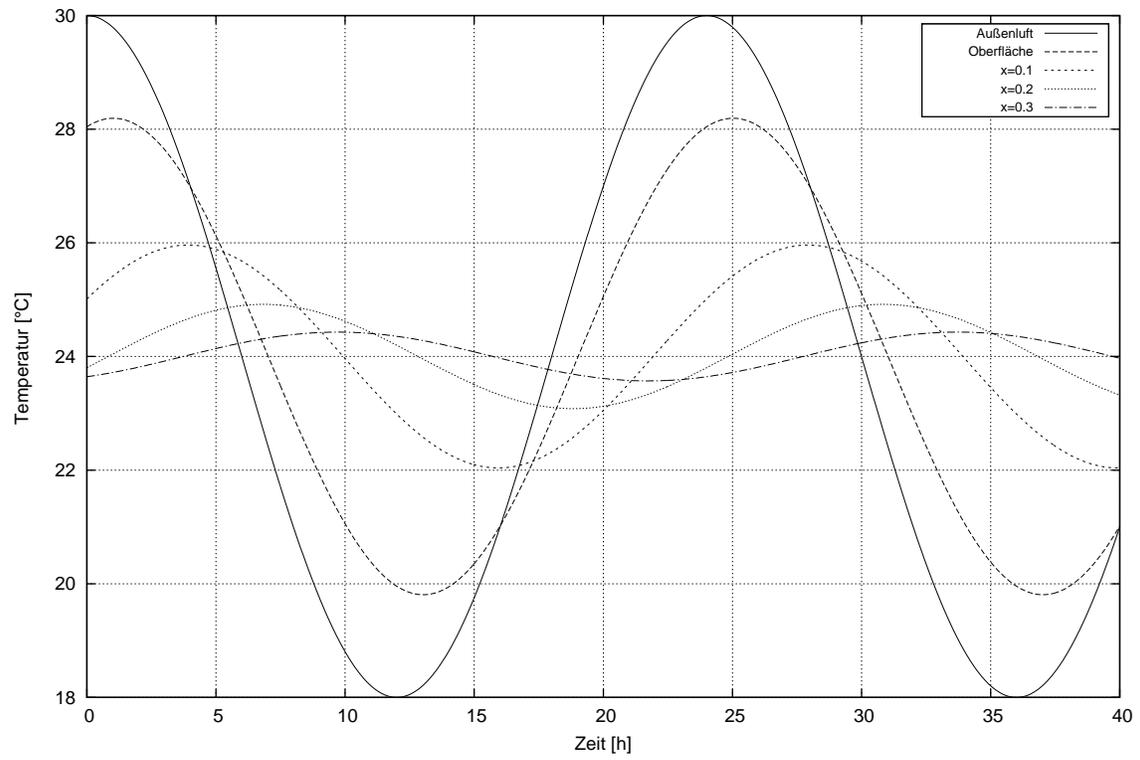


Abbildung 1: Zeitverlauf der Temperatur in unterschiedlicher Bauteiltiefe; Material 1 (oben), Material 2 (unten)

