
Вычислительная геометрия Computational Geometry

©Невский М. В., 2018

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-6-680-691

УДК 514.17+517.51+519.6

О некоторых задачах для симплекса и шара в \mathbb{R}^n

Невский М. В.

*Поступила в редакцию 20 сентября 2018**После доработки 30 октября 2018**Принята к публикации 10 ноября 2018*

Аннотация. Пусть C — выпуклое тело, S невырожденный симплекс в \mathbb{R}^n . Через τS обозначим образ S при гомотетии относительно центра тяжести S с коэффициентом τ . Под $\xi(C; S)$ понимается минимальное $\tau > 0$, для которого C является подмножеством симплекса τS . По определению, $\alpha(C; S)$ есть минимальное $\tau > 0$, такое что C принадлежит трансляту симплекса τS . Ранее автор доказал, что справедливы равенства $\xi(C; S) = (n + 1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1$ (если $C \not\subset S$), $\alpha(C; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1$. Здесь λ_j — линейные функции, называемые базисными многочленами Лагранжа симплекса S . Они таковы, что числа $\lambda_j(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x \in \mathbb{R}^n$. В предыдущих работах автора указанные формулы исследовались в ситуации, когда C представляет собой n -мерный единичный куб $Q_n = [0, 1]^n$. В статье рассматривается случай, когда C есть единичный евклидов шар $B_n = \{x : \|x\| \leq 1\}$, где $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$. Устанавливаются различные соотношения для $\xi(B_n; S)$ и $\alpha(B_n; S)$, а также приводится их геометрическая интерпретация. Например, если $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$, то $\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}$. Минимальное возможное значение каждой из величин $\xi(B_n; S)$, $\alpha(B_n; S)$ для $S \subset B_n$ равно n и соответствует правильному симплексу, вписанному в B_n . Дается сравнение с результатами, полученными ранее для $C = Q_n$.

Ключевые слова: n -мерный симплекс, n -мерный шар, гомотетия, коэффициент поглощения

Для цитирования: Невский М. В., "О некоторых задачах для симплекса и шара в \mathbb{R}^n ", *Моделирование и анализ информационных систем*, 25:6 (2018), 680–691.

Об авторах:

Невский Михаил Викторович, orcid.org/0000-0002-6392-7618, доктор физ.-мат. наук, доцент, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: mnevsk55@yandex.ru

1. Определения и предварительные сведения

Начнём с основных определений и обозначений. Всюду далее $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \dots, x_n)$. Положим

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2},$$

$$B(x^{(0)}; \varrho) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^{(0)}\| \leq \varrho\} \quad (x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \varrho > 0),$$

$$B_n := B(0; 1), \quad Q_n := [0, 1]^n, \quad Q'_n := [-1, 1]^n.$$

Пусть C — выпуклое тело в \mathbb{R}^n . Через τC обозначим результат гомотетии C относительно центра тяжести с коэффициентом τ . Для невырожденного n -мерного симплекса S введём в рассмотрение величину $\xi(C; S) := \min\{\sigma \geq 1 : C \subset \sigma S\}$. Эту величину мы называем *коэффициентом поглощения (absorption index) выпуклого тела C симплексом S* . Обозначим через $\alpha(C; S)$ минимальное $\tau > 0$, для которого выпуклое тело C принадлежит трансляту симплекса τS . Под $\text{ver}(G)$ будем понимать совокупность вершин выпуклого многогранника G .

Обозначим вершины симплекса S через $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $1 \leq j \leq n+1$. Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Пусть $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Линейные многочлены $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$, коэффициенты которых составляют столбцы \mathbf{A}^{-1} , обладают свойством $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$, где δ_j^k — символ Кронекера. Мы называем λ_j *базисными многочленами Лагранжа, соответствующими S* . Числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S . Симплекс S задаётся системой линейных неравенств $\lambda_j(x) \geq 0$. Подробнее о многочленах λ_j см. [3, гл. 1].

