

© Домбровская Ж. О., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-539-547

УДК 519.63

Метод конечных разностей во временной области для кусочно-однородных диэлектрических сред

Домбровская Ж. О.

получена 31 августа 2016

Аннотация. В данной статье рассматривается численное решение системы вихревых уравнений Максвелла для кусочно-однородной диэлектрической среды на примере одномерной задачи. Для обеспечения второго порядка точности необходимо поставить узел сетки электрического поля в точку разрыва диэлектрической проницаемости. Если скачок проницаемости велик, то задача становится сингулярно возмущенной и возникает контрастная структура. Построена кусочная квазиравномерная сетка, детально передающая все характерные участки решения этой задачи (регулярную область, пограничный слой и переходную зону между ними). Обсуждаются свойства этой сетки.

Ключевые слова: метод конечных разностей во временной области (FDTD), схема Йе, диэлектрические границы раздела, слоистые среды, квазиравномерные сетки

Для цитирования: Домбровская Ж. О., "Метод конечных разностей во временной области для кусочно-однородных диэлектрических сред", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23:5** (2016), 539–547.

Об авторах:

Домбровская Жанна Олеговна, orcid.org/0000-0003-0609-1065, аспирант
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991 Россия, e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru

Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15-01-03524, № 16-31-00418).

Введение

Метод конечных разностей во временной области (FDTD – Finite-Difference Time-Domain) является сравнительно простым в реализации и при этом надежным алгоритмом для численного решения прикладных задач фотоники и плазмоники [1], [2]. В его основе лежит дискретизация уравнений Максвелла по конечно-разностной схеме Йе [3]. В случае линейной однородной среды эта схема сходится со вторым порядком точности на прямоугольных равномерных и неравномерных сетках [4], [5] при выполнении условия Куранта.

Особую трудность для конечно-разностных методов представляют задачи в слоистых средах, когда один из материальных параметров (диэлектрическая проницаемость ϵ или магнитная восприимчивость μ) или оба являются кусочно-непрерывными. Если точка разрыва попадает внутрь шаблона разностной схемы, то добиться

сходимости в норме C не удается. Имеет место лишь сходимость в норме L с дробным показателем, зависящим от априорного порядка точности.

В работах [6], [7] предпринимались попытки решения этой проблемы для метода FDTD. Например, в случае диэлектрической границы раздела второй порядок точности достигался с помощью переноса положения ближайшего к ней узла. Однако при большой величине скачка ϵ такая процедура является ненадежной. Шаг, примыкающий к границе раздела, становится настолько мелким, что аккуратное вычисление разностных производных требует повышенной разрядности. Кроме того, в [7] вблизи границы раздела требовалось вводить эффективное значение ϵ_{eff} , то есть изменять исходную задачу. Это может привести к физическим артефактам, например, изменению значений коэффициентов прохождения и отражения.

Диэлектрическая среда с большой относительной проницаемостью $\sim 10^2 \div 10^4$ ведет себя практически как идеальный проводник. Глубина проникновения высокочастотного электромагнитного поля в него невелика. Внутри скин-слоя решение резко изменяется, то есть возникает контрастная структура. При правильном выборе расположения узлов такие сингулярно возмущенные задачи можно решать на равномерных сетках, однако это крайне невыгодно из-за избыточно подробного шага в областях плавного изменения решения. Целесообразно использовать сетки, адаптированные к толщине скин-слоя.

Чаще всего применяются сетки из работ [8]– [12], сгущающиеся в пограничных слоях. Однако при численном решении важную роль играют не только регулярные и погранслойные участки. Совсем недавно в [13] было предложено выделять также переходные области, возникающие между ними и характеризующиеся большой кривизной решения. Последнее обстоятельство сильно осложняет расчеты. Была построена квазиравномерная сетка, содержащая в каждом из этих трех участков (регулярная часть, переходная область и пограничный слой) примерно одинаковое число узлов. Рассматривалась только стационарная задача, нестационарный случай не изучался.