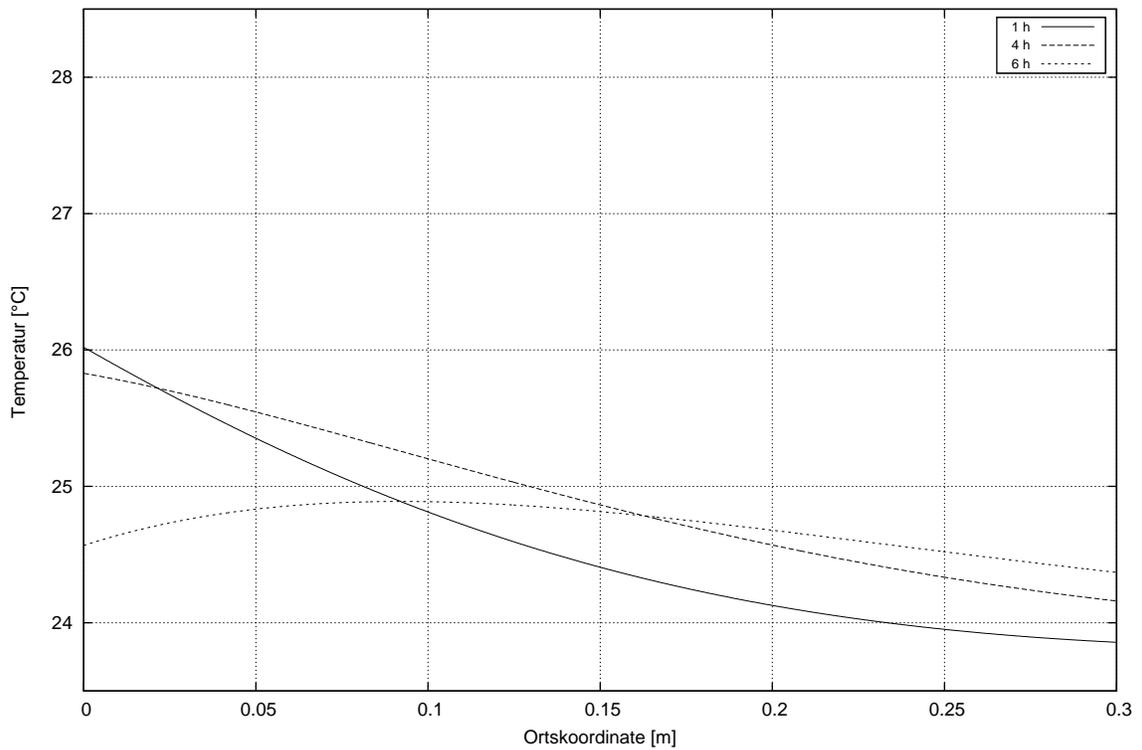
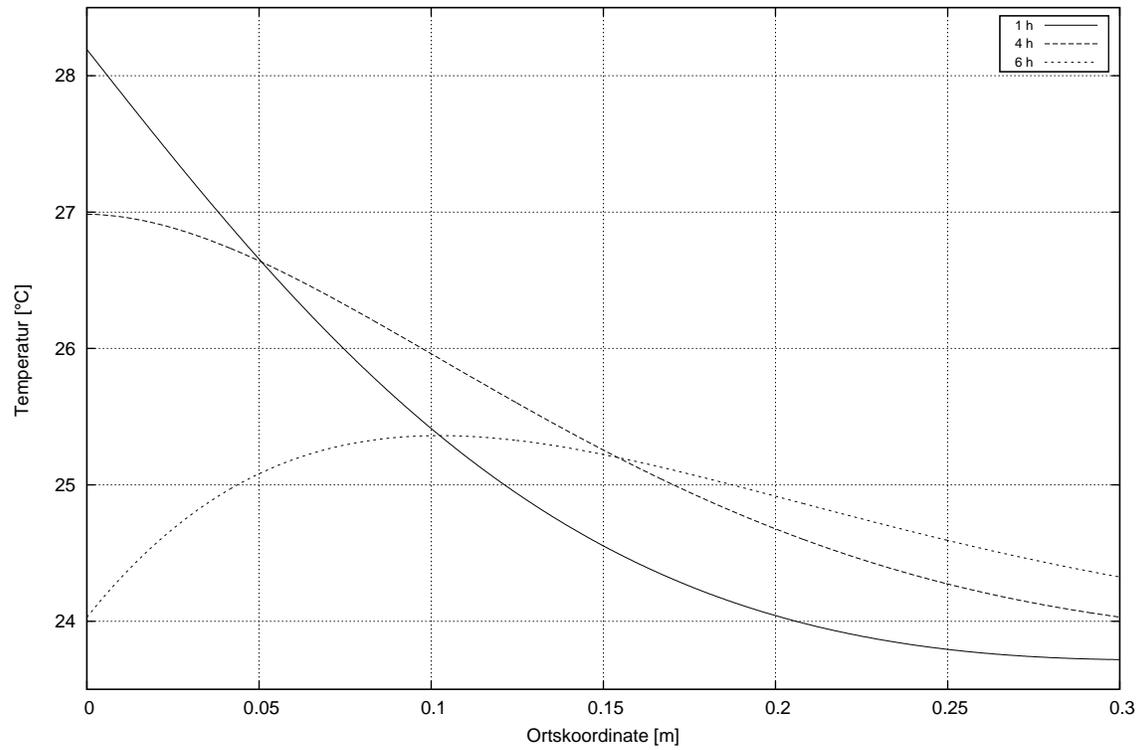


Abbildung 2: Räumlicher Verlauf der Temperatur zu verschiedenen Zeitpunkten; Material 1 (oben), Material 2 (unten)

3 Referenzergebnisse

Zur Validierung numerischer Simulationsprogramme für die instationäre Wärmeleitung werden in Tabelle 1 Zahlenwerte angegeben. Die Ergebnisse entsprechen dem Parametersatz aus obigem Beispiel für Material 1.

t in h	x in m			
	0,0	0,1	0,2	0,3
0	28,04	25,01	23,80	23,64
1	28,19	25,41	24,04	23,72
4	26,98	25,96	24,68	24,03
7	24,03	25,36	24,92	24,32
12	19,96	22,99	24,20	24,36
16	21,02	22,04	23,32	23,97
20	25,06	23,05	23,13	23,61

Tabelle 1: Numerische Ergebnisse für Material 1

Beim Test instationärer Simulationsprogramme ist der Einschwingvorgang aus der Anfangsbedingungen zu berücksichtigen. Ausgehend von einer gleichverteilten Anfangstemperatur von 24°C sollte nach einigen Tagen die Lösung eingeschwungen sein und mit den Referenzwerten aus Tabelle 1 übereinstimmen.