Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **6** (2013) 149–161

УДК 514.772.35

Гиперболический тетраэдр: вычисление объема с применением к доказательству формулы Шлефли

Сабитов И. Х.[1]

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: isabitov@mail.ru

получена 1 ноября 2013

Ключевые слова: пространство Лобачевского, тетраэдр, объем, интегральная формула, формула Шлефли

Посвящается 70-летию
Николая Петровича Долбилина

Мы предлагаем один новый подход к проблеме вычисления объемов тел в пространстве Лобачевского и применяем его к тетраэдру. Используя некоторые интегральные соотношения, мы даем явные формулы для объема тетраэдра в функции координат его вершин, а также длин его ребер. Наконец, мы даем в случае тетраэдра прямое аналитическое доказательство знаменитой формулы Шлефли.

1. Введение

Известно много работ, посвященных вычислению объема тетраэдра в пространстве Лобачевского, см. литературу, например, в работах [1] и [2]. В наших докладах на конференциях «Дни геометрии в Новосибирске» (27.08—31.08.2013) (см. http://math.nsc.ru/conference/geomtop/2013/program.html), «Yaroslavl International Conference Geometry, Topology and Applications», 23.09—27.09.2013 (см. [3]) и «Крымская Международная Математическая конференция» (22.09—04.10.2013) (см. [4]) был предложен простой метод вычисления объемов тел в пространствах постоянной кривизны, позволяющий найти объем компактного тела через некоторый интеграл по его граничной поверхности. Журнальное изложение содержания этих докладов дано в статье [5]. В данной работе мы дадим более подробное изложение результатов, касающихся вычисления объема гиперболического тетраэдра в трехмерном случае через координаты его вершин и длины его ребер с представлением нового доказательства знаменитой формулы Шлефли с использованием предложенного нами

[1]Работа поддержана грантом Правительства РФ № 11.G34.31.0053.

подхода к вычислению объемов тел в пространстве Лобачевского (тем самым положительно решается один из вопросов из приведенного в наших публикациях списка нерешенных проблем). Вообще говоря, формул для вычисления объема гиперболического тетраэдра существует много, известна и формула объема в функции длин ребер тетраэдра (см. [6]), однако наш способ получения соответствующей формулы нам представляется существенно более простым и ее вид отличается от других известных формул.

2. Основная формула

Пусть трехмерное пространство Лобачевского кривизны $K < 0$ смоделировано по Пуанкаре в $\mathbb{R}^3$ верхним полупространством $z > 0$ с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(-K)z^2}, \tag{1}$$

и пусть в нем задано некоторое ориентированное компактное тело D с согласованно ориентированной кусочно-гладкой границей ∂D. Тогда, как указано в цитированных выше работах автора, ориентированный объем $V(D)$ тела D вычисляется по формуле[2]

$$V(D) = -\frac{1}{2(-K)^{3/2}} \int\limits_{\partial D} \frac{dx_1 \wedge dx_2}{z^2}. \tag{2}$$

В случае, когда тело D является многогранником P, формула (2) допускает дальнейшее упрощение, так как тогда граница ∂D состоит из граней, которые мы обозначим через ω_i (граница изменений индекса i равна числу граней). В интерпретации Пуанкаре каждая плоскость Лобачевского представляется или «вертикальной» плоскостью с уравнением вида $ax + by + c = 0$, или полусферой с центром на абсолюте $z = 0$. Тогда интегралы в правой части по «вертикальным» граням ω_i будут равны нулю, и останутся интегралы только по граням, лежащим на полусферах с центрами на абсолюте. Уравнения таких полусфер S_i имеют вид

$$S_i: \ (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + z^2 = R_i^2,$$

где точки $(x, y, 0)$ расположены на областях $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$, являющихся проекциями соответствующих граней ω_i с учетом их ориентаций по отношению к плоскости (x, y). Поэтому в итоге имеем

$$V(P) = -\sum_i \frac{1}{2(-K)^{3/2}} \int\limits_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge dx_2}{R_i^2 - (x - a_i)^2 - (y - b_i)^2}. \tag{3}$$

Ребра граней ω_i представляются как пересечения полусфер S_i друг с другом или с «вертикальными» плоскостями $ax + by + c = 0$, поэтому их проекции на плоскость $z = 0$ являются прямолинейными отрезками. Следовательно, каждая область Ω_i является некоторым k_i-угольником ($k_i \geq 3$), стороны которых мы будем обозначать

[2]В [3] в правой части формулы (18) вместо $(n + 1)$ должно быть $(n - 1)$.

как $\gamma_{ij}, 1 \leq j \leq k_i$. Тогда в (3) каждое слагаемое в сумме в правой части в свою очередь можно представить как сумму

$$-\frac{1}{2(-K)^{3/2}R_i^2}\int\limits_{\Omega_i}\frac{dx_1\wedge dx_2}{1-(\frac{r_i}{R_i})^2} =$$

$$-\frac{1}{2(-K)^{3/2}}\sum_{j=1}^{k_i}\int\limits_{\gamma_{ij}}[\frac{(x-a_i)F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^2}dy-\frac{(y-b_i)F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^2}dx], \tag{4}$$

где $r_i^2=(x-a_i)^2+(y-b_i)^2$, а функция $F(t)$ определяется формулой

$$F(t)=\int_0^t\frac{\tau}{(1-\tau^2)}d\tau=-\frac{1}{2}\ln(1-t^2),\ t=\frac{r_i}{R_i}.$$

3. Объем тетраэдра через координаты его вершин

Используем формулу (4) для выражения объема трехмерного гиперболического тетраэдра T через координаты его вершин. Пусть вершины тетраэдра пронумерованы как A_0, A_1, A_2, A_3.

