View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **2** (2015) 278–294
©*Петунин А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А.*, 2013

УДК 519.6

Об одной задаче маршрутизации перемещений инструмента при листовой резке деталей [1]

Петунин А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А.

Механико-машиностроительный институт Уральского федерального университета 620002, Россия, г.Екатеринбург, ул. Мира, 19,
Институт Математики и механики им. Н.Н. Красовского, 620990, Россия, г.Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

e-mail: aapetunin@gmail.com, chentsov@imm.uran.ru, chentsov.p@uran.ru

получена 16 ноября 2013

Ключевые слова: маршрутная задача, условие предшествования

Для задачи маршрутизации перемещений инструмента при термической резке деталей из листового материала на машинах с числовым программным управлением (ЧПУ) исследуются вопросы, связанные с построением точных (оптимальных) и эвристических алгоритмов, используемых на этапе математического моделирования элементов маршрутизации последовательного обхода мегаполисов. Пунктами (городами) упомянутых мегаполисов являются точки врезки (пробивки) материала и точки выключения инструмента. В каждом из мегаполисов предусматриваются внутренние работы, состоящие в продвижении к эквидистанте "вырезаемого" контура детали от точки врезки и в продвижении (по завершении резки) от эквидистанты к точке выключения инструмента (имеется в виду рабочий ход). Исследуется задача быстродействия процесса резки, являющаяся специальным случаем обобщенной задачи курьера (задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования). Предлагается оптимальная процедура на основе динамического программирования, а также эффективный эвристический алгоритм, реализованный на многоядерной ПЭВМ. Процедура на основе динамического программирования использует специальное расширение основной задачи, при котором допустимость по предшествованию заменяется допустимостью по вычеркиванию (заданий из списка). Условия предшествования используются для снижения сложности вычислений: не осуществляется построение всего массива значений функции Беллмана (последняя заменяется в процедуре системой слоев).

[1]Работа выполнена в рамках программ Президиума РАН (проекты 12-П-1-1012, 12-П-1-1019) и при поддержке РФФИ (проект 15-01-07909) и региональной целевой программы РЦП-13-П1-1030.

Введение

Статья посвящена разработке методов решения задачи маршрутизации перемещений инструмента при листовой резке деталей, осуществляемой с применением машин с ЧПУ. Положение каждой детали, описываемой внешним замкнутым контуром и, возможно, одним или несколькими внутренними контурами, фиксировано и определено предварительно на этапе раскроя материала. Технология резки диктует требование, чтобы у каждой детали резка внутренних контуров предшествовала резке внешнего; в результате возникают условия предшествования [1–3] (см. также задачи типа коммивояжера в [4]). С каждым контуром связывается некоторая эквидистанта, позволяющая осуществлять резку с учетом технологически необходимой ширины реза. В свою очередь вблизи каждой такой эквидистанты (дублирующего контура) располагаются возможные точки врезки (пробивки) и точки выключения инструмента; последние могут находиться и на эквидистанте, но мы будем рассматривать более общий случай. Будем считать, что каждый контур имеет конечное число возможных точек врезки и точек выключения. Точки вышеупомянутых двух типов можно рассматривать как парные: первую можно трактовать как пункт прибытия, а вторую – как пункт отправления. При этом используется стандартная схема резки "по замкнутому контуру" (см. Рис. 1). Таким образом, задачу маршрутизации инструмента можно рассматривать в терминах математической модели, применяемой при моделировании элементов маршрутизации последовательного обхода мегаполисов. Пунктами (городами) упомянутых мегаполисов являются возможные точки врезки (пробивки) материала и точки выключения инструмента.

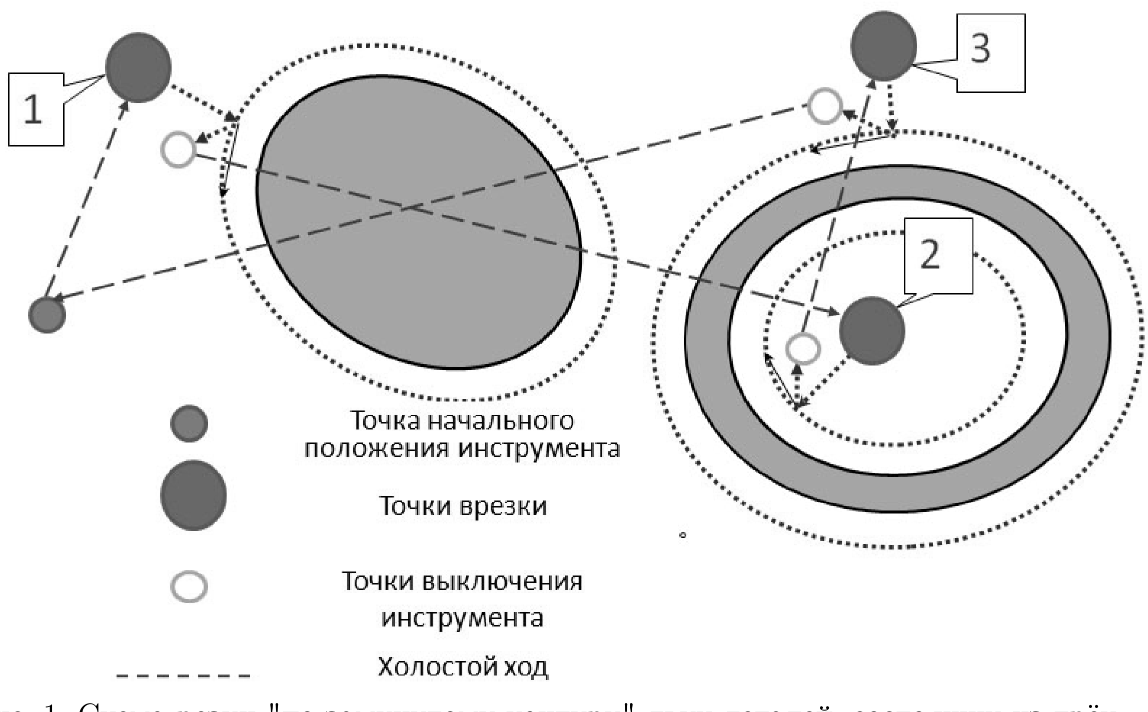

Рис. 1. Схема резки "по замкнутому контуру" двух деталей, состоящих из трёх контуров

Города мегаполиса группируются в пары “вход-выход”, с каждой из которых связываются свои затраты "медленного" (поскольку происходит движение инструмента в материале) времени. Следовательно, мы имеем дополнительные ограничения на перемещения при выполнении внутренних работ. Наконец, в процессе резки важно учитывать (в той или иной мере) некоторые условия т.н. жесткости материала в точках врезки [7], что на уровне формализации можно в какой-то степени отразить ограничениями на выбор варианта перехода с одного мегаполиса на другой.

Итак, в рассматриваемой ниже постановке возникают существенные особенности в сравнении с наиболее известной труднорешаемой задачей маршрутизации – задачей коммивояжера [1–3], так же как и с более близкой по формальной математической модели – обобщенной задачей курьера. Эти особенности делают актуальным разработку алгоритмов оптимизации маршрута, учитывающих технологические ограничения термической резки и направленных на получение рациональных по времени и приемлемых с практической точки зрения решений. В настоящей работе эти алгоритмы основываются на использовании обобщений метода динамического программирования (ДП). Используется подход [6], [8].

В связи с общими вопросами решения комбинаторных задач отметим [5, 9]. В связи с методами решения задачи коммивояжера наряду с [1–3] отметим масштабное исследование [10]; см. также [4, 11–13] в связи с задачами типа коммивояжера, включая последовательный обход мегаполисов. Вопросы, касающиеся общей теории труднорешаемых задач (NP-полнота) см. в [14]; наконец, в связи с применением ДП в задаче коммивояжера см. [15, 16].

