

Модел. и анализ информ. систем. Т. 20, № 2 (2013) 157–165

© Парфенов П.Г., 2013

УДК 519.68:[681.5137+612.8.001.57+007.51/52]

О поворотах цифровых изображений

Парфенов П.Г.¹

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

e-mail: parfenov@uniyar.ac.ru

получена 23 марта 2013

Ключевые слова: цифровое изображение, прямоугольная решетка, гексагональная решетка, поворот изображения, эйлерова характеристика, характеристический набор коэффициентов

Рассматриваются изображения, построенные на основе прямоугольной и гексагональной решеток. Для изображений на прямоугольной решетке предложена формула, дающая приближенные значения компонент характеристического набора коэффициентов при повороте на произвольный угол по методу ближайшего соседа. Характеристические наборы представлены в виде диаграмм, произведена экспериментальная оценка погрешностей. Подтверждено хорошее соответствие предсказанных значений компонент характеристических наборов и полученных экспериментально. Для изображений, построенных на основе гексагональной решетки, предложена аналогичная формула для приближения компонент характеристического набора для поворота на произвольный угол, при этом была применена модификация метода ближайшего соседа для сохранения связности, так как обнаружилось ее нарушение в некоторых случаях на гексагональной решетке. На основе четырехпиксельных фрагментов строятся диаграммы, которые демонстрируют хорошее согласование предсказанных значений и полученных в эксперименте. Определена система трехпиксельных гексагональных фрагментов, для которой доказана теорема об эйлеровой характеристике и предложены аналитические выражения, которые позволяют избежать экспериментального нахождения характеристических наборов коэффициентов для всех возможных опорных углов. Их использование требует производить только один такой эксперимент.

В настоящей работе изучается вопрос о поведении характеристического набора коэффициентов цифровых изображений, построенных на основе прямоугольной и гексагональной решеток (см., например, [1]) при повороте изображений на произвольный угол. Понятие характеристического набора коэффициентов, тесно связанное с эйлеровой характеристикой, в том виде, в котором оно используется в

¹Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053.

настоящей заметке, было введено в работе [2]. Этот набор дает существенную информацию о геометрических и топологических свойствах изображений. Отметим, что, по существу, хоть и в неявном виде, такого рода набор использовался в работе Дуды, на которого ссылается Прэтт [3]. Грэй [4] также, исходя фактически из этого набора, приводит формулы для вычисления эйлеровой характеристики и для оценки числа связных компонент изображения. Понятие характеристического набора коэффициентов использовалось в работах [2, 5–7], полученные результаты дают основание считать это понятие важным инструментом для решения задач различения и идентификации изображений.

Начнем с изложения результатов для изображений, построенных на основе прямоугольной решетки. Исходное изображение может быть представлено в виде матрицы $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, со значениями a_{ij} либо 0, либо 1, то есть изображение черно-белое, а также может быть интерпретировано в виде прямоугольной решетки с соответствующим образом закрашенными пикселями. Поворот такого рода изображений будем осуществлять по методу ближайшего соседа, а именно, совокупность центров пикселей цветности 1 как подмножество декартовой плоскости поворачивается на соответствующий угол, а затем на решетке закрашиваются пиксели, центры которых являются ближайшими к центрам повернутого изображения. Для визуального анализа изменений характеристического набора будем изображать его в виде графика на плоскости, где по горизонтальной оси отмечаются типы фрагментов размера 2×2 в соответствии с их упорядочением [2], а по вертикальной оси будет отмечаться их количество. Назовем этот график диаграммой характеристического набора. Ключевой идеей нашего подхода является то, что для решения поставленного вопроса требуется информация о характеристических наборах коэффициентов двух изображений, а именно, исходного и повернутого на угол 45° . Зная характеристические наборы коэффициентов для этих двух изображений, легко построить характеристические наборы коэффициентов для поворотов исходного изображения на углы кратные 45° . Будем называть такие углы опорными. Для произвольного угла α существуют два опорных угла α_0 и α_1 , различающихся на 45° , таких, что $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$.

