Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**2** (2007) 4–6

УДК 515.177

Однородные супермногообразия с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_211}$

Башкин М.А., Хабадзе Л.И.
Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14,
e-mail: misha@uniyar.ac.ru,

получена 17 мая 2007

Аннотация

Излагаются результаты классификации однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с комплексной проективной прямой в случае, когда ретракт определяется векторным расслоением с сигнатурой $(k_1, k_2, 1, 1)$, где $k_1 \geq k_2 \geq 1$. Необходимые сведения по теории комплексных супермногообразий можно найти в [3] и [4].

Представленная статья посвящена решению проблемы классификации однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с заданным однородным расщепимым супермногообразием. Эта проблема была поставлена А.Л. Онищиком и частично решается в данной работе в случае, когда в качестве однородного расщепимого супермногообразия рассматривается супермногообразие $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_211}$. Мы не будем рассматривать случаи $k_1 = k_2 = 1, 2, 3$, так как для них задача классификации уже была решена ранее (см. [1]).

Пусть $\mathbf{E} \to \mathbb{CP}^1$ — голоморфное векторное расслоение ранга 4, представленное в виде прямой суммы линейных расслоений на прямые $\mathbf{E} = \mathbf{L}_{-k_1} \oplus \mathbf{L}_{-k_2} \oplus 2\mathbf{L}_{-1}$, где $k_1 \geq k_2 \geq 1$. Обозначим через $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_211}$ расщепимое супермногообразие, определяемое расслоением $\mathbf{E}$.

Покроем $\mathbb{CP}^1$ двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и $y = \frac{1}{x}$ соответственно. Тогда функции перехода супермногообразия $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_211}$ в $U_0 \cap U_1$ имеют вид

$$\begin{cases} y = x^{-1} \\ \eta_1 = x^{-k_1}\xi_1 \\ \eta_2 = x^{-k_2}\xi_2 \\ \eta_3 = x^{-1}\xi_3 \\ \eta_4 = x^{-1}\xi_4 \end{cases},$$

где ξ_i и η_i — базисные сечения расслоения $\mathbf{E}$ над U_0 и U_1 соответственно.

Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ градуированный касательный пучок супермногообразия $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_211}$ и через $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ супералгебру Ли векторных полей на нем.

Рассмотрим подпучок $\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}} = \exp((\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2 \oplus (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4)$ пучка $\mathcal{A}ut\,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}$. Согласно теореме Грина, множество супермногообразий с заданным ретрактом $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ изоморфно множеству орбит группы $\mathrm{Aut}\,\mathbf{E}$ на множестве $H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. Будем описывать когомологии с помощью коциклов Чеха в покрытии $\mathfrak{U} = \{U_0, U_1\}$. Можно доказать следующее

Предложение 1. *Предположим, что $n \leq 5$ и $H^0(M, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2) = 0$. Пусть заданы такие подпространства $Q_{2p} \subset Z^1(\mathfrak{U}, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_{2p})$ $(p = 1, 2)$, что каждый класс когомологий из $H^1(M, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_{2p})$ содержит ровно по одному коциклу из Q_{2p} $(p = 1, 2)$. Тогда любой класс когомологий из $H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ представляется единственным коциклом вида $z = \exp(u^2 + u^4)$, где $u^2 \in Q_2$, $u^4 \in Q_4$.*

Мы будем говорить далее о задании супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ коциклом $u^2 + u^4$, подразумевая, что $(M, \mathcal{O})$ соответствует коциклу $z = \exp(u^2 + u^4)$.

Рассмотрим точную последовательность (см. [2])

$$0 \to \mathrm{End}\,\mathbf{E} \to \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_0 \xrightarrow{\beta} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to 0. \tag{1}$$

Подалгебра $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_0$ расщепляет последовательность (1), если β изоморфно отображает ее на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ или, что равносильно, имеем разложение в полупрямую сумму $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_0 = \mathrm{End}\,\mathbf{E} \oplus \mathfrak{a}$. В работе [2] показано, что супермногообразие с ретрактом $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ четно-однородно (или $\bar{0}$-однородно) тогда и только тогда, когда на него поднимается некоторая подалгебра $\mathfrak{a}$, расщепляющая (1). В этой ситуации мы будем говорить, что *супермногообразие* $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ *является* $\overline{0}$*-однородным относительно* $\mathfrak{a}$. В рассматриваемом случае с точностью до изоморфизма из $\operatorname{Aut}\mathbb{E}$ существуют следующие подалгебры $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, которые можно задать базисами (см. [2]):

А. При $k_1 = k_2 = k \geq 4$

1) $\mathbf{e} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - \nabla$, $\mathbf{f} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

2) $\mathbf{e} = \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - (k+1)\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} - (k-1)\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} - \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} - \xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}$, $\mathbf{f} = \xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_2} - x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

3) $\mathbf{e} = \xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - k\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} - k\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}$, $\mathbf{f} = \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_4} - x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

4) $\mathbf{e} = \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - (k+1)\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} - (k-1)\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}$, $\mathbf{f} = \xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_4} - x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

Б. При $k_1 \geq 2$, $k_2 = 1$

1) $\mathbf{e} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - \nabla$, $\mathbf{f} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

2) $\mathbf{e} = \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - k_1\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} - 3\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} - \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}$, $\mathbf{f} = 2\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_4} - x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

В. При $k_1 > k_2 \geq 2$

1) $\mathbf{e} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - \nabla$, $\mathbf{f} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

2) $\mathbf{e} = \xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - k_1\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} - k_2\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}$, $\mathbf{f} = \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_4} - x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

где $\nabla = k_1\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + k_2\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}$.

Пусть $\lambda_2 : \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}} \to (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2$ — гомоморфизм пучков, сопоставляющий каждому ростку автоморфизма a 2-компоненту элемента $\log a$ в $(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2 \oplus (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4$. Обозначим через $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}))^{\mathfrak{a}}$ множество $\mathfrak{a}$-инвариантных классов когомологий. Справедливо

Предложение 2. *Если* $\mathfrak{a}$ *— подалгебра, расщепляющая последовательность* (1), *и если* $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})^{\mathfrak{a}}$ *— множество классов, определяющих* $\overline{0}$*-однородные относительно* $\mathfrak{a}$ *супермногообразия, то* λ_2^* *биективно отображает это множество на* $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}}$.

Следовательно, $\overline{0}$-однородные относительно $\mathfrak{a}$ супермногообразия задаются коциклами $u^2 + u^4$, где класс $[u^2]$ $\mathfrak{a}$-инвариантен, а класс $[u^4]$ может быть определен с помощью предложения 5.1 из [4]. Вычисляем базис пространства $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}}$ и проверяем равенство $[u^2, u^2] = 0$. Из предложения 5.1 работы [4] следует, что класс $[u^4]$ также должен быть $\mathfrak{a}$-инвариантным. Вычисления показывают, что для любого из описанных ранее случаев подалгебры $\mathfrak{a}$ имеем $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4)^{\mathfrak{a}} = \{0\}$.

Теорема 1. *В каждом случае подалгебры* $\mathfrak{a}$ *четно-однородные относительно* $\mathfrak{a}$ *супермногообразия описываются следующими коциклами, представляющими базис пространства* $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}}$*:*

А 1) $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}$, $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}$, $x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_2}$, $x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_1}$;

Б 1) $x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}$, $x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}$, $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}$, $x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}$, $x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}$, $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}$;

В 1) $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}$, $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}$.

В остальных случаях $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}} = 0$.

При проведении исследования на однородность полученных $\overline{0}$-однородных супермногообразий с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_2 11}$ мы используем утверждения, аналогичные предложению 15 и предложению 12 (в котором дано описание алгебры $\operatorname{End}\mathbf{E}$) из [2]. Получаем следующий окончательный результат:

Теорема 2. *Любое нерасщепимое однородное супермногообразие с ретрактом* $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_2 11}$ *с точностью до изоморфизма может быть представлено коциклом*

при $k_1 = k_2 \geq 4$

1) $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}$,

2) $x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_2}$, *3)* $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}$,

4) $x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1}$,

5) $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1}$;

при $k_1\geq 2$, $k_2=1$

1) $x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}$,

2) $x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}$,

3) $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}$,

4) $x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}$,

5) $x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}$,

6) $x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}+x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}$,

7) $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}$,

8) $x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}+x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}$;

при $k_1>k_2\geq 2$

1) $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}$.

Список литературы

1. *Башкин, М.А.* Однородные нерасщепимые супермногообразия размерности 1|4 над комплексной проективной прямой /*М.А. Башкин, А.Л. Онищик* // Математика в Ярославском университете: Сб. обзорных статей. К 30-летию математического факультета / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2006. — С. 17 – 32.

2. *Бунегина, В.А.* Однородные супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой / *В.А. Бунегина, А.Л. Онищик* // М.: ВИНИТИ, 2001. — С. 141 – 180.

3. *Онищик, А.Л.* Проблемы классификации комплексных супермногообразий / *А.Л. Онищик* // Математика в Ярославском университете: Сб. обзорных статей. К 25-летию математического факультета / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2001. — С. 7 – 34.

4. *Onishchik, A.L.* A Construction of Non-Split Supermanifolds / *A.L. Onishchik* // Annals of Global Analysis and Geometry. — 1998. — V. 16. — P. 309 – 333.

Homogeneous Supermanifolds with Retract $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_1k_22 11}$

Bashkin M.A., Habadze L.I.

We give the results of classification of all non-split homogeneous supermanifolds over the complex projective line whose retract is corresponding to a holomorphic vector bundle with a set $(k_1,k_2,1,1)$, where $k_1\geq k_2\geq 1$. See [3] and [4] for more information about the complex supermanifolds theory.