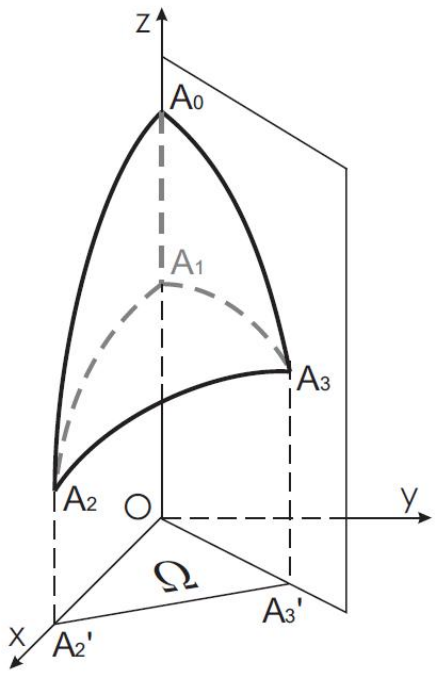

Рис. 1. Тетраэдр в стандартной позиции

Применяя в случае необходимости движение, расположим тетраэдр в полупространстве $z > 0$ специальным образом в так называемой *стандартной* позиции. А именно, расположим вершину A_0 в точке $(0,0,p_0)$, ребро A_0A_1 на оси Oz, грань

$A_0A_1A_2$ расположим на полуплоскости $xOz, x > 0$, а вершину A_3 расположим в полупространстве $y > 0$ (параметр p_0 можно взять равным 1, но мы оставляем его в буквенном виде для контроля формул по их размерности). Тогда вершины A_1, A_2 и A_3 будут иметь соответственно координаты $(0, 0, p_1), (x_2, 0, z_2), x_2 > 0$ и $(x_3, y_3, z_3), y_3 > 0$. При выборе $p_1 < p_0$ и ориентации грани $A_0A_1A_2$ по обходу $A_0 \to A_1 \to A_2$ ориентация тетраэдра как тела будет положительной (т.е. нормаль, определяемая ориентацией треугольника A_0, A_1, A_2, будет внешней). Две грани – $A_0A_1A_2$ и $A_0A_1A_3$ – расположены соответственно на двух «вертикальных» плоскостях $y = 0$ и $y_3x - x_3y = 0$, поэтому в формуле (3) в правой части остаются только интегралы по двум граням на полусферах. Применим к ним формулу (4) для получения выражения объема тетраэдра в стандартной позиции через координаты его вершин. Для этого найдем сначала уравнения граней $A_0A_2A_3$ и $A_1A_2A_3$. Эти грани расположены на полусферах соответственно S_0 и S_1 с центрами на плоскости $z = 0$; координаты вершин, через которые они проходят, известны. Из этих условий легко находим их центры и радиусы. Имеем

$$a_0 = \frac{x_2^2 + z_2^2 - p_0^2}{2x_2},\ b_0 = \frac{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - p_0^2}{2y_3} - \frac{x_3(x_2^2 + z_2^2 - p_0^2)}{2x_2y_3}, \tag{5}$$

$$a_1 = \frac{x_2^2 + z_2^2 - p_1^2}{2x_2},\ b_1 = \frac{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - p_1^2}{2y_3} - \frac{x_3(x_2^2 + z_2^2 - p_1^2)}{2x_2y_3}, \tag{6}$$

$$R_0^2 = a_0^2 + b_0^2 + p_0^2, R_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + p_1^2. \tag{7}$$

Грани $\omega_0 = A_0A_2A_3 \subset S_0$ и $\omega_1 = A_1A_2A_3 \subset S_1$ проектируются на плоскость $z = 0$ в одну и ту же треугольную область Ω, имеющую, однако, противоположные ориентации (если ориентация тетраэдра положительная по отношению к стандартной ориентации полупространства $z > 0$, тогда ориентация треугольника Ω как проекции грани ω_0 положительная на плоскости xOy). Вершины треугольника Ω суть точки $O(0, 0, 0), A_2'(x_2, 0, 0), A_3'(x_3, y_3, 0)$, а граница треугольника состоит из отрезков $OA_2', A_2'A_3', A_3'O$. Можно было бы выписать уравнения этих отрезков и затем применить формулу (4), но в данном случае объем можно вычислить сразу по формуле (3) как двойной интеграл по треугольнику $\Omega : OA_2'A_3'$. Получаем

$$V(T) = \frac{1}{2(-K)^{3/2}}[\int\limits_0^{y_3} dy \int\limits_{x=\frac{x_3}{y_3}y}^{x=x_2+\frac{x_3-x_2}{y_3}y} \frac{dx}{R_1^2 - (x - a_1)^2 - (y - b_1)^2} -$$

$$\int\limits_0^{y_3} dy \int\limits_{x=\frac{x_3}{y_3}y}^{x=x_2+\frac{x_3-x_2}{y_3}y} \frac{dx}{R_0^2 - (x - a_0)^2 - (y - b_0)^2}].$$

