Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **4** (2014) 47–53

УДК 517.9

Совершенные призмоиды и решетчатые многогранники Делоне

Козачок М. А.[1] Магазинов А. Н.[2]

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
119991, Россия, Москва, ул. Губкина, д. 8

e-mail: marina.kozachok@gmail.com magazinov-al@yandex.ru

получена 14 июля 2014

Ключевые слова: многогранники, многогранники Делоне, гипотеза Калаи

Совершенным призмоидом называется выпуклый многогранник P такой, что для каждой его F существует опорная гиперплоскость α, параллельная F, такая что любая вершина многогранника P лежит либо в F, либо в α. Совершенные призмоиды связаны с гипотезой Калаи о том, что у любого выпуклого центрально-симметричного многогранника не менее 3^d граней, а ровно 3^d граней содержат только многогранники Ханнера. Любой многогранник Ханнера является совершенным призмоидом (обратное не верно). Многогранник, который является выпуклой оболочкой некоторого подмножества вершин единичного куба, называется 0/1-многогранником. Мы докажем, что любой совершенный призмоид аффинно эквивалентен некоторому 0/1-многограннику той же размерности. (Это означает, что любой совершенный призмоид является решетчатым многогранником). Пусть в пространстве $\mathbb{R}^d$ задана решетка Λ и многогранник D, вписанный в шар B. Многогранник D называется решетчатым многогранником Делоне, если внутри шара нет точек решетки и D является выпуклой оболочкой множества $\Lambda \cap \partial B$, где ∂B — граница шара B. Мы докажем, что любой совершенный призмоид аффинно эквивалентен некоторому решетчатому многограннику Делоне.

Введение

В 1989 году Г. Калаи сформулировал 3^d-гипотезу:

Гипотеза Калаи. *У любого выпуклого центрально-симметричного d-мерного многогранника общее число граней всех размерностей не меньше 3^d.*

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 14-11-00414.
[2]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00563.

В случае $d = 3$ доказательство гипотезы легко следует из формулы Эйлера, а равенство достигается только на кубе и дуальном ему октаэдре. Для $d = 4$ гипотеза была доказана в 2007 г. Г. Циглером, Р. Саньялом и А. Вернером в [6]. Верна ли 3^d-гипотеза при $d \geqslant 5$, неизвестно.

Нетрудно проверить, что у многогранников Ханнера (см. [4]) ровно 3^d граней. Например, для любой размерности многогранниками Ханнера являются куб и дуальный ему кросполитоп. Г. Калаи предположил, что многогранники Ханнера исчерпывают класс многогранников, на которых достигается равенство в 3^d-гипотезе. Однако этот вопрос остаётся открытым.

В пространстве размерности $d \leqslant 4$ доказана более сильная гипотеза (гипотеза B):

Гипотеза B. *Для любого центрально-симметричного многогранника P существует многогранник Ханнера H такой, что $f_k(P) \geqslant f_k(H)$ для любого $k\,(0 \leqslant k \leqslant d)$, где f_k — число k-мерных граней соответствующего многогранника.*

Однако при $d \geqslant 5$ гипотеза B не верна (см. [6]).

В связи с 3^d-гипотезой интерес представляет доказательство следующей ослабленной версии Гипотезы B:

Гипотеза. *Для любого центрально-симметричного многогранника P существует центрально-симметричный совершенный призмоид Q такой, что $f_k(P) \geqslant f_k(Q)$ для любого $k\,(0 \leqslant k \leqslant d)$, где f_k — число k-мерных граней соответствующего многогранника.*

Напомним, что центрально-симметричный совершенный призмоид — это центрально-симметричный многогранник, который является выпуклой оболочкой любой пары антиподальных граней. (Определение совершенного призмоида в общем случае дано ниже). В [10] доказано, что любой многогранник Ханнера является совершенным призмоидом, но при $d \geqslant 5$ обратное уже не верно.

Основной результат данной работы — доказательство того, что любой совершенный призмоид аффинно эквивалентен некоторому решётчатому многограннику Делоне. В [7] доказано, что число аффинных типов решётчатых многогранников Делоне данной размерности конечно. Проведена классификация многогранников Делоне для размерностей $d \leqslant 6$ (см. [1], [8]), что позволяет классифицировать и все совершенные призмоиды в этих размерностях.

1. Определения

Будем использовать следующие обозначения. Через $\operatorname{conv} X$ обозначим выпуклую оболочку множества точек X в пространстве $\mathbb{R}^d$, через $\operatorname{aff} X$ — *аффинную оболочку*, т.е. множество всех линейных комбинаций

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \quad \text{где} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 \quad \text{и} \quad x_i \in X \quad (1 \le i \le n).$$

Наконец, через $\operatorname{lin} X$ будем обозначать линейное пространство, ассоциированное с аффинной оболочкой $\operatorname{aff} X$, т.е. множество всех линейных комбинаций

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \quad \text{где} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0 \quad \text{и} \quad x_i \in X \quad (1 \le i \le n).$$

В данной работе рассматриваются многогранники в d-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Выпуклый d-мерный многогранник P называется *призмоидом*, если некоторая пара параллельных $(d-1)$-мерных плоскостей содержит все его вершины. Примерами призмоидов являются, в частности, пирамида, призма и антипризма.

Иначе говоря, призмоид P есть выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(F \cup F')$ двух многогранников F и F', каждый из которых лежит в одной из двух параллельных гиперплоскостей. При этом $\dim(\operatorname{lin} F + \operatorname{lin} F') = \dim P - 1$, где $\operatorname{lin} F + \operatorname{lin} F'$ понимается как сумма линейных подпространств в объемлющем пространстве. Если $\dim P = d$ и $P \subset \mathbb{R}^d$, то две плоскости, параллельные $\operatorname{lin} F + \operatorname{lin} F'$ и проходящие через F и F', являются опорными для P. Поэтому многогранники F и F' — грани многогранника P. При этом каждая вершина призмоида P принадлежит либо грани F, либо грани F'.

Пусть F — гипергрань многогранника P, и существует такая грань F', что $\operatorname{lin} F' \subseteq \operatorname{lin} F$ и $P = \operatorname{conv}(F \cup F')$ (в дальнейшем будем говорить, что такие грани *параллельны*). Тогда будем называть P *призмоидом над гранью* F.

Многогранник P называется *совершенным призмоидом*, если он является призмоидом над любой своей гипергранью, т.е. для любой его гиперграни F выполняется $P = \operatorname{conv}(F \cup F')$, где F' — параллельная к F грань, возможно, меньшей размерности.

Многогранник называется 0/1-*многогранником*, если он является выпуклой оболочкой некоторого подмножества множества вершин единичного куба.

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ задана некоторая решетка Λ. Пусть многогранник D вписан в шар B, причём внутренность шара B не содержит ни одной точки решетки Λ (∂B — *пустая сфера* по Делоне), а также выполнено условие

$$D = \operatorname{conv}(\Lambda \cap \partial B).$$

Тогда D называется решетчатым многогранником Делоне (см. [9]).

2. Результаты

Предложение. *Пусть P — совершенный призмоид с N гипергранями. Тогда P можно задать системой линейных неравенств*

$$b_i \geqslant (a_i, x) \geqslant c_i, \qquad i = 1, 2, \dots, N,$$

где гиперплоскость, содержащая i-ю гипергрань, задается уравнением $(a_i, x) = b_i$, и для любого $i = 1, 2, \dots, N$ и любой вершины $v \in P$ верно либо $(a_i, v) = b_i$, либо $(a_i, v) = c_i$.

Доказательство. Пусть гиперплоскость, содержащая гипергрань F_i, задается уравнением $(a_i, x) = b_i$, при этом можно считать (за счет выбора знака a_i), что P лежит в полупространстве $(a_i, x) \leq b_i$. По определению совершенного призмоида, $P = \operatorname{conv}(F_i \cup F_i')$, причем $\operatorname{lin} F_i' \subseteq \operatorname{lin} F_i$. Это значит, что грань F_i' лежит в гиперплоскости $(a_i, x) = c_i$, и $c_i < b_i$.

Поскольку любая вершина v призмоида P принадлежит либо гиперграни F, либо грани F', верно либо $(a_i, v) = b_i$, либо $(a_i, v) = c_i$.

Так как выпуклый многогранник определяется своими гипергранями, то система неравенств $(a_i, x) \leq b_i$ уже определяет многогранник P. С другой стороны, любая вершина $v \in Vert(P)$ (где $Vert(P)$ — множество вершин многогранника P), удовлетворяет неравенству $(a_i, v) \geq c_i$, поскольку (a_i, v) принимает только значения b_i и c_i. Поэтому добавление неравенств $(a_i, x) \geq c_i$ не изменяет многогранник.

□

Теорема 1. *Для любого d-мерного совершенного призмоида существует аффинно эквивалентный ему $0/1$-многогранник, который получен из d-мерного единичного куба.*

Доказательство. Пусть призмоид P задан системой линейных неравенств $b_i \geqslant (a_i, x) \geqslant c_i$, (см. Предложение).

Среди линейных функций $\{a_i\}$ выберем d линейно независимых. Не умаляя общности, пусть это $a_1, \ldots, a_d$. Многогранник, задаваемый системой неравенств

$$b_i \geqslant (a_i, x) \geqslant c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, d,$$

есть параллелепипед , который обозначим через Π.

По Предложению, для произвольной вершины v_j многогранника P и любого $i = 1, 2, \ldots, d$ выполняется или $(a_i, v) = b_i$, или $(a_i, v) = c_i$. Следовательно, v – вершина параллелепипеда Π. Таким образом, $Vert(P) \subseteq Vert(\Pi)$.

Сделаем аффинное преобразование, переводящее Π в единичный куб $\{0, 1\}^d$. Тогда каждая вершина многогранника P перейдет в вершину куба. Следовательно, P перейдет в $0/1$-многогранник.

□

Теорема 2. *Любой совершенный призмоид аффинно эквивалентен некоторому решетчатому многограннику Делоне.*

Доказательство. Пусть P — d-мерный совершенный призмоид. По Теореме 1, P аффинно эквивалентен $0/1$-многограннику, полученному из d-мерного куба. Это значит, что в $\mathbb{R}^d$ можно ввести такую аффинную систему координат, в которой все вершины многогранника P — целые точки.

Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — все вершины P. Рассмотрим множество

$$\Lambda(P) = \left\{ u : u = \sum_{j=1}^{k} n_j v_j, \text{ где } n_j \in \mathbb{Z}, \ \sum_{j=1}^{k} n_j = 1 \right\}.$$

Множество $\Lambda(P)$ дискретно, поскольку все его точки целые в выбранной системе координат. Кроме того, параллельные переносы вида

$$m_1 v_1 + \ldots + m_k v_k, \qquad m_i \in \mathbb{Z}, \ \sum_{i=1}^{k} m_i = 0$$

сохраняют $\Lambda(P)$ и образуют группу, транзитивно действующую на множество $\Lambda(P)$. Поэтому $\Lambda(P)$ — решетка.

Пусть призмоид P задан системой линейных неравенств $b_i \geqslant (a_i, x) \geqslant c_i$ (см. Предложение).

Пусть $q_i(x) = (-b_i + (a_i, x))(-c_i + (a_i, x))$ — неоднородная функция второго порядка с квадратичной формой ранга 1. Для произвольной точки $u \in \Lambda(P)$ докажем, что $q_i(u) \geqslant 0$.

Действительно, $u = n_1 v_1 + \ldots + n_k v_k$, где $n_1 + \ldots + n_k = 1$ и $n_j \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$q_i(u) = \left(-b_i + \sum_{j=1}^{k} n_j (a_i, v_j)\right)\left(-c_i + \sum_{j=1}^{k} n_j (a_i, v_j)\right).$$

Далее

$$\sum_{j=1}^{k} n_j (a_i, v_j) = (n_{j_1} + \ldots + n_{j_l}) b_i + (n_{j_{l+1}} + \ldots + n_{j_k}) c_i = p b_i + (1-p) c_i,$$

где $p = n_{j_1} + \ldots + n_{j_l} \in \mathbb{Z}$.

Пусть $p < 0$. Тогда перепишем: $pb_i + (1-p)c_i = c_i + (-p)\cdot(c_i - b_i)$. Поскольку $c_i < b_i$, имеем $(-p)\cdot(c_i - b_i) < 0$. В результате $pb_i + (1-p)c_i < c_i$ и тем более $pb_i + (1-p)c_i < b_i$. Следовательно, обе скобки в $q_i(u)$ отрицательны. Таким образом, $q_i(u) > 0$.

Пусть $p = 0$. Тогда $pb_i + (1-p)c_i = c_i$. Значит, $q_i(u) = 0$.

Пусть $p = 1$. Тогда $pb_i + (1-p)c_i = b_i$. Значит, $q_i(u) = 0$.

Пусть $p > 1$. Тогда перепишем: $pb_i + (1-p)c_i = b_i + (1-p)(b_i - c_i)$. Поскольку $c_i < b_i$, имеем $(1-p)(b_i - c_i) > 0$. В результате $pb_i + (1-p)c_i > b_i$ и тем более $pb_i + (1-p)c_i < c_i$. Следовательно, обе скобки в $q_i(u)$ положительны. Таким образом, $q_i(u) > 0$.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{N} q_i(x).$$

Легко видеть, что $Q(x)$ — неоднородная функция второго порядка с положительно определенной однородной составляющей.

Для любой точки u решетки $\Lambda(P)$ имеем $q_i(u) \geq 0$, а следовательно, и $Q(u) \geqslant 0$. Более того, если $Q(u) = 0$, то $q_i(u) = 0$ для любого $i = 1, 2, \ldots, N$.

Условие $q_i(u) = 0$ эквивалентно альтернативе: либо $(a_i, u) = b_i$, либо $(a_i, u) = c_i$. Поэтому если u — вершина многогранника P, то, в силу Предложения, $Q(u) = 0$. Поэтому уравнение $Q(x) = 0$ определяет пустой эллипсоид, описанный вокруг P.

Осталось показать, что $Q(u) \neq 0$ при всех $u \in \Lambda(P)\backslash Vert(P)$. Предположим противное: $Q(u) = 0$, $u \in \Lambda(P)\backslash Vert(P)$. Поскольку u лежит на поверхности эллипсоида, описанного вокруг P, u находится строго вне P. Тогда для некоторого i верно $(a_i, u) > b_i$. Но тогда $q_i(u) > 0$ и $Q(u) > 0$, противоречие.

Переводя аффинным преобразованием эллипсоид $Q(u) = 0$ в сферу, убеждаемся, что P аффинно эквивалентен решетчатому многограннику Делоне.

□

Список литературы

1. *Dutour M.* The six-dimensional Delaunay polytopes, European Journal of Combinatorics. 2004. 25:4. P. 535–548.

2. *Erdahl R.M., Ryshkov S.S.* The empty sphere I // Canad. J. Math. 1987. 39:4. P. 794–824.

3. *Erdahl R.M., Ryshkov S.S.* The empty sphere II // Canad. J. Math. 1988. 40:5. P. 1058–1073.

4. *Hanner O.* Intersections of translates of convex body // Math. Scand. 1956. 4. P. 67–89.

5. *Kalai G.* The Number of Faces of Centrally-symmetric Polytopes // Graphs and Combinatorics. 1989. 5. P. 389–391.

6. *Sanyal R., Werner A., Ziegler G.* On Kalai's conjectures about centrally symmetric polytopes // Discrete Comput. Geometry. 2009. 41. P. 183–198.

7. *Voronoï G.F.* Nouvelles applications des paramètres continus à là théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire: Recherches sur les parallélloedres primitifs // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1908. 134. P. 198–287; 1909. 136. P. 67–181.

8. *Барановский Е.П.* Условия, при которых симплекс 6-мерной решетки является L-симплексом // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 1999. Вып. 2. С. 18–24. [*Baranovskiy E.P.* Usloviya, pri kotorykh simpleks 6-mernoy reshetki yavlyaetsya L-simpleksom // Nauch. tr. Ivan. gos. un-ta. Matematika. 1999. Vyp. 2. S. 18–24 (in Russian)].

9. *Делоне Б.Н.* Геометрия положительных квадратичных форм // УМН. 1937. Вып. 3. С. 16–62 [*Delone B.N.* Geometriya polozhitelnykh kvadratichnykh form // UMN. 1937. Vyp. 3. S. 16–62 (in Russian)].

10. *Козачок М.А.* Совершенные призмоиды и гипотеза о минимальном числе граней центрально-симметричных многогранников // Модел. и анализ информ. систем. 2012. Т. 19, №6. С. 137–147 [*Kozachok M.A.* Perfect Prismatoids and the Conjecture Concerning Face Numbers of Centrally Symmetric Polytopes // Modeling and analysis of information systems. 2012. T. 19, №6. S. 137–147 (in Russian)].

Perfect Prismatoids are Lattice Delaunay Polytopes

Kozachok M. A. Magazinov A. N.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
Gubkina str. 8, Moscow, 119991, Russia

Keywords: polytopes, Delaunay polytopes, Kalai conjecture

A perfect prismatoid is a convex polytope P such that for every its facet F there exists a supporting hyperplane $\alpha \parallel F$ such that any vertex of P belongs to either F or α. Perfect prismatoids concern with Kalai conjecture, that any centrally symmetric d-polytope P has at least 3^d non-empty faces and any polytope with exactly 3^d non-empty faces is a Hanner polytope. Any Hanner polytope is a perfect prismatoid (but not vice versa). A 0/1-polytope is a convex hull of some vertices of the d-dimensional unit cube. We prove that every perfect prismatoid is affinely equivalent to some 0/1-polytope of the same dimension. (And therefore every perfect prismatoid is a lattice polytope.) Let Λ be a lattice in $\mathbb{R}^d$ and D be a polytope inscribed in a sphere B. Denote a boundary of B by ∂B and an interior of B by $int\, B$. The polytope D is a lattice Delaunay polytope if $\Lambda \cap int\, B = \varnothing$ and D is a convex hull of $\Lambda \cap \partial B$. We prove that every perfect prismatoid is affinely equivalent to some lattice Delaunay polytope.

Сведения об авторах:
Козачок Марина Александровна,
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, аспирант
Магазинов Александр Николаевич,
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, аспирант