Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **5** (2014) 49–60

УДК 517.9

Двояко-периодические мероморфные решения автономных нелинейных дифференциальных уравнений

Демина М. В., Кудряшов Н. А.[1]

Национальный Исследовательский Ядерный Университет «МИФИ»
115409 Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31

e-mail: nakudr@gmail.com, mvdemina@mephi.ru

получена 12 августа 2014

Ключевые слова: мероморфные решения, эллиптические решения, автономные нелинейные дифференциальные уравнения

Рассматривается задача построения и классификации эллиптических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Описывается эффективный метод, позволяющий находить любое эллиптическое решение автономного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Метод не требует интегрирования дополнительных дифференциальных уравнений. Большое внимание уделяется методике построения эллиптических решений с несколькими полюсами в параллелограмме периодов. С помощью данного метода найден явный вид всех эллиптических решений до четвертого порядка включительно для обыкновенного дифференциального уравнения, имеющего ряд физических приложений. Рассматриваемый метод допускает естественное обобщение на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Автономные нелинейные дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и в частных производных, встречаются при описании многих процессов и явлений в физике, биологии, химии экономике и т. д. В последние годы появилось большое количество работ, посвященных проблеме построения точных решений автономных нелинейных дифференциальных уравнений [1–12]. Был предложен целый ряд методов и алгоритмов. Среди наиболее известных методов отметим метод экспонент, методы тригонометрических и гиперболических функций, метод эллиптических функций Якоби, а также их различные модификации и обобщения. Одним из основных недостатков, присущих подобным методам, является априорно заданный вид точного решения. Соответственно, все решения вне фиксированного класса остаются

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект для поддержки исследований, проводимых отдельными научным группами, № 14-11-00258.

не найденными. Вопросы классификации решений рассматриваются крайне редко. Кроме того, различные методы часто дают одни и те же решения, но записанные по-разному. В результате многими авторами делаются ошибочные утверждения о том, что получены новые точные решения, в то время как найденные решения на самом деле хорошо известны [12–15]. Следовательно, задача классификации точных решений является важной и актуальной.

С прикладной точки зрения огромный интерес представляют решения, являющиеся мероморфными функциями. Этот класс функций включает в себя, во-первых, функции, вообще не имеющие на комплексной плоскости конечных особых точек, и, во-вторых, функции с "простыми" особенностями в конечных точках (все такие особые точки исчерпываются изолированными полюсами). Простейшими примерами мероморфных функций являются полиномы и рациональные функции, тригонометрические и гиперболические функции. Целью настоящей работы является разработка метода построения и классификации двояко-периодических мероморфных решений (эллиптических решений) нелинейных дифференциальных уравнений.

Любое автономное дифференциальное уравнение в частных производных $E[u(x,t)] = 0$ допускает переход к обыкновенному дифференциальному уравнению введением переменных бегущей волны

$$u(x,t) = w(z), \quad z = x - C_0 t, \tag{1}$$

где C_0 – некоторая постоянная, определяющая скорость волны. Получившееся обыкновенное дифференциальное уравнение $E[w(z)] = 0$ также является автономным.

В разделе 2 дается подробное описание метода, позволяющего находить любое эллиптическое решение нелинейного автономного обыкновенного дифференциального уравнения. В разделе 3 четвертого порядка с двумя подходящими доминантными балансами и произвольными коэффициентами в соответствующих рядах Лорана.

2. Эллиптические решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим автономное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$E[w(z)] = 0, \tag{2}$$

где выражение $E[w(z)]$ является полиномом относительно зависимой функции $w(z)$ и ее производных. Будем искать эллиптические решения уравнения (2). Эллиптической называется мероморфная функция, имеющая два ненулевых периода ω_1, ω_2, такие что отношение ω_1/ω_2 не является вещественным числом. Поведение любой эллиптической функции на комплексной плоскости определяется ее поведением в параллелограмме периодов. Количество полюсов эллиптической функции в параллелограмме периодов называют порядком эллиптической функции. Полюсы следует считать с учетом порядков.

Уравнение (2) необходимо имеет эллиптические решения, если этому уравнению удовлетворяет хотя бы один ряд Лорана вида

$$w(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{c_{-k}}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad 0 < |z| < \varepsilon, \tag{3}$$

где параметр $p \in \mathbb{N}$ обозначает порядок полюса в точке $z = 0$. Уравнение (2) инвариантно относительно преобразования $z \mapsto z - z_0$, где z_0 – некоторая постоянная. Следовательно, позицию полюса можно выбирать произвольным образом. Кроме того, в силу тех же соображений для любого решения $w(z)$ уравнения (2) существует целое семейство решений $w(z - z_0)$. Как правило, произвольную постоянную z_0 мы будем опускать. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть ряд Лорана вида* (3) *удовлетворяет автономному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению* (2). *Тогда это уравнение обладает не более чем одним мероморфным решением, имеющим полюс в точке* $z = 0$ *с рядом Лорана* (3) *при фиксированных коэффициентах последнего.*

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из свойств рядов Лорана и единственности аналитического продолжения.

Следовательно, уравнение (2) допускает не более одного эллиптического решения, имеющего полюс в точке $z = 0$ с рядом Лорана (3) при фиксированных коэффициентах ряда.

Любую эллиптическую функцию можно рационально выразить через эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(z)$ и ее производную. Эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\wp_z)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{4}$$

и имеет второй порядок с двойным полюсом в начале координат. Параметры уравнения g_2, g_3 называют инвариантами, они связаны с периодами τ_1, τ_2 посредством соотношений

$$g_2 = \sum_{(n,\,m)\neq(0,\,0)} \frac{60}{(n\omega_1 + m\omega_2)^4}, \quad g_3 = \sum_{(n,\,m)\neq(0,\,0)} \frac{140}{(n\omega_1 + m\omega_2)^6}. \tag{5}$$

В дальнейшем нам потребуется еще одна специальная функция, так называемая, ζ–функция Вейерштрасса. Не являясь эллиптической, ζ–функция удовлетворяет уравнению $\zeta_z(z) = -\wp(z)$.

Предлагаемый ниже метод позволяет находить любое эллиптическое решение автономного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (2). Алгоритм метода можно условно разбить на несколько шагов.

Шаг 1. Построить все ряды Лорана в окрестности полюса $z = 0$, которые удовлетворяют уравнению (2).

Шаг 2. Зафиксировать порядок M искомого эллиптического решения $w(z)$ и выбрать K различных рядов Лорана

$$w^{(j)}(z) = \sum_{k=1}^{p_j} \frac{c_{-k}^{(j)}}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} z^k, \quad 0 < |z| < \varepsilon_i, \quad j = 1, \ldots, K, \tag{6}$$

среди найденных на шаге 1, так чтобы выполнялись следующие условия:

$$\sum_{j=1}^{K} c_{-1}^{(i)} = 0, \quad \sum_{i=1}^{K} p_i = M. \tag{7}$$

Шаг 3. Записать общее выражение для эллиптического решения $w(z)$, имеющего K попарно различных полюсов $a_1, \ldots, a_K$ в параллелограмме периодов с рядами Лорана $w^{(1)}(z-a_1), \ldots, w^{(K)}(z-a_k)$ в окрестности полюсов:

$$w(z)=\sum_{i=1}^{K} c_{-1}^{(i)}\zeta(z-a_i)+\left\{\sum_{i=1}^{K}\sum_{k=2}^{p_i}\frac{(-1)^k c_{-k}^{(i)}}{(k-1)!}\frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}}\right\}\wp(z-a_i)+\tilde{h}_0. \tag{8}$$

Найти ряды Лорана для функции $w(z)$, заданной равенством (8), в окрестности ее полюсов $a_1, \ldots, a_K$, положив без ограничения общности $a_1 = 0$. При этом удобно ввести обозначения $A_j \overset{def}{=} \wp(a_j)$, $B_j \overset{def}{=} \wp_z(a_j)$, $j = 2, \ldots, K$ и

$$h_0 \overset{def}{=} \tilde{h}_0-\sum_{j=2}^{K} c_{-1}^{(j)}\zeta(a_j)-\sum_{j=2}^{K} c_{-2}^{(j)}\wp(a_j). \tag{9}$$

Шаг 4. Потребовать, чтобы ряды Лорана, найденные на третьем шаге, совпадали с соответствующими рядами Лорана, выбранными на втором шаге. Составить алгебраическую систему, добавив к ней уравнения $B_j^2 = 4A_j^3 - g_2A_j - g_3$, $j = 2, \ldots, K$, являющиеся результатом подстановок $\wp_z(a_j) = B_j$, $\wp(a_j) = A_j$ в соотношение (4). Количество уравнений в системе должно быть не меньше, чем количество параметров искомого эллиптического решения. Решить алгебраическую систему относительно параметров эллиптического решения $w(z)$. Другими словами, найти h_0, g_2, g_3, $\{A_2, \ldots, A_K\}$, $\{B_2, \ldots, B_K\}$. При этом могут появиться ограничения на параметры исходного уравнения (2). Если система несовместна, то уравнение (2) не имеет эллиптических решений (10) с выбранными рядами Лорана.

Шаг 5. Используя теоремы сложения для функций $\wp$ и ζ (см. [16–18] и равенства (12), приводимые ниже), переписать выражение (8) в виде

$$\begin{aligned} w(z)=&\left\{\sum_{j=2}^{K}\sum_{k=2}^{p_j}\frac{(-1)^k c_{-k}^{(j)}}{(k-1)!}\frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}}\right\}\left(\frac{1}{4}\left[\frac{\wp_z(z)+B_j}{\wp(z)-A_j}\right]^2-\wp(z)\right)\\ &+\sum_{j=2}^{K}\frac{c_{-1}^{(j)}(\wp_z(z)+B_j)}{2\,(\wp(z)-A_j)}+\left\{\sum_{k=2}^{p_1}\frac{(-1)^k c_{-k}^{(1)}}{(k-1)!}\frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}}\right\}\wp(z)+h_0. \end{aligned} \tag{10}$$

Провести проверку полученных решений, подставляя их вместе с найденными ограничениями, в исходное уравнение (2).

Далее заметим, что уравнению (2) могут удовлетворять ряды Лорана с произвольными параметрами. Если такие ряды выбраны на втором шаге, то для удобства эти постоянные также вносятся в список параметров искомого эллиптического решения. В дополнение, на четвертом шаге метода алгебраическую систему можно построить следующим образом: необходимо подставить ряды Лорана, найденные на третьем шаге, в исходное уравнение и приравнять нулю коэффициенты при отрицательных и нулевой степенях переменных $(z - a_j)$, $j = 1, \ldots, K$ в получившемся соотношении. Этот подход учитывает тот факт, что эллиптическая функция без полюсов является постоянной. На "нулевом уровне" достаточно взять всего одно соотношение. Заметим, что в этом случае получающаяся алгебраическая система является конечной. Предположим, что при построении выражения (8) хотя бы один из рядов с произвольными коэффициентами используется несколько раз. Тогда необходимо проверять, что такие ряды в результате оказываются различными, особенно если алгебраическая система формируется с помощью только что описанного способа, поскольку в этой ситуации алгебраическая система не содержит параметров, соответствующих произвольным коэффициентам.

Если эллиптическая функция $w(z)$ имеет два и более различных полюса в параллелограмме периодов, то для построения рядов Лорана на третьем шаге необходимо использовать теоремы сложения для функций $\wp(z)$, $\wp_z(z)$ и формулу сложения для функции $\zeta(z)$. В наших обозначениях эти соотношения выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
&\zeta(a_i - a_j) = \zeta(a_i) - \zeta(a_j) + \frac{B_i + B_j}{2(A_i - A_j)}, \\
&\wp(a_i - a_j) = -A_i - A_j + \frac{(B_i + B_j)^2}{4(A_i - A_j)^2}, \\
&\wp_z(a_i - a_j) = -B_i + \frac{(B_i + B_j)(12A_i^2 - g_2)}{4(A_i - A_j)^2} - \frac{B_i\,(B_i + B_j)^2}{2(A_i - A_j)^3}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Значения $\zeta(a_j)$, $j = 2, \ldots, K$ исчезают из получающихся рядов при переходе от параметра $\tilde{h}_0$ к параметру h_0 по формуле (9) . Заметим, что соотношения (11) непосредственно не применимы, если $A_i = A_j$ или, что то же самое, $\wp(a_i) = \wp(a_j)$. Эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z)$ имеет второй порядок и, следовательно, принимает любое значение в параллелограмме периодов дважды. Таким образом, равенство $\wp(a_i) = \wp(a_j)$ при $a_i \neq a_j$ возможно только для простых точек, другими словами, $\wp_z(a_i) \neq 0$, $\wp_z(a_j) \neq 0$.

Выведем теоремы и формулу сложения для случая $\wp(a_i) = \wp(a_j)$, где $a_i \neq a_j$. Пусть $\omega_1 = 2\tau_1$, $\omega_2 = 2\tau_2$ – основные периоды эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$. Символом τ_3 обозначим сумму $\tau_1 + \tau_2$. Двойными для функции $\wp(z)$ являются точки $z = 0$, $z = \tau_l$, $l = 1, 2, 3$, при этом начало координат $z = 0$ – двойной полюс. Следовательно, $a_i \neq \tau_l$, $a_j \neq \tau_l$, $l = 1, 2, 3$. Из четности эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$ следует справедливость соотношения $\wp(2\tau_l - z) = \wp(z)$, $l = 1, 2, 3$. Как результат, мы получаем $a_j = 2\tau_l - a_i$, где $l = 3$, если одна из точек (a_i или a_j) лежит внутри основного параллелограмма и $l = 1$ или $l = 2$, если одна из точек лежит на стороне, определяемой соответствующим вектором τ_1 или τ_2. Число $2\tau_l$ является периодом эллиптических функций $\wp(z)$, $\wp_z(z)$, поэтому $\wp(a_i - a_j) = \wp(2a_i)$ и $\wp_z(a_i - a_j) = \wp(2a_i)$ и $\wp_z(a_i) = -\wp_z(a_j)$. Применяя правило Лопиталя в равенствах (11), мы находим формулу и теоремы сложения для случая $\wp(a_i) = \wp(a_j)$:

$$\begin{aligned}
&\zeta(a_i - a_j) = \zeta(a_i) - \zeta(a_j) + \frac{12A_i^2 - g_2}{4B_i}, \\
&\wp(a_i - a_j) = \wp(2a_j) = -2A_i + \frac{(12A_i^2 - g_2)^2}{16B_i^2}, \\
&\wp_z(a_i - a_j) = \wp_z(2a_j) = -B_i + \frac{3(12A_i^2 - g_2)A_i}{2B_i} - \frac{(12A_i^2 - g_2)^3}{32B_i^3}.
\end{aligned} \tag{12}$$

При решении алгебраической системы вычисления заметно упрощаются, если сначала найти величины $\zeta(a_i - a_j)$, $\wp(a_i - a_j)$, $\wp_z(a_i - a_j)$, а затем использовать теоремы сложения (11) или (12).

Описанный метод позволяет находить любое эллиптическое решение уравнения (2). Если уравнению (2) удовлетворяет ровно N различных рядов Лорана вида (3), то порядки эллиптических решений не превышают числа $\sum_{i=1}^{N} p_i$, где $p_1, \ldots, p_N$ — порядки полюсов в соответствующих рядах. При выполнении условия $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z)$ вырождается, другими словами, становится просто-периодической или рациональной, и, следовательно, вырождается и эллиптическое решение (10).

3. Примеры применения метода

В качестве примера будем искать эллиптические решения автономного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$w_{zzzz} + 2\alpha_1 w w_{zz} + 3\alpha_2 w_z^2 + \alpha_3 w_{zz} + \alpha_4 w_z + \alpha_5 w + \alpha_6 = 0. \tag{13}$$

Это уравнение может быть получено, если в следующих нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных

$$\begin{aligned}
&(E_1): \quad u_{tt} = u_{xxxx} + 2\alpha_1 u u_{xx} + 3\alpha_2 u_x^2 + \beta u_{xx} + \alpha_4 u_x + \alpha_5 u + \alpha_6,\\
&(E_2): \quad u_t = u_{xxxx} + 2\alpha_1 u u_{xx} + 3\alpha_2 u_x^2 + \alpha_3 u_{xx} + \beta u_x + \alpha_5 u + \alpha_6,\\
&(E_3): \quad u_t = u_{xxxxx} + 2\alpha_1 u u_{xxx} + 2(\alpha_1 + 3\alpha_2) u_x u_{xx} + \alpha_3 u_{xxx} + \alpha_4 u_{xx} + \beta u_x
\end{aligned} \tag{14}$$

перейти к переменным бегущей волны. Для уравнения E_k, $k = 1, 2, 3$ параметр C_0 в подстановке (1) имеет вид $C_0 = \alpha_{k+2} - \beta$.

Нас будет интересовать классификация эллиптических решений уравнения (13), поэтому позволим параметрам α_k, $1 \leqslant k \leqslant 6$, принимать любые комплексные значения. При этом будем предполагать, что параметры α_1, α_2 одновременно в ноль не обращаются. Без ограничения общности, можно положить равным нулю параметр α_3.

Для построения эллиптических решений необходимо рассмотреть следующие два доминантных баланса уравнения (13):

$$(I): \quad w_{zzzz} + \alpha_1 w w_{zz} + \alpha_2 w_z^2 = 0; \quad (II): \quad \alpha_1 w w_{zz} + \alpha_2 w_z^2 = 0. \tag{15}$$

Доминантные поведения, соответствующие балансам (15), имеют вид

$$\begin{aligned}
&(I) \quad w(z) = \frac{c_{-2}^{(1)}}{z^2}, \quad c_{-2}^{(1)} = -\frac{10}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \neq 0;\\
&(II) \quad w(z) = c_r^{(2)} z^r, \quad r = \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1 + 3\alpha_2}, \quad 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \neq 0, \quad r < -2,
\end{aligned} \tag{16}$$

где $c_r^{(2)}$ – произвольная постоянная. Соответствующие индексы Фукса определяются равенствами

$$\begin{aligned}
&(I) \quad (j+1)\left\{(\alpha_1+\alpha_2)j^3 - 15(\alpha_1+\alpha_2)j^2 + 2(33\alpha_1 + 43\alpha_2)j - 120(\alpha_1+\alpha_2)\right\} = 0;\\
&(II) \quad (j+1)j = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

При выполнении условий совместности для всех целых положительных индексов Фукса в случае (I), уравнению (13) удовлетворяют ряды Лорана вида

$$w^{(1)}(z) = \frac{c_{-2}^{(1)}}{z^2} + \frac{c_{-1}^{(1)}}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} z^k. \tag{18}$$

Доминантное поведение (II) порождает ряды Лорана в окрестности полюсов тогда и только тогда, когда $r \in \mathbb{Z}$, $r < -2$. Соответствующие ряды имеют один произвольный коэффициент $c_r^{(2)}$. Будем интересоваться эллиптическими решениями уравнения (13) до четвертого порядка включительно. Следовательно, необходимо рассмотреть случаи $r = -3$ и $r = -4$. Доминантному поведению (II) соответствуют следующие ряды Лорана:

$$\begin{aligned} r = -3: \quad & w^{(2)}(z) = \frac{c_{-3}^{(2)}}{z^3} - \frac{90}{\alpha_1 z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} z^k, \quad \alpha_2 = -\frac{8}{9}\alpha_1; \\ r = -4: \quad & w^{(2)}(z) = \frac{c_{-4}^{(2)}}{z^4} - \frac{70}{\alpha_1 z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} z^k, \quad \alpha_2 = -\frac{5}{6}\alpha_1. \end{aligned} \tag{19}$$

В этих выражениях $c_{-3}^{(2)}$, $c_{-4}^{(2)}$ – отличные от нуля произвольные постоянные. Все остальные коэффициенты рядов (19) определяются единственным образом.

Построим эллиптические решения второго порядка. Такие решения имеют один полюс второго порядка внутри параллелограмма периодов. В окрестности точки $z = 0$ эти решения раскладывается в ряд Лорана $w^{(1)}(z)$. В соответствии с равенством (8) эллиптические решения второго порядка, соответствующие ряду $w^{(1)}(z)$, можно записать в виде

$$w(z) = c_{-2}^{(1)} \wp(z; g_2, g_3) + h_0. \tag{20}$$

Раскладывая эту функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$, находим

$$w(z) = \frac{c_{-2}^{(1)}}{z^2} + h_0 + \frac{g_2 c_{-2}^{(1)}}{20} z^2 + \frac{g_3 c_{-2}^{(1)}}{28} z^4 + \dots. \tag{21}$$

Подставляя ряд (21) в уравнение (13) и приравнивая нулю выражения при степенях z^k, $k = -5 \dots 0$, получаем систему алгебраических уравнений. Решая построенную систему, находим два семейства эллиптических решений второго порядка. Параметры для первого семейства имеют вид

$$h_0 = 0, \quad g_2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_5}{4(2\alpha_1 - 3\alpha_2)}, \quad g_3 = -\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \alpha_6}{60(2\alpha_1 - 3\alpha_2)}. \tag{22}$$

Эти решения существуют при выполнении следующих ограничений на параметры исходного уравнения: $2\alpha_1 - 3\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_4 = 0$. Если же выполнены условия: $\alpha_2 = (2\alpha_1)/3$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 0$, то левую часть в равенстве (13) можно дважды проинтегрировать. В результате получим уравнение второго порядка

$$w_{zz} + \alpha_1 w^2 + b_1 z + b_2 = 0, \tag{23}$$

где b_1, b_2 – постоянные интегрирования. Полагая $b_1 = 0$, находим эллиптическое решение (20) с произвольными параметрами g_2, g_3, при этом $h_0 = 0$.

Уравнение (13) имеет эллиптические решения третьего порядка только при выполнении условия $\alpha_2 = -(8\alpha_1)/9$. Такие решения в параллелограмме периодов имеют один полюс третьего порядка с рядом Лорана $w^{(2)}(z)$ (см. (19)). Следуя алгоритму, описанному в разделе 2, запишем общий вид таких эллиптических решений

$$w(z) = -\frac{c_{-3}^{(2)}}{2}\wp_z(z; g_2, g_3) + c_{-2}^{(2)}\wp(z; g_2, g_3) + h_0. \tag{24}$$

Раскладывая эту функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$, находим

$$w(z) = \frac{c_{-3}^{(2)}}{z^3} + \frac{c_{-2}^{(2)}}{z^2} + h_0 - \frac{g_2 c_{-3}^{(2)}}{20}z + \frac{g_2 c_{-2}^{(2)}}{20}z^2 - \frac{g_3 c_{-3}^{(2)}}{14}z^3 + \frac{g_3 c_{-2}^{(2)}}{28}z^4 + \ldots \tag{25}$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты рядов (19) и (25), определяем параметры эллиптического решения

$$c_{-3}^{(2)} = -\frac{432\alpha_4}{\alpha_1\alpha_5}, \quad h_0 = 0, \quad g_2 = \frac{\alpha_5}{288}, \quad g_3 = -\frac{25\alpha_5^3}{746496\alpha_4^2} \tag{26}$$

и ограничения на параметры исходного уравнения (13)

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_4 \neq 0, \quad \alpha_5 \neq 0, \quad \alpha_2 = -\frac{8}{9}\alpha_1, \quad \alpha_6 = \frac{875}{1152}\frac{\alpha_5^3}{\alpha_1\alpha_4^2} + \frac{3}{4}\frac{\alpha_4^2}{\alpha_1}. \tag{27}$$

Далее будем искать эллиптические решения четвертого порядка. Возможны два случая. Такие эллиптические решения могут иметь в параллелограмме периодов два полюса второго порядка с рядами Лорана $w^{(1)}(z)$ или один полюс четвертого порядка с рядом Лорана $w^{(2)}(z)$.

В первом случае общее выражение для эллиптических решений можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} w(z) = c_{-2}\wp(z, g_2, g_3) + b\zeta(z, g_2, g_3) + \\ + c_{-2}\wp(z - a, g_2, g_3) - b\zeta(z - a, g_2, g_3) + \tilde{h}_0, \end{gathered} \tag{28}$$

где $\tilde{h}_0 = h_0 + c_{-2}\wp(a, g_2, g_3) - b\zeta(a, g_2, g_3)$, $c_{-2} = c_{-2}^{(1)}$. Разложим функцию (28) в ряд Лорана в окрестности точек $z = 0$, $z = a$. В результате получим

$$\begin{aligned} & w(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{b}{z} + h_0 + 2Ac_{-2} + \{bA - Bc_{-2}\}z + \left\{\left(3A^2 - \frac{g_2}{5}\right)c_{-2}^{(2)} - \frac{b}{2}B\right\}z^2 + \ldots \\ & w(z) = \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} - \frac{b}{z-a} + h_0 + 2Ac_{-2} - \{bA - Bc_{-2}\}(z - a) \\ & + \left\{\left(3A^2 - \frac{g_2}{5}\right)c_{-2} - \frac{b}{2}B\right\}(z - a)^2 + \ldots \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь и ниже используются обозначения $A \stackrel{def}{=} \wp(a, g_2, g_3)$, $B \stackrel{def}{=} \wp_t(a, g_2, g_3)$. Ряды (29) будут иметь различные коэффициенты в следующих случаях: $b \neq 0$ или $b = 0$, $B \neq 0$. Таким образом, нам нужно рассмотреть такие значения параметров α_1, α_2, которые для ряда $w^{(1)}(z)$ дают индексы Фукса $j = 1$ и (или) $j = 3$. Ряд $w^{(1)}(z)$ будет иметь индексы Фукса $j = 1$, $j = 3$ при $\alpha_2 = -17\alpha_1/(12)$, $\alpha_2 = \alpha_1$ соответственно. Подставляя ряды (29) в уравнение (13), получим систему, состоящую из десяти алгебраических уравнений. Согласно алгоритму, описанному в разделе 2, систему необходимо дополнить уравнением $B^2 = 4A^3 - g_2 A - g_3$.

Решая эту систему в случае $\alpha_2 = -17\alpha_1/(12)$, определяем параметры эллиптических решений (28):

$$\begin{aligned} &c_{-2}^{(1)} = \frac{24}{\alpha_1}, \quad h_0 = \frac{\alpha_1 b^2}{1152} - 48\,\frac{A_1}{\alpha_1}, \quad g_2 = \frac{5\alpha_1^4 b^4}{57729024} - 60A^2 + \frac{35\alpha_1^2 b^2 A}{4176}, \\ &g_3 = 64A^3 - \frac{\alpha_1^4 b^4 A}{9621504} - \frac{169\alpha_1^2 b^2 A^2}{16704} - \frac{\alpha_1^6 b^6}{23143334805504}, \; B = \frac{\alpha_1^3 b^3}{4810752} + \frac{\alpha_1 b A}{24}, \end{aligned} \tag{30}$$

где параметры A, $b \neq 0$ находятся из системы

$$\begin{aligned} &\alpha_5 - \frac{275\alpha_1^4 b^4}{9621504} - \frac{2125\alpha_1^2 b^2 A}{696} + 18000A^2 = 0, \\ &\alpha_6 + 1226880\,\frac{A^3}{\alpha_1} - \frac{9095\alpha_1^3 b^4 A}{267264} + \frac{10335\alpha_1 b^2 A^2}{232} - \frac{107785\alpha_1^5 b^6}{321435205632} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Заметим, что при практическом использовании эллиптических решений эту систему удобнее разрешить относительно параметров α_5, α_6. Значение параметра $c_{-2}^{(1)}$ было найдено ранее. Для существования этих решений необходимо потребовать выполнения условий: $\alpha_4 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$.

В случае $\alpha_2 = \alpha_1$ параметры эллиптических решений имеют вид

$$c_{-2}^{(1)} = -\frac{5}{\alpha_1}, \quad h_0 = 0, \quad g_2 = \frac{\alpha_5}{8}, \quad g_3 = -\frac{\alpha_1\alpha_6}{120}, \quad A = 0, \quad B = \left(\frac{\alpha_1\alpha_6}{120}\right)^{1/2}, \tag{32}$$

где можно выбрать любое значение корня в выражении для B. Построенные решения существуют при выполнении следующих ограничений на параметры исходного уравнения: $\alpha_4 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_6 \neq 0$.

С помощью теорем сложения для функций $\zeta(z)$ и $\wp(z)$ перепишем решение (28) следующим образом:

$$w(z) = \frac{c_{-2}^{(1)}}{4}\left[\frac{\wp_z(z; g_2, g_3) + B}{\wp(z; g_2, g_3) - A}\right]^2 - \frac{b}{2}\left[\frac{\wp_z(z; g_2, g_3) + B}{\wp(z; g_2, g_3) - A}\right] + h_0. \tag{33}$$

Подставляя в это выражения полученные значения параметров, найдем явный вид эллиптических решений.

Осталось рассмотреть случай эллиптических решений четвертого порядка, соответствующих ряду $w^{(2)}(z)$. При этом $\alpha_2 = -(5\alpha_1)/6$ и $c_{-3}^{(2)} = 0$. Явное выражение для таких решений выглядит следующим образом:

$$w(z) = \frac{c_{-4}^{(2)}}{6}\wp_{zz}(z; g_2, g_3) + c_{-2}^{(2)}\wp(z; g_2, g_3) + h_0. \tag{34}$$

Используя уравнение (4), находим $\wp_{zz} = 6\wp^2 - g_2/2$. Разложим функцию (34) в ряд Лорана в окрестности полюса $z = 0$, получим

$$w(z) = \frac{c_{-4}^{(2)}}{z^4} + \frac{c_{-2}^{(2)}}{z^2} + h_0 + \frac{g_2 c_{-4}^{(2)}}{60} + \left(\frac{g_2 c_{-2}^{(2)}}{20} + \frac{g_3 c_{-4}^{(2)}}{14}\right) z^2 + \ldots \tag{35}$$

Сравнивая соответствующие коэффициенты рядов (19) и (35), найдем два семейства решений. Значения параметров для первого имеют вид

$$\begin{gathered} h_0 = -\frac{\alpha_6\lambda^3\alpha_1^4 - 2360\,\alpha_5\lambda^2\alpha_1^2 - 2349648000}{10\alpha_1^2\lambda\rho}, \\ g_2 = \frac{6\left[\alpha_6\alpha_1^4\lambda^3 - 2710\,\alpha_5\alpha_1^2\lambda^2 - 127008000\right]}{\lambda^2\alpha_1^2\varrho}, \\ g_3 = -\frac{\left[\alpha_5^2\lambda - 1764\,\alpha_6\right]\lambda^3\alpha_1^4 - 1540560\,\alpha_5\lambda^2\alpha_1^2 + 37340352000}{6\lambda^3\alpha_1^3\varrho}, \end{gathered} \tag{36}$$

где введены обозначения $\lambda = c_{-4}^{(2)}$ и

$$\varrho = \alpha_5\alpha_1^2\lambda^2 - 6350400. \tag{37}$$

Параметр λ является корнем уравнения

$$\begin{gathered} \frac{\alpha_1^6\left(25\alpha_5^3 + 27\alpha_1^2\alpha_6^2\right)}{6000000}\lambda^6 - \frac{1161\alpha_6\alpha_5\alpha_1^6}{25000}\lambda^5 + \frac{25272\alpha_5^2\alpha_1^4}{625}\lambda^4 + \frac{17360406\alpha_6\alpha_1^4}{125}\lambda^3 \\ -\frac{5313570192\alpha_5\alpha_1^2}{25}\lambda^2 + 4518705356928 = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Полученное решение существует при следующих ограничениях $\alpha_4 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\varrho \neq 0$.

Если же выполнено соотношение $\varrho = 0$, то можно построить второе семейство решений, которое оказывается вырожденным, поэтому мы его опускаем.

На этом мы заканчиваем классификацию эллиптических решений, второго, третьего и четвертого порядков. В заключение заметим, что при выполнении условия $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ построенные эллиптические решения вырождаются.