В данной работе рассматривается одномерная нестационарная начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла с кусочно-постоянным коэффициентом, задающим границу раздела двух диэлектрических сред с сильно различающимися значениями проницаемости. Для ее численного решения методом FDTD предлагается использовать кусочную квазиравномерную сетку, являющуюся модификацией сетки из [13], [14]. В точку разрыва ϵ ставится узел сетки электрического поля; шаги выбираются так, чтобы детально передать все характерные участки решения. Значительное внимание уделяется обсуждению преимуществ использования такого подхода. Он удобен, единообразен, позволяет экономично решать задачи рассматриваемого типа и получать апостериорную асимптотически точную оценку погрешности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерную задачу о нормальном падении электромагнитного импульса, возбужденного излучающей линией с заданной плотностью тока $\mathbf{J} = J_z(t)$ в координате $x_* < 0$, на границу «воздух – диэлектрик» (рис. 1). Диэлектрическая

проницаемость вещества ε является кусочно-постоянной величиной

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \text{const} \geq 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Электрическое и магнитное поля, $\mathbf{E} = E_z(x, t)$ и $\mathbf{H} = H_y(x, t)$, удовлетворяют вихревым уравнениям Максвелла (z -поляризованная TEM мода)

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} = -J_z, \quad (x, t) \in (-a; a) \times (0; T], \quad (2)$$

с нулевыми начальными условиями

$$E_z|_{t=0} = 0, \quad H_y|_{t=0} = 0, \quad x \in (-a; a). \quad (3)$$

Здесь $a > 0$, $T > 0$; ε_0 и μ_0 – диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость вакуума. Неограниченность области имитируется с помощью поглощающих граничных условий

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial t} - c_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \Big|_{x=-a} = 0, \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} + v \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} = 0, \quad t \in (0; T], \quad (4)$$

где c_0 и v – скорости распространения света в вакууме и в веществе соответственно.

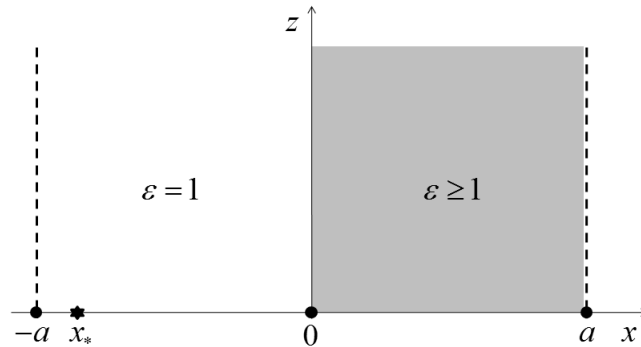


Рис. 1. Граница раздела диэлектрических сред; x_* – точка расположения источника поля

Fig. 1. Interface between dielectric media; x_* – field source point

В стационарном случае система (2)–(4) эквивалентна краевой задаче с условиями сопряжения для уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial x^2} + k_0^2 \tilde{E}_z = -i\omega \frac{\mu_0}{\varepsilon} \tilde{J}_z \delta(x - x_*), \quad x \in (-\infty; \infty). \quad (5)$$

В правой части (5) записана функция источника, символом δ обозначена δ -функция Дирака; \tilde{E}_z и \tilde{J}_z – z -компоненты напряженности электрического поля и поверхностной плотности тока, зависящие только от пространственной координаты, ω – круговая частота, $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число в вакууме. На границе раздела $x = 0$

ставятся дополнительные условия

$$\tilde{E}_z \Big|_{x=-0} = \tilde{E}_z \Big|_{x=+0}, \quad \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} \Big|_{x=-0} = \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} \Big|_{x=+0}. \quad (6)$$

Если в (1) при $x \geq 0$ величина $\varepsilon \gg 1$, то задачи (2)–(4) и (5)–(6) являются сингулярно возмущенными. Вблизи границы раздела $x = 0$ имеется пограничный слой, ширина которого составляет $\sim 1/(k_0\sqrt{\varepsilon})$. Слева и справа от него располагаются переходные зоны, а далее регулярные участки решения.

Многомерный аналог задачи (5)–(6) может быть решен с помощью прикладного пакета программ SuFaReC [15], позволяющего производить сверхбыстрые расчеты с гарантированной точностью в прямоугольной области на квазиравномерных сетках [16], [17].

2. Разностная схема

Будем решать нестационарную задачу (2)–(4) методом FDTD. Неизвестные значения компоненты электрического поля E_z вычисляются в полуцелых узлах сетки, магнитного поля H_y – в целых (рис. 2).

