View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk brought to you by CORE

Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **5** (2013) 158–167
©*Бобок А. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю.*, 2013

УДК 517.926

Экстремальная динамика системы трех однонаправленно связанных сингулярно возмущенных уравнений из нейродинамики

Бобок А. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю.[1]

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: nemo20000alex@mail.ru, glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

получена 10 августа 2013

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, бифуркация, квазинормальная форма, буферность

Рассматривается система из трех однонаправленно связанных сингулярно возмущенных скалярных нелинейных дифференциально-разностных уравнений с двумя запаздываниями, моделирующих электрическую активность кольцевой нейронной ассоциации. Предполагается, что для каждого из уравнений при критических значениях параметров реализуется случай бесконечномерного вырождения. Далее, при условии, что бифуркационные параметры близки к критическим, а коэффициент связи подходящим образом мал, строится квазинормальная форма данной системы. Анализируя эту квазинормальную форму, на основе теоремы о соответствии, удается установить, что при подходящем выборе параметров в фазовом пространстве исходной системы может сосуществовать любое наперед заданное конечное число устойчивых периодических движений.

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом представляют собой широкий класс динамических систем со сложным поведением решений. Нетривиальность свойств таких уравнений обусловлена в первую очередь бесконечномерностью их фазового пространства. В задаче об устойчивости этих уравнений может наблюдаться бесконечномерное вырождение, и в качестве их нормальных форм также приходится рассматривать бесконечномерные системы специального вида. В некоторых случаях такие системы могут быть представлены в виде краевых задач (см., например, [1–4]). В настоящей работе рассматривается класс дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, применяемых в нейродинамике и популяционной биологии, для которого в сингулярном случае можно построить квазинормальную форму. Для полученной квазинормальной формы доказываются утверждения о соответствии, а затем она изучается аналитическими и численными

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению 220, договор 11.G34.31.0053.

методами. Для уравнений указанного типа большое значение имеет объединение их в какую-либо ассоциацию. В радиофизических и нейробиологических приложениях такие ассоциации часто представляют собой однонаправленно связанные в кольцо системы. Простейшим нетривиальным кольцом из однонаправленно связанных автогенераторов следует считать систему, включающую три элемента. В целом ряде случаев рассмотрение такой системы позволяет обнаружить некоторые новые эффекты, возникающие как результат взаимодействия осцилляторов (см., например, [5–7]). Среди эффектов, обнаруженных в настоящей работе, отметим наличие у системы при подходящим образом выбранных параметрах любого наперед заданного количества сосуществующих периодических режимов, т. е. наблюдается явление буферности.

1. Постановка задачи и линейный анализ

Рассматривается модельная система, применяемая в нейродинамике и популяционной биологии, состоящая из трех связанных в кольцо сингулярно возмущенных осцилляторов с двумя запаздываниями

$$\dot{u}_j = \lambda\big[-1 + f_1(u_j(t-h_1)) + f_2(u_j(t-h_2)) + \nu g(u_{j-1})\big]u_j, \quad j = 1,2,3, \tag{1}$$

где $u_j(t) > 0$ $(j = 1,2,3)$ — скалярные функции, причем $u_0(t) \equiv u_3(t)$, $\lambda > 0$ пропорционально скорости протекания процессов в системе и обычно велико, h_1, h_2 — положительные параметры, определяющие запаздывания, $g(u)$, $f_j(u)$, $j = 1,2$ — достаточно гладкие функции, ν — коэффициент связи между осцилляторами.

При отсутствии связи ($\nu = 0$) каждое из уравнений системы (1) в случае линейных функций $f_j(u)$ представляет собой обобщенное уравнение Хатчинсона, в котором учтены две возрастные группы (см. [8, 9]). Кроме того, данное уравнение может служить феноменологической моделью импульсного нейрона с учетом двух запаздываний (см. [10–12]), отметим, что случай одного запаздывания обсуждается в [13].

Предположим, что каждый отдельный осциллятор (1) имеет единственное ненулевое состояние равновесия $u_* > 0$ так, что $f_1(u_*) + f_2(u_*) = 1$. Пусть, кроме того, функции правой части (1) раскладываются в точке u_* в ряд

$$f_j(u) = a_{j0} + a_{j1}u_*(u-1) + a_{j2}u_*^2(u-1)^2 + a_{j3}u_*^3(u-1)^3 + \mathcal{O}\big((u-1)^4\big), \quad j = 1,2,$$

а функия связи линейна и представляется в виде $g(u) = u_*(u-1)$. Будем интересоваться задачей (1) в сингулярно возмущенном случае, когда

$$\begin{gathered} h_2 = \varepsilon\gamma h_1,\ a_{11} = -1/2 - \mu,\ a_{21} = -1/2 + \mu, \\ \gamma = const > 0,\ \varepsilon = 1/\lambda,\ 0 < \varepsilon, \mu \ll 1,\ |\nu| \ll 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Порядок малости параметра ν будет согласован с порядками малости величин ε и μ. Тем самым, объектом исследований нашей работы будет служить система

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{v}_j = -\big[&(1/2+\mu)v_j(t-1) - a_{12}v_j^2(t-1) - a_{13}v_j^3(t-1) + (1/2-\mu)v_j(t-\varepsilon\gamma) - \\ &- a_{22}v_j^2(t-\varepsilon\gamma) - a_{23}v_j^3(t-\varepsilon\gamma) + \mathcal{O}\big(v_j^4\big) + \nu v_{j-1}\big](1+v_j), \quad j = 1,2,3, \end{aligned} \tag{3}$$

получающаяся из (1) при условиях (2) после замен $t/h_1 \to t$ и $v_j = u_*(u_j - 1)$ $j = 1, 2, 3$. Отметим, что, как и выше, выполнено условие $v_0(t) \equiv v_3(t)$ кольцевой связи между осцилляторами.

Поставим вопрос о существовании и устойчивости автоколебаний системы (3), бифурцирующих из нуля при увеличении μ. Первым этапом в решении этой задачи является анализ устойчивости нулевого состояния равновесия парциального уравнения системы (3) при отсутствии взаимодействия. Для этого необходимо выяснить расположение корней соответствующего этому состоянию равновесия характеристического уравнения

$$2\varepsilon\lambda + (1 + 2\mu)\exp(-\lambda) + (1 - 2\mu)\exp(-\lambda\varepsilon\gamma) = 0. \tag{4}$$

Результаты этого анализа позволяют согласовать порядки малости параметров ε, μ и ν, а также уточнить выбор параметра γ.

Для получения информации о поведении корней (4), близких к мнимой оси, используются асимптотические равенства (см. [9])

$$\lambda_n(\varepsilon, \mu) = i\omega_n\bigl(1 + \varepsilon(\gamma - 2) + \varepsilon^2(\gamma - 2)^2\bigr) - 2\varepsilon^2\omega_n^2(1 - \gamma) + 4\mu + O(\varepsilon^3 + \varepsilon\mu), \tag{5}$$

где $\omega_n = \pi(2n - 1)$, и доказывается следующее утверждение.

Лемма 1. *Предположим, что параметр γ фиксирован и удовлетворяет условию $\gamma < 1$. Тогда по любому натуральному N можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma, N) > 0$, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, во-первых, каждое из уравнений $\mathrm{Re}\lambda_n(\varepsilon, \mu) = 0$, $n = 1, \ldots, N$ допускает единственное решение*

$$\mu = \mu_n(\varepsilon), \quad \mu_n(\varepsilon) = \varepsilon^2\omega_n^2(1 - \gamma)/2 + O(\varepsilon^3), \tag{6}$$

во-вторых, при $0 \le \mu \le \mu_1(\varepsilon)$ все корни уравнения (4) имеют отрицательные действительные части, а в случае $\mu_k(\varepsilon) < \mu < \mu_{k+1}(\varepsilon)$ при некотором $1 \le k \le N-1$ выполняются неравенства $\mathrm{Re}\lambda_n(\varepsilon, \mu) > 0$, $1 \le n \le k$; $\mathrm{Re}\lambda_n(\varepsilon, \mu) < 0$ $\forall n > k$.

Подробное доказательство леммы может быть найдено в работе [9].

2. Метод квазинормальных форм и результаты его применения

Выполненный выше линейный анализ показывает, что поставленная бифуркационная проблема близка к бесконечномерной: при $\varepsilon, \mu, \to 0$ к мнимой оси стремится счетное число корней (5) характеристического уравнения (4). Это означает, что в данной ситуации невозможно напрямую использовать известные конечномерные методы исследования динамики, базирующиеся на аппарате интегральных многообразий и нормальных форм, в связи с чем используется специальный асимптотический метод, введенный в научный оборот в работах [1, 2] и называемый методом квазинормальных форм (см. также [3, 4]). Для его применения необходимо согласовать порядки малости параметров ε, μ и ν. Сделать это можно следующими двумя способами.