Проведенные компьютерные эксперименты позволили предложить в значительной степени эвристическую формулу для характеристического набора коэффициентов изображения, повернутого на угол α :

$$k(s) = k_0(s) \cdot (1 - a) + k_1(s) \cdot a + \theta_s, \quad (1)$$

где $k(s)$ – количество прямоугольных фрагментов типа s для изображения, повернутого на угол α , $s = 0, 1, \dots, 15$;

$k_0(s)$ – количество прямоугольных фрагментов типа s для изображения, повернутого на опорный угол α_0 , $s = 0, 1, \dots, 15$;

$k_1(s)$ – количество прямоугольных фрагментов типа s для изображения, повернутого на опорный угол α_1 , $s = 0, 1, \dots, 15$;

θ_s – соответствующая погрешность, $s = 0, 1, \dots, 15$;

a – коэффициент, который вычисляется следующим образом: $a = \frac{\alpha - \alpha_0}{45^\circ}$, где α – угол поворота изображения.

Ниже в таблице приведены типичные результаты компьютерного эксперимента для поворотов символов латинского алфавита при разрешении 50×50 пикселей.

I	II	III	IV	V
		312		<p>p1 = 8,0000 p2 = 38,0000 p3 = 10,0000 r1 = 0,0033 r2 = 0,0158 r3 = 0,0042</p>
		34		<p>p1 = 8,5440 p2 = 38,0000 p3 = 6,0000 r1 = 0,0036 r2 = 0,0158 r3 = 0,0025</p>
		281		<p>p1 = 9,3808 p2 = 39,0000 p3 = 11,0000 r1 = 0,0039 r2 = 0,0162 r3 = 0,0046</p>

Обозначения по столбцам: I – Исходное изображение. II – Повернутое изображение. III – Угол поворота. IV – Диаграммы характеристического набора повернутого изображения и предсказанного характеристического набора. V – Расстояния между характеристическим набором повернутого изображения и предсказанным характеристическим набором.

Для оценки качества предсказанного приближения $\tilde{k}(s) = k_0(s) \cdot (1 - a) + k_1(s) \cdot a$, $s = 0, 1, \dots, 15$, используются расстояния, определенные на множестве характеристических наборов [6]. В применении к введенным выше обозначениям получаем:

$$p_1 = \sqrt{\sum_{s=0}^{15} (k(s) - \tilde{k}(s))^2}, \tag{2}$$

$$p_2 = \sum_{s=0}^{15} |k(s) - \tilde{k}(s)|, \tag{3}$$

$$p_3 = \max\{|k(s) - \tilde{k}(s)| : s = 0, 1, \dots, 15\}. \tag{4}$$

Эти расстояния зависят от величины разрешения, их максимально возможные значения быстро растут при росте разрешения и, следовательно, плохо иллюстрируют

близость двух изображений. Более наглядными представляются приведенные расстояния:

$$rp_i = \frac{1}{(m-1)(n-1)} p_i, i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Для произвольного разрешения минимальные и максимальные значения этих приведенных расстояний удовлетворяют неравенствам: $0 \leq rp_1 \leq \sqrt{2}$; $0 \leq rp_2 \leq 1$; $0 \leq rp_3 \leq 1$. Для расстояния rp_1 результаты работы алгоритма на символах латинского алфавита имеют следующие показатели:

- среднее расстояние – 0.003,
- минимальное расстояние – 0.0012,
- максимальное расстояние – 0.0049.

Данные результаты показывают хорошее качество предсказания характеристических наборов коэффициентов символов, подвергнутых повороту.

Приведенные диаграммы также показывают хорошее покомпонентное согласование предсказанного характеристического набора и характеристического набора для реально осуществленных поворотов символов в эксперименте.

Переходим к результатам, касающимся поведения характеристического набора коэффициентов при повороте на гексагональной решетке.

Возможность рассмотрения цифровых изображений на гексагональной решетке отмечалась еще в работах [3, 8, 9]. Пиксели интерпретируются с помощью правильных шестиугольников гексагональной решетки, для черно-белого изображения возможны значения цветности либо 0, либо 1. Характеристический набор такого изображения строится по системе гексагональных фрагментов, порядок типов фрагментов принимаем согласно работе [7].

Аналогично результатам на прямоугольной решетке характеристический набор коэффициентов изображений, построенных на основе гексагональной решетки, показал хорошие возможности как инструмент различения и идентификации изолированных алфавитно-цифровых символов. Под диаграммой характеристического набора изображения, построенного на основе гексагональной решетки, аналогично диаграммам, рассмотренным выше, будем понимать график на плоскости, где по горизонтальной оси отмечаются типы гексагональных фрагментов в соответствии с их упорядочением, а по вертикальной оси отмечается их количество.

Отметим особенность поворота на гексагональной решетке по методу ближайшего соседа, которая обнаружилась в самом начале компьютерного моделирования таких поворотов. Выяснилось, что во многих случаях применения этого метода при повороте происходит нарушение связности повернутого изображения, поэтому пришлось модифицировать алгоритм данного метода, включив в него этап восстановления связности повернутого изображения с помощью добавления соответствующих пикселей.