После вычисления внутренних интегралов приходим к формуле

$$V(T) = \frac{1}{4(-K)^{3/2}} \int\limits_0^{y_3} \sum_{i=0}^{1} \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{A_i}} \ln \frac{(y_3^2 A_i - B_i) + C_i}{(y_3^2 A_i - B_i) - C_i} dy, \tag{8}$$

где для $i = 0$ и $i = 1$

$$A_i{=}R_i^2{-}(y{-}b_i)^2,\ B_i{=}(x_3y{-}a_iy_3)((x_3 - x_2)y{+}(x_2 - a_i)y_3),\ C_i{=}x_2y_3(y_3{-}y)\sqrt{A_i}.$$

Подставляя в (8) значения $a_0, b_0, a_1, b_1, R_0, R_1$ из формул (5)—(7), найдем искомое выражение объема тетраэдра через координаты его вершин. Ввиду специального выбора расположения вершин, формула не получается симметричной относительно номеров координат.

При вычислении интеграла (8) надо иметь в виду следующее обстоятельство. Пусть точка (x, y, z) находится внутри тетраэдра T. Если провести через нее вертикальную прямую, она пересечет полусферы S_0 и S_1 соответственно в точках $M_0(x, y, z_0)$ и $M_1(x, y, z_1)$. Тогда имеем соотношения

$$(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+z_i^2=R_i^2, \text{ т.е. } (x-a_i)^2+(y-b_i)^2<R_i^2, i=0,1.$$

Значит, в проекции Ω тетраэдра на плоскость $z=0$ функция $A_i>0$, поэтому можем положить

$$y-b_i=R_i\cos\varphi_i, \sqrt{A_i}=R_i\sin\varphi_i>0, 0<\varphi_i<\pi.$$

Тогда формула (8) примет вид

$$V(T)=\frac{1}{4(-K)^{3/2}}\int\limits_{arccos(-\frac{b_i}{R_i})}^{arccos(\frac{y_3-b_i}{R_i})}\sum_{i=0}^{1}\frac{(-1)^i}{\sin\varphi}\ln\frac{(y_3^2R_i^2\sin^2\varphi-B_i)+C_i}{(y_3^2R_i^2\sin^2\varphi-B_i)-C_i}d\varphi$$

с соответствующими представлениями B_i и C_i через R_i и φ.

4. Формула Шлефли для тетраэдра

Используем представление объема тетраэдра через интеграл (3) для доказательства в случае тетраэдра знаменитой формулы Шлефли для дифференциала объема многогранника при произвольной его деформации с дифференцируемой зависимостью его вершин от некоторого параметра деформации :

$$KdV=\frac{1}{2}\sum_i l_i d\theta_i, \tag{9}$$

где суммирование распространено на все ребра, а l_i и θ_i означают соответственно длину i-го ребра и двугранный угол при этом ребре (общий вид формулы см., например, в [1])[3]. Объем $V(T)$ зависит от координат вершин тетраэдра в виде функции $V=V(q, x_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$ от 6 независимых переменных, где q – аппликата вершины A_1. Равенство (9) равносильно выполнению равенств для соответствующих частных производных V и θ_i по каждой координате. Проверим это равенство для частных производных по q.

В случае тетраэдра в сумме интегралов в (3) есть только два ненулевых слагаемых, соответствующих граням $\omega_0 : A_0A_2A_3$ и $\omega_1 : A_1A_2A_3$. Из них грань ω_0 не зависит от q, поэтому производная соответствующего слагаемого по q равна нулю.

[3]Пользуясь случаем, отметим, что в приведенной в [2] формуле Шлефли (47) есть ошибка: в правой части перед суммой должен быть коэффициент $\frac{1}{n-1}$.

Грани ω_1 соответствует интеграл по треугольнику Ω с отрицательной ориентацией. Значит, надо вычислить производную по q слагаемого

$$V_1 = \frac{1}{2(-K)^{3/2}} \int\limits_{\Omega^+} \frac{dx_1 \wedge dx_2}{R_1^2 - (x-a_1)^2 - (y-b_1)^2}, \tag{10}$$

где Ω^+ – положительно ориентированный треугольник $OA_2'A_3'$. Из формул (6) и (7) имеем

$$a_1 = a + \alpha q^2, b_1 = b + \beta q^2, R_1^2 = a^2 + b^2 + (1 + 2a\alpha + 2b\beta)q^2 + (\alpha^2 + \beta^2)q^4, \tag{11}$$

где

$$a = \frac{x_2^2 + z_2^2}{2x_2}, b = \frac{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}{2y_3} - \frac{x_3(x_2^2 + z_2^2)}{2x_2y_3}, \alpha = -\frac{1}{2x_2}, \beta = \frac{x_3 - x_2}{2x_2y_3}.$$

Из формулы (10) находим производную $\dfrac{\partial V_1}{\partial q}$. С учетом формулы (11) имеем

$$\frac{\partial V_1}{\partial q} = -\frac{1}{2(-K)^{3/2}} \int\limits_{\Omega^+} \frac{(R_1^2)'_q + 4(x-a_1)\alpha q + 4(y-b_1)\beta q}{[R_1^2 - (x-a_1)^2 - (y-b_1)^2]^2} dxdy. \tag{12}$$

Так как $(R_1^2)'_q$ не зависит от (x, y), мы можем рассмотреть отдельно интеграл

$$I_1 = -\frac{(R_1^2)'_q}{2(-K)^{3/2}} \int\limits_{\Omega^+} \frac{dxdy}{[R_1^2 - (x-a_1)^2 - (y-b_1)^2]^2}, \tag{13}$$

который допускает представление в виде контурного интеграла

$$I_1 = -\frac{(R_1^2)'_q}{4R_1^2(-K)^{3/2}} \oint\limits_{\partial\Omega^+} \frac{x-a_1}{R_1^2 - (x-a_1)^2 - (y-b_1)^2}\, dy - \frac{y-b_1}{R_1^2 - (x-a_1)^2 - (y-b_1)^2}\, dx. \tag{14}$$

Вычислим этот интеграл по стороне OA_2' треугольника Ω^+ с уравнением $y = 0, 0 \leq x \leq x_2$. Получим

$$I_1^{(1)} = -\frac{b_1(R_1^2)'_q}{8R_1^2\sqrt{R_1^2 - b_1^2}(-K)^{3/2}} \ln\left(\frac{\sqrt{R_1^2 - b_1^2} + (x_2 - a_1)}{\sqrt{R_1^2 - b_1^2} - (x_2 - a_1)} \cdot \frac{\sqrt{R_1^2 - b_1^2} + a_1}{\sqrt{R_1^2 - b_1^2} - a_1}\right). \tag{15}$$

Теперь вычислим оставшуюся часть интеграла (12). Оказывается, что она тоже допускает представление через контурный интеграл. Имеем

$$I_2 = -\frac{1}{2(-K)^{3/2}} \oint\limits_{\partial\Omega^+} \frac{2\alpha q}{R_1^2 - (x-a_1)^2 - (y-b_1)^2}\, dy - \frac{2\beta q}{R_1^2 - (x-a_1)^2 - (y-b_1)^2}\, dx. \tag{16}$$

Вычислим этот интеграл по стороне OA_2'. Получим

$$I_2^{(1)} = \frac{\beta q}{2(-K)^{3/2}\sqrt{R_1^2 - b_1^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{R_1^2 - b_1^2} + (x_2 - a_1)}{\sqrt{R_1^2 - b_1^2} - (x_2 - a_1)} \cdot \frac{\sqrt{R_1^2 - b_1^2} + a_1}{\sqrt{R_1^2 - b_1^2} - a_1}\right).$$

Для суммы интегралов $I_1 + I_2$ вдоль отрезка OA_2' имеем

$$K(I_1^{(1)}+I_2^{(1)})=-\frac{4\beta q R_1^2-b_1(R_1^2)'_q}{8R_1^2\sqrt{R_1^2-b_1^2}\sqrt{(-K)}}\ln\left(\frac{\sqrt{R_1^2-b_1^2}+(x_2-a_1)}{\sqrt{R_1^2-b_1^2}-(x_2-a_1)}\cdot\frac{\sqrt{R_1^2-b_1^2}+a_1}{\sqrt{R_1^2-b_1^2}-a_1}\right). \quad (17)$$

Теперь установим связь этой суммы с гиперболической длиной отрезка A_1A_2 и производной значения двугранного тетраэдра при этом ребре. Уравнение этого ребра имеет вид $x = x, y = 0, z = \sqrt{R_1^2-(x-a_1)^2-b_1^2}, 0 \le x \le x_2$. Тогда его длина l вычисляется по формуле

$$l=\frac{\sqrt{R_1^2-b_1^2}}{\sqrt{-K}}\int\limits_0^{x_2}\frac{dx}{R_1^2-b_1^2-(x-a_1^2)}=\frac{1}{2\sqrt{-K}}\ln\left(\frac{\sqrt{R_1^2-b_1^2}+(x_2-a_1)}{\sqrt{R_1^2-b_1^2}-(x_2-a_1)}\cdot\frac{\sqrt{R_1^2-b_1^2}+a_1}{\sqrt{R_1^2-b_1^2}-a_1}\right). \quad (18)$$

Внешние нормали к граням тетраэдра вдоль ребра A_1A_2 имеют вид $\mathbf{n}_1 = (0, -1, 0)$ и $\mathbf{n}_2 = (a_1 - x, b_1, -z)$, и двугранный угол θ при ребре, равный дополнительному к углу между внешними нормалями к граням, вычисляется по формуле

$$\theta = arccos\frac{b_1}{R_1}.$$

Следовательно,

$$\theta'_q = -\frac{b_1'R_1 - R_1'b_1}{R_1\sqrt{R_1^2-b_1^2}} = -\frac{4\beta q R_1^2 - b_1(R_1^2)'_q}{2R_1^2\sqrt{R_1^2-b_1^2}}. \quad (19)$$

Вспоминая формулу (9), видим, что вычисляемое по формулам (18) и (19) произведение $l\theta'_q$ с учетом правой части формулы (17) дает значение, совпадающее с выражением для $2K(I_1^{(1)}+I_2^{(1)})$.

Вычисление части интеграла (14) вдоль отрезка $A_3'O$ проводится аналогично вычислению вдоль отрезка OA_2', так как для этого достаточно изменить систему координат, объявив плоскость грани $A_0A_1A_3$ новой плоскостью xOz. Остается вычислить интеграл вдоль отрезка $A_2'A_3'$, являющегося пересечением двух полусфер S_0 и S_1.

Начнем с вычисления интеграла (14) вдоль отрезка $A_2'A_3'$. Этот отрезок получается как проекция пересечения полусфер

$$S_0 : (x-a_0)^2 + (y-b_0)^2 + z^2 = R_0^2$$
$$S_1 : (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + z^2 = R_1^2.$$

Исключая из этих уравнений z, приходим к уравнению отрезка $A_2'A_3'$:

$$x = \frac{R_0^2 - R_1^2 + a_1^2 - a_0^2 + +b_1^2 - b_0^2 + 2y(b_0 - b_1)}{2(a_1 - a_0)}, \quad (20)$$

значит, вдоль этого отрезка

$$dx = \frac{b_0 - b_1}{a_1 - a_0}dy \quad (21)$$

(равенство $a_1 - a_0 = 0$ невозможно, так как отрезок $A_2'A_3'$ пересекает ось Ox).

Замечание 1. *Более того, из формул (5)—(6) находим* $a_1 - a_0 = 1 - q^2$, *что больше нуля при положительной ориентации тетраэдра.*

Интегралы $I_1^{(2)}$ и $I_2^{(2)}$, аналогичные интегралам (14) и (16), имеют вид

$$I_1^{(2)} = -\frac{(R_1^2)'[R_0^2 - R_1^2 - (a_0 - a_1)^2 - (b_0 - b_1)^2]}{8R_1^2(a_1 - a_0)(-K)^{3/2}} J, \; I_2^{(2)} = \frac{\alpha q(a_0 - a_1) + \beta q(b_0 - b_1)}{(a_1 - a_0)(-K)^{3/2}} J,$$

где

$$J = \int\limits_0^{y_3} \frac{dy}{R_1^2 - (x(y) - a_1)^2) - (y - b_1)^2} \quad . \tag{22}$$

В итоге имеем

$$I_1^{(2)} = \frac{[8\alpha q(a_0 - a_1) + 8\beta q(b_0 - b_1)] - (R_1^2)'[R_0^2 - R_1^2 - (a_0 - a_1)^2 - (b_0 - b_1)^2]}{8R_1^2(a_1 - a_0)(-K)^{3/2}}. \tag{23}$$

Теперь вычислим производную двугранного угла θ между полусферами S_0 и S_1 и длину l гиперболического отрезка A_2A_3. Внешние нормали к тетраэдру в точках полусфер S_0 и S_1 имеют соответственно направления векторов

$$n_0 = \{x - a_0, y - b_0, z\}, \; n_1 = \{a_1 - x, b_1 - y, -z\},$$

а угол между ними равен

$$\tilde{\theta} = arccos\left(\frac{(R_0^2 + R_1^2) - (a_0 - a_1)^2 - (b_0 - b_1)^2}{2R_0R_1}\right), 0 < \tilde{\theta} < \pi.$$

Двугранный угол θ между гранями $A_0A_2A_3$ и $A_1A_2A_3$, соответствующий внутренней области тетраэдра, вычисляется по формуле[4] $\theta = \pi - \tilde{\theta}$. Тогда

$$\theta'_q = \frac{(R_1^2)'[R_1^2 - R_0^2 + (a_0 - a_1)^2 + (b_0 - b_1)^2] + 8R_1^2[(a_0 - a_1)\alpha q + (b_0 - b_1)\beta q]}{2R_1^2\sqrt{2(R_0^2 + R_1^2)[(a_0 - a_1)^2 + (b_0^2 - b_1)^2 - (R_1^2 - R_0^2)^2 - [(a_0 - a_1)^2 + (b_0 - b_1)^2]^2}}. \tag{24}$$

Вычислим длину l отрезка A_2A_3. Вдоль этого отрезка имеем соотношения (21) и

$$dz = -\frac{(x - a_1)(b_0 - b_1) - (y - b_1)(a_0 - a_1)}{(a_1 - a_0)\sqrt{R_1^2 - (x - a_1)^2 - (y - b_1)^2}} dy$$

и с учетом Замечания 1 приходим к формуле

$$l = \frac{\sqrt{2(R_0^2 + R_1^2)[(a_0 - a_1)^2 + (b_0^2 - b_1)^2 - (R_1^2 - R_0^2)^2 - [(a_0 - a_1)^2 + (b_0 - b_1)^2]^2}}{\sqrt{-K}(a_1 - a_0)} J. \tag{25}$$

Умножаем выражения (24) и (25) и, сравнив результат с (23), получаем, что он совпадает с выражением $2K(I_1^{(2)} + I_2^{(2)})$. Сложив теперь все значения интегралов вида (14) и (16) по трем отрезкам $OA'_2, A'_2A'_3, A - 3'O$, получаем искомое равенство

$$\frac{\partial V}{\partial q} = l_1\theta'_1 + l_2\theta'_2 + l_3\theta'_3, \tag{26}$$

[4] Эта формула верна для любого двугранного угла при ребре, соответствующем выпуклой части многогранника, а в случае, когда двугранный угол, соответствующий внутренней области многогранника, больше π, нужно считать $\theta = 2\pi - \tilde{\theta}$.

где l_1, l_2, l_3 – длины соответствующих участков границы грани ω_1, а $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – внутренние двугранные углы тетраэдра при соответствующих ребрах.

Таким образом, мы установили «часть» формулы Шлефли, относящуюся к изменению положения одной вершины A_1. Что касается изменений положений других вершин, то рассуждаем следующим образом. Участвующие в формуле Шлефли величины: объем, длины ребер и двугранные углы — не зависят от положения тетраэдра в пространстве, поэтому любое ребро тетраэдра можем поместить движением на оси Oz таким образом, чтобы при соответствующей перенумерации тетраэдр оказался в стандартной позиции, а затем применить вышепроведенные вычисления и получить для производных функции объема тетраэдра от 6 независимых координат его вершин соответствующий аналог формулы (26), что в итоге и даст нам формулу Шлефли (9).

Замечание 2. *Как видно из проведенных рассмотрений, все частные производные объема тетраэдра по координатам его вершин представляются элементарными функциями от координат вершин.*

5. Координаты вершин тетраэдра в функции длин его ребер

В наших публикациях [2]—[5] приводится лемма, утверждающая, что при известных длинах ребер тетраэдра координаты его вершин в стандартной позиции выражаются через длины ребер явно выписываемыми элементарными функциями. Дадим здесь подробное доказательство этого утверждения в трехмерном случае. Хотя доказательство и проводится элементарными преобразованиями, на самом деле оно является весьма непростым.

Обратимся к рис. 1, на котором изображен тетраэдр в стандартной позиции. Вершина A_0 может быть выбрана на оси Oz в произвольной точке. Пусть ее координаты суть $(0,0,p), p > 0$. Тогда аппликата $q < p$ вершины A_1 определяется из условия, что гиперболическая длина отрезка A_0A_1 на оси Oz равна известной длине l_1 ребра A_0A_1. Значит,

$$l_1 = \int\limits_q^p \frac{dz}{\sqrt{-K}z} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \ln \frac{p}{q},$$

откуда

$$q = pe^{-l_1\sqrt{-K}}, \text{т.е. } A_1 = (0,0,q). \tag{27}$$

Найдем координаты вершины $A_2(x_2, 0, z_2)$. Прямые на плоскости xOz представляются полуокружностями с центром на оси Ox. Сначала установим связь между координатами вершин и параметрами этих полуокружностей. Пусть $(a_0, 0)$ – центр полуокружности, соответствующей прямой A_2A_0, а R_0 – ее радиус[5]. Уравнение полуокружности $(x-a_0)^2+z^2 = R_0^2$. Она проходит через точки $A_0(0,0,p)$ и $A_2(x_2,0,z_2)$. С учетом этого получаем равенства

$$p^2 = R_0^2 - a_0^2,\ z_2^2 = R_0^2 - (x_2 - a_0)^2,$$

[5]Обращаем внимание, что вводимые в этом параграфе величины R_0 и R_1 не совпадают с величинами с теми же обозначениями из предыдущих параграфов.

из которых имеем

$$a_0 = \frac{x_2^2 + z_2^2 - p^2}{2x_2}. \tag{28}$$

Длина l_2 ребра A_0A_2 вычисляется интегралом

$$l_2 = \frac{R_0}{\sqrt{-K}} \int\limits_{A_0}^{A_2} \frac{dx}{R_0^2 - (x - a_0)^2}.$$

Параметризуя окружность соотношениями $x = a_0 + R_0 \cos\varphi,\ z = R_0 \sin\varphi$ и используя равенство $tg\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$, получаем

$$l_2 = \frac{1}{\sqrt{-K}} \ln \frac{z_2(a_0 + R_0)}{p\ (R_0 - (x_2 - a_0))},$$

откуда имеем

$$R_0 = \frac{a_0 z_2 + p(x_2 - a_0)e^{l_2\sqrt{-K}}}{p\ e^{l_2\sqrt{-K}} - z_2}. \tag{29}$$

Для отрезка A_1A_2 длины l_3 и связанной с ним полуокружности получаем аналогичные соотношения

$$a_1 = \frac{x_2^2 + z_2^2 - q^2}{2x_2}. \tag{30}$$

$$R_1 = \frac{a_1 z_2 + q(x_2 - a_1)e^{l_3\sqrt{-K}}}{q\ e^{l_3\sqrt{-K}} - z_2}. \tag{31}$$

Подставим найденные значения R_0 и R_1 из (29) и (31) соответственно в равенства $a_0^2 + p^2 = R_0^2$ и $a_1^2 + q^2 = R_1^2$. После простых упрощений и приведения подобных получим следующие уравнения для определения значений x_2 и z_2:

$$p^4 - p^2(x_2^2 - 2x_2a_0)e^{2l_2\sqrt{-K}} - 2pz_2(p^2 + a_0x_2)e^{l_2\sqrt{-K}} + p^2z_2^2 = 0 \tag{32}$$

$$q^4 - q^2(x_2^2 - 2x_2a_1)e^{2l_3\sqrt{-K}} - 2qz_2(q^2 + a_1x_2)e^{l_3\sqrt{-K}} + q^2z_2^2 = 0. \tag{33}$$

Наша ближайшая цель – исключить из этой системы неизвестную x_2. Подставим в (32) вместо a_0 его значение из (28); аналогично поступим с a_1 в (33) с использованием равенства (30). После приведения подобных и сокращений получим систему

$$pz_2(e^{2l_2\sqrt{-K}} + 1) - (p^2 + x_2^2 + z_2^2)e^{l_2\sqrt{-K}} = 0 \tag{34}$$

$$qz_2(e^{2l_3\sqrt{-K}} + 1) - (q^2 + x_2^2 + z_2^2)e^{l_3\sqrt{-K}} = 0. \tag{35}$$

Исключив из этих уравнений сумму $x_2^2 + z_2^2$, с учетом значения q из (27) найдем z_2:

$$z_2 = \frac{p^2 - q^2}{2(p \cdot ch(l_2\sqrt{-K}) - q \cdot ch(l_3\sqrt{-K}))} = p\frac{sh(l_1\sqrt{-K})}{e^{l_1\sqrt{-K}}(ch(l_2\sqrt{-K}) - ch(l_3\sqrt{-K}))}. \tag{36}$$

Теперь, сложив уравнения системы (34)—(35), находим $x_2 > 0$:

$$x_2^2 = \frac{2(p^2 - q^2)(p^2sh^2(l_2\sqrt{-K}) - q^2sh^2(l_3\sqrt{-K}) + (p^2 - q^2)^2}{4(p \cdot ch(l_2\sqrt{-K}) - q \cdot ch(l_3\sqrt{-K})^2} - \frac{p^2 + q^2}{2}. \tag{37}$$

При желании можно найти разные виды этих же самых формул. Например, для x_2^2 верны такие представления:

$$x_2^2=\frac{4pq[p\cdot ch(l_3\sqrt{-K})-q\cdot ch(l_2\sqrt{-K})][p\cdot ch(l_2\sqrt{-K})-q\cdot ch(l_3\sqrt{-K})]-(p^2-q^2)^2}{4[p\cdot ch(l_2\sqrt{-K})-q\cdot ch(l_3\sqrt{-K})]^2},$$

$$x_2^2=\frac{4(p^2+q^2)pq\cdot ch(l_2\sqrt{-K})ch(l_3\sqrt{-K})-(p^2-q^2)^2-4p^2q^2[ch^2(l_2\sqrt{-K})+ch^2(l_3\sqrt{-K})]}{4[p\cdot ch(l_2\sqrt{-K})-q\cdot ch(l_3\sqrt{-K})]^2}.$$

Удивительным оказывается то, что правые части этих формул (в частности, знаменатель в формуле для z_2) являются положительными, что с первого взгляда совершенно не кажется очевидным. Кстати, положительность получаемых выражений для z_2 и x_2^2 можно истолковать как некоторую форму необходимого условия существования треугольника с данными длинами l_1, l_2, l_3 его сторон.

Остается найти координаты вершины A_3. Если мы примем плоскость грани $A_0A_1A_3$ за новую плоскость $O\tilde{x}z$, тогда координата $\tilde{y}_3$ будет равняться нулю, а координаты $\tilde{x}_3$ и z_3 будут иметь такой же вид, как в формулах (36) и (37), только с заменой номеров длин ребер (через l_4 и l_5 мы обозначаем соответственно длину ребра A_0A_3 и A_1A_3):

$$z_3=\frac{p^2-q^2}{2(p\cdot ch(l_4\sqrt{-K})-q\cdot ch(l_5\sqrt{-K}))}, \tag{38}$$

$$\tilde{x}_3^2=\frac{4pq[p\cdot ch(l_5\sqrt{-K})-q\cdot ch(l_4\sqrt{-K}][p\cdot ch(l_4\sqrt{-K})-q\cdot ch(l_5\sqrt{-K}]-(p^2-q^2)^2}{4[p\cdot ch(l_4\sqrt{-K})-q\cdot ch(l_5\sqrt{-K})]^2}. \tag{39}$$

Чтобы найти x и y-координаты в исходной системе координат, обозначим через φ угол поворота против часовой стрелки от оси Ox к новой оси $O\tilde{x}$. Тогда будем иметь

$$x_3=\tilde{x}_3\cos\varphi, y_3=\tilde{x}_3\sin\varphi. \tag{40}$$

Для определения угла φ используем знание длины ребра A_2A_3. Сторона A_0A_2 как дуга окружности с центром в $(a_0,0,0)$ и радиуса R_0 имеет в точке A_0 касательный вектор $n=(p,0,a_0)$, а дуга A_0A_3 имеет в той же точке касательный вектор $\tilde{n}=(p,0,\tilde{a}_0)$, но в новой системе координат. В исходной системе координат этот вектор имеет компоненты $(p\cos\varphi, p\sin\varphi, \tilde{a}_0)$. Угол θ между векторами n и $\tilde{n}$ определяется через их скалярное произведение:

$$\cos\theta=\frac{p_2\cos\varphi+a_0\tilde{a}_0}{R_0\tilde{R}_0}.$$

В то же время этот угол является углом при вершине A_0 треугольника $A_0A_2A_3$ с известными длинами сторон l_2, l_4, l_6 и он может быть найден по теореме косинусов. Это позволяет нам найти $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi=\frac{1}{p^2}\left(\frac{R_0\tilde{R}_0[ch(l_2\sqrt{-K})ch(l_4\sqrt{-K})-ch(l_6\sqrt{-K})]}{sh(l_2\sqrt{-K})sh(l_4\sqrt{-K})}-a_0\tilde{a}_0\right). \tag{41}$$

Нам известны значения z_2 и x_2, значит, по формуле (28) известно значение a_0, а тогда по (29) известно и значение R_0. Аналогично, по известным значениям z_3 (формула

(38)) и $\tilde{x}_3$ (формула (39)) находим значения $\tilde{a}_0$ и $\tilde{R}_0$. В итоге, по формулам (40)и (41) находим выражения координат x_3 и y_3 через длины ребер тетраэдра. Выписывать эти длинные выражения мы не будем.

Заметим, что если угол φ прямой, то $x_3 = 0, y_3 = \tilde{x}_3$ и рассмотрения после формулы (40) не нужны. Если же дополнительно известно, что тетраэдр является ортосхемой, тогда сильно упрощаются формулы и для остальных координат.

Если мы подставим теперь в формулу (8) или ее модификации найденные значения координат вершин тетраэдра в функции длин его ребер, получим формулу объема тетраэдра через длины его ребер.

В заключение рассмотрим следующий вопрос. Так как многие формулы представлены дробями, то естественно исследовать их поведение при стремлении знаменателей к нулю, что бывает в первую очередь при бесконечном уменьшении длин ребер тетраэдра. Для координаты z_2 главная часть числителя имеет вид $2pl_1\sqrt{-K}$, а для знаменателя главная часть равна $((l_2-l_3)\sqrt{-K}(l_2+l_3)\sqrt{-K}+2l_1\sqrt{-K}chl_3$, следовательно,

$$z_2 \sim \frac{2p}{\frac{l_2-l_3}{l_1}(l_2+l_3)\sqrt{-K}+2}.$$

При произвольных бесконечно малых (б.м.) l_1, l_2, l_3 эта главная часть не имеет какого-либо регулярного поведения, но в нашем случае эти б.м. являются сторонами треугольника, поэтому $|l_2 - l_3| < l_1$, значит,

$$z_2 = p + \text{аналитическая функция от степеней } l_1, l_2, l_3 \text{ и } \tfrac{l_2-l_3}{l_1}(l_2+l_3).$$

Аналогичными рассуждениями получаем

$$x_2^2 \sim l_1\sqrt{-K}p^2,$$

т.е.

$$x_2^2 = l_1\sqrt{-K}p^2 + \text{аналитическая функция от степеней б.м. } l_1, l_2, l_3 \text{ и } \tfrac{l_2-l_3}{l_1}(l_2+l_3).$$

Поведение z_3 аналогично поведению z_2. Исследование поведения x_3 и y_3 требует привлечения уже б.м. более высокого порядка, и мы это опускаем. Во всяком случае, все эти формулы допускают аналитическое продолжение на комплексные переменные, но будут получаться функции с неизолированными особенностями.

Список литературы

1. Abrosimov N.V., Mednykh A.D. Volumes of polytops in spaces of constant curvature // Fields Institut Communications, 2013 (in press) // arXiv:1302.4919 [math.MG].

2. Сабитов И.Х. Алгебраические методы решения многогранников // Успехи мат. наук. 2011. **66**:3. С. 3–66. (English transl.: Sabitov I.Kh. Algebraic methods for solution of polyhedra // Russian Math. Surveys. 2011. 66:3. P. 445–505.)

3. Sabitov I.Kh. On an approach to the calculation of volumes in spaces of constant curvature // Yaroslavl Intrernatinal Conference «Geometry, Topology and Applications», September 23–27: Abstracts. Yaroslavl, 2013. P. 98–100.

4. Сабитов И.Х. Об одном методе вычисления объемов в пространствах постоянной кривизны // Крымская Международная Математическая Конференция. Судак, 22 сентября – 4 октября 2013: Сборник тезисов. Судак, 2013. Т. 2. С. 77–78. (Sabitov I.Kh. Ob odnom metode vychisleniya obyomov v prostranstvah postoyannoi krivizny // Crimea International Mathematical Conference. Sudak, Ukraine, September, 22—October, 4, 2013: Book of Abstracts. Sudak, 2013. Vol. 2. P. 77–78 [in Russian].)

5. Сабитов И.Х. Об одном методе вычисления объемов тел // Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10. С. 615–626. (Sabitov I.Kh. Ob odnom metode vychisleniya obyemov tel // Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. 2013. Vol. 10. P. 615–626 [in Russian].)

6. Murakami J. and Ushijima A. A volume formula for hyperbolic tetrahedral in terms of edge lengths // Journal of Geometry. 2005. Vol. 83, No 1–2. P. 153—163.

Hyperbolic Tetrahedron: Volume Calculation with Application to the Proof of the Schläfli Formula

Sabitov I.Kh.

Lomonosov Moscow State University
P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: Lobachevsky space, tetrahedron, volume, integral formula, Schläfli formula

We propose a new approach to the problem of calculations of volumes in the Lobachevsky space, and we apply this method to tetrahedra. Using some integral formulas, we present an explicit formula for the volume of a tetrahedron in the function of the coordinates of its vertices as well as in the function of its edge lengths. Finally, we give a direct analitic proof of the famous Schlf̈li formula for tetrahedra.

Сведения об авторе:
Сабитов Иджад Хакович,
МГУ им. М.В. Ломоносова, профессор;
ЯрГУ им. П.Г. Демидова, ведущий научный сотрудник