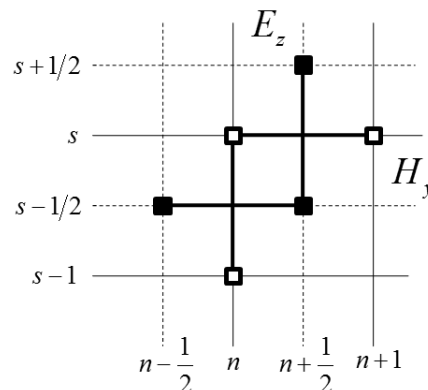


Рис. 2. Шаблон разностной схемы
 Fig. 2. Difference scheme template

Схема Йе является консервативной, поэтому на границе раздела $x = 0$ не возникает нефизичных фиктивных источников излучения. В нашем случае диэлектрическую границу раздела необходимо поставить в узел E_z , то есть ε вычисляется в полуцелых узлах сетки. В противном случае аппроксимации в норме C не будет.

Выберем некоторую неравномерную сетку и аппроксимируем уравнения Максвелла (2) на шаблоне, представленном на рис. 2. Выбор сетки будет конкретизирован ниже. Получим одномерную разностную схему Йе

$$\mu_0 \frac{H_y|_n^{s+1} - H_y|_n^s}{\tau} + \frac{E_z|_{n+1/2}^{s-1/2} - E_z|_{n-1/2}^{s-1/2}}{h} = 0, \quad (n, s) \in [1; N] \times [1; S], \quad (7)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon|_{n+1/2}^{s-1/2} \frac{E_z|_{n+1/2}^{s+1/2} - E_z|_{n+1/2}^{s-1/2}}{\tau} + \frac{H_y|_{n+1}^{s+1} - H_y|_n^{s+1}}{h} = -J_z|_{n+1/2}^{s-1/2}, \quad (n, s) \in [1; N-1] \times [1; S], \quad (8)$$

где h и τ – шаги по пространству и по времени. Начальные условия имеют вид

$$E_z|_{n-1/2}^{1/2} = 0, \quad H_y|_n^1 = 0, \quad n \in [1; N]. \quad (9)$$

Разностные граничные условия записываются следующим образом:

$$E_z|_{1/2}^{s+1/2} = E_z|_{3/2}^{s-1/2} + \frac{c_0\tau - h}{c_0\tau + h} \left(E_z|_{3/2}^{s+1/2} - E_z|_{1/2}^{s-1/2} \right), \quad s \in [1; S], \quad (10)$$

$$E_z|_{N-1/2}^{s+1/2} = E_z|_{N+1/2}^{s-1/2} + \frac{c_0\tau - h}{c_0\tau + h} \left(E_z|_{N+1/2}^{s+1/2} - E_z|_{N-1/2}^{s-1/2} \right), \quad s \in [1; S]. \quad (11)$$

Условия (10) и (11) соответствуют «открытым границам» в координатах $x = -a$ и $x = a$. Они называются условиями Мура первого порядка [18].

3. Квазиравномерная сетка

В методе FDTD вводятся три сетки: две пространственные для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} и одна общая по времени. Электрическое и магнитное поле смещены по отношению друг к другу на половину шага дискретизации по пространству и по времени. Обычно эти сетки выбираются равномерными с мелким шагом или кусочно-равномерными (например, [5], [19], [20]).

Рассмотрим пространственную сетку для поля \mathbf{E} . В данной задаче положение внутреннего пограничного слоя известно, это граница раздела $x = 0$. Поэтому шаг сетки должен быть чрезвычайно мелким вблизи нее и постепенно увеличивается по мере удаления от этой точки. Подчеркнем, что во всех областях решения (регулярной, погранслоистой, переходной) должно быть примерно одинаковое число узлов. Этого можно добиться, используя производящую функцию, предложенную А.А. Беловым и Н.Н. Калиткиным в [13], и задавая сетку кусочно следующим образом:

$$x(\xi) = \begin{cases} a (\operatorname{th}[c(\xi - 1)(1 + (\xi - 1)^2)/3] + 1), & \xi \in [0; 1], \\ a (\operatorname{th}[c(\xi + 1)(1 + (\xi + 1)^2)/3] - 1), & \xi \in [-1; 0]. \end{cases} \quad (12)$$

Управляющие параметры a и c подбираются так, чтобы $x(\pm 1) = \pm a$, а значение производной на границе равнялось

$$x'(0) = \frac{1/\sqrt{\varepsilon}}{-k_0^2 + 1/\sqrt{\varepsilon}}. \quad (13)$$

Условие (13) позволяет адаптировать шаг вблизи границы раздела к ширине погранслоя. Шаги сетки пропорциональны производной производящей функции. Поскольку поле \mathbf{E} вычисляется в полуцелых точках, то эта производная должна брать в целых узлах: $h_n^E = x'(\xi_n)/N$.

Нетрудно убедиться, что сетка (12) действительно является квазиравномерной. Напомним, что для этого преобразование $x(\xi)$ должно быть 1) гладким, 2) строго

монотонным и 3) должно переводить отрезок $\xi \in [-1; 1]$ в заданный отрезок $x \in [-a; a]$. При этом разность двух соседних шагов должна быть величиной $O(N^{-2})$ (или, что то же самое, отношение соседних шагов должно стремиться к единице).

Расчеты на квазиравномерных сетках, как и на равномерных [21], можно проводить с многократным сгущением. Применяя при этом метод Ричардсона [22], можно получать апостериорную асимптотически точную оценку погрешности, исследовать фактический порядок точности и рекуррентно его повышать. Поэтому квазиравномерные сетки обладают значительными преимуществами по сравнению с кусочно-равномерными.

Сравнение предложенной сетки (12) с известными проведем на примере работы [11]. В ней предлагалась степенная квазиравномерная сетка вида

$$x(\xi) = A + (B + C\xi)^{1/\alpha}, \quad (14)$$

где α – управляющий параметр, а константы A, B, C подбираются так, чтобы обеспечить равномерную сходимость по малому параметру. Зависимость ξ от x для сеток (12) и (14) проиллюстрирована на рис. 3. Видно, что при одинаковом числе узлов сетка (12) гораздо лучше разрешает узкий пограничный слой и прилегающую к нему переходную зону. При этом в каждую из областей решения действительно попадает примерно одинаковое число узлов (на рисунке проведены касательные к участкам кривой, передающим эти области). В то же время сетка (14) дает избыточное число узлов в регулярной части решения. Поэтому для расчета задач контрастными структурами она менее выгодна.

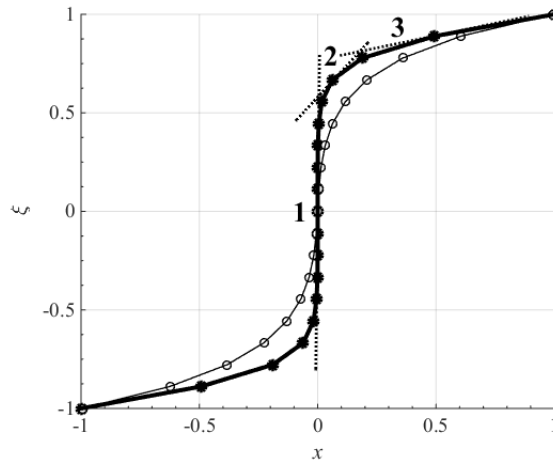


Рис. 3. Сравнение производящих функций сеток, $N = 10$; темные маркеры – (12), светлые – работа [11]; цифрами отмечены характерные участки решения: 1 – пограничный слой, 2 – переходная зона, 3 – регулярное решение

Fig. 3. Comparison between the generating grids functions, $N = 10$; dark markers – (12), bright – work [11]; characteristic zones of the solution are marked by numbers: 1 – boundary layer, 2 – transition region, 3 – regular solution

Производящую функцию пространственной сетки для поля \mathbf{H} целесообразно выбрать такой же, как для поля \mathbf{E} . Это упрощает процедуру сгущения. Заметим, что

шаги сетки для \mathbf{H} вычисляются через производную производящей функции в полупространствах.

Поскольку схема явная, то шаги по времени должны удовлетворять условию Куранта $\tau \leq h/c_0$. Поэтому необходимо использовать равномерную сетку, шаг которой пропорционален наименьшему шагу сетки по пространству $\tau = \min h/c_0$. В качестве итоговой сетки для задачи (2)-(4) выбирается декартово произведение пространственных сеток для \mathbf{E} , \mathbf{H} и сетки по времени.

4. Обобщения и замечания

В настоящей работе предложен подход, позволяющий аккуратно моделировать распространение электромагнитных полей методом FDTD при наличии границы раздела сред. Рассматривается одномерная задача для кусочно-равномерной среды с сильно отличающимися диэлектрическими проницаемостями. Полученные результаты без труда обобщаются на случай неидеальных диэлектриков. В этом случае точка разрыва удельной диэлектрической проводимости σ^e ставится в тот же узел, что и точка разрыва диэлектрической проницаемости ε .

Аналогичным образом можно поступать и в задачах с магнитными границами раздела, когда ε непрерывна, а магнитная восприимчивость μ и удельная магнитная проводимость σ^m являются кусочно-непрерывными. В этом случае в точки разрыва μ и σ^m нужно поставить узел сетки, относящийся к магнитному полю.

Однако к задачам, в которых ε и μ испытывают разрыв в одной точке, данный подход применить нельзя. В таких задачах не удастся записать шаблон явной схемы FDTD так, чтобы внутри него гарантированно не попали точки разрыва материальных параметров.

Наконец, предложенный метод можно непосредственно применять к многомерным задачам, так как многомерные сетки для полей строятся как декартово произведение одномерных.

Список литературы / References

- [1] Taflov A., Hagness S. C., *Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed., Artech House, 2005.
- [2] Taflov A., Johnson S. G., Oskooi A., *Advances in FDTD Computational Electromagnetics: Photonics and Nanotechnology*, Artech House, 2013.
- [3] Yee K. S., "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **14**:3 (1966), 302–307.
- [4] Monk P., "Convergence analysis of Yee's scheme on non-uniform grids", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **31**:2 (1994), 393–412.
- [5] Li J., Shields S., "Superconvergence analysis of Yee scheme for metamaterial Maxwell's equations on non-uniform rectangular meshes", *Numer. Math.*, 2015, 1–41, <http://dx.doi.org/10.1007/s00211-015-0788-4>.
- [6] Chu Q. X., Ding H., "Second-order accurate FDTD equations at magnetic media interfaces", *IEEE Trans. Magn.*, **27** (2006), 3141–3143.
- [7] Chu Q. X., Ding H., "Second-order accurate FDTD equations at dielectric interfaces", *Microwave Opt. Techn. Lett.*, **49**:12 (2007), 3007–3011.

- [8] Бахвалов Н.С., “К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **9**:4 (1969), 841–859; [Bakhvalov N.S., “K optimizatsii metodov resheniia kraevykh zadach pri nalichii pogramichnogo sloia”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **9**:4 (1969), 841–859, (in Russian).]
- [9] Шишкин Г.И., “Разностные аппроксимации сингулярно возмущенной краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений, вырождающихся в уравнение первого порядка”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **32**:4 (1992), 550–566; [Shishkin G.I., “Raznostnye approksimatsii singuliarno vozmushchennoi kraevoi zadachi dlia kvazilineinykh ellipticheskikh uravnenii, vyrozhdshaushchikhsia v uravnenie pervogo poriadka”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **32**:4 (1992), 550–566, (in Russian).]
- [10] Sun G., Stynes M., “Finite element methods on piecewise equidistant meshes for interior turning point problems”, *Numer. Algorithms*, **8**:1 (1994), 111–129.
- [11] Liseikin V.D., *Layer resolving grids and transformations for singular perturbation problems*, VSP BV, 2001.
- [12] Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I., *Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions*, World Scientific, 1996.
- [13] Белов А.А., Калиткин Н.Н., “Численное моделирование задач с пограничным слоем”, *Математическое моделирование.*, **27**:1 (2015), 47–55; English transl.: Belov A.A., Kalitkin N.N., “Numerical simulations of boundary layer problems”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **8**:4 (2016), 341–347.
- [14] Белов А.А., Калиткин Н.Н., “Сеточные методы решения задач с пограничным слоем”, Серия физическая, **79**, 2015, 1655–1659; English transl.: Belov A.A., Kalitkin N.N., “Grid methods for boundary layer problem”, *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, **79**:12 (2015), 1448–1452.
- [15] Белов А.А., “Программы SuFaReC для сверхбыстрого расчета эллиптических уравнений в прямоугольной области”, *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2015, № 44, 1–12, <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-44>; [Belov A.A., “Programmy SuFaReC dlia sverkhbystrogo rascheta ellipticheskikh uravnenii v priamougolnoi oblasti”, *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2015, № 44, 1–12, <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-44>, (in Russian).]
- [16] Калиткин Н.Н., Белов А.А., “Аналог метода Ричардсона для логарифмически сходящегося счета на установление”, *Доклады Академии наук*, **452**:3 (2013), 261–265; English transl.: Kalitkin N.N., Belov A.A., “Analogue of the richardson method for logarithmically converging time marching”, *Doklady Mathematics*, **88**:2 (2013), 596–600.
- [17] Белов А.А., Калиткин Н.Н., “Эволюционная факторизация и сверхбыстрый счет на установление”, *Математическое моделирование.*, **26**:9 (2014), 47–64; English transl.: Belov A.A., Kalitkin N.N., “Evolutionary factorization and superfast relaxation count”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **7**:2 (2015), 103–116.
- [18] Mur G., “Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations”, *IEEE Trans. Electromagn. Comp.*, **EMC-23**:4 (1981), 377–382.
- [19] Боголюбов А.Н., Буткарев И.А., Дементьева Ю.С., “Исследование распространения электромагнитных импульсов через фотонные кристаллические структуры”, Серия 3: Физика, астрономия, 2010, 3–8; English transl.: Bogolyubov A.N., Butkarev I.A., Dementieva Yu.S., “Research of propagation of electromagnetic pulses through photonic crystal structures”, *Moscow University physics bulletin*, **65**:6 (2010), 425–431.
- [20] Боголюбов А.Н., Белокопытов Г.В., Домбровская Ж.О., “Моделирование спектральных зависимостей для двумерных фотонно-кристаллических волноводных систем”, Серия 3: Физика, астрономия, 2013, 8–13; English transl.: Bogolubov A.N., Belokopytov G.V., Dombrovskaya Z.O., “Modeling of spectral dependences for 2D photonic crystal waveguide systems”, *Moscow University physics bulletin*, **68**:6 (2013), 344–350.
- [21] Домбровская Ж.О., Боголюбов А.Н., “Анализ точности и сходимости одномерной схемы Йе методом сгущения сеток”, *Ученые записки физического факультета*

- МГУ, 2016, № 3, 163112-1–163112-3, <http://uzmu.phys.msu.ru/file/2016/3/163112.pdf>;
[Dombrovskaya Zh. O, Bogolyubov A. N., “Analiz tochnosti i skhodimosti odnomernoj skhemy Yee metodom sguscheniia setok”, *Uchnye zapiski fizicheskogo fakulteta MGU*, 2016, № 3, 163112-1–163112-3, <http://uzmu.phys.msu.ru/file/2016/3/163112.pdf>, (in Russian).]
- [22] Richardson L. F., Gaunt J. A., “The deferred approach to the limit”, *Phil. Trans. A*, **226** (1927), 229–349.

Dombrovskaya Zh. O., "FDTD Method for Piecewise Homogeneous Dielectric Media", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:5 (2016), 539–547.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-5-539-547

Abstract. In this paper, we consider a numerical solution of Maxwell’s curl equations for piecewise uniform dielectric medium by the example of a one-dimensional problem. For obtaining the second order accuracy, the electric field grid node is placed into the permittivity discontinuity point of the medium. If the dielectric permittivity is large, the problem becomes singularly perturbed and a contrast structure appears. We propose a piecewise quasi-uniform mesh which resolves all characteristic solution parts of the problem (regular part, boundary layer and transition zone placed between them) in detail. The features of the mesh are discussed.

Keywords: finite-difference time-domain (FDTD) method, Yee’s scheme, dielectric interfaces, layered media, quasi-uniform meshes

On the authors:

Zhanna O. Dombrovskaya, orcid.org/0000-0003-0609-1065, PhD student,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru

Acknowledgments:

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Projects No 15-01-03524 and No 16-31-00418).