4. Заключение

В данной работе приводится детальное описание метода, позволяющего находить эллиптические решения нелинейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. В то время как целый ряд методов поиска эллиптических решений, таких как метод эллиптической функции Вейерштрасса [3,11], метод эллиптических функций Якоби [5,6,9], их различные обобщения и модификации, теряют решения, не попадающие в априорно заданное представление, предлагаемый метод позволяет находить любое эллиптическое решение и проводить их классификацию. Еще один метод, лишенный этих недостатков, был предложен Контом и Мюзетт [19,20]. Однако рассматриваемый в данной работе метод значительно проще в применении, поскольку не требует построения и интегрирования дополнительных дифференциальных уравнений.

В качестве примера в работе проведена классификация эллиптических решений до четвертого порядка включительно для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя подходящими доминантными балансами и произвольными коэффициентами в соответствующих рядах Лорана.

Список литературы

1. *Kudryashov N.A.* Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1988. Vol. 52(3). P. 360–365.

2. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // Phys. Lett. A. 1990. Vol. 147. P. 287–291.

3. *Kudryashov N.A.* On types of nonlinear nonintegrable differential equations with exact solutions // Phys. Lett. A. 1991. Vol. 155. P. 269–275.

4. *Kudryashov N.A.* Partial differential equations with solutions having movable first – order singularities // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 169. P. 237–242.

5. *Parkes E.J., Duffy B.R., Abbott P.C.* The Jacobi elliptic–function method for finding periodic–wave solutions to nonlinear evolution equations // Phys. Lett. A. 2002. Vol. 295. P. 280–286.

6. *Fu Z., Liu S., Liu S.* New transformations and new approach to find exact solutions to nonlinear equations // Phys. Lett. A. 2002. Vol. 229. P. 507–512.

7. *Vernov S.Yu.* Constructing Solutions for the Generalized Henon-–Heiles System Through the Painleve Test // TMF. 2003. No. 135:3. P. 792–801.

8. *Hone A.N.W.* Non–existence of elliptic travelling wave solutions of the complex Ginzburg–Landau equation // Physica D. 2005. V. 205. P. 292–306.

9. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 24. P. 1217–1231.

10. *Vernov S.Yu.* Proof of the Absence of Elliptic Solutions of the Cubic Complex Ginzburg–Landau Equation // TMF. 2006. No. 146:1. P. 131–139.

11. *Chen Y., Yan Z.* The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations // Chaos Solitons and Fractals. 2006. Vol. 29, No. 4. P. 948–964.

12. *Kudryashov N.A., Loguinova N.B.* Extended simplest equation method for nonlinear differential equations // Applied Mathematics and Computation. 2008. Vol. 205. P. 396–402.

13. *Kudryashov N.A.* On "new travelling wave solutions" of the KdV and the KdV–Burgers equations // Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat. 2009. Vol. 14. P. 1891–1900.

14. *Kudryashov N.A., Loguinova N.B.* Be careful with the Exp–function method // Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat. 2009. Vol. 14. P. 1881–1890.

15. *Kudryashov N.A.* Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations // Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat. 2009. Vol. 14. P. 3507–3529.

16. *Demina M.V., Kudryashov N.A.* Explicit expressions for meromorphic solutions of autonomous nonlinear ordinary differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. Vol. 16. P. 1127–1134.

17. *Demina M.V., Kudryashov N.A.* From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation // Phys. Lett. A. 2010. Vol. 374. P. 4023–4029.

18. *Demina M.V., Kudryashov N.A.* Elliptic solutions in the Hénon-Heiles model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2014. Vol. 19(3). P. 471–482.

19. *Musette M., Conte R.* Analytic solitary waves of nonintegrable equations // Physica D. 2003. Vol. 181. P. 70–79.

20. *Conte R., Musette M.* Elliptic general analytic solutions // Studies in Applied Mathematics. 2009. Vol. 123. P. 63–81.

Doubly Periodic Meromorphic Solutions of Autonomous Nonlinear Differential Equations

Demina M. V., Kudryashov N. A.

National Research Nuclear University MEPhI,
Kashirskoe shosse, 31, Moscow, 115409, Russia

Keywords: meromorphic solutions, elliptic solutions, autonomous nonlinear differential equations

The problem of constructing and classifying elliptic solutions of nonlinear differential equations is studied. An effective method enabling one to find an elliptic solution of an autonomous nonlinear ordinary differential equation is described. The method does not require integrating additional differential equations. Much attention is paid to the case of elliptic solutions with several poles inside a parallelogram of periods. With the help of the method we find elliptic solutions up to the fourth order inclusively of an ordinary differential equation with a number of physical applications. The method admits a natural generalization and can be used to find elliptic solutions satisfying systems of ordinary differential equations.

Сведения об авторах:
Кудряшов Николай Алексеевич,
Национальный Исследовательский Ядерный Университет «МИФИ»,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой прикладной математики;
Демина Мария Владимировна,
Национальный Исследовательский Ядерный Университет «МИФИ»,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики.