

УДК 519.68:[681.5137+612.8.001.57+007.51/52]

Интегральные близкие к эйлеровой характеристики полутоновых цифровых изображений

Парфенов П. Г., Каплий И. А.
Ярославский государственный университет

получена 2 марта 2008 года

Аннотация

С помощью интегрального выражения вводится аналог эйлеровой характеристики для полутоновых изображений. Получена теорема, позволяющая вычислять эту характеристику суммированием некоторой функции, определенной на полутоновых фрагментах размера 2×2 . Приведенный пример и компьютерная модель показывают, что вышеуказанная характеристика является естественным продолжением эйлеровой характеристики на множестве полутоновых изображений.

В работах [1-10] рассматривались подходы к вычислению эйлеровой характеристики черно-белого цифрового изображения. В работах [11, 12] реализована одна из возможностей введения аналогов эйлеровой характеристики для полутоновых изображений с помощью многочленов. В настоящей работе предлагается другой способ построения аналога эйлеровой характеристики для такого рода изображений.

Под полутоновыми цифровыми изображениями будем понимать матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ с элементами $a_{ij} \in [0; 1]$. Для любого $t \in [0; 1]$ сопоставим матрице A матрицу $\tilde{A}_t = (\tilde{a}_{ij})$, где

$$\tilde{A}_t = \begin{cases} \tilde{a}_{ij} = 1, & \text{если } a_{ij} \geq t, \\ \tilde{a}_{ij} = 0, & \text{если } a_{ij} < t. \end{cases} \quad (1)$$

Следуя подходу работы [10], считая матрицу \tilde{A}_t черно-белым цифровым изображением, построенным на основе прямоугольной решетки, можно вычислить эйлерову характеристику для этой матрицы $\chi_k(\tilde{A}_t)$, где $k = 1, 2$, в соответствии с двумя типами связности на прямоугольной решетке. Определим теперь семейство следующих интегральных характеристик матрицы A :

$$\chi I_{k,l}(A) = (l+1) \int_0^1 t^l \chi_k(\tilde{A}_t) dt, \text{ где } l \geq 0.$$

Для всех этих характеристик выполняется следующее свойство, а именно если матрица A представляет собой черно-белое цифровое изображение, то $\chi I_{k,l}(A) = \chi_k(A)$, то есть такого рода интегральные характеристики являются нецелочисленным продолжением эйлеровой характеристики на множество полутоновых цифровых изображений.

По аналогии с [10] под полутоновыми фрагментами s размера 2×2 будем понимать любую подматрицу матрицы A вида:

$$s = \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ij+1} \\ a_{i+1j} & a_{i+1j+1} \end{pmatrix}$$

с элементами на отрезке $[0, 1]$. Для любого $t \in [0, 1]$ естественным образом в соответствии с правилом (1) определим фрагмент \tilde{s}_t размера 2×2 . Верна следующая

Теорема. Для любого полутонового изображения A существует функция $\mathcal{F}_{k,p}(s)$, определенная на множестве всех полутоновых фрагментов s размера 2×2 , такая, что верно соотношение

$$\chi I_{k,l}(A) = \sum_{s \in A} \mathcal{F}_{k,l}(s), \text{ где } k = 1, 2; l \geq 0.$$

Доказательство. Отметим, что, согласно [10], для любого $t \in [0, 1]$ верно равенство

$$\chi_k(\tilde{A}_t) = \sum_{s \in A} F_k(\tilde{s}_t),$$

применяя формулу для интегральной характеристики, получаем равенства

$$\chi_{k,l}(A) = (l + 1) \int_0^1 t^l \chi_k(\tilde{A}_t) dt = (l + 1) \int_0^1 t^l \sum_{s \in A} F_k(\tilde{s}_t) dt = \sum_{s \in A} (l + 1) \int_0^1 t^l F_k(\tilde{s}_t) dt,$$

откуда получаем выражение для функции

$$\mathcal{F}_{k,p}(s) = (l + 1) \int_0^1 t^l F_k(\tilde{s}_t) dt.$$

Теорема доказана.

Приведем пример вычисления предложенной интегральной характеристики для изображения размера 4×7 .

p	p	p	q	p	p	p
p	0	0	q	0	0	p
p	0	0	q	0	0	p
p	p	p	q	p	p	p

Рис. 1.