Некоторые эвристические алгоритмы решения обобщенной задачи курьера (или обобщенной задачи коммивояжера GTSP), разработанные специально для маршрутизации инструмента машин листовой резки, описаны в [17–20, 26]. Однако среди них отсутствуют точные алгоритмы, позволяющие получать оптимальные решения для задач небольшой размерности. Кроме того, в отличие от предлагаемой в данной статье математической модели, учёт дополнительных технологических ограничений типа условий предшествования в этих алгоритмах усложняет поиск допустимых решений и увеличивает время получения рациональных вариантов маршрута.

1. Обозначения общего характера

Используем обычную теоретико-множественную символику (кванторы, связки); через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению, $\emptyset$ – пустое множество. Семейством называем множество, "составленное" из множеств. Если x и y – объекты, то через $\{x;y\}$ обозначаем множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов; если z – объект, то $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ есть одноэлементное множество, содержащее z. Для любых двух объектов p и q в виде $(p,q) \triangleq \{\{p\};\{p;q\}\}$ имеем [21] упорядоченную пару (УП) с первым элементом p и вторым элементом q. Если h – какая-либо УП, то через $pr_1(h)$ (через $pr_2(h)$) обозначаем первый (второй) элемент h; разумеется, $h = (pr_1(h), pr_2(h))$ и, в случае $h \in A \times B$, где A и B — множества, $pr_1(h) \in A$ и $pr_2(h) \in B$.

Для любых трех объектов a, b и c полагаем, как обычно [22, с.17], $(a, b, c) \triangleq$

$((a,b),c)$. Если же A, B и C – множества, то [22, с.17] $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$; при всяком выборе $x \in A \times B$ и $y \in C$ имеем, следовательно, $(x,y) \in A \times B \times C$ (данное свойство используется в последующих обозначениях). Заметим, что при обозначении значений функций двух и трех переменных ниже используются обычные правила экономии скобок.

Если H – множество, то через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств H. Через $\mathbb{R}$ обозначается вещественная прямая, $[0,\infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R}|0 \leq \xi\}, \mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}, \mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2\ldots\}$ и

$$\overline{k,l} \triangleq \{j \in \mathbb{N}_0|(k \leq j)\&(j \leq l)\}, \forall k \in \mathbb{N}_0, \forall l \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

(в (1) допускается реализация $\emptyset$). Если S – непустое множество, то через $R_+[S]$ обозначаем множество всех функций из S в $[0,\infty]$. Широко используется индексная форма записи отображений (см. [23]); в частности, это касается кортежей.

Непустому конечному множеству K сопоставляется его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ и непустое множество $(bi)[K]$ всех биекций [24, с. 87] "отрезка" $\overline{1,|K|}$ на K. Как обычно, $|\emptyset| \triangleq 0$. Перестановкой непустого множества A называем [24, с. 87] всякую биекцию A на себя; если α – перестановка A, то через α^{-1} обозначаем перестановку (множества A), обратную к α: $\alpha(\alpha^{-1}(x)) = \alpha^{-1}(\alpha(x)) = x, \forall x \in A$.

2. Маршруты и трассы (специальные конструкции)

В настоящем разделе, следуя содержательным построением раздела 1, введем ключевые понятия, связанные с достаточно общей маршрутной задачей [8]. Мы ограничиваемся далее рассмотрением плоского варианта [8], а именно: исследуем перемещения в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ из фиксированной точки $x^\circ \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, именуемой базой. Полагаем далее заданными множества

$$M_1 \in \mathcal{P}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \ldots, M_N \in \mathcal{P}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \tag{2}$$

где $N \in \mathbb{N}, 2 \leq N$. Все множества (2) полагаем конечными и именуем далее мегаполисами. Постулируем, что

$$(x^\circ \notin M_j,\ \forall j \in \overline{1,N})\&(M_p \cap M_q = \emptyset,\ \forall p \in \overline{1,N},\ \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}) \tag{3}$$

(условия (3) типичны для задач маршрутизации). Фиксируем отношения (см. [21])

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \ldots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N) \tag{4}$$

(в содержательной постановке задачи о маршрутизации перемещений инструмента при листовой резке деталей точками каждого из отношений (4) являлись УП, элементами которых были точки врезки и точки выключения инструмента; мы допускаем более общий случай, что может, например, отвечать случаю неединственности точки выключения инструмента при одной и той же точке врезки). Ввиду этого в дальнейшем полагаем, что

$$\mathbf{M}_t \triangleq \{pr_2(z) : z \in \mathbb{M}_t\},\ \forall t \in \overline{1,N}. \tag{5}$$

Разумеется, в (5) имеем непустые конечные множества; $\mathbf{M}_t \in \mathcal{P}'(M_t),\ \forall t \in \overline{1,N}$. Введем в рассмотрение множества

$$\mathbb{X} \triangleq \{x^\circ\} \cup (\bigcup_{i=1}^{N} M_i),\ \ \mathbf{X} \triangleq \{x^0\} \cup (\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i) \in \mathcal{P}'(\mathbb{X}), \tag{6}$$

каждое из которых непусто и конечно. Со вторым множеством в (6) связываем набор мультифункций: следуя [12], фиксируем

$$A_1 : \mathbf{X} \to \mathcal{P}'(M_1), \ldots, A_N : \mathbf{X} \to \mathcal{P}'(M_N) \tag{7}$$

Если $x \in \mathbf{X}$ и $t \in \overline{1,N}$, то непустое множество $A_t(x), A_t(x) \subset M_t$, рассматриваем как область достижимости в M_t из состояния x. Всюду в дальнейшем постулируем, что

$$\forall j \in \overline{1,N},\ \forall x \in \mathbf{X},\ \exists z \in \mathbb{M}_j : pr_1(z) \in A_j(x). \tag{8}$$

Заметим, что (7) и (8) содержат некоторую избыточность, поскольку таким образом допускаются при $j \in \overline{1,N}$ внешние перемещения из точек $x \in M_j$ снова в точки множества M_j. Такие перемещения не будут возникать при реализации решений основной задачи и, строго говоря, требование непустоты образа, используемое в (7), (8) для таких ситуаций является излишним. Однако по соображениям методического характера можно, "по-настоящему" определяя значения (7) и постулируя требования (8) только для перемещений извне, ввести фиктивные множества-значения и "сделать" это так, чтобы и для них свойство, определяемое в (8), имело место. Сделать это нетрудно, и мы будем полагать такое доопределение выполненным. С учетом (7) и (8) полагаем при $s \in \overline{1,N}$, что

$$\mathbb{A}_s : \mathbf{X} \to \mathcal{P}'(\mathbb{M}_s) \tag{9}$$

определяется следующим условием: если $x \in \mathbf{X}$, то

$$\mathbb{A}_s(x) \triangleq \{z \in \mathbb{M}_s | pr_1(z) \in A_s(x)\}. \tag{10}$$

Мы рассматриваем в дальнейшем набор мультифункций

$$\mathbb{A}_1 : \mathbf{X} \to \mathcal{P}'(\mathbb{M}_1), \ldots, \mathbb{A}_N : \mathbf{X} \to \mathcal{P}'(\mathbb{M}_N)$$

как несущественную редакцию (7), связываемую в содержательной задаче оптимизации времени резки деталей с требованиями обеспечения жесткости материала по мере движения инструмента машины с ЧПУ.

Условия предшествования. Через $\mathbb{P}$ обозначим множество всех перестановок $\overline{1,N}$: $\mathbb{P} \triangleq (bi)[\overline{1,N}]$. Элементы $\mathbb{P}$ называем (полными) маршрутами. Фиксируем множество $\mathbb{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$, элементами которого являются УП индексов из $\overline{1,N}$. Постулируем, что

$$\forall \mathbb{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbb{K}),\ \exists z_0 \in \mathbb{K}_0 : pr_1(z_0) \neq pr_2(z),\ \forall z \in \mathbb{K}_0; \tag{11}$$

(11) – условие, исключающее “зацикливание” маршрутов, отождествляемых с перестановками из $\mathbb{P}$. Для каждой УП $z \in \mathbb{K}$ $pr_1(z)$ рассматривается [1] как “отправитель”, а $pr_2(z)$ – как “получатель” (сообщения, груза и т.д.) Разумеется, в случае

задачи о маршрутизации инструмента машины с ЧПУ для листовой резки, содержательный смысл становится иным: предшествование сводится к требованию “одно после другого”. В рассматриваемом случае (11), следуя определению [6, ч. 2], получаем

$$\mathbf{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(pr_1(z)) < \alpha^{-1}(pr_2(z)) \; \forall z \in \mathbb{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \tag{12}$$

При этом $\mathbf{A}$ (12) есть, как легко видеть, множество всех $\alpha \in \mathbb{P}$ таких, что $\forall z \in \mathbb{K}$, $\forall t_1 \in \overline{1, N}$, $\forall t_2 \in \overline{1, N}$

$$((\alpha(t_1) = pr_1(z))\&(\alpha(t_2) = pr_2(z))) \Rightarrow (t_1 < t_2).$$

Иными словами, элементами $\mathbb{A}$ (12) являются маршруты, допустимые по предшествованию и только они. Как отмечено в (12), $\mathbf{A} \neq \emptyset$, т.е. допустимые маршруты существуют.

Редукция ограничений и допустимость по вычеркиванию. Следуя [6, ч. 2], введем оператор $\mathbf{I}$, действующий в $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$ по правилу $\mathbf{I}(K) \triangleq K \backslash \{pr_2(z) : z \in \Xi[K]\}$, где $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbb{K} | (pr_1(z) \in K)\&(pr_2(z) \in K)\}$ (здесь $K \in \mathfrak{N}$). Легко видеть, что $\mathbf{I}(\{t\}) = \{t\}$ при $t \in \overline{1, N}$ (синглетоны – неподвижные точки $\mathbf{I}$). В терминах $\mathbf{I}$ формулируем новое понятие допустимости частичных маршрутов (допустимость по вычеркиванию), получая

$$\begin{gathered}(\mathbf{I} - bi)[K] \triangleq \{\alpha \in (bi)[K] | \alpha(m) \in \mathbf{I}(\{\alpha(i) : i \in \overline{m, |K|}\}), \; \forall m \in \overline{1, |K|}\} \in \\ \in \mathcal{P}'((bi)[K]), \; \forall K \in \mathfrak{N}.\end{gathered} \tag{13}$$

При этом [6, (2.2.32), теорема 2.2.1] справедливо равенство

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - bi)[\overline{1, N}], \tag{14}$$

т.е. для полного списка заданий "запасы" маршрутов, допустимых по предшествованию и по вычеркиванию, совпадают. В этой связи систему множеств (13) можно (в силу (14)) рассматривать как "расширение" $\mathbf{A}$.

Трассы, согласованные с маршрутами. Если $x \in \mathbf{X}, K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (bi)[K]$, то через $Z(x, K, \alpha)$ обозначаем множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} : \overline{0, |K|} \to \mathbb{X} \times \mathbb{X}, \tag{15}$$

для каждого из которых

$$(z_0 = (x, x))\&(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}, \; \forall t \in \overline{1, |K|})\&(pr_1(z_s) \in A_{\alpha(s)}(pr_2(z_{s-1})), \; \forall s \in \overline{1, |K|}); \tag{16}$$

тем самым введено множество всех трасс, согласованных с частичным маршрутом. Пусть

$$Z_\alpha \triangleq Z(x^0, \overline{1, N}, \alpha), \; \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) вытекает, что полные трассы (см.(17)) формализуют процессы вида

$$x^0 \to (x_{1,1} \in A_{\alpha(1)}(x^0) \rightsquigarrow x_{1,2} \in \mathbf{M}_{\alpha(1)}) \to ... \to (x_{N,1} \in A_{\alpha(N)}(x_{N-1,2}) \rightsquigarrow x_{N,2} \in \mathbf{M}_{\alpha(N)}) \tag{18}$$

для которых $(x_{s,1}, x_{s,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(s)}$, $\forall s \in \overline{1, N}$. По смыслу рассматриваемой ниже задачи в (18) допускается произвольный выбор маршрута $\alpha \in \mathbf{A}$ и трассы (18). Последняя формализуется в виде элемента Z_α; точнее, речь идет о кортеже $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in Z_\alpha$, для которого $z_0 = (x^0, x^0)$ (здесь имеется несущественное отличие от (18)) и $z_t = (x_{t,1}, x_{t,2})$ при $t \in \overline{1,N}$.

Заметим, что каждое из множеств (17) непусто и конечно; кроме того, при $x \in \mathbf{X}, K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (bi)[K]$ множество $Z(x, K, \alpha)$ непусто и конечно; см. [8, (3.21)]. Каждую УП $(\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}), \alpha \in \mathbf{A}, (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in Z_\alpha$, называем допустимым решением (ДР). Множество всех ДР является (см.(12)) непустым и конечным.

3. Постановка задачи и её расширение

Ниже рассматривается задача о посещении мегаполисов с выполнением в этих мегаполисах тех или иных работ, что на содержательном уровне отражено в (18). В этой связи введем функции стоимости

$$\mathbf{c} \in R_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X}], c_1 \in R_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X}], \ldots, c_N \in R_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X}], f \in R_+[\mathbb{X}], \tag{19}$$

значения которых содержательны в пределах подмножеств $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ и $\mathbb{X}$ соответственно, а на оставшихся "частях" этих множеств доопределены нулём (можно было бы сделать способ доопределения другим). Полагаем, что $\mathbf{c}$ используется при оценивании внешних перемещений (между мегаполисами, а также из x^0 в тот или иной мегаполис), $c_1, \ldots, c_N$ оценивают работы в мегаполисах, а f – терминальное состояние (точка $x_{N,2}$ в (18)). При этом функции (19) полагаются "максимально продолженными".

Дело в том, что значения $\mathbf{c}(x, y)$ функции $\mathbf{c}$ содержательны в следующих двух случаях: 1) $x = x^0, y \in A_j(x^0)$, где $j \in \overline{1,N}$; 2)$x \in \mathbf{M}_k$ и $y \in A_l(x)$, где $k \in \overline{1,N}$ и $l \in \overline{1,N}\backslash\{k\}$. Для всех УП $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, не удовлетворящих ни одному из условий 1), 2), полагаем для определенности, что $\mathbf{c}(x, y) \triangleq 0$.

Если $j \in \overline{1,N}$, то значения $c_j(x, y)$ функции c_j содержательны в случае, когда $(x, y) \in \mathbb{M}_j$; если же $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, но при этом $(x, y) \notin \mathbb{M}_j$, то также полагаем (для определенности), что $c_j(x, y) \triangleq 0$.

Наконец, значения $f(x)$ содержательны при $x \in \mathbb{X}\backslash\{x^0\}$; для определенности полагаем $f(x^0) \triangleq 0$.

Разумеется, продолжение "нулем" не является обязательным и может использоваться любой другой вариант продолжения (доопределения) $\mathbf{c}, c_1, ..., c_N, f$ до отображений на $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ и $\mathbb{X}$ соответственно. Мы рассматриваем аддитивный способ агрегирования затрат. Имеет смысл ввести соответствующее определение сразу для частичных маршрутов и трасс. Это позволит определить серию задач, среди которых естественным образом будет выделяться основная. Итак, при $K \in \mathfrak{N}, \alpha \in (bi)[K]$ и кортежа (15) полагаем, что

$$\hat{\mathcal{G}}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}|K] \triangleq \sum_{t=0}^{|K|-1} \mathbf{c}(pr_2(z_t), pr_1(z_{t+1})) + \sum_{t=1}^{|K|} c_{\alpha(t)}(z_t) + f(pr_2(z_{|K|})). \tag{20}$$

Отметим, что (20) существенно при $\alpha \in (\mathbf{I}-bi)[K]$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in Z(x, K, \alpha)$, где $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$. В частности, с учетом (14) и (17) определяются значения

$$\mathcal{G}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \triangleq \hat{\mathcal{G}}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}|\overline{1,N}], \ \forall \alpha \in \mathbf{A}, \ \forall (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in Z_\alpha. \tag{21}$$

Это позволяет ввести следующую основную задачу маршрутизации (ОЗМ):

$$\mathcal{G}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \to \min, \alpha \in \mathbf{A}, (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in Z_\alpha. \tag{22}$$

С задачей (22) связываем ее значение (экстремум)

$$V \triangleq \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in Z_\alpha} \mathcal{G}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \in [0, \infty[\tag{23}$$

и (непустое) множество всех ее оптимальных ДР: как обычно, ДР $(\alpha^0, (z_i^0)_{i\in\overline{0,N}})$, где $\alpha^0 \in \mathbf{A}$ и $(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbf{Z}_{\alpha^0}$, оптимально, если $\mathcal{G}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}] = V$. Наша цель – найти V (23) и какое-либо оптимальное ДР.

По аналогии с ОЗМ определяем частичные или укороченные задачи: при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ имеется в виду задача

$$\hat{\mathcal{G}}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}|K] \to \min, \alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K], (z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in Z(x, K, \alpha). \tag{24}$$

Напомним, что ограничения каждой задачи (24) совместны, а множество всех ДР (УП маршрут-трасса) конечно. С учетом этого получаем, что каждая задача (24) обладает оптимальным решением и определены значения

$$v(x, K) \triangleq \min_{\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K]} \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\in Z(x,K\alpha)} \hat{\mathcal{G}}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}|K] \in [0, \infty[,\ \forall x \in \mathbf{X},\ \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{25}$$

Кроме того, полагаем, что $v(x, \emptyset) \triangleq f(x)$, $\forall x \in \mathbf{X}$. В итоге определена функция $v \in R_+[\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})]$. С учетом (14), (17), (21), (23) и (25) получаем равенство

$$V = v(x^0, \overline{1, N}), \tag{26}$$

позволяющее рассматривать систему задач (24) в качестве расширения ОЗМ (22). В [8] установлена

Теорема 4.1. Функция v удовлетворяет следующему уравнению (Беллмана)

$$v(x, K) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in\mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, pr_1(z)) + c_j(z) + v(pr_2(z), K \setminus \{j\})].$$

Из (26) и теоремы 4.1 следует, в частности, что

$$V = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z\in\mathbb{A}_j(x^0)} [\mathbf{c}(x^0, pr_1(z)) + c_j(z) + v(pr_2(z), \overline{1, N}\setminus\{j\})]. \tag{27}$$

Для использования (27) и теоремы 4.1 напомним схему [6, §4.9] в редакции, отвечающей ОЗМ (24); см. также [8]. Пусть

$$\xi \triangleq \{K \in \mathfrak{N} | \forall z \in \mathbb{K}\ (pr_1(z) \in K) \Rightarrow (pr_2(z) \in K)\} \tag{28}$$

и $\xi_s \triangleq \{K \in \xi | s = |K|\}$, $\forall s \in \overline{1, N}$. Элементы (28) именуем существенными списками (заданий); они являются непустыми п/м $\overline{1, N}$. При этом $\xi_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1, N}\setminus\mathbb{K}_1\}$, где $\mathbb{K}_1 \triangleq \{pr_1(z) : z \in \mathbb{K}\}; \xi_N = \{\overline{1, N}\}$ и

$$\xi_{s-1} = \{K\setminus\{t\} : K \in \xi_s, t \in \mathbf{I}(K)\},\ \forall s \in \overline{2, N}. \tag{29}$$

Итак, имеем рекуррентную процедуру $\xi_N \to \xi_{N-1} \to \ldots \to \xi_1$. С каждым из семейств $\xi_1, \ldots, \xi_N$ связывается слой пространства позиций; определяется также слой $D_0 \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \mathbf{m}\}$, где $\mathbf{m}$ есть по определению объединение всех множеств $\mathbf{M}_i, i \in \overline{1,N} \setminus \mathbb{K}_1$. Полагаем $D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1,N})\}$ (одноэлементное множество, содержащее УП $(x^0, \overline{1,N})$); D_0 и D_N – крайние слои пространства $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N})$ (пространство позиций).

Промежуточные слои. Если $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \xi_s$, то [6, §4.9], полагаем $J_s(K) \triangleq \{t \in \overline{1,N} \backslash K | \{t\} \cup K \in \xi_{s+1}\}$ и определяем множество $\mathfrak{M}_s[K]$ в виде объединения всех множеств $\mathbf{M}_i, i \in J_s(K)$, получая непустые п/м $\mathbf{X}$; естественной модификацией $\mathfrak{M}_s[K]$ является клетка $\mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathfrak{M}_s[K]\}$. Тогда при $s \in \overline{1,N-1}$ слой D_s определяеется в виде (дизъюнктного) объединения всех клеток $\mathbb{D}_s[K], K \in \xi_s$; при этом $D_s \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathfrak{N})$. В виде $D_0, D_1, \ldots, D_N$ имеем непустые п/м $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N})$. По аналогии с [6, §4.9] устанавливается (см. [8]) следующее свойство:

$$(y, K \backslash \{k\}) \in D_{s-1}, \ \forall s \in \overline{1,N}, \ \forall K \in \xi_s, \ \forall k \in \mathbf{I}(K), \ \forall y \in \mathbf{M}_k \tag{30}$$

(в связи с (30) см. также (29)). По поводу (30) отметим также, что $K \in \xi_s$, $\forall s \in \overline{1,N}$, $\forall (x, K) \in D_s$. Поэтому из (30) имеем, в частности, что

$$(pr_2(z), K \backslash \{j\}) \in D_{s-1}, \ \forall s \in \overline{1,N}, \ \forall (x, K) \in D_s, \ \forall j \in \mathbf{I}(K), \ \forall z \in \mathbb{A}_j(x). \tag{31}$$

С учетом непустоты слоёв $D_0, D_1, \ldots, D_N$ введем сужения функции Беллмана на каждый из этих слоёв: если $s \in \overline{0,N}$, то $v_s \in R_+[D_s]$ определяем условиями

$$v_s(x, K) \triangleq v(x, K), \ \forall (x, K) \in D_s. \tag{32}$$

Из (32) имеем, в частности, явное описание $v_0 \in R_+[D_0] : v_0(x, \emptyset) \triangleq f(x) \ \forall x \in \mathbf{m}$. Далее, с учетом (31), (32) получаем, что при $s \in \overline{1,N}, (x, K) \in D_s, j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{A}_j(x)$ определено значение $v_{s-1}(pr_2(z), K \backslash \{j\}) \in [0, \infty[$. Из теоремы 4.1 имеем теперь следующее

Предложение 4.1. Если $s \in \overline{1,N}$, то v_{s-1} преобразуется в v_s по правилу

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, pr_1(z)) + c_j(z) + v_{s-1}(pr_2(z), K \backslash \{j\})], \ \forall (x, K) \in D_s.$$

Таким образом получили рекуррентную процедуру $v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_N$, для которой (см. (27),(32))

$$V = v_N(x^0, \overline{1,N}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x^0)} [\mathbf{c}(x^0, pr_1(z)) + c_j(z) + v_{N-1}(pr_2(z), \overline{1,N} \backslash \{j\})]. \tag{33}$$

Совсем кратко остановимся на процедуре построения оптимального ДР, поскольку она является достаточно традиционной в теории ДП (ее особенности отражены в предложении 4.1). С учетом (33) выбираем индекс $\mathbf{j}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и УП $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{A}_{\mathbf{j}_1}(x^0)$, для которых

$$V = \mathbf{c}(x^0, pr_1(\mathbf{z}^{(1)})) + \mathbf{c}_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}) + v_{N-1}(pr_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \backslash \{\mathbf{j}_1\}). \tag{34}$$

С учетом (31) имеем, что $(pr_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) \in D_{N-1}$, а потому из предложения 4.1 следует, что

$$v_{N-1}(pr_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})} \min_{z \in \mathbb{A}_j(pr_2(\mathbf{z}^{(1)}))} [\mathbf{c}(pr_2(\mathbf{z}^{(1)}), pr_1(z)) + c_j(z) + \\ + v_{N-2}(pr_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; j\})]. \tag{35}$$

Используя (35), выбираем $\mathbf{j}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{A}_{\mathbf{j}_2}(pr_2(\mathbf{z}^{(1)}))$, так что

$$v_{N-1}(pr_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) = \mathbf{c}(pr_2(\mathbf{z}^{(1)}), pr_1(\mathbf{z}^{(2)})) + c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}) + \\ + v_{N-2}(pr_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}). \tag{36}$$

Далее осуществляются аналогичные операции, достаточно типичные для ДП; см. подробнее в [8]. Сейчас отметим только, что из (34), (36) следует, что при $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x^0, x^0)$

$$V = \mathbf{c}(pr_2(\mathbf{z}^{(0)}), pr_1(\mathbf{z}^{(1)})) + \mathbf{c}(pr_2(\mathbf{z}^{(1)}), pr_1(\mathbf{z}^{(2)})) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}) + \\ + c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}) + v_{N-2}(pr_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}). \tag{37}$$

Продолжая процедуру на основе (34), (36), получим [8, раздел 7] оптимальное ДР $(\eta, (\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0,N}})$, где $\eta = (\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A}$ и $(\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0,N}} \in Z_\eta; V = \mathcal{G}_\eta[(\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0,N}}]$ (в связи с последним равенством полезно отметить, что при $N = 2$ оно непосредственно следует из (37)).

4. Конкретизация общей постановки

Рассмотрим гипотетическую модель для задачи маршрутизации инструмента машин листовой резки, в основе которой находятся конструкции, приводящие к ОЗМ (22).

Пусть на плоскости $X \triangleq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ имеется n непустых компактных (ограниченных и замкнутых) телесных подмножеств $\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $2 \leq n$. Сопоставим каждому из этих множеств границу, получая множества $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. Если $j \in \overline{1,n}$, то полагаем, что Γ_j получается (конечным) объединением попарно непересекающихся компактных подмножеств $\Gamma_{j,1}, \ldots, \Gamma_{j,\mathbf{n}_j}$, где $\mathbf{n}_j \in \mathbb{N}$. Эти подмножества являются замкнутыми кривыми и соответствуют внешнему и, возможно, внутренним контурам, ограничивающим "деталь" $\mathbf{D}_j$, а точнее, заготовку соответствующей детали. Возле каждого контура $\Gamma_{j,k}$, где $j \in \overline{1,n}$ и $k \in \overline{1,\mathbf{n}_j}$, имеется (с внешней стороны) замкнутая кривая $\Omega_{j,k}$, именуемая эквидистантой; предполагается, что $\Gamma_{j,k}$ и $\Omega_{j,k}$ "близки". Можно данную близость охарактеризовать в терминах метрики Хаусдорфа [25, с. 441]. При этом

$$\Omega_{j,k} \cap \mathbf{D}_j = \emptyset \quad \forall j \in \overline{1,n} \quad \forall k \in \overline{1,\mathbf{n}_j}. \tag{38}$$

Можно рассматривать (38) как условие, обеспечивающее последующую резку с некоторым запасом.

Мы полагаем, что при $j \in \overline{1,n}$ и $k \in \overline{1,\mathbf{n}_j}$ плоское множество $\Omega_{j,k}$ непусто и компактно (ограничено и замкнуто). Пусть теперь

$$N = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{n}_j, \tag{39}$$

а каждый мегаполис будем связывать со "своей" эквидистантой. Таким образом, мы "перестаем воспринимать" сами детали и "оставляем" для рассмотрения только получившиеся эквидистанты, с каждой из которых связываем свой мегаполис. Итак, нумеруя подряд $\Omega_{1,1}, \ldots, \Omega_{1,\mathbf{n}_1}, \ldots, \Omega_{n,1}, \ldots, \Omega_{n,\mathbf{n}_n}$, получаем $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(N)}$ (см. (38)). Возле каждого множества $\Omega^{(k)}, k \in \overline{1,N}$, располагаем свой набор "парных" точек. Упомянутые наборы используем в качестве мегаполисов. Таким образом, каждый мегаполис $M_1, \ldots, M_N$ получается объединением двухэлементных множеств (неупорядоченных пар), составленных (каждая) из точки врезки и точки выключения инструмента. В соответствии с содержательным смыслом задачи формируем отношения $\mathbb{M}_1, \ldots, \mathbb{M}_N$; если $j \in \overline{1,N}$, то $\mathbb{M}_j$ есть множество всех УП, имеющих каждая первым элементом плоский вектор, определяющий точку врезки, а вторым – соответствующий этой точке врезки (плоский) вектор, определяющий точку выключения инструмента; не исключается совпадение двух упомянутых векторов.

Обсудим конструирование кортежа $(\mathbf{c}, c_1, \ldots, c_N, f)$ (19). Следуя правилу, указанному в разделе 4, в случаях 1), 2), упомянутых при введении $\mathbf{c}$, полагаем $\mathbf{c}(x,y)$ совпадающим с евклидовым расстоянием $\rho(x,y)$ между плоскими векторами x и y.

В отношении функций $c_1, \ldots, c_N$ принимаем следующее соглашение, касающееся существенных фрагментов определения (см. раздел 4). Итак, будем полагать, что задано число $\Theta \in \mathbb{R}, \Theta > 1$, и каждой УП $z \in \mathbb{M}_j$, где $j \in \overline{1,N}$, сопоставлена точка $\omega_j[z] \in \Omega^{(j)}$, определяющая начало и конец резки; при этом предполагается, что при $pr_1(z) \neq pr_2(z)$ $c_j(z) \stackrel{\triangle}{=} \Theta[\rho(pr_1(z), \omega_j[z]) + \rho(\omega_j[z], pr_2(z))]$, а в случае $pr_1(z) = pr_2(z)$

$$c_j(z) \stackrel{\triangle}{=} \Theta\rho(pr_1(z), \omega_j[z]) + \rho(\omega_j[z], pr_2(z)) \tag{40}$$

(имеется в виду, что возвращение в точку врезки в режиме холостого хода происходит во втором случае). Поскольку обычно $\Theta >> 1$ (замедление в металле) и $\omega_j[z]$ реально находится вблизи $pr_2(z)$, то (во втором случае) последним слагаемым в (40) можно пренебречь.

Наконец, конкретизируем операторы $A_1, \ldots, A_N$. Сначала сделаем это на идейном уровне. Итак, если $s \in \overline{1,N}$, то при $x \in \mathbf{X} \setminus M_s$ значение $A_s(x)$ определяется следующим образом:

$$A_s(x) \stackrel{\triangle}{=} \{pr_1(z) : z \in \mathbb{M}_s, d_s - \epsilon_s \leq \rho(x, pr_1(z))\}, \tag{41}$$

где $\epsilon_s \in]0, \infty[$ есть параметр точности, а число d_s имеет вид

$$d_s \stackrel{\triangle}{=} \max_{h \in \mathbb{M}_s} \rho(x, pr_1(h));$$

если же $\tilde{x} \in M_s$, то полагаем, что $A_s(\tilde{x}) \stackrel{\triangle}{=} M_s$ (это соглашение является несущественным, но достаточным для справедливости (8)). Правило (41) предполагает, что перемещения осуществляются в относительно удаленные от x точки из числа первых элементов УП из $\mathbb{M}_s$, что в какой-то степени отвечает соображениям, связанным с обеспечением прочности. На этапе компьютерного моделирования правило на основе (41) будет несколько скорректировано, что оговаривается дополнительно.

Итак, пусть $N = 28$ и $|\mathbb{K}| = 22$ (28 мегаполисов и 22 адресные пары); конкретные координаты точек мегаполисов и описание адресных пар не приводим по соображениям объема. Ограничимся сейчас описанием корректировки (41) на содержательном уровне.

Итак, будем использовать следующее правило выбора точек очередного мегаполиса, имея в виду существенную "часть" области определения. Сначала оговорим данное правило содержательно, фиксируя число 25 в виде некоторого порогового уровня.

Теперь вышеупомянутое правило используем для точного определения операторов $A_1, \ldots, A_N$. Пусть $j \in \overline{1,N}$ и $x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{M}_j$; в этом случае $x \notin M_j$. Полагаем, что

$$(d_j < 25) \Rightarrow (A_j(x) \stackrel{\triangle}{=} \{pr_1(y) : y \in \mathbb{M}_j, 0,9d_j \leq \rho(x, \mathrm{pr}_1(y))\},$$

$$((\min_{h \in \mathbb{M}_j} \rho(x, pr_1(h)) \leq 25) \& (25 \leq d_j)) \Rightarrow (A_j(x) \stackrel{\triangle}{=} \{pr_1(z) : z \in \mathbb{M}_j, 25 \leq \rho(x, \mathrm{pr}_1(z))\}),$$

$$(25 < \min_{h \in \mathbb{M}_j} \rho(x, pr_1(h))) \Rightarrow (A_j(x) \stackrel{\triangle}{=} \{pr_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\}).$$

Напомним, что, поскольку при $x \in \mathbf{M}_j$ множество $A_j(x)$ для нас несущественно, то, для определенности, мы полагаем здесь $A_j(x) \stackrel{\triangle}{=} M_j$.

В расчетах, как уже отмечалось, предполагалось, что $N = 28, |\mathbb{K}| = 22$. Было построено оптимальное ДР, иллюстрируемое в дальнейшем соответствующим рисунком. Время счета 12 мин. 26 сек. Ниже рассматривается эвристический алгоритм, для которого проведено сравнение (на уровне вычислительного эксперимента) с оптимальным решением.

5. Приближенный алгоритм решения задачи

В основе процедуры лежит известный жадный алгоритм решения маршрутных задач. Построение маршрута происходит в пошаговом режиме, на каждом шаге следующий контур выбирается, в частности, с учетом ограничений. Алгоритм состоит из двух частей — непосредственно сам алгоритм и итерационный принцип его применения. Далее идет описание алгоритма по шагам.

1. Находим контур с номером, не являющимся второй компонентой ни в одной из адресных пар, и содержащий допустимую (в терминах областей достижимости) точку врезки, стоимость перехода в которую из точки старта минимальна. Делаем данный контур первым на маршруте, а данную точку врезки первой на трассе.

2. Находим контур с номером, не являющимся второй компонентой ни в одной из адресных пар, в которых первая компонента еще не на маршруте, и содержащий допустимую точку врезки, стоимость перехода в которую с предыдущего контура на маршруте минимальна. Делаем данный контур и данную точку врезки следующими на маршруте и трассе.

3. Выполняем шаг 2 для всех оставшихся контуров, пока маршрут не будет построен.

Основная идея итерационного подхода состоит в том, чтобы всякий раз направлять алгоритм по новому пути, заставляя находить выходы из локальных экстремумов. Для этого вводится специальная матрица коррекции стоимостей переходов от контура к контуру. Именно, $A_{i,j} \in \{0; 1\}$, $i \in \overline{1,N}$, $j \in \overline{1,N}$. Если $A_{i,j} = 1$, то стоимость перехода на контур с индексом i в случае, если он находится в маршруте на позиции j, заменяется очень большой константой. В противном случае стоимость рассчитывается традиционным способом.

В итерационном подходе будут использованы следующие параметры. Общее количество итераций N1 и размерность цикла итераций N2. На каждой из N1 итераций, за исключением первой, для одного из контуров, выбранного случайно, делается коррекция. По завершении каждого цикла из N2 итераций все коррекции сбрасываются (обнуляется матрица A). Далее по шагам описана методика итерационного применения алгоритма.

1. Выполнить алгоритм без коррекций. Сохраняем результат счета.

2. Выбрать случайно позицию $i, i \in \overline{1,N}$, на маршруте. В этой позиции находим контур с индексом $j, j \in \overline{1,N}$. Принимаем $A_{j,i} = 1$.

3. Выполняем алгоритм с учетом коррекции. Если результат счета улучшился по сравнению с сохраненным, запоминаем результат и маршрут с трассой.

4. Выполняем шаги 2 и 3 еще N2-1 раз (N2-2 раз для первого цикла итераций — первая итерация была на шаге 1 без коррекции).

5. Обнуляем матрицу итераций.

6. Выполняем шаги 2–5 до тех пор, пока количество итераций не превысит число N1.

7. Используем сохраненный наилучший результат счета и соответствующие ему маршрут и трассу как результат работы итерационного алгоритма.

6. Вычислительный эксперимент

Вычисления производились на ПЭВМ с процессором Intel i7-2630QM с 8Гб оперативной памяти, работающей под управлением Windows 7 (64-bit). Для разработки программы была использована среда Microsoft Visual C++ 2010. Всего рассматривается два примера.

В первом примере требовалось обойти 28 контуров ($N = 28$). Количество адресных пар равно 22 ($|\mathbb{K}| = 22$). Точное описание контуров не приводится из соображений экономии места.

Далее описывается условие выбора допустимых точек следующего контура. Для начала среди всех точек врезки следующего контура определяем такую, расстояние l_{min} до которой от текущей точки завершения реза минимально. И такую, расстояние l_{max} до которой максимально. Если $l_{min} > 25$, то переход возможен в любую точку врезки следующего контура. Если $l_{min} \leq 25$ и $l_{max} \geq 25$, то переход возможен только в те точки, расстояние до которых больше или равно 25. Если $l_{max} < 25$, то переход возможен только в те точки, расстояние до которых больше либо равно величине $l_{max} * 0,9$. Вычисления производились с использованием метода динамического программирования.

Результат счета 6717,7. Время счета 21 минута 18 секунд.

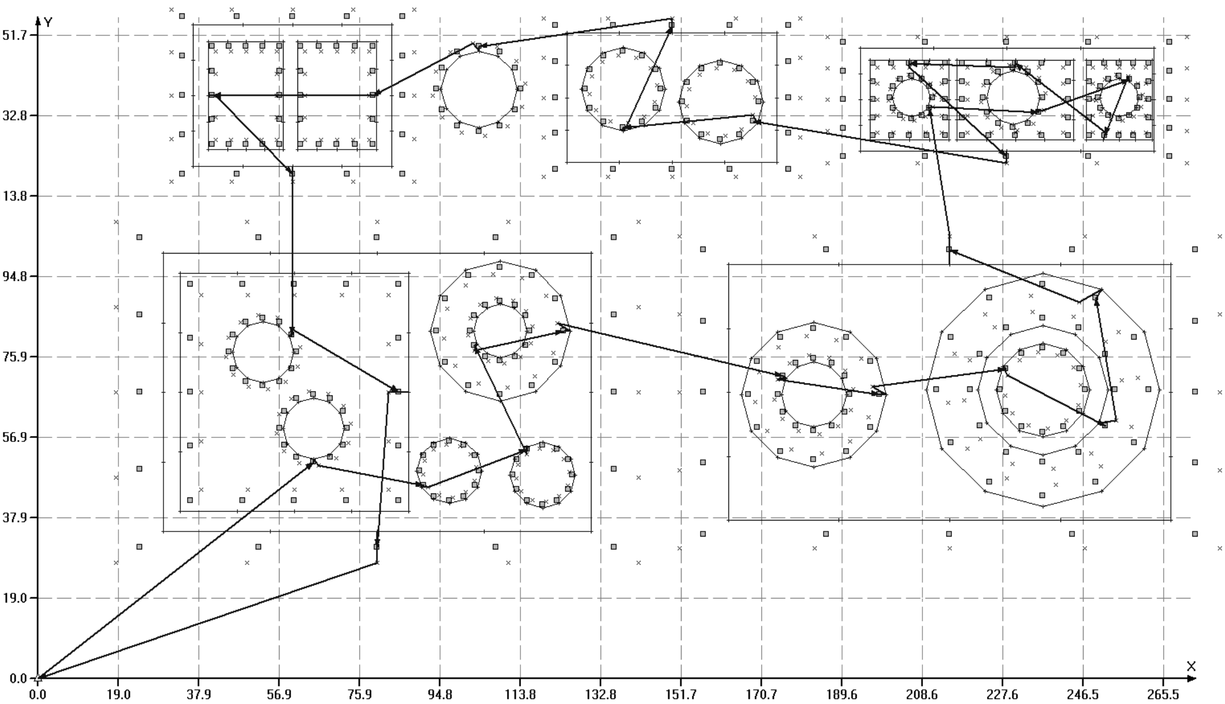

Рис. 2. Маршрут и трасса обхода множеств (динамическое программирование)

Далее для того же примера производились расчеты с использованием эвристического алгоритма. Значения параметров были взяты следующие: $N1 = 100000$, $N2 = 30$. Получены следующие результаты. Результат счета 7112,2. Время счета 15 секунд. Результат без использования итерационного подхода 8503,4.

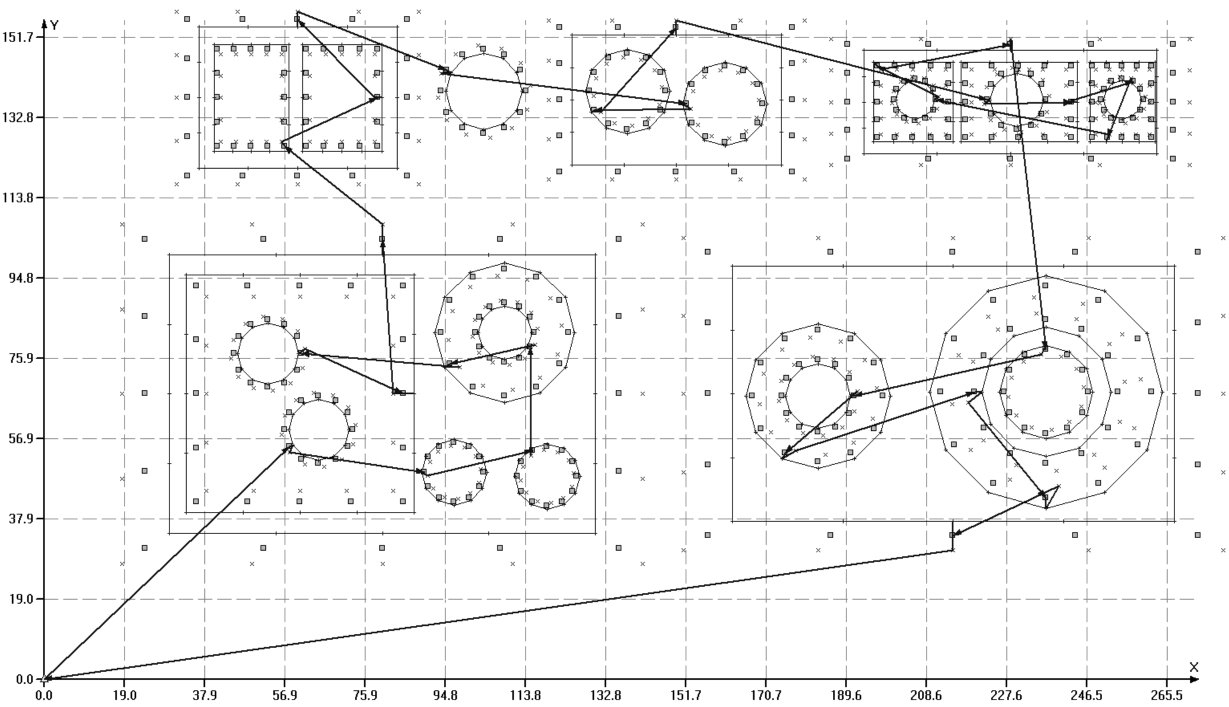

Рис. 3. Маршрут и трасса обхода множеств (эвристический алгоритм)

Во втором примере требовалось обойти 200 контуров ($N = 200$). Количество адресных пар равно 100 ($|\mathbb{K}| = 100$). Детали представляют собой шайбы. Условие формирования областей достижимости — как в предыдущем примере. Для вычислений использовался эвристический алгоритм. Общее количество итераций алгоритма 50000 ($N1 = 50000$). Количество итераций в пределах одного цикла 25 ($N2 = 25$).

Результат счета 20957,4. Время счета 5 минут 56 секунд. Результат без использования итерационного подхода 21585,5.

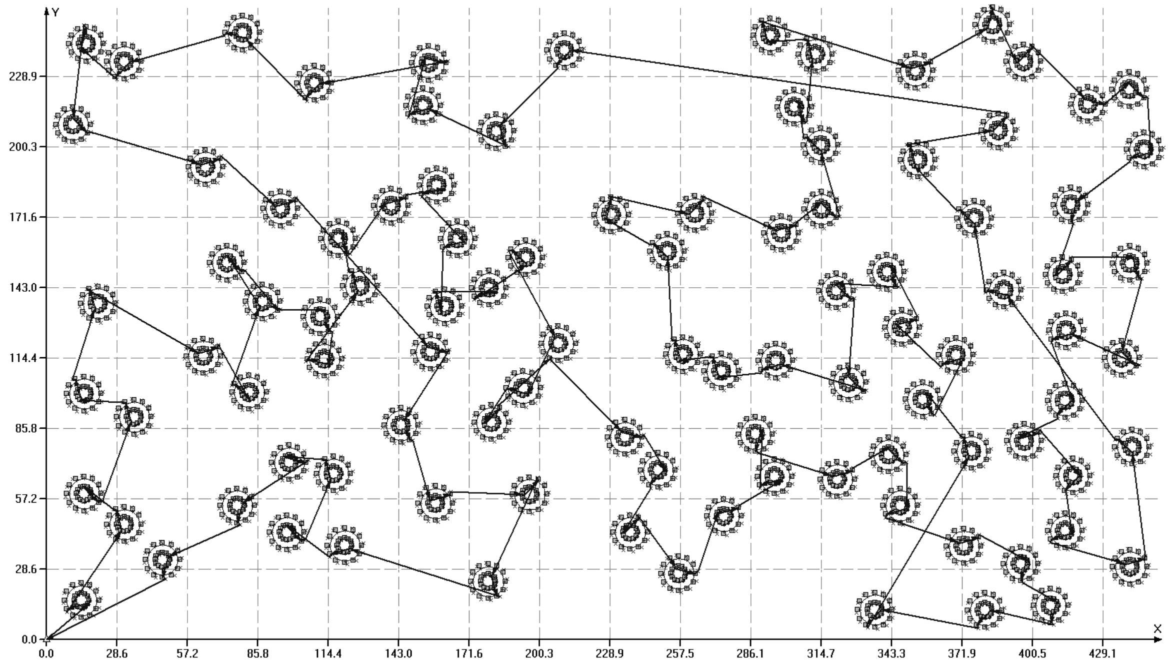

Рис. 4. Маршрут и трасса обхода множеств (эвристический алгоритм)

Список литературы

[1] Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х., “Задача коммивояжера. Вопросы теории”, *Автоматика и телемеханика*, 1989, № 9, 3–34; English transl.: Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh., “The traveling salesman problem. Issues in theory”, *Automation and Remote Control*, **50**:9 (1989), 1147–1173.

[2] Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х., “Задача коммивояжера. Точные алгоритмы”, *Автоматика и телемеханика*, 1989, № 10, 3–29; English transl.: Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh., “The traveling salesman’s problem. Exact methods”, *Automation and Remote Control*, **50**:10 (1989), 1303–1324.

[3] Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х., “Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы”, *Автоматика и телемеханика*, 1989, № 11, 3–26; English transl.: Melamed I. I., Sergeev S.I., Sigal I. Kh., “The traveling salesman problem. Approximate algorithms”, *Automation and Remote Control*, **50**:11 (1989), 1459–1479.

[4] Сигал И. Х., “Декомпозиционный подход к решению задачи коммивояжера большой размерности и некоторые его приложения”, *Известия АН СССР, Техническая кибернетика*, 1990, № 6, 143–155; English transl.: Sigal I. Kh., “A decomposition approach to solving a travelling salesman problem of lange dimensionality and some applications”, *Soviet journal of Computer and Systems Sciences*, 1991, № 6, 48–60.

[5] Schrijver A, *Combinatorial Optimization*, Springer, Berlin, 2003, 648 pp.

[6] Ченцов А. Г., *Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований, М.; Ижевск, 2008, 240 с., [Chentsov A. G., *Ekstremalnye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii*, NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, Izhevskiy institut kompyuternykh issledovaniy, Moskva; Izhevsk, 2008, 240 s., (in Russian).]

[7] Петунин А. А., “О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала”, *Вестник УГАТУ*, Сер. Управление, вычислительная техника и информатика, **13**, 2009, 280–286; [Petunin A. A., “O nekotorykh strategiyakh formirovaniya marshruta instrumenta pri razrabotke upravlyayushchikh programm dlya mashin termicheskoy rezki materiala”, *Vestnik UGATU*, Ser. Upravlenie, vychislitelnaya tekhnika i informatika, **13**, 2009, 280–286, (in Russian).]

[8] Ченцов А. Г., “К вопросу о маршрутизации комплексов работ”, *Вестн. УдГУ*, Математика. Механика. Компьютерные науки, **1**, 2013, 59–82; [Chentsov A. G., “K voprosu o marshrutizatsii kompleksov rabot”, *Vestn. UdGU*, Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki, **1**, 2013, 59–82, (in Russian).]

[9] Burkard R., Dell’Amico M., Martello S., *Assignment Problem*, SIAM, Philadelphia, 2009, 382 pp.

[10] Gutin G., Punnen A., *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*, Springer, Berlin, 2002, 850 pp.

[11] Chentsov A. A., Chentsov A. G., “Dynamic Programming Method in the Generalized Traveling Salesman Problem: The Influence of Inexact Calculations”, *Mathl. Comput. Modelling*, **33** (2001), 801–819.

[12] Chentsov A. G., Korotayeva L. N., “The Dynamic Programming Method in the Generalized Salesman Problem”, *Mathl. Comput. Modelling*, **25**:1 (1997), 93–105.

[13] Renaud J., Boctor F. F., Ouenniche J., “A heuristic for the pickup and delivery traveling salesman problem”, *Computers & Operations Research*, 2000, № 27, 905–916.

[14] Garey M., Johnson D., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, ed. W. H. Freeman, 1979, 338 pp.; Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, М., 1982, 416 с.

[15] Bellman R., “On a Routing Problem”, *Quart. Appl. Math.*, **16** (1958), 87–90.

[16] Held M., Karp R. M., “A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems”, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, № 10(1), 196–210.

[17] Castelino K., D’Souza R., Wright P., “Toolpath optimization for minimizing airtime during machining”, *Journal of Manufacturing Systems*, 2003, № 22(3), 173–180.

[18] Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D., “Cutting Path Optimization Using Tabu Search”, *Key Engineering Materials 473*, 2011, 739–748.

[19] Jing Y., Zhige C, “An Optimized Algorithm of Numerical Cutting-Path Control in Garment Manufacturing”, *Advanced Materials Research 796*, 2013, 454–457.

[20] Wang G. G., Xie S. Q., “Optimal process planning for a combined punch-and-laser cutting machine using ant colony optimization”, *International Journal of Production Research*, **43**:11 (2005), 2195–2216.

[21] Куратовский К., Мостовский А., *Теория множеств*, Мир, М., 1970, 416 с.; Kuratowski K., Mostowski A., *Set Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967, 417 pp.

[22] Дьедонне Ж., *Основы современного анализа*, Мир, М., 1964, 430 с.; Dieudonne J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960, 361 pp.

[23] Варга Дж., *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с.; Warga J., *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, 1972, 546 pp.

[24] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., *Алгоритмы: Построение и анализ*, МЦНМО, 2002, 960 с.; Chentsov A. G., *Ekstremalnye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii*, NITs ”Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, Izhevskiy institut kompyuternykh issledovaniy, Moskva; Izhevsk, 2008, 240 pp.

[25] Энгелькинг Р., *Общая топология*, Мир, М., 1986, 751 с., Engelking R., *General Topology*, Polish Scientific Publishers, 1977, 626 pp.

[26] Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D., "Construction heuristics for generating tool paths for laser cutters", *International Journal of Production Research*, 2014, 1–20.

About a Routing Problem of the Tool Motion on Sheet Cutting

Petunin A. A., Chentsov A. G., Chentsov P. A.

Ural Federal University, Mira str., 19, Ekaterinburg, 620002, Russia,
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Sofia Kovalevskaya str., 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

Keywords: routing problem, preceding condition

For the routing problem of tool permutations under the thermal cutting of parts from sheet material realized on CNC machines, questions connected with constructing precise (optimal) and heuristic algorithms used on the stage of mathematical simulation of route elements under sequential megalopolises circuit are investigated. Cutting points and points of tool cut-off are items (cities) of the above-mentioned megalopolises. In each megalopolis, interior works are provided. These works are connected with motion to the equidistant curve of the cut contour of a part from the cutting point and (with cutting completed) with motion from the equidistant curve to the tool cut-off (we keep in mind a working run). The problem about the time-optimal process of cutting which is a special variant of the generalized courier problem is investigated (the problem of the routing on the megalopolises with precedence conditions). An optimal procedure based on the dynamic programming and an effective heuristic algorithm realized on a multicore computer are proposed. A dynamic programming based procedure uses a special extension of the main problem. This extension provides the replacement of admissibility by precedence with the admissibility by deletion (from the list of tasks). Precedence conditions are used for decreasing computational complexity: it excludes the building of the whole array of the Bellman function values (this function is replaced by the layers system).

Сведения об авторах:

Петунин Александр Александрович,
Уральский федеральный университет,
доктор технических наук, профессор, ORCID: 0000-0002-1058-7672,

Ченцов Александр Георгиевич,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
член-корреспондент РАН, профессор, ORCID: 0000-0002-8274-1456

Ченцов Павел Александрович,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0003-3595-0607.