Так же как и для прямоугольной решетки, оказывается достаточно информации о характеристических наборах коэффициентов для двух положений изображения, а именно, исходного изображения и изображения, повернутого на угол 60° в случае гексагональной решетки. При этом двум характеристическим наборам коэффициентов однозначным образом строятся характеристические наборы для всех изображений, полученных из исходного поворотом на углы, кратные 60° . Для произвольного угла β существуют два опорных угла β_0 и β_1 , различающихся на 60° , таких, что

$\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$. Оказалось, что в полной аналогии со случаем прямоугольной решетки для поворотов на угол β на гексагональной решетке имеет место соотношение:

$$g(s) = g_0(s) \cdot (1 - b) + g_1(s) \cdot b + \theta_s, \tag{6}$$

где $g(s)$ – количество гексагональных фрагментов типа s для изображения, повернутого на угол β , $s = 0, 1, \dots, 15$;

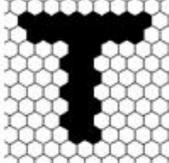
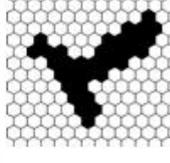
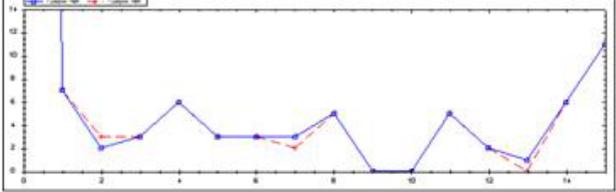
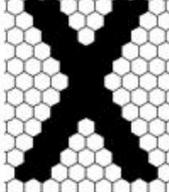
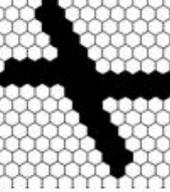
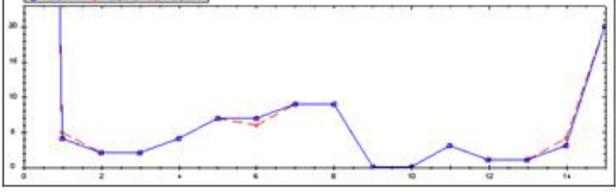
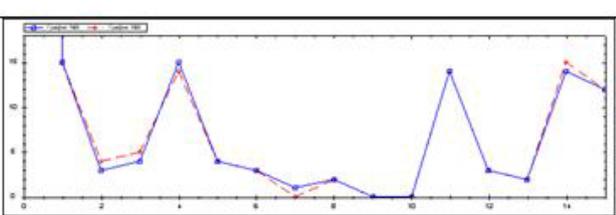
$g_0(s)$ – количество гексагональных фрагментов типа s для изображения, повернутого на опорный угол β_0 , $s = 0, 1, \dots, 15$;

$g_1(s)$ – количество гексагональных фрагментов типа s для изображения, повернутого на опорный угол β_1 , $s = 0, 1, \dots, 15$;

θ_s – соответствующая погрешность, $s = 0, 1, \dots, 15$;

b – коэффициент, который вычисляется следующим образом: $b = \frac{\beta - \beta_0}{60^\circ}$, где β -угол поворота изображения.

Ниже в таблице приведены типичные результаты эксперимента.

I	II	III	IV
		123	
		55	
		246	

Обозначения по столбцам: I – Исходное изображение. II – Повернутое изображение. III – Угол поворота. IV – Диаграммы характеристического набора повернутого изображения и предсказанного характеристического набора.

К сожалению, этот применявшийся ранее набор фрагментов имеет серьезный недостаток, а именно даже при углах поворота, кратных 120° , фрагменты не сохраняют свою форму, а в некоторых случаях распадаются на несвязные компоненты. В связи с этим предлагается в качестве гексагонального фрагмента изображения рассмотреть совокупность трех примыкающих пикселей, которые изображены в таблице ниже.

G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7
K_0	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7

G_8	G_9	G_{10}	G_{11}	G_{12}	G_{13}	G_{14}	G_{15}
K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}

Всего существует 16 различных типов фрагментов, обозначенных символами G_i , $i = 0, \dots, 15$, и расположенных в первой строке двойной таблицы. Во второй строке представлен геометрический аналог соответствующего типа, а третья строка указывает число фрагментов типа G_i , $i = 0, \dots, 15$, таких, что G_i содержится в изображении. Этот набор неотрицательных целых чисел K_i , $i = 0, \dots, 15$, будем называть характеристическим набором коэффициентов изображения A , построенным по системе фрагментов G_i , $i = 0, \dots, 15$. Ясно, что предлагаемые трехпиксельные фрагменты остаются фрагментами при поворотах на углы, кратные 120° . Кроме этого, полноценность данного набора подтверждает и следующая теорема.

Теорема 1. *Существует функция $F(G)$, определенная на трехпиксельных гексагональных фрагментах, такая что для любого изображения A , построенного на основе гексагональной решетки, верно*

$$\chi(A) = \sum_{G \subseteq A} F(G). \quad (7)$$

Доказательство. Положим для удобства $F(G_i) = \gamma_i$. Применим сформулированное выше соотношение к изображениям, порожденным трехпиксельными гексагональными фрагментами, что даст следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 + \gamma_8 = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_9 + \gamma_{10} + \gamma_{11} = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 + \gamma_4 + 2\gamma_9 + \gamma_{10} + \gamma_{11} + \gamma_{14} = 1 \\ 2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_9 + 2\gamma_{10} + \gamma_{11} + \gamma_{12} = 1 \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 + \gamma_7 + \gamma_9 + \gamma_{10} + \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} = 1 \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_6 + \gamma_9 + \gamma_{10} + 2\gamma_{11} + \gamma_{13} = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + 2\gamma_9 + 2\gamma_{10} + 2\gamma_{11} + \gamma_{15} = 1 \end{array} \right.$$

Общим решением этой системы будет восьмипараметрическое семейство функций $F(G_i)$:

$$\begin{aligned}\gamma_0 = F(G_0) &= 0; \gamma_1 = F(G_1) = a; \gamma_2 = F(G_2) = b; \gamma_3 = F(G_3) = c; \gamma_4 = F(G_4) = d; \\ \gamma_5 = F(G_5) &= e; \gamma_6 = F(G_6) = f; \gamma_7 = F(G_7) = 1 - a - b - c + f + d + e; \gamma_8 = F(G_8); \\ \gamma_9 = F(G_9) &= g; \gamma_{10} = F(G_{10}) = h; \gamma_{11} = F(G_{11}) = 1 - a - b - c - g - h; \\ \gamma_{12} = F(G_{12}) &= -a - e - h; \gamma_{13} = F(G_{13}) = -1 + a + c - f + g + h; \\ \gamma_{14} = F(G_{14}) &= -c - d - g; \gamma_{15} = F(G_{15}) = -1 + a + b + c - d - e - f.\end{aligned}$$

Получив значения функции F на трехпиксельных фрагментах, можно легко, пользуясь теоремой суммы для эйлеровой характеристики, продолжить предлагаемую формулу на множество всех изображений, что завершает доказательство теоремы.

В общем виде эйлерову характеристику изображения A можно представить в виде: $\chi(A) = aK_1 + bK_2 + cK_3 + dK_4 + eK_5 + fK_6 + (1 - a - b - c + f + d + e)K_7 + gK_9 + hK_{10} + (1 - a - b - c - g - h)K_{11} + (-a - e - h)K_{12} + (-1 + a + c - f + g + h)K_{13} + (-c - d - g)K_{14} + (-1 + a + b + c - d - e - f)K_{15}$.

Обозначим через $G_i(\varphi)$ результат поворота фрагмента G_i на угол φ . Для поворотов на углы, кратные 120° , верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}G_i(120^\circ n) &= G_i; n \in Z; i = 0, 7, 8, 15. \\ G_i(120^\circ + 360^\circ n) &= G_{i+1}; n \in Z; i = 1, 2, 4, 5, 9, 10, 12, 13. \\ G_i(120^\circ + 360^\circ n) &= G_{i-2}; n \in Z; i = 3, 6, 11, 14. \\ G_i(240^\circ + 360^\circ n) &= G_{i+2}; n \in Z; i = 1, 4, 9, 12. \\ G_i(240^\circ + 360^\circ n) &= G_{i-1}; n \in Z; i = 2, 3, 5, 6, 10, 11, 13, 14. \\ G_i(360^\circ n) &= G_i; n \in Z; i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.\end{aligned}$$

Эти соотношения позволяют избежать экспериментального нахождения значений коэффициентов характеристических наборов для всех возможных опорных углов, что необходимо для системы четырехпиксельных фрагментов. Для системы выше определенных трехпиксельных фрагментов требуется только один эксперимент. Для остальных опорных углов можно использовать приведенные выше аналитические выражения.

Предложенные приближенные формулы для характеристических наборов коэффициентов дают хорошие результаты на определенном классе изображений. Этот класс включает в себя изображения, состоящие из хорошо очерченных замкнутых залитых контуров достаточно высокого разрешения. В этот класс попадают изолированные алфавитно-цифровые символы. Хуже всего предложенные формулы работают на изображениях, близких к однородным и имеющих низкое разрешение.

В заключение хотелось бы отметить существенный вклад моих дипломников Кудинкина Д.А., Осипова А.М. и Харламовой Д.С. в работу по тематике настоящей статьи.

Список литературы

1. *Farmer D. W.* Groups and symmetry: a guide to discovering mathematics // Mathematical world. 1996. V. 5
2. *Парфенов П. Г.* О некоторых свойствах характеристического набора коэффициентов черно-белого цифрового изображения // Моделирование и анализ информационных

- систем. 2005. Т. 12, № 1. С. 52 – 54 (Parfenov P.G. On some properties of the characteristic set of coefficients black-and-white digital image // Modeling and analysis of information systems. 2005. Vol. 12, № 1. P. 52 – 54 [in Russian]).
3. *Pratt William K.* Digital image processing / A Wiley-interscience publication. John Wiley and sons. New York; Chichester; Brisbane; Toronto, 1978.
 4. *Gray S. B.* Local properties of binary images in two dimation // IEEE Trans. Computers. 1971. May, C-20, 5. P. 551 – 561.
 5. *Парфенов П. Г., Назарычев С. Л.* Об одном подходе к различению элементов из больших совокупностей традиционных систем символов // Моделирование и анализ информационных систем. 2006. Т. 13, № 1. С. 46 – 48 (Parfenov P. G., Nazarichev S. L. About one approach to discern elements of large ensembles of traditional systems of symbols // Modeling and analysis of information systems. 2006. Vol. 13, № 1. P. 46 – 48 [in Russian]).
 6. *Парфенов П. Г., Каплий И. А., Куликов О. С.* Расстояния и другие меры близости на множестве черно-белых цифровых изображений // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 1. С. 44 – 47 (Parfenov P. G., Kaplii I. A., Kulikov O. S. Distance and other measures of proximity on a set of black-and-white digital images // Modeling and analysis of information systems. 2007. Vol. 14, № 1. P. 44 – 47 [in Russian]).
 7. *Парфенов П. Г., Каплий И. А.* О характеристическом наборе коэффициентов черно-белых цифровых изображений, построенных на основе гексагональной решетки // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 2. С. 40 – 43 (Parfenov P. G., Kaplii I. A. On the characteristic set of coefficients black-and-white digital images, constructed on the basis of a hexagonal lattice // Modeling and analysis of information systems. 2007. Vol. 14, № 2. P. 40 – 43 [in Russian].)
 8. *Golay M. J. E.* Hexagonal pattern transformation // IEEE Trans.Computers. 1969. C-18, 8. P. 733 – 740.
 9. *Preston K.* Feature extraction by Golay hexagonal pattern transformation // IEEE Trans. Computers. 1971. C-20, 9. P. 1007 – 1014.

On the Turns of Digital Images

Parfenov P.G.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

Keywords: digital image, rectangular lattice, hexagonal lattice, turn of an image, Euler characteristic, characteristic set of coefficients

The images built on the basis of rectangular and hexagonal lattices are discussed in the article. For images on a rectangular lattice a formula is proposed, which gives approximate values of the components of a characteristic set of coefficients when turning at an arbitrary angle by the method of the nearest neighbor. The characteristic sets are presented in the form of diagrams, an experimental evaluation of errors is made. It was confirmed a good agreement with the predicted value component of characteristic sets and those which were obtained experimentally. For images built on the basis of a hexagonal lattice was offered a similar formula for the approximation of the components of the characteristic set for rotating at any angle, when this was applied to the modification of the nearest neighbor method for the preservation of coherence, as it was discovered its violation in some cases on a hexagonal lattice. On the basis of four-pixel fragments are built diagrams, which show a good agreement of predicted values and the obtained ones in the experiment. It was defined a system of three-pixel hexagonal fragments to which the theorem is proved on the Eulerian characteristic and were offered analytical expressions, which allow to avoid experimental detection of the characteristic sets of coefficients for all possible reference angles. Their use requires to produce only one such experiment.

Сведения об авторе:

Парфенов Павел Геннадьевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кандидат физико-математических наук,
декан факультета информатики и вычислительной техники