Равенство $\xi(C; S) = 1$ эквивалентно включению $C \subset S$. В [2] (см. также [3, § 1.3]) установлено, что если $C \not\subset S$, то

$$\xi(C; S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (1)$$

Соотношение

$$\max_{x \in C} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in C} (-\lambda_{n+1}(x)) \quad (2)$$

эквивалентно тому, что симплекс $\xi(C; S)S$ описан вокруг C . В случае $C = Q_n$ равенство (1) приводится к виду

$$\xi(Q_n; S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1,$$

а (2) сводится к соотношению

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)). \quad (3)$$

Для любых C и S выполняется $\xi(C; S) \geq \alpha(C; S)$. При этом $\xi(C; S) = \alpha(C; S)$ тогда и только тогда, когда симплекс $\xi(C; S)S$ описан вокруг выпуклого тела C . Последнее равносильно соотношению (2), а для $C = Q_n$ — соотношению (3).

В [4] (см. также [3, § 1.4]) доказано равенство

$$\alpha(C; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1, \quad (4)$$

Если $C = Q_n$, то эта формула может быть записана в более геометрическом виде:

$$\alpha(Q_n; S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \quad (5)$$

Здесь $d_i(S)$ — i -й осевой диаметр симплекса S , представляющий собой максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного i -й координатной оси. Равенство (5) установлено в [11]. Если $S \subset Q_n$, то $d_i(S) \leq 1$, поэтому для таких симплексов (5) даёт

$$\xi(Q_n; S) \geq \alpha(Q_n; S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \geq n. \quad (6)$$

Как ранее доказал автор (см. [2]),

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (7)$$

Из (5) и (7) следует соотношение

$$\alpha(Q_n; S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (8)$$

Заметим, что $\alpha(C; S)$ не меняется при параллельном переносе множеств и при $\tau > 0$ верно $\alpha(\tau C; S) = \tau \alpha(C; S)$. Поскольку куб $Q'_n = [-1, 1]^n$ есть транслят куба $2Q_n$, то при замене Q_n на Q'_n из (8) получается ещё более простая формула:

$$\alpha(Q'_n; S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (9)$$

Положим

$$\xi_n := \min\{\xi(Q_n; S) : S - n\text{-мерный симплекс}, S \subset Q_n, \text{vol}(S) \neq 0\}.$$

Оценкам чисел ξ_n посвящены многие работы автора, а также автора и А. Ю. Ухалова (см., например, статьи [1], [2], [5], [6], [7], [8], [12] и монографию [3]). Всегда $n \leq \xi_n < n + 1$. Точные значения ξ_n к настоящему моменту известны для $n = 2, 5, 9$ и бесконечной совокупности нечётных n , для каждого из которых существует матрица Адамара порядка $n + 1$. При $n \neq 2$ каждое известное ξ_n равно n , а

$\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\dots$ До сих пор неизвестно, существует ли хотя бы одно чётное n со свойством $\xi_n = n$. Относительно чисел ξ_n есть и другие открытые вопросы.

В настоящей статье обсуждаются аналоги введённых выше характеристик и соотношений для симплекса и евклидова шара. Замена куба на шар делает многие рассматриваемые вопросы существенно более простыми. Однако геометрическая интерпретация отмеченных общих результатов и в этом частном случае имеет определённый интерес. Кроме того, мы отметим новые приложения базисных многочленов Лагранжа.

Числовые характеристики, связывающие симплексы с подмножествами \mathbb{R}^n , имеют важные приложения к оцениванию норм проекторов, возникающих при полиномиальной интерполяции функций многих переменных. Этот подход и соответствующая методология подробно описаны в [3]. В последнее время в кругу этих вопросов удалось эффективно применить, кроме аналитических, и компьютерные методы (см., например, [5], [6], [8], [12]).

2. Величина $\alpha(B_n; S)$

Инрадиусом n -мерного симплекса S (inradius) называется максимальный радиус шара, содержащегося в S . Центр этого единственного максимального шара называется *инцентром S (incenter)*. Граница максимального в симплексе шара — сфера, которая имеет с каждой $(n - 1)$ -мерной гранью единственную общую точку. Под *внешним радиусом, или циркумрадиусом S (circumradius)*, будем понимать минимальный радиус шара, содержащего S . Граница этого единственного минимального шара не обязательно содержит все вершины S . Это имеет место тогда и только тогда, когда центр минимального шара принадлежит S .

Инрадиус r и внешний радиус R симплекса S связаны *неравенством Эйлера*

$$R \geq nr. \tag{10}$$

Равенство в (10) имеет место тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс. По поводу доказательств n -мерного неравенства Эйлера, а также его истории и обобщений см., например, [10], [13], [14].

По поводу неравенства (10) отметим аналог следующего свойства, справедливого для параллелепипедов (см. [11], [3, § 1.8]). Пусть S — невырожденный симплекс, D, D^* — параллелепипеды в \mathbb{R}^n . Предположим, что D^* есть результат гомотетии D с коэффициентом $\tau > 1$. Если $D \subset S \subset D^*$, то $\tau \geq n$. Это утверждение верно и для шаров. Нетрудно видеть, что неравенство Эйлера эквивалентно следующему свойству. Если B — шар радиуса r_1 , B^* — шар радиуса r_2 и $B \subset S \subset B^*$, то $r_1 \leq nr_2$. Равенство выполняется тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс, вписанный в B^* , а B — шар, вписанный в S . Другая эквивалентная форма этих утверждений — приводимая ниже теорема 2 (см. замечание после её доказательства).

Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ — вершины, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ — базисные многочлены Лагранжа невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ (см. п. 1). Через Γ_j обозначим $(n - 1)$ -мерную гиперплоскость, задаваемую уравнением $\lambda_j(x) = 0$, через Σ_j — $(n - 1)$ -мерную грань симплекса, содержащуюся в Γ_j , через h_j — высоту, опущенную из вершины $x^{(j)}$

на Γ_j , через r — инрадиус S . Пусть σ_j — $(n-1)$ -мера Σ_j и $\sigma := \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j$. Обозначим $a_j := \{l_{1j}, \dots, l_{nj}\}$. Этот вектор ортогонален Γ_j и направлен в полупространство, содержащее вершину $x^{(j)}$. Ясно, что

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j} = (a_j, x) + l_{n+1,j} = (a_j, x) + \lambda_j(0).$$

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad (11)$$

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{h_j}, \quad (12)$$

$$\alpha(B_n; S) = \frac{1}{r}, \quad (13)$$

$$\alpha(B_n; S) = \frac{\sigma}{n \operatorname{vol}(S)}. \quad (14)$$

Доказательство. Получим эти попарно эквивалентные равенства, двигаясь сверху вниз. Сначала запишем

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in B} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (15)$$

Формула (15) есть частный случай (4) в ситуации $C = B_n$. По неравенству Коши имеем $|(a_j, x)| \leq \|a_j\| \|x\|$, откуда

$$-\|a_j\| \|x\| \leq (a_j, x) \leq \|a_j\| \|x\|, \quad (16)$$

$$-\|a_j\| \|x\| - \lambda_j(0) \leq -\lambda_j(x) \leq \|a_j\| \|x\| - \lambda_j(0).$$

Так как верхняя и нижняя границы в неравенстве (16) достигаются, то

$$\max_{x \in B_n} (-\lambda_j(x)) = \max_{\|x\| \leq 1} (-\lambda_j(x)) = \|a_j\| - \lambda_j(0).$$

Поэтому

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in B_n} (-\lambda_j(x)) + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \|a_j\| - \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Мы воспользовались тем, что $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) = 1$. Поскольку $\lambda_j(x^{(j)}) = 1$, имеем

$$h_j = \operatorname{dist}(x^{(j)}; \Gamma_j) = \frac{|\lambda_j(x^{(j)})|}{\|a_j\|} = \frac{1}{\|a_j\|} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}}.$$

Следовательно,

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{h_j}.$$

Итак, мы получили (11) и (12).

Докажем (13). Шар B есть подмножество транслята симплекса $\alpha(B_n; S)S$. Значит, транслят шара $\frac{1}{\alpha(B_n; S)}B_n$ содержится в S . Так как максимальный радиус шара, принадлежащего S , равен r , то $\frac{1}{\alpha(B_n; S)} \leq r$, т. е. $\alpha(B_n; S) \geq \frac{1}{r}$. Для получения противоположного неравенства обозначим через B' шар радиуса r , вписанный в S . Тогда шар $B_n = \frac{1}{r}B'$ содержится в некотором трансляте симплекса $\frac{1}{r}S$. По определению $\alpha(B_n; S)$ это даёт $\alpha(B_n; S) \leq \frac{1}{r}$. Стало быть, верно равенство $\alpha(B_n; S) = \frac{1}{r}$.

Наконец, для установления (14) достаточно привлечь (13) и формулу $\text{vol}(S) = \frac{1}{n}\sigma r$. Последнее равенство получается из обычной формулы для объёма симплекса после разбиения S на $n + 1$ симплекс, каждый из которых имеет вершину в центре вписанного шара и опирается на одну из граней Σ_j . □

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\frac{1}{r} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{h_j}.$$

Для доказательства достаточно применить (12) и (13). Представляется интересным, что это красивое геометрическое соотношение, которое может быть получено и непосредственно, оказывается эквивалентным общей формуле для $\alpha(C; S)$ в случае, когда выпуклое тело C является евклидовым единичным шаром.

Следствие 2. *Инрадиус r и инцентр z симплекса S могут быть вычислены по формулам*

$$r = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}}, \quad (17)$$

$$z = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}} \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} x^{(j)}. \quad (18)$$

Точка касания шара $B(z; r)$ с $(n - 1)$ -мерной гранью Σ_k симплекса S имеет вид

$$y^{(k)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} x^{(j)} - \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n l_{ik}^2 \right)^{1/2}} (l_{1k}, \dots, l_{nk}) \right]. \quad (19)$$

Доказательство. Равенство (17) немедленно следует из (11) и (13). Для получения (18) заметим, что

$$r = \text{dist}(z; \Gamma_j) = \frac{|\lambda_j(z)|}{\|a_j\|}.$$

Так как точка z лежит строго внутри S , каждая её барицентрическая координата $\lambda_j(z)$ положительна. Поэтому $\lambda_j(z) = r \|a_j\|$. Следовательно,

$$z = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(z) x^{(j)} = r \sum_{j=1}^{n+1} \|a_j\| x^{(j)},$$

что совпадает с (18). Наконец, поскольку вектор $a_k = \{l_{1k}, \dots, l_{nk}\}$ ортогонален грани Σ_k и направлен от неё внутрь симплекса, единственная общая точка шара $B(z; r)$ и этой грани имеет вид

$$y^{(k)} = z - \frac{r}{\|a_k\|} a_k = r \left(\sum_{j=1}^{n+1} \|a_j\| x^{(j)} - \frac{1}{\|a_k\|} a_k \right).$$

Последнее равенство равносильно (19). □

Формулу (11) интересно сравнить с формулой (9) для $\alpha(Q'_n; S)$. Так как шар B_n есть подмножество куба $Q'_n = [-1, 1]^n$, то $\alpha(B_n; S) \leq \alpha(Q'_n; S)$. Аналитически же это неравенство следует из оценки

$$\left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n |l_{ij}|.$$

Для произвольных $x^{(0)}$ и $\varrho > 0$ величина $\alpha(B(x^{(0)}; \varrho); S)$ может быть вычислена с помощью формул теоремы 1 и равенства $\alpha(B(x^{(0)}; \varrho); S) = \varrho \alpha(B_n; S)$.

Если $S \subset Q_n$, то все осевые диаметры $d_i(S) \leq 1$. Формула (5) немедленно даёт $\alpha(Q_n; S) \geq n$. Если же для некоторого S выполняется $\alpha(Q_n; S) = n$, то каждый осевой диаметр S равен 1. Следующая теорема даёт аналоги этих утверждений для симплексов, содержащихся в шаре.

Теорема 2. *Если $S \subset B_n$, то $\alpha(B_n; S) \geq n$. Равенство $\alpha(B_n; S) = n$ выполняется тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс, вписанный в B_n .*

Доказательство. По определению $\alpha(B_n; S)$, шар B_n содержится в трансляте симплекса $\alpha(B_n; S)S$. Поэтому некоторый транслят B' шара $\frac{1}{\alpha(B_n; S)} B_n$ есть подмножество S . Итак, $B' \subset S \subset B_n$. Так как радиус B' равен $\frac{1}{\alpha(B_n; S)}$, то для инрадиуса r и внешнего радиуса R симплекса S справедливы неравенства $\frac{1}{\alpha(B_n; S)} \leq r$, $R \leq 1$. Применяя неравенство Эйлера $R \geq nr$, запишем

$$\frac{1}{\alpha(B_n; S)} \leq r \leq \frac{R}{n} \leq \frac{1}{n}, \tag{20}$$

откуда $\alpha(B_n; S) \geq n$.

Если же $\alpha(B_n; S) = n$, то левая величина в (20) совпадает с правой, значит, все неравенства в этой цепочке обращаются в равенства. Это даёт $R = 1$, $r = \frac{1}{n}$. Так как в этом случае неравенство Эйлера (10) обращается в равенство, S является правильным симплексом, вписанным в B_n . Наоборот, если S — правильный симплекс, вписанный в B_n , то для него, очевидно, $r = \frac{1}{n}$, поэтому $\alpha(B_n; S) = \frac{1}{r} = n$. □

Итак, теорема 2 следует из неравенства Эйлера (10). Фактически же эти утверждения эквивалентны. Действительно, пусть S — произвольный n -мерный симплекс, r — инрадиус, R — внешний радиус S . Обозначим через B шар радиуса R , содержащий S . Тогда некоторый транслят S' симплекса $\frac{1}{R}S$ содержится в шаре $\frac{1}{R}B = B_n$. По теореме 1, $\alpha(B_n; S')$ есть величина, обратная инрадиусу S' , т. е. равна $\frac{R}{r}$. Предположим теперь, что теорема 2 верна, и применим её к симплексу $S' \subset B_n$. Это даст $\alpha(B_n; S') = \frac{R}{r} \geq n$, т. е. неравенство (10). Если же $R = nr$, то $\alpha(B_n; S') = n$. Из теоремы 2 получаем, что в этом случае S' , а с ним и S являются правильными симплексами.

Как следует из (6), минимальное значение $\alpha(Q_n; S)$ для $S \subset Q_n$ также равно n . Это минимальное значение достигается на тех и только тех $S \subset Q_n$, для которых каждый осевой диаметр $d_i(S)$ равен 1. Указанным свойством обладают, например, симплексы максимального объёма в Q_n (подробнее см. [3]), но при $n > 2$ не только они.

3. Величина $\xi(B_n; S)$

В этом пункте приводится формула для коэффициента поглощения симплексом евклидова шара. Мы применяем предыдущие обозначения.

Теорема 3. Пусть S — невырожденный симплекс в \mathbb{R}^n , $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\varrho > 0$. Если $B(x^{(0)}; \varrho) \not\subset S$, то

$$\xi(B(x^{(0)}; \varrho); S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \left[\varrho \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^n l_{ij} x_i^{(0)} - l_{n+1,j} \right] + 1. \quad (21)$$

В частности, если $B_n \not\subset S$, то

$$\xi(B_n; S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \left[\left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} - l_{n+1,j} \right] + 1. \quad (22)$$

Доказательство. Применим общую формулу (1) для случая $C = B(x^{(0)}; \varrho)$. Неравенство Коши даёт

$$- \|a_j\| \|x - x^{(0)}\| \leq (a_j, x - x^{(0)}) \leq \|a_j\| \|x - x^{(0)}\|. \quad (23)$$

Для $\|x - x^{(0)}\| \leq \varrho$ имеем

$$\begin{aligned} -\varrho \|a_j\| &\leq (a_j, x) - (a_j, x^{(0)}) \leq \varrho \|a_j\|, \\ -\lambda_j(x) &= -(a_j, x) - l_{n+1,j} \leq \varrho \|a_j\| - (a_j, x^{(0)}) - l_{n+1,j}. \end{aligned}$$

Так как верхняя и нижняя границы в неравенстве (23) достигаются, то

$$\max_{\|x - x^{(0)}\| \leq \varrho} (-\lambda_j(x)) = \varrho \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^n l_{ij} x_i^{(0)} - l_{n+1,j}.$$

С учётом этого

$$\begin{aligned} \xi(B(x^{(0)}; \varrho); S) &= (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1, \|x-x^{(0)}\| \leq \varrho} (-\lambda_j(x)) + 1 = \\ &= (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \left[\varrho \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^n l_{ij} x_i^{(0)} - l_{n+1,j} \right] + 1, \end{aligned}$$

и мы пришли к (21). Равенство (22) получается из (21) при $x^{(0)} = 0, \varrho = 1$. \square

4. Равенство $\beta_n = n$. Комментарии

Теорема 4. Если $S \subset B_n$, то $\xi(B_n; S) \geq n$. Равенство $\xi(B_n; S) = n$ выполняется тогда и только тогда, когда S — правильный симплекс, вписанный в B_n .

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из теоремы 2 и неравенства $\xi(B_n; S) \geq \alpha(B_n; S)$. Приведём непосредственное доказательство без применения неравенства Эйлера, с помощью которого получена оценка $\alpha(B_n; S) \geq n$.

Пусть сначала S — правильный симплекс, вписанный в B_n . Тогда $\alpha(B_n; S) = n$, что равносильно тому, что инрадиус S равен $\frac{1}{n}$. Так как симплекс $\xi(B_n; S)S$ описан вокруг B_n , то $\xi(S; B_n) = \alpha(S; B_n) = n$ и выполняется соотношение (2), в котором надо взять $C = B_n$. Из (1) следует, что при любом $j = 1, \dots, n+1$

$$\max_{x \in B_n} (-\lambda_j(x)) = \frac{n-1}{n+1},$$

где λ_j — базисные многочлены Лагранжа симплекса S .

Пусть теперь симплекс S содержится в B_n , но не является правильным симплексом или не вписан в этот шар. Его многочлены Лагранжа обозначим через μ_j . Найдётся такой правильный симплекс S^* , вписанный в B_n , и такое k , что S принадлежит полосе $0 \leq \lambda_k(x) \leq 1$, k -е $(n-1)$ -мерные грани S и S^* параллельны и при этом S не имеет общих точек хотя бы с одной граничной гиперплоскостью этой полосы. Здесь λ_j — базисные многочлены Лагранжа симплекса S^* . Вершина $x^{(k)}$ симплекса S^* не принадлежит его k -й грани. Пусть u есть точка границы шара, наиболее удалённая от $x^{(k)}$, тогда u есть точка максимума многочлена $-\lambda_k(x)$, т. е. $-\lambda_j(u) = \frac{n-1}{n+1}$. Рассмотрим прямую, соединяющую $x^{(k)}$ и u . Обозначим через y, z и t точки пересечения этой прямой с попарно параллельными гиперплоскостями $\mu_k(x) = 1, \mu_k = 0$ и $\lambda_k(x) = 0$ соответственно. Выполняются неравенства

$$\|x^{(k)} - t\| \geq \|y - z\|, \quad \|t - u\| \leq \|z - u\|, \quad (24)$$

хотя бы одно из которых наверняка строгое. В силу линейности базисных многочленов Лагранжа справедливы соотношения

$$\frac{\mu_k(z) - \mu_k(u)}{\mu_k(y) - \mu_k(z)} = \frac{\|z - u\|}{\|y - z\|}, \quad \frac{\lambda_k(t) - \lambda_k(u)}{\lambda_k(x^{(k)}) - \lambda_k(t)} = \frac{\|t - u\|}{\|x^{(k)} - t\|}.$$

Поскольку $\mu_k(y) = 1, \mu_k(z) = 0, \lambda_k(x^{(k)}) = 1, \lambda_k(t) = 0$, имеем

$$-\mu_k(u) = \frac{\|z - u\|}{\|y - z\|} > \frac{\|t - u\|}{\|x^{(k)} - t\|} = -\lambda_k(u) = \frac{n-1}{n+1}.$$

Мы применили неравенства (24) и учли, что хотя бы одно из них является строгим. По формуле (1)

$$\xi(B_n; S) = (n + 1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in B_n} (-\mu_j(x)) + 1 \geq (n + 1)(-\mu_k(u)) + 1 > n.$$

Значит, если S не является правильным симплексом, вписанным в B_n , то имеет место строгое неравенство $\xi(B_n; S) > n$.

Таким образом, для любого симплекса $S \subset B_n$ выполняется $\xi(B_n; S) \geq n$. Равенство здесь эквивалентно тому, что S — правильный симплекс, вписанный в B_n . \square

По аналогии с величиной $\xi_n = \min\{\xi(Q_n; S) : S \subset Q_n\}$, определяемой через единичный куб $Q_n = [0, 1]^n$, введём в рассмотрение числовую характеристику, задаваемую единичным шаром:

$$\beta_n := \min\{\xi(B_n; S) : S \text{ — } n\text{-мерный симплекс, } S \subset B_n, \text{vol}(S) \neq 0\}.$$

Многие задачи о числах ξ_n ещё не решены. Например, единственным точным значением ξ_n для чётного n до сих пор остаётся $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}$, да и оно было найдено весьма непростым способом (см. [3, гл. 2]). По сравнению с ξ_n задача о числах β_n оказывается тривиальной.

Следствие 3. *Для любого n справедливо $\beta_n = n$. Экстремальным относительно β_n симплексом $S \subset B_n$ является любой правильный симплекс, вписанный в B_n . Других экстремальных симплексов нет.*

Достаточно применить теорему 4. Техника, связанная с шаром, позволяет проиллюстрировать некоторые результаты, полученные ранее для куба. Отметим здесь доказательство следующего известного утверждения, отличное от приведённых в [3, § 3.2] и [12].

Следствие 4. *Пусть существует матрица Адамара порядка $n + 1$. Тогда $\xi_n = n$.*

Доказательство. Известно (см., например, [9]), что для такого и только такого n в Q_n можно вписать правильный симплекс S так, что вершины симплекса будут находиться в вершинах куба. Обозначим через B шар с центром в центре куба и радиусом $\frac{\sqrt{n}}{2}$. Очевидно, куб Q_n вписан в B , поэтому и симплекс S вписан в этот шар. Так как S является правильным, то по теореме 4 и из соображений подобия имеем $\xi(B; S) = n$. Включение $Q_n \subset B$ означает, что $\xi(Q_n; S) \leq \xi(B; S)$, т. е. $\xi(Q_n; S) \leq n$. В силу (6) выполнено и противоположное неравенство $\xi(Q_n; S) \geq n$, поэтому $\xi(Q_n; S) = n$. Одновременно из (6) следует, что $\xi_n = \xi(Q_n; S) = n$. \square

Это рассуждение базируется на том, что если S — правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах Q_n , то симплекс nS поглощает не только Q_n , но и шар B , описанный вокруг куба. При этом коэффициент поглощения n оказывается минимально возможным и для куба, и для шара. Дополнительно отметим такое свойство.

Следствие 5. *Пусть $S \subset Q_n \subset nS$, причём симплекс S не является правильным. Тогда $B \not\subset nS$.*

Доказательство. Включение $B \subset nS$ означало бы, что $\xi(B; S) = n$. Тогда S был бы правильным симплексом, вписанным в шар B , однако это не так. Поэтому B не является подмножеством nS . \square

Симплексы, удовлетворяющие условию следствия 5, существуют по крайней мере при $n = 3, 5$ и 9 (см. [12]).

Соотношения (6) означают, что всегда $\xi_n \geq n$. Поскольку $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} > 2$, существуют n , для которых $\xi_n > n$. Кроме ситуаций, когда $n + 1$ есть число Адамара, равенство $\xi_n = n$ установлено при $n = 5$ и $n = 9$ (экстремальные симплексы в \mathbb{R}^5 и \mathbb{R}^9 найдены в [12]). Для всех таких размерностей $\xi_n = \beta_n$, т. е. с точки зрения минимального коэффициента поглощения находящимся внутри симплексом оба множества — n -мерный куб и n -мерный шар — ведут себя одинаково.

Равенство $\xi_n = n$ равносильно существованию симплексов, удовлетворяющих включениям $S \subset Q_n \subset nS$. Некоторые свойства таких симплексов (например, то, что центр тяжести S совпадает с центром куба) аналогичны свойствам правильных симплексов, вписанных в B_n (см. [7]). Однако вопрос о полном описании тех размерностей n , для которых существуют симплексы с таким условием, является весьма трудным и пока далёк от решения.

Список литературы / References

- [1] Невский М. В., “Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:1 (2009), 24–43; [Nevskij M. V., “On a certain relation for the minimal norm of an interpolational projection”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **16**:1 (2009), 24–43, (in Russian).]
- [2] Невский М. В., “Об одном свойстве n -мерного симплекса”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 580–593; English transl.: Nevskii M. V., “On a property of n -dimensional simplices”, *Math. Notes*, **87**:4 (2010), 543–555.
- [3] Невский М. В., *Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции*, Ярославль: Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2012; [Nevskii M. V., *Geometricheskie ocenki v polinomialnoy interpoljacii*, Yaroslavl: P. G. Demidov Yaroslavl State University, 2012, (in Russian).]
- [4] Невский М. В., “О минимальном положительном гомотетическом образе симплекса, содержащем выпуклое тело”, *Матем. заметки*, **93**:3 (2013), 448–456; English transl.: Nevskii M. V., “On the minimal positive homothetic image of a simplex containing a convex body”, *Math. Notes*, **93**:3–4 (2013), 470–478.
- [5] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “О числовых характеристиках симплекса и их оценках”, *Модел. и анализ информ. систем*, **23**:5 (2016), 603–619; English transl.: Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On numerical characteristics of a simplex and their estimates”, *Aut. Control Comp. Sci.*, **51**:7 (2017), 757–769.
- [6] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:1 (2017), 94–101; English transl.: Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “New estimates of numerical values related to a simplex”, *Aut. Control Comp. Sci.*, **51**:7 (2017), 770–782.
- [7] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “Об n -мерных симплексах, удовлетворяющих включениям $S \subset [0, 1]^n \subset nS$ ”, *Модел. и анализ информ. систем*, **24**:5 (2017), 578–595; [Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu., “On n -Dimensional Simplices Satisfying Inclusions $S \subset [0, 1]^n \subset nS$ ”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:5 (2017), 578–595, (in Russian).]

- [8] Невский М. В., Ухалов А. Ю., “О минимальном коэффициенте поглощения для n -мерного симплекса”, *Модел. и анализ информ. систем*, **25:1** (2018), 140–150; [Nevskii M. V., Ukhlov A. Yu., “On Minimal Absorption Index for an n -Dimensional Simplex”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25:1** (2018), 140–150, (in Russian).]
- [9] Hudelson M., Klee V., Larman D., “Largest j -simplices in d -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem”, *Linear Algebra Appl.*, **241–243** (1996), 519–598.
- [10] Klamkin M. S., Tsifinis G. A., “Circumradius–inradius inequality for a simplex”, *Mathematics Magazine*, **52:1** (1979), 20–22.
- [11] Nevskii M., “Properties of axial diameters of a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **46:2** (2011), 301–312.
- [12] Nevskii M., Ukhlov A., “Perfect simplices in \mathbb{R}^5 ”, *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*, **59:3** (2018), 501–521.
- [13] Yang S., Wang J., “Improvements of n -dimensional Euler inequality”, *Journal of Geometry*, **51** (1994), 190–195.
- [14] Vince A., “A simplex contained in a sphere”, *Journal of Geometry*, **89:1–2** (2008), 169–178.

Nevskii M. V., "On Some Problems for a Simplex and a Ball in \mathbb{R}^n ", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25:6** (2018), 680–691.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-6-680-691

Abstract. Let C be a convex body and let S be a nondegenerate simplex in \mathbb{R}^n . Denote by τS the image of S under homothety with a center of homothety in the center of gravity of S and the ratio τ . We mean by $\xi(C; S)$ the minimal $\tau > 0$ such that C is a subset of the simplex τS . Define $\alpha(C; S)$ as the minimal $\tau > 0$ such that C is contained in a translate of τS . Earlier the author has proved the equalities $\xi(C; S) = (n + 1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1$ (if $C \not\subset S$), $\alpha(C; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1$. Here λ_j are the linear functions that are called the basic Lagrange polynomials corresponding to S . The numbers $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ are the barycentric coordinates of a point $x \in \mathbb{R}^n$. In his previous papers, the author investigated these formulae in the case when C is the n -dimensional unit cube $Q_n = [0, 1]^n$. The present paper is related to the case when C coincides with the unit Euclidean ball $B_n = \{x : \|x\| \leq 1\}$, where $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. We establish various relations for $\xi(B_n; S)$ and $\alpha(B_n; S)$, as well as we give their geometric interpretation. For example, if $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$, then $\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}^2\right)^{1/2}$. The minimal possible value of each characteristics $\xi(B_n; S)$ and $\alpha(B_n; S)$ for $S \subset B_n$ is equal to n . This value corresponds to a regular simplex inscribed into B_n . Also we compare our results with those obtained in the case $C = Q_n$.

Keywords: n -dimensional simplex, n -dimensional ball, homothety, absorption index

On the authors:

Mikhail V. Nevskii, orcid.org/0000-0002-6392-7618, Doctor of Science,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: mnevsk55@yandex.ru