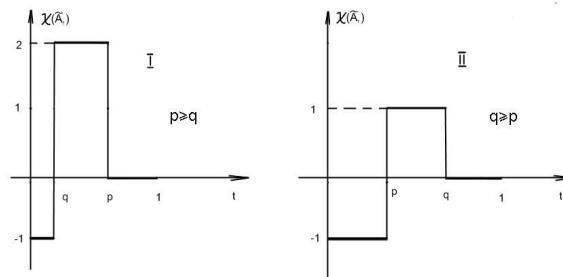


Рис. 2.

$$\chi_l(A) = \begin{cases} (l + 1) \int_0^p t^l dt + (l + 1) \int_p^q t^l dt, & p \leq q. \\ (l + 1) \int_0^q t^l (-1) dt + (l + 1) \int_q^p t^l 2 dt, & q \geq p. \end{cases} = \begin{cases} q^{(l+1)} - 2p^{(l+1)}, & q \leq p. \\ 2p^{(l+1)} - 3q^{(l+1)}, & q \geq p. \end{cases}$$

- Случай 1. $p = q = 0, \chi_l(A) = 0$.
- Случай 2. $p = 0, q = 1 \implies p \leq q, \chi_l(A) = 1$.
- Случай 3. $p = 1, q = 0 \implies p \leq p, \chi_l(A) = 2$.
- Случай 4. $p = 1, q = 1 \implies p = q, \chi_l(A) = -1$.

Рассмотренные случаи показывают хорошее согласование с классической эйлеровой характеристикой для черно-белых изображений.

Ниже приведен один из результатов компьютерного эксперимента для изображения на рис. 3 для условного экрана размера 50×50 .

t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\chi(\tilde{A}_t)$	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
l	0	1	2	3	10	20			
$\chi_l(A)$	-0.4	-0.74	-0.874	-0.9374	-0.9995	-0.9999			

Отметим, что при $l \rightarrow \infty$ значение предложенной интегральной характеристики стремится к значению эйлеровой характеристики изображения, составленного из пикселей яркости 1.

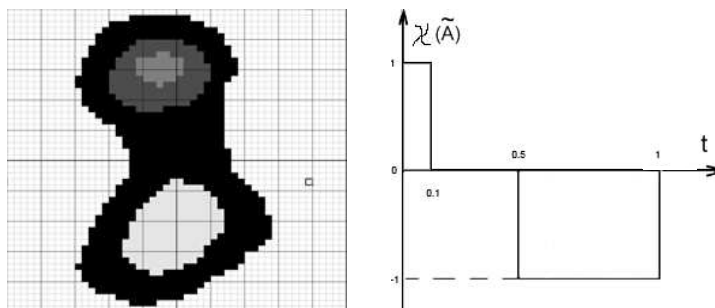


Рис. 3.

Список литературы

1. Розенфельд, А. Распознавание и обработка изображений с помощью вычислительных машин /А. Розенфельд - М.:Мир, 1972.
2. Прэтт, У. Цифровая обработка изображений /У. Прэтт - М.:Мир 1982.
3. Gray, S.B. Local properties of binary images in two dimensions /S.B. Gray //IEEE Trans. Computers. - 1971. С-20, 5.- P. 551-561.
4. Dyer, C.R. Computing the Euler number of an image from its quadtree/ /C.R. Dyer //Computer graphics and image processing. - 1980. - 13. - P. 270-276.
5. Bieri, H., Nef W. Algorithms for Euler characteristic and related additive functionals of digital objects/H. Bieri, W. Nef// Computer vision, graphics and image processing. - 1984.- 28.P. 166-175
6. Mantyla, M. A note on the modeling space of Euler operators./M. Mantyla// Computer vision, graphics and image processing. - 1984.- 26.-P.45-60.
7. Chen, M.H., A fast algorithm to calculate the Euler number for binary images. /M.H. Chen ,P.F. Yan//Pattern Recognition Letters. North-Holland.- 1988.- 8.-P. 295-297.
8. Saha, P.K., A new approach to computing the Euler characteristic. /P.K. Saha, B.B. Chaudhuri//Pattern Recognition. - 1995. Vol. 28.N.12.- P. 1955.1963.
9. Diaz-De-Leon, S.J.L., On the computation of the Euler number of binary object./ S.J.L. Diaz-De-Leon, J.H. Sossa-Azuela//Pattern Recognition.-1996.-Vol. 29.N.3.-P. 471-476.
10. Парфенов, П.Г. Об эйлеровой характеристике изображения. Архитектура и программное обеспечение вычислительных сетей/П.Г. Парфенов.- Ярославль, 1992.- С.76-79.
11. Парфенов, П.Г. Многочлены на изображениях, вычисляющие эйлерову характеристику /П.Г. Парфенов//Моделирование и анализ информационных систем.- 2001. - Т.8, №2. - С. 23-24.
12. Парфенов, П.Г. Нечеткие аналоги эйлеровой характеристики для полутоновых изображений/П.Г. Парфенов//Моделирование и анализ информационных систем. - 2002. - Т.9, №1. - С. 19-20.

Integral near-Euler characteristics of halftone digital images

Parfenov P.G., Kapliy I.A.

In works analog of Euler characteristics for halftone images introduce by the instrumentality of integral expression. Deduced theorem allows to calculate this characteristic by summation of some function defined on halftone fragments of size 2×2 . Example and computer model mentioned show that foregoing characteristic is a natural continuation of Euler characteristics on the set of halftone images.