1) Предположим сначала, что параметр γ фиксирован и удовлетворяет неравенству $\gamma < 1$. Тогда в соответствии с асимптотическими формулами (6) для критических значений μ уместно положить

$$\mu = \beta\varepsilon^2, \quad \nu = \nu_0\varepsilon^3. \tag{7}$$

Будем считать, что

$$\beta = const > \pi^2(1-\gamma)/2. \tag{8}$$

Условие (7) обеспечивает неустойчивость нулевого решения системы (3). В этой ситуации в соответствии с алгоритмами, предложенными в [14, 15], решение (3) будем искать в виде

$$v_j = \varepsilon\xi_j(s,\tau) + \varepsilon^2 u_{1j}(s,\tau) + \varepsilon^3 u_{2j}(s,\tau) + \ldots \quad j = 1,2,3. \tag{9}$$

Здесь

$$\tau = (1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2)t,\ \sigma_1 = \gamma - 2,\ \sigma_2 = (\gamma-2)^2,\ s = \varepsilon^2\tau,$$
$$\xi(s,\tau+1) \equiv -\xi(s,\tau),\ u_{kj}(s,\tau+2) \equiv u_{kj}(s,\tau), \quad k = 1,2,\ldots, j = 1,2,3. \tag{10}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, на третьем шаге алгоритма из условий разрешимости имеем следующую параболическую краевую задачу:

$$\frac{\partial\xi_j}{\partial s} = 2(1-\gamma)\frac{\partial^2\xi_j}{\partial\tau^2} + 4\beta\xi_j + d\xi_j^3 + 2\nu_0\xi_{j-1},$$
$$\xi_j(s,\tau+1) \equiv -\xi_j(s,\tau), \quad j = 1,2,3, \quad \xi_0(s,\tau) \equiv \xi_3(s,\tau), \tag{11}$$

для амплитудных переменных $\xi_j(s,\tau)$. Здесь s играет роль времени, а τ является пространственной переменной. Параметр при кубической нелинейности определяется по формуле

$$d = 2(a_{23} - a_{13}) + 4(a_{22}^2 - a_{12}^2). \tag{12}$$

Всюду далее будем предполагать, что

$$d < 0, \tag{13}$$

поскольку для положительных d краевая задача (11) не диссипативна и решения уходят из области применимости локальных методов.

Необходимо подчеркнуть, что фигурирующие в (9) функции $\xi_j(s,\tau)$ $j = 1,2,3$ при учете условия (10) антипериодичности по τ могут быть разложены в ряды Фурье вида

$$\xi_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_{j\,n}\exp(i\omega_n\tau) + \bar{\xi}_{j\,n}\exp(-i\omega_n\tau), \quad \omega_n = (2n-1)\pi, \tag{14}$$

в которых имеются все критические частоты, отвечающие корням $\lambda = \pm i\omega_n$, $n = 1,2,\ldots$ характеристического уравнения (5) при $\varepsilon = \mu = 0$. Тем самым, становится вполне оправданным требование 2-периодичности слагаемых $u_j(s,\tau)$, $k = 1,2$, $j = 1,2,3$ из (9). В свою очередь, порядок малости первого из слагаемых (9), по степеням которого выполняется разложение, так же как и в случае классической бифуркационной теоремы Андронова – Хопфа, равен квадратному корню из надкритичности

$$\max_{n\geq 1} \operatorname{Re}\lambda_n(\varepsilon,\mu)\Big|_{\mu=\beta\varepsilon^2} = \big(4\beta - 2\pi^2(1-\gamma)\big)\varepsilon^2 + \mathcal{O}\big(\varepsilon^4\big).$$

Краевую задачу (11) будем называть квазинормальной формой уравнения (3). Это название оправдано тем, что задача (11) может быть получена из уравнения (3) в результате применения к нему формальной процедуры нормализации Пуанкаре – Дюлака и последующего "сворачивания" нормальной формы в систему параболических уравнений. Следует отметить, что случай $d = 0$, естественным образом возникающий при условии $f_1(u) \equiv f_2(u)$, требует отдельного изучения и здесь не рассматривается. В работе [9] эта ситуация изучена в предельном случае, когда функции $f_j(u)$ содержат только линейные составляющие, естественно, что величина (12) оказывается тогда равной нулю и в разложении (9), которое выполнялось уже по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, учитывались два дополнительных слагаемых.

2) Второй способ согласования порядков малости входящих в систему (3) параметров возникает при условии, что γ отличается от своего порогового значения $\gamma = 1$ на величину порядка ε, т. е.

$$\gamma = 1 - \gamma_0\varepsilon, \quad \gamma_0 = const > 0. \tag{15}$$

В этом случае следует считаем выполненным соотношение

$$\mu = \beta_0\varepsilon^3, \quad \beta_0 = const > \pi^2\gamma_0/2, \tag{16}$$

и соответственно

$$\nu = \nu_0\varepsilon^{9/2}. \tag{17}$$

Решения задачи (3) при условиях (15) — (17) будет раскладываться в ряды по степеням $\varepsilon^{3/2}$ и даст краевую задачу аналогичную (11), но с третьими производными по пространственной переменной. Такая задача требует отдельного рассмотрения и здесь не приводится.

Остановимся на естественно возникающем вопросе о соответствии между автоколебательными режимами квазинормальной формы (11) и исходного уравнения (3). В формулируемом ниже основном утверждении в качестве фазового пространства краевой задачи (11) возьмем пространство $E_2 \times E_2 \times E_2$, состоящие из антипериодических функций $\big(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau), \xi_2(\tau)\big)$, где каждая из функций $\xi_j(\tau)$ принадлежит классу $W_2^2[0,1]$. Фазовым пространством самого уравнения (3) будем считать $C[-1,0] \times C[-1,0] \times C[-1,0]$.

Теорема 1. *Пусть $\mu = \beta\varepsilon^2$, $\beta > \pi^2(1-\gamma)/2$, $\nu = \nu_0\varepsilon^3$, $\gamma < 1$, а квазинормальная форма* (11) *допускает периодическое решение типа бегущей волны*

$$\xi_j = \xi_{0j}(y):\ y = \alpha_0 s + \tau,\ \xi_{0j}(y+1) \equiv -\xi_{0j}(y), \quad j = 1,2,3, \quad \alpha_0 = const, \tag{18}$$

экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ решению (18) *отвечает цикл системы* (3) *с теми же свойствами устойчивости. Главная асимптотика этого цикла задается равенством* (9).

3. Простейшие устойчивые режимы квазинормальной формы

Для поиска простейших периодических автомодельных решений квазинормальной формы (11) выполним в ней замену (14), в результате чего получим бесконечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\xi_{j\,n}(s)$ $j = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, \ldots$ Найдем условия существования одномодовых решений данной системы, т. е. таких, для которых обращаются в ноль все, кроме одного, слагаемые разложения (14). Считаем, что для некоторого r

$$\xi_{j\,r} \neq 0, \text{ и } \xi_{j\,m}(s) \equiv 0, \text{ для } m \neq r \quad (j = 1, 2, 3). \tag{19}$$

Для ненулевых амплитуд получаем следующую систему:

$$\dot{\xi}_{j\,r} = \big(4\beta - 2(1-\gamma)\omega_r^2\big)\xi_{j\,r} + 3d|\xi_{j\,r}|^2\xi_{j\,r} + 2\nu_0\xi_{j-1\,r}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{20}$$

Будем предполагать, что

$$\gamma_r = 4\beta - 2(1-\gamma)\omega_r^2 > 0, \tag{21}$$

тогда выполним в (20) полярную замену переменных

$$\xi_{j\,r} = \eta_j e^{i\varphi_j}\sqrt{-\frac{\gamma_r}{3d}} \tag{22}$$

и нормирующую замену времени $s \to \gamma_r s$, кроме того, обозначим $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\psi = \varphi_2 - \varphi_3$ и $\alpha_r = \dfrac{2\nu_0}{\gamma_k}$. В этой ситуации из (20) получаем следующую пятимерную систему:

$$\begin{aligned}
&\dot{\eta}_1 = \eta_1 + \alpha_r\eta_3\cos(\varphi + \psi) - \eta_1^3,\\
&\dot{\eta}_2 = \eta_2 + \alpha_r\eta_1\cos\varphi - \eta_2^3,\\
&\dot{\eta}_3 = \eta_3 + \alpha_r\eta_2\cos\psi - \eta_3^3,\\
&\dot{\varphi} = -\alpha_r\left(\frac{\eta_3}{\eta_1}\sin(\varphi + \psi) + \frac{\eta_1}{\eta_2}\sin\varphi\right),\\
&\dot{\psi} = \alpha_r\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\sin\varphi - \frac{\eta_2}{\eta_3}\sin\psi\right).
\end{aligned} \tag{23}$$

Сразу отметим, что в силу замены (22) имеем $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$, кроме того, система (23) 2π-периодична по φ и ψ. Учитывая это, рассмотрим условия существования и устойчивости простейших состояний равновесия системы (23), для которых $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$. Выделим следующие два случая.

В **первом** из них

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\alpha_r}, \quad \varphi = \psi = \frac{2\pi}{3}. \tag{24}$$

Для исследования устойчивости данного состояния равновесия линеаризуем на нем систему (23). Нетрудно убедиться, что получившаяся матрица устойчивости имеет собственное число $\lambda_1 = -2 + \alpha_r$, причем остальные собственные числа являются корнями следующего многочлена:

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}
&a_1 = (4\pi - 5\alpha_r)/\pi,\\
&a_2 = 4 + \frac{43}{4}\alpha_r^2 - 13\alpha_r + \frac{9}{16\pi}\alpha_r^2\sqrt{4-2\alpha_r},\\
&a_3 = \frac{9}{8\pi}\alpha_r^3(2\alpha_r - 1)\sqrt{4-2\alpha_r} + 3\alpha_r^2 - \frac{21}{2}\alpha_r^3 + \frac{45}{4}\alpha_r^4,\\
&a_4 = \frac{9}{16}\alpha_r^3(2-3\alpha_r)\sqrt{4-2\alpha_r} - 6\alpha_r - \frac{57}{4}\alpha_r^3 + \frac{33}{2\pi}\alpha_r^3.
\end{aligned} \tag{26}$$

Условием гурвицевости многочлена (25) с коэффициентами (26) оказывается неравенство

$$\alpha_r < 0. \tag{27}$$

Учитывая, что первое из собственных чисел $\lambda_1 = -2+\alpha_r$ в этом случае также оказывается отрицательным, заключаем, что при выполнении (27) состояние равновесия (24) устойчиво.

Второе состояние равновесия, имеющее равные друг другу амплитудные составляющие, имеет вид

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \sqrt{1+\alpha_r}, \quad \varphi = \psi = 0. \tag{28}$$

Матрица устойчивости этого состояния равновесия распадается на два блока:

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} -2-3\alpha_r & 0 & \alpha_r \\ \alpha_r & -2-3\alpha_r & 0 \\ 0 & \alpha_r & -2-3\alpha_r \end{pmatrix} \tag{29}$$

и

$$\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} -2\alpha_r & -\alpha_r \\ \alpha_r & -\alpha_r \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Собственные числа матриц (29), (30) имеют вид

$$\lambda_1 = -2\alpha_r - 2, \lambda_{2,3} = -\frac{7}{2}\alpha_r - 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\alpha_r, \lambda_{4,5} = \left(-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha_r,$$

откуда следует, что условием устойчивости состояния равновесия (28) является неравенство

$$\alpha_r > 0. \tag{31}$$

В заключение отметим, что для существования у квазинормальной формы (11) одномодовых режимов необходимо выполнение условия (21), которое справедливо для сколь угодно большого конечного числа номеров r при подходящем выборе входящих в неравенство параметров β и γ, тем самым, реализуется хорошо известное явление буферности. С другой стороны, выбор знака параметра α_r, который в силу соотношений (7) и (21) совпадает со знаком величины ν, определяет распределение колебаний по однонаправленно связанным осцилляторам. В первом случае (условие (27)) колебания происходят с разностью фаз равной $\frac{2\pi}{3}$, а во втором (условие (31)) разность фаз равна π. Приведенные выводы в силу теоремы 1 о соответствии могут быть перенесены на исходную систему (3).

Список литературы

1. *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Матем. сб. 1986. Т. 130(172), № 4(8). С. 488–499. (English transl.: *Vasil'yeva A. B., Kashchenko S. A., Kolesov Yu. S., Rozov N.Kh.* Bifurcation of self-oscillations of nonlinear parabolic equations with small diffusion // Mathematics of the USSR-Sbornik. 1987. V. 58, № 2. P. 491–503.)

2. *Колесов Ю. С.* Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией // Укр. мат. журн. 1987. Т. 39, № 1. С. 28–34. (English transl.: *Kolesov Yu. S.* Method of quasinormal forms in the problem of steady-state conditions for parabolic systems with small diffusion // Ukrainian Mathematical Journal. 1987. V. 39, № 1. P. 21–26.)

3. *Кащенко С. А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448–1451. (*Kashchenko S. A.* Normalization Techniques as Applied to the Investigation of Dynamics of Difference-Differential Equations with a Small Parameter Multiplying the Derivative // Differ. Uravn. 1989. V. 25. P. 1448–1451 [in Russian].)

4. *Кащенко С. А.* Уравнения Гинзбурга–Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 3. С. 457–465. (English transl.: *Kashchenko S. A.* The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. V. 38. № 3. P. 443–451.)

5. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1809 – 1821. (English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh.* Chaos phenomena in a circle of three unidirectionally connected oscillators // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2006. V. 46. № 10. P. 1724–1736.)

6. *Глызин С. Д.* Поведение решений нормальной формы системы трех связанных разностных автогенераторов // Моделирование и анализ информационных систем. 2006. Т. 13, №1. С. 49 – 57. (*Glyzin S. D.* The dynamics of the normal form of the system of three coupled differential autogenerators // Modeling and Analysis of Information Systems. 2006. V. 13, № 1. P. 49 – 57 [in Russian].)

7. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Об одной математической модели хаотической буферности // ДАН. 2007. Т. 412. № 5. С. 604 – 609. (English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh.* A mathematical model of the chaotic buffer phenomenon // Doklady mathematics. 2007. V. 75. № 1. P. 157–161.)

8. *Глызин С. Д.* Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 3. С. 29 – 42. (*Glyzin S. D.* A registration of age groups for the Hutchinson's equation // Modeling and Analysis of Information Systems. 2007. V. 14, № 3. P. 29 – 42 [in Russian].)

9. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 1. С. 76 – 89. (English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh.* Extremal dynamics of the generalized Hutchinson equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2009. V. 49. № 1. P. 71–83.)

10. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 5. С. 684–701. (English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh.* Modeling the Bursting Effect in Neuron Systems // Mathematical Notes. 2013. V. 93, № 5. P. 676–690. DOI: 10.4213/mzm9293)

11. *Глызин С. Д., Овсянникова Е. О.* Двухчастотные колебания обобщенного уравнения импульсного нейрона с двумя запаздываниями // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, № 1. С. 86–105. (*Glyzin S. D., Ovsyannikova E. O.* Quasi-periodic oscillations of a neuron equation with two delays // Modeling and Analysis of Information Systems. 2011. V. 18, № 1. P. 86 – 105 [in Russian].)

12. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в нейродинамике // ДАН. 2012. Т. 443. № 2. С. 168 – 172. (English transl.: *Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., and Rozov N.Kh.* Buffer phenomenon in neurodynamics // Doklady mathematics. 2012. V. 85. № 2. P. 297–300.)

13. *Кащенко С. А., Майоров В. В.* Модели волновой памяти. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 288 с. (*Kashchenko S. A., Mayorov V. V.* Modeli volnovoy pamyati. M.: Knizhnyy dom «LIBROKOM», 2009. 288 s. [in Russian].)

14. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Новые методы доказательства существования и устойчивости периодических решений в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Анализ и особенности. Часть 2: Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда, Тр. МИАН. Т. 259. М.: Наука, 2007. С. 106–133. (English transl.: *Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh.* New Methods for Proving the Existence and Stability of Periodic Solutions in Singularly Perturbed Delay Systems // Analysis and singularities. Part 2: Collected papers. Dedicated to academician Vladimir Igorevich Arnold on the occasion of his 70th birthday. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2007. V. 259. P. 101–127.)

15. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004. (*Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Invariantnyye tory nelineynykh volnovykh uravneniy. M.: Fizmatlit, 2004 [in Russian].)

The Quasi-Normal Form of a System of Three Unidirectionally Coupled Singularly Perturbed Equations with Two Delays

Bobok A.S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: differential-difference equation, bifurcation, quasinormal form, buffering

We consider a system of three unidirectionally coupled singularly perturbed scalar nonlinear differential-difference equations with two delays that simulate the electrical activity of the ring neural associations. It is assumed that for each equation at critical values of the parameters there is a case of an infinite dimensional degeneration. Further, we constructed a quasi-normal form of this system, provided that the bifurcation parameters are close to the critical values and the coupling coefficient is suitably small. In analyzing this quasi-normal form, we can state on the base of the accordance theorem, that any preassigned finite number of stable periodic motions can co-exist in the original system under the appropriate choice of the parameters in the phase space.

Сведения об авторах:
Бобок Алексей Станиславович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант
Глызин Сергей Дмитриевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей,
Колесов Андрей Юрьевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений