Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **3** (2015) 420–438

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–420–438

УДК 517.9

Устойчивость непрерывных волн для модели полупроводникового лазера с большим запаздыванием

Кащенко А. А.[1]

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: sa-ahr@yandex.ru

получена 25 мая 2015

Ключевые слова: уравнение Лэнга–Кобаяши, большое запаздывание, лазерная динамика, устойчивость

В данной работе решается задача существования и устойчивости непрерывных волн для модели полупроводникового лазера. Эта модель была предложена Лэнгом и Кобаяши и имеет вид двух дифференциальных уравнений с запаздыванием. Время запаздывания предполагается достаточно большим. Исследуется вопрос существования непрерывных волн для модели Лэнга–Кобаяши. Построено специальное множество I, зависящее от всех параметров задачи. Условие существования непрерывных волн состоит в том, что „главная часть“ решений должна лежать на множестве I. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости непрерывных волн при достаточно больших значениях параметра запаздывания. В случае нулевого коэффициента уширения линии найдены необходимые и достаточные условия устойчивости. Изучено расположение областей устойчивости на множестве I. Доказано, что в случае нулевого коэффициента уширения линии на множестве I может быть не более одной области устойчивости, найдены необходимые и достаточные условия ее существования.

Введение

В работе исследуются важные свойства некоторых уравнений с запаздыванием, играющих особую роль в моделировании многих прикладных задач. Основу этих исследований составляет анализ поведения решений вида непрерывных волн при достаточно больших значениях параметра запаздывания. Близкие по постановке задачи исследовались в работах автора [1–3]. Так, в работе [1] изучаются вопросы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ и проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

существования и устойчивости простейших периодических решений для уравнения Стюарта–Ландау с большим запаздыванием [4,5], а в работах [2,3] — вопросы существования и устойчивости непрерывных волн в модели, предложенной для описания динамики лазера [6–9]. Был разработан специальный метод, с помощью которого удалось ответить на вопросы о существовании и устойчивости асимптотически большого множества непрерывных волн. Кроме этого, разработан алгоритм построения асимптотики таких решений при достаточно больших значениях параметра запаздывания. Настоящая работа тесно примыкает к работам автора [1–3]. В ней продолжено исследование поведения решений другой, важной для приложений, системы с запаздыванием Лэнга–Кобаяши [10]. Эта система давно уже стала классической и является одной из основных при описании динамики полупроводниковых лазеров. Во многих работах исследовалась динамика решений модели Лэнга–Кобаяши для фиксированных значений параметра запаздывания [11–21]. В частности, были обнаружены различные сценарии перехода к хаосу [11–15], доказано, что по крайней мере одна мода (с максимальной интенсивностью) всегда остается устойчивой [19]. В настоящей работе строится асимптотика семейства решений вида непрерывных волн для достаточно больших значений запаздывания и рассматривается вопрос об устойчивости таких решений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений Лэнга–Кобаяши

$$\begin{gathered}\dot{E} = \tfrac{1}{2}v(1+i\alpha)(y-1)E + \gamma\exp(i\varphi)E(t-T),\\ \dot{y} = q - y - y|E|^2.\end{gathered}$$

Здесь параметры v, γ, q положительны, параметр α действительный, параметр φ принадлежит полуинтервалу $[0,2\pi)$. Основное предположение состоит в том, что параметр T является достаточно большим: $T \gg 1$. Сделаем перенормировку времени $t \to Tt$ и замену $\varepsilon = 1/T$, тогда система уравнений Лэнга–Кобаяши перепишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\varepsilon\dot{E} = \tfrac{1}{2}v(1+i\alpha)(y-1)E + \gamma\exp(i\varphi)E(t-1),\\ \varepsilon\dot{y} = q - y - y|E|^2.\end{gathered} \tag{1}$$

Заметим, что положительный параметр ε является достаточно малым: $\varepsilon \ll 1$. В данной работе мы будем исследовать вопросы существования и устойчивости в фазовом пространстве $C_{[-1,0]}(\mathbb{C})\times\mathbb{R}$ решений вида непрерывной волны при достаточно малых значениях параметра ε.

2. Существование решения

Будем искать решения системы (1) в виде непрерывной волны:

$$E = R\exp(i\Delta t), \qquad y = Y. \tag{2}$$

Здесь параметры R, Δ, Y не зависят от времени. Следуя [1–3], будем искать R и Δ в виде: $R = (\rho+\varepsilon w)$, $\Delta = \delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$. Величина δ действительная, $\rho > 0$,

n — целое число, Ω принадлежит полуинтервалу $[0, 2\pi)$, $w = w(\varepsilon)$ и $d = d(\varepsilon)$ действительные, ограниченные при $\varepsilon \to 0$ функции. Функция $\theta = \theta(\varepsilon, \delta)$ определяется таким образом: она принимает значения из полуинтервала $[0, 2\pi)$ и $\delta/\varepsilon + \theta$ делится нацело на 2π.

Подставляя выражения для R и Δ в (2) и (1), получаем уравнение для определения всех фигурирующих в (2) параметров:

$$\begin{aligned} i(\delta + \varepsilon(\theta + \Omega + 2\pi n) + \varepsilon^2 d) &= \frac{1}{2}v(1 + i\alpha)\left(\frac{q}{1 + (\rho + \varepsilon w)^2} - 1\right) + \gamma e^{i(\varphi - \Omega - \varepsilon d)}, \\ Y &= q(1 + (\rho + \varepsilon w)^2)^{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Так как ε — малый параметр, то должно выполняться равенство

$$i(\delta - 1/2v\alpha(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1)) - 1/2v(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1) = \gamma \exp(i(\varphi - \Omega)). \tag{4}$$

Приравнивая квадраты модулей левой и правой части уравнения (4), получаем условие разрешимости данного уравнения:

$$(\delta - 1/2v\alpha(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1))^2 + 1/4v^2(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1)^2 = \gamma^2. \tag{5}$$

Пусть значения δ и ρ^2 таковы, что выполняется равенство (5). Тогда для каждого набора параметров исходного уравнения (1) найдется единственное значение Ω из $[0, 2\pi)$, для которого равенство (4) будет выполняться.

Временно зафиксируем значение $\theta(\varepsilon) = \theta$. Рассмотрим уравнение относительно неизвестных значений w_0 и d_0 функций $w(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$:

$$i(\theta + \Omega + 2\pi n) = -v(1 + i\alpha)q\rho w_0(1 + \rho^2)^{-2} - \gamma i d_0 \exp(i(\varphi - \Omega)).$$

Выделяя действительную и мнимую части этого выражения, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= -vq\rho(1 + \rho^2)^{-2}w_0 + \gamma \sin(\varphi - \Omega)d_0, \\ \theta + \Omega + 2\pi n &= -v\alpha q\rho(1 + \rho^2)^{-2}w_0 - \gamma \cos(\varphi - \Omega)d_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Определитель данной системы равен нулю тогда и только тогда, когда

$$\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) = 0. \tag{7}$$

Если определитель системы (6) отличен от нуля, то в силу теоремы о неявной функции существует локально единственное решение системы (3) для каждого фиксированного θ. Дальше остается только подставить в него вместо значения θ функцию $\theta(\varepsilon)$.

Пусть теперь выполнено условие (7). Используя равенство (4), получаем, что

$$\begin{aligned} \gamma \cos(\varphi - \Omega) &= -1/2v(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1), \\ \gamma \sin(\varphi - \Omega) &= \delta - 1/2v\alpha(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1). \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, соотношение (7) эквивалентно равенству

$$\alpha\delta = 1/2v(q(1 + \rho^2)^{-1} - 1)(1 + \alpha^2). \tag{9}$$

Заметим, что это равенство задает прямую на плоскости $(\delta, (1+\rho^2)^{-1})$. Тем самым точек пересечения с эллипсом (5) может быть не более двух. Подставив условие (9) в (5), получим, что в данных точках $\delta_{1,2}^2 = \gamma^2(1+\alpha^2)$. Отсюда определяем условие на $\rho_{1,2}^2$

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (v\sqrt{1+\alpha^2}(q-1) - 2\alpha\gamma)/(v\sqrt{1+\alpha^2} + 2\alpha\gamma), \\ \rho_2^2 &= (v\sqrt{1+\alpha^2}(q-1) + 2\alpha\gamma)/(v\sqrt{1+\alpha^2} - 2\alpha\gamma). \end{aligned} \tag{10}$$

Остается проверить положительность ρ_1^2 и ρ_2^2. Несложно увидеть, что количество положительных значений среди правых частей (10) может изменяться от нуля до двух. Таким образом, число точек пересечения дуг эллипса (5) с прямой (9) может быть равно нулю (см. рис. 1.a)), одному (см. рис. 1.b)) или двум (см. рис. 1.c)).

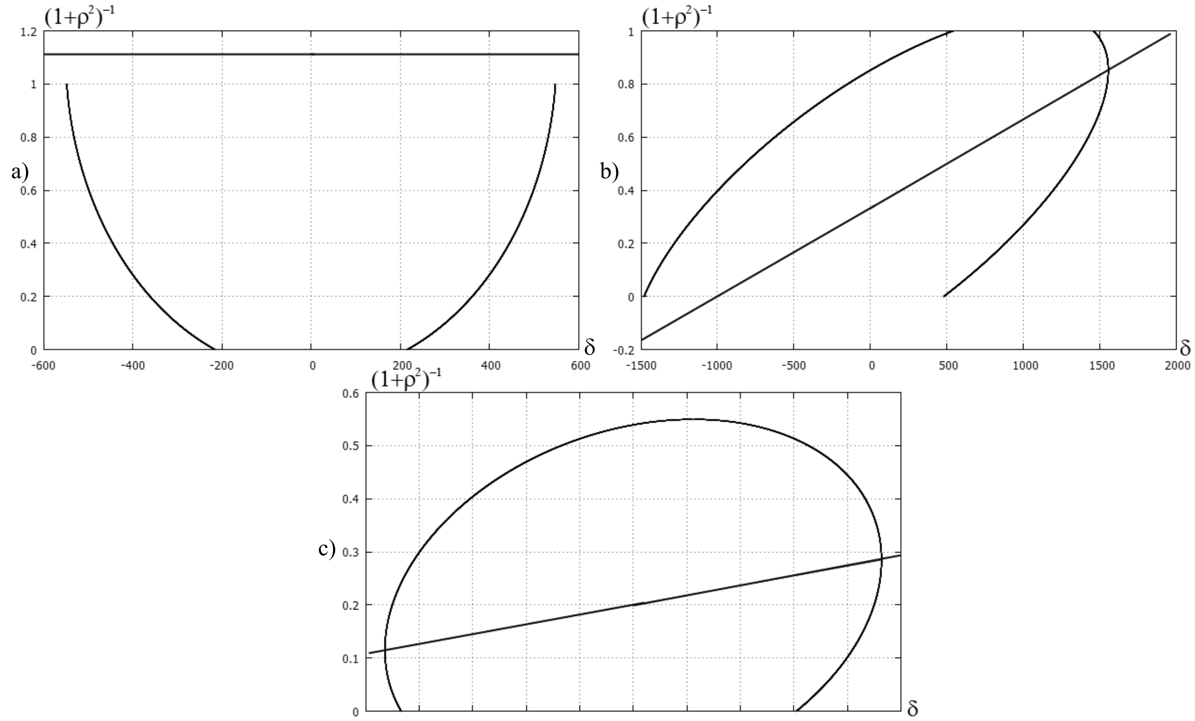

Рис. 1. Количество точек пересечения прямой (9) с дугами эллипсов (5). Значения параметров a) $v = 1012$, $\alpha = 0$, $q = 0.9$, $\gamma = 550$; b) $v = 1000$, $\alpha = 1$, $q = 3$, $\gamma = 1100$; c) $v = 1030$, $\alpha = 0.25$, $q = 5$, $\gamma = 900$.

Сделаем замену переменной

$$r = (1+\rho^2)^{-1}.$$

Тогда переменная r должна принимать значения из полуинтервала $(0, 1]$. Уравнение кривой (5) примет вид

$$(\delta - 1/2v\alpha(qr-1))^2 + 1/4v^2(qr-1)^2 = \gamma^2. \tag{11}$$

Несложно убедиться, что уравнение (11) задает эллипс на плоскости (δ, r). Учитывая условие

$$0 < r \leq 1 \tag{12}$$

и то, что δ должно быть действительным, получаем условие на координату r точки (δ, r) эллипса (11):

$$\max\{0, (v-2\gamma)(vq)^{-1}\} \leq r \leq \min\{1, (v+2\gamma)(vq)^{-1}\}. \tag{13}$$

Из условия положительности v, γ, q следует, что могут реализовываться пять ситуаций (не считая случаев нестрогих неравенств):

$$\begin{array}{rcl} I & : & 1 < (v-2\gamma)(vq)^{-1}, \\ II & : & 0 < (v-2\gamma)(vq)^{-1} < 1 < (v+2\gamma)(vq)^{-1}, \\ III & : & (v-2\gamma)(vq)^{-1} < 0 < 1 < (v+2\gamma)(vq)^{-1}, \\ IV & : & (v-2\gamma)(vq)^{-1} < 0 < (v+2\gamma)(vq)^{-1} < 1, \\ V & : & 0 < (v-2\gamma)(vq)^{-1} < (v+2\gamma)(vq)^{-1} < 1. \end{array}$$

Обозначим через $I(v, \alpha, q, \gamma)$ множество точек (δ, r), получаемое пересечением эллипса (11) и полосы (12). Тогда в первом случае множество $I(v, \alpha, q, \gamma)$ пустое, во втором и четвертом случаях получается одна дуга эллипса, в третьем две дуги эллипса, а в пятом случае весь эллипс находится внутри полосы (12) (см. рис. 2). Отметим, что для существования решений вида (2) уравнения (1) необходимо вы-

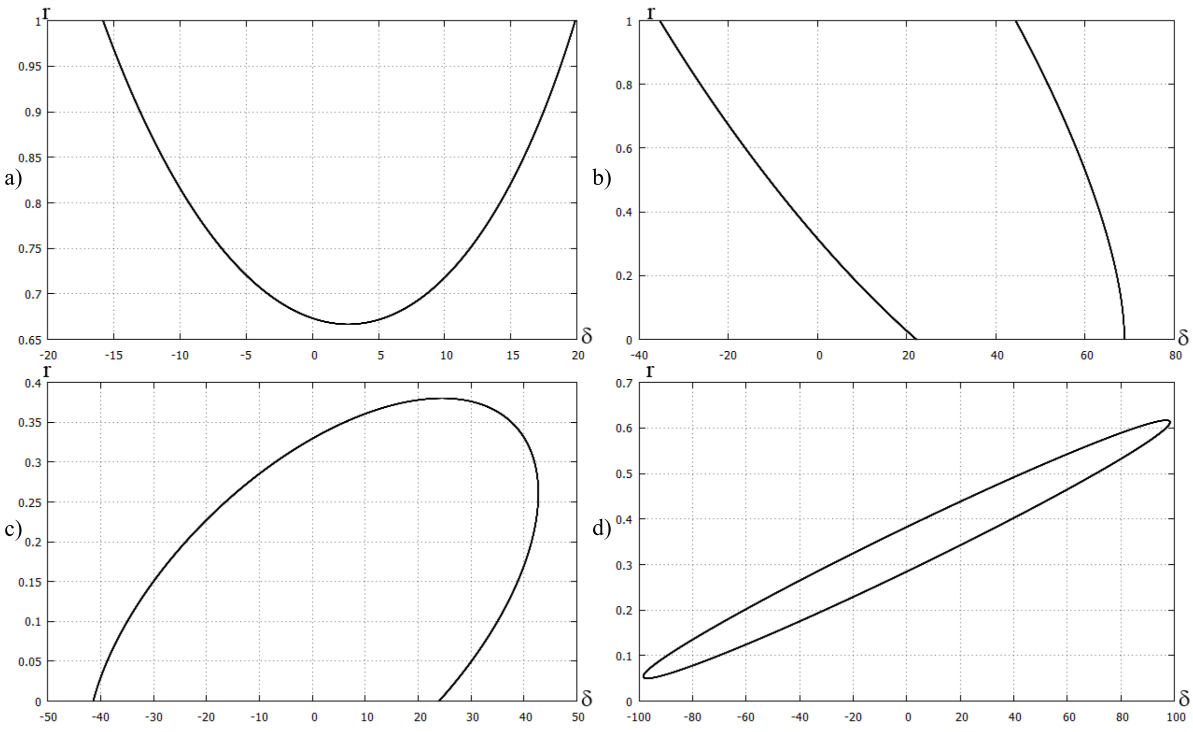

Рис. 2. Виды множеств $I(v, \alpha, q, \gamma)$. a) случай II, b) случай III, c) случай IV, d) случай V.

полнение неравенства

$$(v-2\gamma)(vq)^{-1} < 1. \tag{14}$$

Далее будем везде считать, что это неравенство выполнено.

Из приведенных выше построений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство* (14)*. Тогда для каждого целого значения n и каждой точки $(\delta_0, (1+\rho_0^2)^{-1})$ на кривой* (5)*, кроме, возможно, двух, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение* (2) *уравнения* (1)*, где $R = (\rho_0+\varepsilon w)$, $\Delta = \delta_0/\varepsilon+\theta+\Omega+2\pi n+\varepsilon d$, $Y = q(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^{-1}$, а $d = d(\varepsilon)$ и $w = w(\varepsilon)$ — некоторые ограниченные при $\varepsilon \to 0$ функции.*

Ниже предполагаем, что выполнено условие невырожденности, то есть будем рассматривать те точки эллипсов, для которых $\cos(\varphi - \Omega) + \alpha \sin(\varphi - \Omega) \neq 0$.

3. Исследование устойчивости решения

3.1. Постановка задачи об устойчивости

Используя теорему Тихонова [22], выразим решение второго уравнения как функцию от $|E|$ и подставим это выражение в первое уравнение системы (1). Получим следующее уравнение на функцию E:

$$\varepsilon \dot{E} = 1/2v(1 + i\alpha)(q(1 + |E|^2)^{-1} - 1)E + \gamma \exp(i\varphi)E(t - 1). \tag{15}$$

При достаточно малых ε для каждого фиксированного n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ у уравнения (15) есть решение

$$E_0 = (\rho + \varepsilon w) \exp[i(\delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d)t]. \tag{16}$$

В данной работе будем искать такие условия устойчивости, чтобы для каждого n при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ решения (16) уравнения (15) были устойчивы в фазовом пространстве $C[-1, 0]$.

3.2. Построение квазиполинома

Линеаризуем уравнение (15) на решении (16). Для этого подставим в уравнение (15) вместо E выражение $E_0(1 + z)$, где $z = z_1 + iz_2$, z_1 и z_2 действительные функции. Линеаризованная система будет иметь вид

$$\varepsilon \dot{z} = -v(1+i\alpha)q(\rho+\varepsilon w)^2(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^{-2}z_1 + \gamma \exp(i(\varphi - \Omega - \varepsilon d))(z(t-1) - z). \tag{17}$$

Выделим действительную и мнимую части уравнения (17):

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z}_1 &= -pz_1 + \gamma \cos \Psi(z_1(t - 1) - z_1) - \gamma \sin \Psi(z_2(t - 1) - z_2), \\ \varepsilon \dot{z}_2 &= \alpha p z_1 + \gamma \sin \Psi(z_1(t - 1) - z_1) + \gamma \cos \Psi(z_2(t - 1) - z_2), \end{aligned}$$

где $p = vq(\rho+\varepsilon w)^2(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^{-2}$, а $\Psi = \varphi - \Omega - \varepsilon d$. Тогда приходим к следующему характеристическому уравнению (относительно значений $z_1 = P$, $z_2 = Q$):

$$\varepsilon \lambda \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -p + \gamma \cos \Psi(e^{-\lambda} - 1) & -\gamma \sin \Psi(e^{-\lambda} - 1) \\ \alpha p + \gamma \sin \Psi(e^{-\lambda} - 1) & \gamma \cos \Psi(e^{-\lambda} - 1) \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы данное уравнение имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\det(B-\varepsilon\lambda I)=0$, где I — единичная матрица. Равенство нулю этого определителя эквивалентно равенству

$$\varepsilon^2\lambda^2+2\varepsilon\lambda\left(\frac{vq(\rho+\varepsilon w)^2}{2(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^2}-\gamma\cos(\varphi-\Omega-\varepsilon d)(e^{-\lambda}-1)\right)+\gamma^2(e^{-\lambda}-1)^2-$$
$$-\frac{vq(\rho+\varepsilon w)^2}{(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^2}(e^{-\lambda}-1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega-\varepsilon d)+\alpha\sin(\varphi-\Omega-\varepsilon d))=0. \quad (18)$$

Исследуем расположение корней характеристического квазиполинома (18).

3.3. Изучение расположения корней квазиполинома

Для того, чтобы сделать вывод об устойчивости, необходимо изучить расположение корней характеристического квазиполинома (18). Поскольку мы линеаризовывали уравнение на периодическом решении, то при любых значениях параметров задачи у квазиполинома (18) будет корень $\lambda=0$. Поэтому речь пойдет об орбитальной устойчивости периодических решений. Изучим расположение остальных корней. Если у квазиполинома (18) при всех достаточно малых значениях ε все корни, кроме одного, расположены в левой полуплоскости, то отсюда будет следовать устойчивость решения. Если же хотя бы один корень будет в правой комплексной полуплоскости, то это повлечет неустойчивость. Так как при каждом значении ε справа от любой вертикальной прямой на комплексной полуплоскости располагается лишь конечное число корней квазиполинома (18) (см. [23]), то среди корней квазиполинома есть корень (один или несколько) с максимальной действительной частью. Если при всех достаточно малых значениях ε максимальная действительная часть всех корней (кроме одного $\lambda=0$ кратности один) будет отрицательная, то это означает устойчивость. Далее мы будем изучать поведение корней квазиполинома на всевозможных последовательностях $\varepsilon_m\to 0$. Если во всех рассматриваемых случаях корни будут в левой полуплоскости, значит, и корень с максимальной действительной частью будет в левой полуплоскости.

Пусть $\lambda_*=\lambda_*(\varepsilon)$ — некоторый корень (18). Тогда возможны следующие три случая.

Случай 1. $\varepsilon_m\lambda_*\to 0$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m\to 0$.

Случай 2. $\varepsilon_m\lambda_*\to \mathit{const}\neq 0$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m\to 0$.

Случай 3. $|\varepsilon_m\lambda_*|\to\infty$ на некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}$ такой, что $\varepsilon_m\to 0$.

Отметим, что третий случай интереса не представляет, так как из (18) следует, что в данном случае $\operatorname{Re}\lambda_*\to-\infty$ при $\varepsilon_m\to 0$.

Далее последовательно рассмотрим первые два случая.

1. Случай 1.

Потенциально возможны 3 варианта поведения λ_*.
а) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что

$\lambda_* \to 0$ при $\varepsilon_{m_l} \to 0$.
б) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\lambda_* \to const \neq 0$ при $\varepsilon_{m_l} \to 0$.
в) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $|\lambda_*| \to \infty$ и $\varepsilon_{m_l}\lambda_* \to 0$ при $\varepsilon_{m_l} \to 0$.

Рассмотрим случай 1а). Поскольку мы линеаризовывали задачу на периодическом решении, то при любых значениях параметров есть корень $\lambda = 0$ кратности один, который на устойчивость не влияет.

Определим, к каким ненулевым константам может стремиться λ_* при $\varepsilon_m \to 0$ (случай 1б)). Предельное уравнение имеет вид

$$\gamma^2(e^{-\lambda}-1)^2 - vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}(e^{-\lambda}-1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)) = 0. \qquad (19)$$

Как видно из (19), верно либо $e^{-\lambda_*} = 1+vq\rho^2\gamma^{-1}(1+\rho^2)^{-2}(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))+o(1)$, либо $\lambda_* = 2\pi ki + o(1)$. Рассмотрим первую ситуацию. Для устойчивости необходимо, чтобы $|e^{-\lambda_*}| \geq 1$. Далее будем рассматривать только строгие неравенства. Тогда с учетом ограничений на параметры задачи получим необходимое условие устойчивости

$$\left[\begin{array}{lcl} \cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega) & > & 0, \\ \cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega) & < & -2\gamma(1+\rho^2)^2(vq)^{-1}\rho^{-2}. \end{array}\right. \qquad (20)$$

Теперь рассмотрим вторую ситуацию. Для этого подставим представление корня $\lambda_* = 2\pi ki + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ в квазиполином (18). Здесь λ_1 и λ_2 — неизвестные константы, подлежащие определению. Получаем, что

$$\lambda_1 = -2\pi ki\gamma^{-1}(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))^{-1},$$
$$\lambda_2 = \frac{2\pi ki(1+\gamma d_0(\sin(\varphi-\Omega)-\alpha\cos(\varphi-\Omega)))}{\gamma^2(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))^2} -$$
$$-\frac{2\pi^2k^2(-2(1+\alpha^2)\gamma(1+\rho^2)^2\sin^2(\varphi-\Omega)+q\rho^2v(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)))}{\gamma^2q\rho^2v(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))^3}.$$

Для устойчивости необходимо $\operatorname{Re}\lambda_2 \leq 0$. Потребуем, чтобы выполнялось строгое неравенство:

$$\frac{q\rho^2v}{2(1+\rho^2)^2} - \frac{(1+\alpha^2)\gamma\sin^2(\varphi-\Omega)}{(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))} > 0. \qquad (21)$$

Теперь рассмотрим случай 1в). В этом случае $\varepsilon\lambda_* \to 0$, поэтому в пределе корень удовлетворяет уравнению (19). Мы считаем, что полученные ранее условия устойчивости выполняются, поэтому либо корень λ_* будет в левой полуплоскости при малых ε, либо он будет перескакивать из окрестности точки $2\pi h$ в окрестность точки $2\pi(h+1)$ или $2\pi(h-1)$, где h — некоторое целое число (так как мы считаем, что $|\lambda| \to \infty$). В этой ситуации представим $\lambda_*(\varepsilon)$ в виде $\lambda_*(\varepsilon) = 2\pi k(\varepsilon)i + \lambda_{k,1} + i\lambda_{k,2}$. Здесь $k(\varepsilon) \to \infty$, но принимает только целые значения, $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$ — неизвестные действительные величины, стремящиеся к нулю при $\varepsilon \to 0$ (порядок стремления относительно ε заранее не известен). Введем обозначение $\mu = \varepsilon k(\varepsilon)$. Тогда $\mu \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon = o(\mu)$ при $\varepsilon \to 0$. После подстановки в уравнение (18) корня λ_*

приходим к равенству

$$
\begin{gathered}
(2\pi\mu i+\varepsilon\lambda_{k,1}+i\varepsilon\lambda_{k,2})^2+\gamma^2(e^{-(\lambda_{k,1}+i\lambda_{k,2})}-1)^2+2(2\pi\mu i+\varepsilon\lambda_{k,1}+\\
+i\varepsilon\lambda_{k,2})\left(\frac{vq(\rho+\varepsilon w)^2}{2(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^2}-\gamma\cos(\varphi-\Omega-\varepsilon d)(e^{-(\lambda_{k,1}+i\lambda_{k,2})}-1)\right)-\\
-\frac{\gamma vq(\rho+\varepsilon w)^2}{(1+(\rho+\varepsilon w)^2)^2}(e^{-(\lambda_{k,1}+i\lambda_{k,2})}-1)(\cos(\varphi-\Omega-\varepsilon d)+\alpha\sin(\varphi-\Omega-\varepsilon d))=0.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Выписывая старшие члены в уравнении (22), находим соотношение на μ и первые приближения $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$:

$$
2\pi qv\rho^2(1+\rho^2)^{-2}i\mu+qv\rho^2(1+\rho^2)^{-2}\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))(\lambda_{k,10}+i\lambda_{k,20})=0. \tag{23}
$$

Так как μ, $\lambda_{k,1}$ и $\lambda_{k,2}$ действительные, то из (23) получаем, что

$$
\begin{gathered}
\lambda_{k,2}=O(\mu), \qquad \lambda_{k,1}=o(\mu) \qquad \text{при} \qquad \mu\to 0,\\
\lambda_{k,20}=-2\pi\mu\gamma^{-1}(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))^{-1}.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

Представим $\lambda_{k,2}=\lambda_{k,20}+\lambda_{k,21}$, где $\lambda_{k,21}=o(\lambda_{k,20})$ при $\lambda_{k,21}\to 0$. Пользуясь соотношениями (24), выпишем следующее приближение в уравнении (22):

$$
\begin{gathered}
-4\pi^2\mu^2-4\pi\mu\lambda_{k,20}\gamma\cos(\varphi-\Omega)-\gamma^2\lambda_{k,20}^2+\\
+qv\rho^2(1+\rho^2)^{-2}\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))(\lambda_{k,10}+\lambda_{k,20}^2+i\lambda_{k,21})=0.
\end{gathered}
$$

Отсюда приходим к выводу, что $\lambda_{k,21}=o(\mu^2)$ и

$$
\lambda_{k,10}=\frac{4\pi^2\mu^2(1+\rho^2)^2\left(\dfrac{\gamma(1+\alpha^2)\sin^2(\varphi-\Omega)}{(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))}-\dfrac{qv\rho^2}{(1+\rho^2)^2}\right)}{\gamma^2qv\rho^2(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))^2}.
$$

Так как из (21) следует, что $\lambda_{k,10}<0$, то случай 1в) не дал никаких новых необходимых условий устойчивости.

2. Случай 2.

Потенциально возможны 2 варианта поведения λ_* :
а) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\operatorname{Re}\lambda_*\to+\infty$ при $\varepsilon_{m_l}\to 0$;
б) существует такая подпоследовательность $\{\varepsilon_{m_l}\}$ последовательности $\{\varepsilon_m\}$, что $\operatorname{Re}\lambda_*\to const\geq 0$, а $\operatorname{Im}\lambda_*\to\infty$ при $\varepsilon_{m_l}\to 0$.

Пусть $\operatorname{Re}\lambda_*\to+\infty$ и $\lim\limits_{\varepsilon_{m_l}\to 0}\varepsilon_{m_l}\lambda_*=s$. Тогда предельное уравнение примет вид

$$
s^2+2s(1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}+\gamma\cos(\varphi-\Omega))+\gamma^2+vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))=0. \tag{25}
$$

Из уравнения (25) получаем необходимые условия устойчивости

$$
\begin{cases}
1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}+\gamma\cos(\varphi-\Omega)>0,\\
\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)>-\gamma(1+\rho^2)^2/(vq\rho^2).
\end{cases}
\tag{26}
$$

Из условий (20) и (26) следует, что для устойчивости необходимо выполнение системы неравенств

$$\begin{cases} 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}+\gamma\cos(\varphi-\Omega)>0, \\ \cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)>0. \end{cases} \tag{27}$$

Рассмотрим случай 2б). Введем дополнительные обозначения. Пусть $g=\lim\limits_{\varepsilon_{m,l}\to 0}\exp(-\operatorname{Re}\lambda_*(\varepsilon_{m,l}))$. Тогда $g\in(0,1]$, поскольку $\operatorname{Re}\lambda_*\geq 0$. Отметим, что $\operatorname{Im}\lambda_*\to\infty$, $\operatorname{Re}\lambda_*\to \mathit{const}\geq 0$ и $\varepsilon\lambda_*\to \mathit{const}\neq 0$ при $\varepsilon_{m,l}\to 0$. Отсюда следует, что последовательность $\varepsilon_{m,l}$ можно проредить так, что на получившейся подпоследовательности $\{\varepsilon_j\}$ существует предел $b=\lim\limits_{\varepsilon_j\to 0}\varepsilon_j\operatorname{Im}\lambda_*(\varepsilon_j)\neq 0$. Пусть χ — некоторое число из $[0,2\pi)$. Тогда семейство предельных уравнений в случае 2б) будет иметь вид

$$-b^2+2ib\left(\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2}-\gamma\cos(\varphi-\Omega)(ge^{-i\chi}-1)\right)+ \\ +\gamma^2(ge^{-i\chi}-1)^2-\frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2}(ge^{-i\chi}-1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))=0. \tag{28}$$

Если ни при каком значении пары (g,χ) из $(0,1]\times[0,2\pi)$ у уравнения (28) не будет действительных корней $b\neq 0$, то у уравнения (18) не будет корней из случая 2б).

Выделим действительную и мнимую части уравнения (28). Действительная часть:

$$-b^2-2b\gamma\cos(\varphi-\Omega)g\sin\chi+\gamma^2((g\cos\chi-1)^2-g^2\sin^2\chi)- \\ -\frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2}(g\cos\chi-1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))=0. \tag{29}$$

Мнимая:

$$b\left(\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2}-\gamma\cos(\varphi-\Omega)(g\cos\chi-1)\right)= \\ =-\gamma g\sin\chi\left(\gamma(1-g\cos\chi)+\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2}(\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega))\right). \tag{30}$$

Пусть

$$1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}-\gamma\cos(\varphi-\Omega)(g\cos\chi-1)=0. \tag{31}$$

Тогда исходя из положительности параметров v, q, ρ, получаем, что $\cos(\varphi-\Omega)\neq 0$. Отсюда приходим к равенству

$$g\cos\chi=1+\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2\gamma\cos(\varphi-\Omega)}.$$

Если выполняется неравенство

$$\left|1+\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2\gamma\cos(\varphi-\Omega)}\right|<1,$$

то найдется пара (g, χ) из $(0, 1] \times [0, 2\pi)$ такая, что равенство (31) выполнится. Для того, чтобы равенство (30) выполнилось в случае зануления коэффициента перед b, необходимо, чтобы правая часть равенства (30) обратилась в 0. Из условия устойчивости (27) и ограничений на параметры следует, что правая часть (30) может быть равна 0 только в случае $\sin\chi = 0$. Действительная часть (29) в этом случае примет вид

$$b^2 = \gamma(g\cos\chi - 1)\left(\gamma(g\cos\chi - 1) - \frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2}(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha\sin(\varphi - \Omega))\right).$$

В силу неравенства $g\cos\chi < 1$ и условия (27), получаем, что при условии (31) у системы (29), (30) будут действительные ненулевые корни b. Поэтому потребуем невырождения коэффициента при b в (30), то есть выполнения неравенства

$$\left|1 + \frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2\gamma\cos(\varphi - \Omega)}\right| > 1. \tag{32}$$

Система (21), (27), (32) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \cos(\varphi - \Omega) + \alpha\sin(\varphi - \Omega) > 0, \\ 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} + 2\gamma\cos(\varphi - \Omega) > 0, \\ \dfrac{qv\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \dfrac{\gamma(1+\alpha^2)\sin^2(\varphi - \Omega)}{(\cos(\varphi - \Omega) + \alpha\sin(\varphi - \Omega))} > 0. \end{cases} \tag{33}$$

Пусть условие (32) выполнено, тогда коэффициент при b в (30) отличен от нуля для любой пары (g, χ) из $(0, 1] \times [0, 2\pi)$.

Пусть выполнено условие $v - 2\gamma > 0$. Тогда эллипс находится выше оси абсцисс и точка $(\delta_{low}, (1 + \rho_{low}^2)^{-1})$, где

$$(1 + \rho_{low}^2)^{-1} = (v - 2\gamma)/(vq), \qquad \delta_{low} = 1/2v\alpha(q(1 + \rho_{low}^2)^{-1} - 1),$$

принадлежит множеству $I(v, \alpha, q, \gamma)$. В этой точке $\cos(\varphi - \Omega) = 1$, поэтому уравнение (28) в данной точке примет вид

$$-b^2 + 2ib\left(\frac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \gamma(ge^{-i\chi} - 1)\right) + \\ + \gamma(ge^{-i\chi} - 1)\left(\gamma(ge^{-i\chi} - 1) - \frac{vq\rho^2}{(1+\rho^2)^2}\right) = 0. \tag{34}$$

Выделим действительную и мнимую части в уравнении (34):

$$-b^2 - 2b\gamma g\sin\chi + \gamma^2((g\cos\chi - 1)^2 - g^2\sin^2\chi) - vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}\gamma(g\cos\chi - 1) = 0, \tag{35}$$

$$b(1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} - \gamma(g\cos\chi - 1)) = -\gamma g\sin\chi(1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2} - \gamma(g\cos\chi - 1)). \tag{36}$$

Из уравнения (36) получаем, что $b = -\gamma g\sin\chi$. Подставляя значение b в уравнение (35), приходим к равенству

$$\gamma(g\cos\chi - 1)(\gamma(g\cos\chi - 1) - vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}) = 0.$$

Первый и третий множители данного равенства отличны от нуля, а второй множитель равен нулю только в случае $\cos\chi = 1$, то есть только при $b = 0$, а, согласно построениям данного пункта, $b \neq 0$. Таким образом, в точке $(\delta_{low}, (1+\rho_{low}^2)^{-1})$ у уравнения (28) нет действительных, отличных от нуля корней b, и выполняется система (33).

Следовательно, в данной точке у квазиполинома (18) все корни, кроме одного нулевого, находятся в левой полуплоскости. Для того, чтобы корни оказались в правой полуплоскости, они должны пересечь мнимую ось. В случае 2б) мнимой оси отвечает равенство $g = 1$, поэтому далее мы будем рассматривать уравнение (28) при $g = 1$. После обозначения $u = 1/2vq\rho^2(1+\rho^2)^{-2}$ действительная и мнимая части уравнения (28) примут вид

$$-b^2 - 2b\gamma\cos(\varphi-\Omega)\sin\chi + \gamma^2((\cos\chi-1)^2 - \sin^2\chi) - \\ - 2u(\cos\chi-1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega) + \alpha\sin(\varphi-\Omega)) = 0. \quad (37)$$

$$b\,(u - \gamma\cos(\varphi-\Omega)(\cos\chi-1)) = \\ = -\gamma\sin\chi\,(\gamma(1-\cos\chi) + u(\cos(\varphi-\Omega) + \alpha\sin(\varphi-\Omega)))\,. \quad (38)$$

Поскольку считаем, что выполнено условие (33), то коэффициент перед b в (38) отличен от нуля. Выразим из (38) значение b:

$$b = -\frac{\gamma\sin\chi\,(\gamma(1-\cos\chi) + u(\cos(\varphi-\Omega) + \alpha\sin(\varphi-\Omega)))}{u - \gamma\cos(\varphi-\Omega)(\cos\chi-1)}. \quad (39)$$

Тогда, подставив (39) в (37), получим уравнение относительно $\cos\chi$. После обозначений $x = \cos\chi$ и $\psi = \varphi - \Omega$ это уравнение примет вид

$$\gamma(u-\gamma\cos\psi(x-1))^{-2}(x-1)(\gamma^3x^3 - \gamma^2(\gamma + 4u\cos\psi + 2\gamma\cos^2\psi + 2\alpha u\sin\psi)x^2 + \\ + \gamma(-\gamma^2 + 2u^2 + 4\gamma u\cos\psi + 4\gamma^2\cos^2\psi + 3u^2\cos^2\psi + 4\gamma u\cos^3\psi + 4\alpha u^2\cos\psi\sin\psi + \\ + 4\alpha\gamma u\cos^2\psi\sin\psi + \alpha^2u^2\sin^2\psi)x + 2\alpha\gamma^2u\sin\psi - 2u^3\cos\psi - 2\gamma^3\cos^2\psi - 5\gamma u^2\cos^2\psi - \\ - 4\gamma^2u\cos^3\psi + \gamma^3 - 2\alpha u^3\sin\psi - 4\alpha\gamma u^2\cos\psi\sin\psi - \\ - 4\alpha\gamma^2u\cos^2\psi\sin\psi + \alpha^2\gamma u^2\sin^2\psi) = 0. \quad (40)$$

Первые два множителя отличны от нуля в силу условия (33), равенство $x = 1$ эквивалентно равенству $b = 0$, что не соответствует построениям пункта 2б). Обозначим последний множитель (40) через $H(x)$. Поскольку $x = \cos\chi$, то x принимает значения из [-1,1]. Найдем значения H в концах отрезка изменения переменной x.

$$H(-1) = -2(u + 2\gamma\cos\psi)^2(\gamma + u(\cos\psi + \alpha\sin\psi)),$$

$$H(1) = -2u^2(u(\cos\psi + \alpha\sin\psi) - \gamma(1+\alpha^2)\sin^2\psi).$$

Из (33) следует, что $H(-1) < 0$ и $H(1) < 0$. Если выполняется (33) и на всем отрезке $[-1,1]$ функция $H(x)$ отрицательна, то у уравнения (28) не будет корней на мнимой оси. Для того, чтобы $H(x)$ было отрицательным при условии $H(-1) < 0$ и $H(1) < 0$, необходимо и достаточно, чтобы или локальный максимум функции H был вне $(-1,1)$ или чтобы он был отрицательным. Для произвольных параметров и точки эллипса это условие легко проверяется численно.

Таким образом, верны следующие утверждения.

Теорема 2 (Достаточное условие устойчивости). *Пусть* $0 < v - 2\gamma < qv$. *Пусть для некоторой точки* $(\delta_*, (1+\rho_*^2)^{-1})$ *множества* $I(v,\alpha,q,\gamma)$ *выполнена система неравенств* (33), *а уравнение* $H(x) = 0$ *не имеет корней ни при каком значении* x *из* $[-1,1]$ *для всех точек кратчайшей дуги* $I(v,\alpha,q,\gamma)$, *соединяющей точки* $(\delta_*, (1+\rho_*^2)^{-1})$ *и* $(\delta_{low}, (1+\rho_{low}^2)^{-1})$. *Тогда для каждого целого* n *существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение уравнения* (15) *вида* (16), *соответствующее точке* $(\delta_*, (1+\rho_*^2)^{-1})$, *устойчиво.*

Для формулировки теорем о неустойчивости введем в рассмотрение следующую совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \cos(\varphi-\Omega) + \alpha\sin(\varphi-\Omega) < 0, \\ \dfrac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} + 2\gamma\cos(\varphi-\Omega) < 0, \\ \dfrac{vq\rho^2}{2(1+\rho^2)^2} - \dfrac{\gamma(1+\alpha^2)\sin^2(\varphi-\Omega)}{\cos(\varphi-\Omega)+\alpha\sin(\varphi-\Omega)} < 0. \end{array}\right. \tag{41}$$

Теорема 3 (Достаточное условие неустойчивости 1). *Пусть для некоторой точки* $(\delta_*, (1+\rho_*^2)^{-1})$ *множества* $I(v,\alpha,q,\gamma)$ *выполняется первое или третье неравенство в* (41). *Тогда для каждого целого* n *существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение* (16) *уравнения* (15), *соответствующее точке* $(\delta_*, (1+\rho_*^2)^{-1})$, *неустойчиво.*

Теорема 4 (Достаточное условие неустойчивости 2). *Пусть для некоторой точки* $(\delta_*, (1+\rho_*^2)^{-1})$ *множества* $I(v,\alpha,q,\gamma)$ *выполняется второе неравенство в* (41). *Тогда для каждого целого* n *существует последовательность* $\varepsilon_m \to 0$, $\varepsilon_m \neq 0$, *такая, что при* $\varepsilon = \varepsilon_m$ *решение уравнения* (15) *вида* (16), *соответствующее точке* $(\delta_*, (1+\rho_*^2)^{-1})$, *неустойчиво.*

4. Расположение областей устойчивости при $\alpha = 0$

Рассмотрим вопрос о количестве областей устойчивости на множестве $I(v,0,q,\gamma)$. Сначала выпишем систему (33) в координатах (δ, r). Так как $\rho^2(1+\rho^2)^{-2} = r - r^2$, то, пользуясь равенствами (8), получаем, что система (33) примет вид

$$\begin{cases} \delta\alpha - 1/2v(1+\alpha^2)(qr-1) > 0, \\ -qv/2(r^2 + r - 2/q) > 0, \\ \dfrac{vq(r-r^2)}{2} - \dfrac{(1+\alpha^2)(\delta - 1/2v\alpha(qr-1))^2}{\delta\alpha - 1/2v(1+\alpha^2)(qr-1)} > 0. \end{cases} \tag{42}$$

Лемма 1. *Пусть* $\alpha = 0$. *Пусть* $0 < v - 2\gamma < qv$, *тогда точки множества* $I(v,0,q,\gamma)$, *для которых система* (42) *верна, образуют непустую связную область. Если же выполнено неравенство* $v < 2\gamma$, *то система неравенств* (42) *несовместна на множестве* $I(v,0,q,\gamma)$.

Доказательство. Рассмотрим первое неравенство системы (42). При $\alpha = 0$ оно принимает вид

$$r < q^{-1}.$$

Заметим, что
$$\max\{0,(v-2\gamma)(vq)^{-1}\} < q^{-1} < (v+2\gamma)(vq)^{-1},$$
поэтому первое неравенство (42) выполняется в нижней точке множества $I(v,0,q,\gamma)$ и не выполняется при $r=(v+2\gamma)(vq)^{-1}$.

Из системы неравенств (33) (которая эквивалентна системе неравенств (42)) легко видеть, что при $\alpha=0$ из выполнения первого неравенства системы следует выполнение второго неравенства.

Рассмотрим третье неравенство системы (42). При $\alpha=0$ оно принимает вид
$$\frac{vq(r-r^2)}{2}+\frac{2\delta^2}{v(qr-1)}>0.$$
Учитывая, что точки множества $I(v,0,q,\gamma)$ принадлежат эллипсу (5), имеем соотношение
$$\delta^2=\gamma^2-1/4v^2(qr-1)^2.$$
Таким образом, для точек множества $I(v,0,q,\gamma)$ третье неравенство системы (42) можно записать в виде
$$\frac{4\gamma^2-v^2+qrv^2+qr^2v^2-q^2r^3v^2}{2v(qr-1)}>0. \tag{43}$$
При выполнении первого неравенства системы (42) знаменатель выражения (43) будет отрицательным, поэтому числитель также должен быть отрицательным.

Введем функцию
$$f(r)=4\gamma^2-v^2+qrv^2+qr^2v^2-q^2r^3v^2.$$
Ниже понадобится ее производная
$$f'(r)=qv^2+2qrv^2-3q^2r^2v^2.$$
Для корней r_1 и r_2 уравнения $f'(r)=0$ верны формулы
$$r_1=\frac{1-\sqrt{1+3q}}{3q},\qquad r_2=\frac{1+\sqrt{1+3q}}{3q}.$$
Очевидно, что
$$r_1<0<\max\{0,(v-2\gamma)(vq)^{-1}\}. \tag{44}$$
Докажем, что
$$r_2\ge\min\{1,q^{-1}\}. \tag{45}$$
Пусть $\min\{1,q^{-1}\}=1$. Тогда неравенство (45) перепишется в виде
$$1+\sqrt{1+3q}\ge 3q. \tag{46}$$
В случае $0<q<1/3$ это неравенство, очевидно, верно. Если же $1/3\le q\le 1$, то (46) эквивалентно неравенству
$$1+3q\ge 9q^2-6q+1.$$

Очевидно, данное неравенство верно при $1/3 \leq q \leq 1$. Пусть теперь $\min\{1, q^{-1}\} = q^{-1}$. Тогда неравенство (45) принимает вид

$$1 + \sqrt{1 + 3q} \geq 3.$$

Данное неравенство, очевидно, верно при $q \geq 1$.

Из (44) и (45) следует, что на отрезке $[\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\}, \min\{1, q^{-1}\}]$ производная $f'(r)$ сохраняет свой знак. Следовательно, функция $f(r)$ монотонна и уравнение $f(r) = 0$ имеет не более одного корня на данном отрезке.

Найдем значения функции f в точках 0, $(v - 2\gamma)(vq)^{-1}$, 1, q^{-1}.

$$\begin{aligned}
&f(0) = (2\gamma - v)(2\gamma + v),\\
&f((v - 2\gamma)(vq)^{-1}) = 2\gamma(2\gamma - v)(2\gamma - (1 - q)v)(qv)^{-1},\\
&f(q^{-1}) = 4\gamma^2,\\
&f(1) = (2\gamma - (1 - q)v)(2\gamma + v(1 - q)).
\end{aligned}$$

Из условия существования решения (14) и ограничений на параметры следует, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(f(0)) = -\operatorname{sgn}(v - 2\gamma),\\
&\operatorname{sgn}(f((v - 2\gamma)(vq)^{-1})) = -\operatorname{sgn}(v - 2\gamma),\\
&f(q^{-1}) > 0,\\
&\operatorname{sgn}(f(1)) = \operatorname{sgn}(2\gamma + v(1 - q)).
\end{aligned}$$

Таким образом

$$f(\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\}) < 0,$$

если $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = (v - 2\gamma)(vq)^{-1}$, и

$$f(\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\}) > 0,$$

если $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = 0$.

Из того, что $f(q^{-1}) > 0$ и $f(1) > 0$ при $1 < q^{-1}$, следует, что

$$f(\min\{1, q^{-1}\}) > 0.$$

Далее рассмотрим два случая: 1) множество $I(v, 0, q, \gamma)$ пересекает ось абсцисс, то есть $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = 0$; 2) множество $I(v, 0, q, \gamma)$ выше оси абсцисс, то есть $\max\{0, (v - 2\gamma)(vq)^{-1}\} = (v - 2\gamma)(vq)^{-1}$.

В первом случае на всем отрезке $[0, \min\{1, q^{-1}\}]$ функция f положительна и третье неравенство системы (42) не выполняется на этом отрезке. А на отрезке $[\min\{1, q^{-1}\}, \min\{1, (v+2\gamma)(vq)^{-1}\}]$ не выполняется первое неравенство системы (42). Таким образом, для любой точки множества $I(v, 0, q, \gamma)$ система (42) не верна.

Во втором случае функция f отрицательна в левом конце отрезка $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, \min\{1, q^{-1}\}]$ и положительна в правом. Следовательно, учитывая монотонность f на данном отрезке, имеем, что уравнение $f(r) = 0$ имеет ровно один корень r_* на интервале $((v - 2\gamma)(vq)^{-1}, \min\{1, q^{-1}\})$ и $f(r) < 0$ при $r \in [(v-2\gamma)(vq)^{-1}, r_*)$. Таким образом, третье неравенство верно на полуинтервале $[(v-2\gamma)(vq)^{-1}, r_*)$. Первое и второе неравенства системы (42) выполняются на отрезке $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, \min\{1, q^{-1}\}]$, а на отрезке $[\min\{1, q^{-1}\}, \min\{1, (v + 2\gamma)(vq)^{-1}\}]$ первое неравенство системы (42) не верно. Получаем, что система (42) верна на полуинтервале $[(v - 2\gamma)(vq)^{-1}, r_*)$, то есть она выполняется для односвязной области на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$, содержащей точку (δ_{low}, r_{low}), но не для всего множества целиком.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha = 0$ *и выполнены условия* (33). *Тогда* $H(x) < 0$ *при* $x \in [-1, 1]$.

Доказательство. Найдем производную $H'(x)$:

$$H'(x) = 3\gamma^3 x^2 - 2\gamma^2 x(\gamma + 4u\cos\psi + 2\gamma\cos^2\psi) + \\ + \gamma(-\gamma^2 + 2u^2 + 4\gamma u\cos\psi + 4\gamma^2\cos^2\psi + 3u^2\cos^2\psi + 4\gamma u\cos^3\psi).$$

Графиком $H'(x)$ является парабола ветвями вверх. Для абсциссы вершины x_v верно равенство

$$x_v = 1/3(\gamma + 4u\cos\psi + 2\gamma\cos^2\psi)\gamma^{-1}.$$

Докажем, что из условий (33) следует неравенство $x_v > 1$. Действительно, в силу условий (33) при $\alpha = 0$ правая часть равенства

$$3\gamma(x_v - 1) = 4u\cos\psi + 2\gamma\cos^2\psi - 2\gamma = 2(2u\cos\psi - \gamma\sin^2\psi) = 2\cos\psi\left(u + u - \frac{\gamma\sin^2\psi}{\cos\psi}\right)$$

положительна. Следовательно, $x_v > 1$. Для $H'(1)$ имеем формулу

$$H'(1) = \gamma u\left(u + u\sin^2\psi + 4\cos^2\psi\left(u - \frac{\gamma\sin^2\psi}{\cos\psi}\right)\right).$$

Из (33) следует, что $H'(1) > 0$. Таким образом, графиком $H'(x)$ является парабола ветвями вверх с вершиной правее единицы, а в единице функция $H'(x)$ положительна. Следовательно, $H'(x)$ положительна на всем отрезке $[-1, 1]$. Поэтому $H(x) < H(1) < 0$ на всем отрезке $[-1, 1]$ при $\alpha = 0$ и выполнении условий (33), что и требовалось доказать.

Будем говорить, что решение, соответствующее некоторой точке множества $I(v, \alpha, q, \gamma)$, устойчиво (неустойчиво), если для каждого n существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение (16) уравнения (15) с параметрами из $I(v, \alpha, q, \gamma)$ устойчиво (неустойчиво).

Из теорем 2, 3 и лемм 1, 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $v < 2\gamma$. *Тогда решения, соответствующие любой точке множества* $I(v, 0, q, \gamma)$, *являются неустойчивыми. Пусть* $0 < v - 2\gamma < qv$. *Тогда на множестве* $I(v, 0, q, \gamma)$ *расположена односвязная область устойчивости и одна или две области неустойчивости. Пусть* $v - 2\gamma > qv$. *Тогда множество* $I(v, 0, q, \gamma)$ *пусто.*

Иллюстрацией к теореме 5 служит рис. 3. Черной сплошной линией на рисунке 3 обозначены области устойчивости, серым пунктиром — области неустойчивости.

Выводы

1. Доказано, что существует однопараметрическое семейство на плоскости (δ, r), зависящее от параметров v, α, q, γ, каждой точке которого соответствует счетное число непрерывных волн. При малых значениях параметра ε найдено асимптотическое приближение этих решений, зависящее от разрывной функции $\theta(\varepsilon, \delta)$.

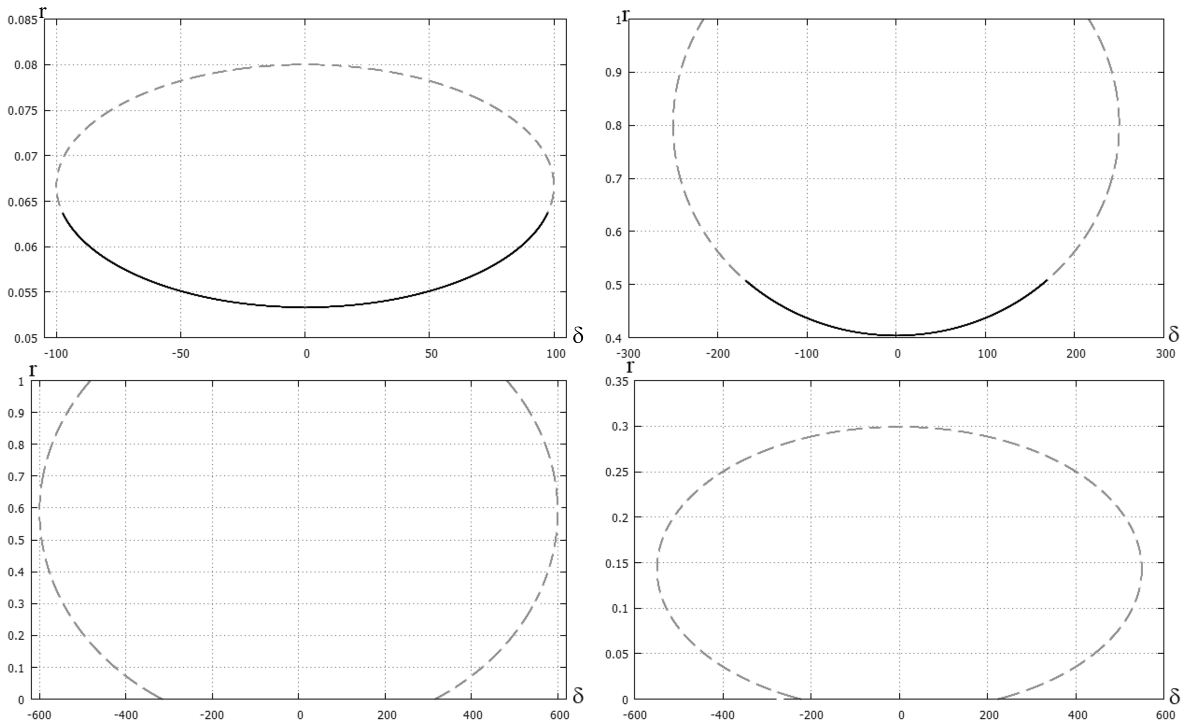

Рис. 3. Расположение областей устойчивости на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$. Значения параметров: a) $v = 1000$, $q = 15$, $\gamma = 100$; b) $v = 1010$, $q = 1.25$, $\gamma = 250$; c) $v = 1020$, $q = 1.7$, $\gamma = 600$; d) $v = 1005$, $q = 7$, $\gamma = 550$.

2. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости непрерывных волн. В случае $\alpha = 0$ найдены необходимые и достаточные условия устойчивости.

3. В случае $\alpha = 0$ показано, что на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$ может быть 0 или 1 область устойчивости. Множество точек (v, q, γ) поделено на три подмножества. В первом из них множество $I(v, 0, q, \gamma)$ пусто, во втором на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$ нет областей устойчивости, а в третьем на множестве $I(v, 0, q, \gamma)$ расположена одна область устойчивости. Для третьего подмножества аналитически найдены границы области устойчивости в координатах (δ, r).

Список литературы

[1] Кащенко А. А., “Устойчивость простейших периодических решений в уравнении Стюарта-Ландау с большим запаздыванием”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:3 (2012), 136–141; English transl.: Kashchenko A. A., “Stability of the Simplest Periodic Solutions in the Stuart-Landau Equation with Large Delay”, *Automatic Control and Computer Sciences*, **47**:7 (2013), 566–570.

[2] Кащенко А. А., “Устойчивость непрерывных волн для модели FDML лазера”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **21**:3 (2014), 35–54; [Kashchenko A. A., “Ustoychivost nepreryvnykh voln dlya modeli FDML lazera”, *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, **21**:3 (2014), 35–54, (in Russian).]

[3] Kashchenko A., “Stability of continuous wave solutions of one laser model with large delay”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **20**:2 (2015), 173–183.

[4] Reddy D. V. R., Sen A., Johnston G. L., "Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation", *Physica D.*, **129** (1999), 15–34.

[5] Reddy D. V. R., Sen A., Johnston G. L., "Dynamics of a limit cycle oscillator under time delayed linear and nonlinear feedbacks", *Physica D.*, **144** (2000), 335–357.

[6] Slepneva S., Kelleher B., O'Shaughnessy B., Hegarty S. P., Vladimirov A. G., Huyet G., "Dynamics of Fourier domain mode-locked lasers", *Opt. Express*, **21** (2013), 19240–19251.

[7] Vladimirov A. G., Turaev D., "Model for passive mode-locking in semiconductor lasers", *Phys. Rev A.*, **72** (2005), 033808.

[8] Vladimirov A., Turaev D., Kozyreff G., "Delay differential equations for mode-locked semiconductor lasers", *Opt. Lett.*, **29** (2004), 1221–1223.

[9] Vladimirov A., Turaev D., "A new model for a mode-locked semiconductor laser", *Radiophysics and Quantum Electronics*, **47** (2004), 769–776.

[10] Lang R., Kobayashi K., "External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties", *Quantum Electronics*, **16**:3 (1980), 347–355.

[11] Mork J., Tromborg B., Mark J., "Chaos in semiconductor lasers with optical feedback: theory and experiment", *J. Quant. Electr.*, **28** (1992), 93–108.

[12] Tartwijk G., Lenstra D., "Semiconductor lasers with optical injection and feedback", *Quantum. Semiclass. Opt.*, **7** (1995), 87–143.

[13] Jun Y., Hua L., McInerney J. G., "Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback", *Phys. Rev. A*, **47** (1993), 2249–2252.

[14] Fischer I., Hess O., Elsasser W., Gobel, "High-dimensional chaotic dynamics of an external cavity semiconductor laser", *Phys.Rev.Lett.*, **73** (1994), 2188–2191.

[15] Sano T., "Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherent collapse of semiconductor lasers with optical feedback", *Phys. Rev. A.*, **50** (1994), 2719–2726.

[16] Ritter A., Haug H., "Theory of laser diodes with weak optical feedback. I. Small-signal analysis and side-mode spectra", *JOSA B*, **10** (1993), 130–144.

[17] Heil T., Fischer I., Elsasser W., "Influence of amplitude-phase coupling on the dynamics of semiconductor lasers subject to optical feedback", *Phys.Rev. A.*, **60** (1999), 634–640.

[18] Huyet G., Balle S., Giudici M., Green C., Giacomelli G., Tredicce J. R., "Low frequency fluctuations and multimode operation of a semiconductor laser with optical feedback", *Opt.Commun.*, **149** (1999), 341–347.

[19] Levine A. M., Tartwijk G. H. M., Lenstra D., Erneux T., "Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode", *Phys. Rev. A.*, **52** (1995), 3436–3439.

[20] Lythe G., Erneux T., "Low pump limit of the bifurcation to periodic intensities in a semiconductor laser subject to external optical feedback", *Phys. Rev. A.*, **55** (1997), 4443–4448.

[21] Grigorieva E. V., "Quasiperiodicity in Lang-Kobayashi model of lasers with delayed optical feedback", *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **4** (2001), 333–340.

[22] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973; [Vasileva A. B., Butuzov V. F., *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy*, Nauka, M., 1973, (in Russian).]

[23] Wu J., *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer, 1996.

Stability of CW Solutions of Semiconductor Laser with Large Delay

Kashchenko A. A.

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: Lang Kobayashi equation, large delay, laser dynamics, stability

In this paper the problem of existence and stability of continuous waves in a semiconductor laser model is studied. This model was proposed by Lang and Kobayashi and has the form of two differential equations with delay. The delay time is assumed to be large. We study the existence of continuous waves in the Lang-Kobayashi model. A special set I depending on all parameters of the problem is built. The condition of existence of continuous waves is that the "'main parts"' of solutions must be located on the set I. Sufficient conditions of stability and instability of continuous waves are found for all sufficiently large values of delay. In the case of a zero linewidth enhancement factor the necessary and sufficient conditions of stability are found. Location of stability regions on the sets I is studied. It is proved that in the case of the zero linewidth enhancement factor the number of regions of stability on the set I is less than two. Necessary and sufficient conditions of existence of stability regions on the set I are found in this case.

Сведения об авторе:
Кащенко Александра Андреевна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант, orcid.org/0000-0003-3823-9351