Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **3** (2015) 404–419

DOI: 10.18255/1818–1015–2015–3–404–419

УДК 517.926

Автоволновые процессы в кольцевой нейронной цепи с однонаправленной связью[1]

Глызин С. Д.[*,**], Колесов А. Ю.[*], Розов Н. Х.[***]

[*] *Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова 150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*
[**] *НЦЧ РАН, 142432 Россия, Московская область, г. Черноголовка, ул. Лесная, д. 9*
[***] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 119991 Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1*

e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru, fpo.mgu@mail.ru

получена 21 мая 2015

Ключевые слова: импульсный нейрон, кольцо однонаправленно связанных осцилляторов, бегущие волны, асимптотическое поведение, устойчивость, феномен буферности

Статья посвящена проблеме математического моделирования нейронной активности. Предлагаются новые классы сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием вольтерровского типа, с помощью которых описывается функционирование как отдельного нейрона, так и нейронных сетей. Проводится исследование аттракторов кольцевой системы однонаправленно связанных импульсных нейронов при неограниченном увеличении числа звеньев цепочки. Для изучения ее периодических решений автоволнового типа используются некоторые специальные приемы, сводящие проблемы существования и устойчивости циклов к анализу вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. На этом пути устанавливается, что при увеличении числа звеньев цепочки количество сосуществующих в ней устойчивых автоволновых решений неограниченно растет, т.е. имеет место известное явление буферности.

1. Постановка задачи

Основой излагаемых ниже построений служит теория релаксационных колебаний в многомерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, берущая начало с работы Л.С. Понтрягина и Е.Ф. Мищенко [1]. К настоящему времени проведена целая серия исследований (см. [2] – [12]), связанных с переносом на уравнения с запаздыванием известных асимптотических методов [13], [14]. К указанному

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (грант № 15-01-04066а) и проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

циклу работ относится и данная статья. В ней анализируется некоторая система сингулярно возмущенных скалярных нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующая электрическую активность кольцевой цепочки однонаправленно электрически связанных импульсных нейронов. Рассматриваются вопросы о существовании и устойчивости у этой системы релаксационных циклов со специальными свойствами.

Приступим к описанию объекта дальнейшего анализа. Будем считать, что электрическая активность отдельного нейрона моделируется построенным в соответствии с методикой книги [15] дифференциально-разностным уравнением

$$\dot{u} = \lambda[f(u(t-h)) - g(u(t-1))]u. \tag{1}$$

Здесь $u(t) > 0$ – мембранный потенциал нейрона, параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, а параметр h фиксирован и принадлежит интервалу $(0,1)$. Относительно фигурирующих в (1) функций $f(u)$, $g(u) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$, предполагаем, что они обладают свойствами:

$$\begin{gathered} f(0)=1,\ g(0)=0;\ \ f(u) = -a_0 + O(1/u),\ uf'(u) = O(1/u),\ u^2 f''(u) = O(1/u), \\ g(u) = b_0 + O(1/u),\ \ ug'(u) = O(1/u),\ \ u^2 g''(u) = O(1/u) \ \text{ при } \ u \to +\infty, \end{gathered} \tag{2}$$

где a_0, b_0 – положительные константы.

Уравнение (1) подробно исследовано в статье [12], а ее упрощенный аналог

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u, \tag{3}$$

где функция $f(u)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям (2), рассмотрен в работах [4, 5]. Уравнение (3) получается из (1) при $h = 1$ и при переобозначениях

$$f(u) - g(u) \to f(u), \quad a + b \to a.$$

Для функции $f(u)$ будем считать выполненным следующее дополнительное требование:

$$a > 1. \tag{4}$$

Данное неравенство имеет вполне понятную нейродинамическую интерпретацию, поскольку эквивалентно условию существования у уравнения (3) при достаточно большом λ устойчивого релаксационного цикла, соответствующего режиму генерации спайков (см. [4, 5]) .

В данной работе исследованию подлежат системы однонаправленно электрически связанных нейронов, каждый из которых в отдельности моделируется уравнением (3)

$$\dot{u}_j = d\,(u_{j+1} - u_j) + \lambda f(u_j(t-1))u_j, \quad j = 1, \ldots, m, \quad u_{m+1} = u_1, \tag{5}$$

где $d = \text{const} > 0$.

Математическое исследование модели (5) будем проводить при условии, что $\lambda \gg 1$. Система (5) допускает, очевидно, так называемый однородный или синхронный цикл

$$u_1 \equiv \ldots \equiv u_m = u_*(t, \lambda), \tag{6}$$

где $u_*(t,\lambda)$ – устойчивое периодическое решение уравнения (3) (асимптотика этого решения построена в [5]).

Наш основной результат состоит в том, что при подходящем уменьшении d и при всех $\lambda \gg 1$ эта система имеет как минимум две серии по m экспоненциально орбитально устойчивых неоднородных периодических движений, которые по аналогии с пространственно непрерывным случаем будем называть автоволновыми процессами. А так как размерность m системы (5) мы можем выбирать сколь угодно большой, то это означает реализуемость в рассматриваемой нейронной модели феномена буферности. Для обоснования этого результата будем пользоваться доказанными в [4, 7–10] для случая диффузионной связи основными утверждениями, модифицируя их для нашей задачи. Ниже приводятся базовые теоремы, на основе которых удается найти асимптотические формулы устойчивых периодических решений системы (5).

2. Базовые теоремы

Для удобства дальнейшего асимптотического анализа перейдем в (5) к новым переменным x, $y_1,\dots,y_{m-1}$ по формулам

$$u_1=\exp(x/\varepsilon),\quad u_j=\exp\left(x/\varepsilon+\sum_{k=1}^{j-1}y_k\right),\quad j=2,\dots,m,\quad \varepsilon=1/\lambda. \tag{7}$$

В результате получаем систему

$$\dot{x}=\varepsilon d\,(\exp y_1-1)+F\big(x(t-1),\,\varepsilon\big), \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\dot{y}_j=d\,\big[\,\exp y_{j+1}-\exp y_j\big]+G_j\big(x(t-1),\,y_1(t-1),\,\dots,\,y_j(t-1),\,\varepsilon\big),\\ j=1,\dots,m-1,\end{gathered} \tag{9}$$

где $y_m=-y_1-y_2-\ldots-y_{m-1}$, а функции F, G_j задаются соотношениями

$$\begin{gathered}F(x,\varepsilon)=f\big(\exp(x/\varepsilon)\big),\\ G_j(x,y_1,\dots,y_j,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\Big\{f\Big(\exp\Big(x/\varepsilon+\sum_{k=1}^{j}y_k\Big)\Big)-f\Big(\exp\Big(x/\varepsilon+\sum_{k=1}^{j-1}y_k\Big)\Big)\Big\},\\ j=1,\dots,m-1.\end{gathered} \tag{10}$$

Фиксируем постоянную σ_0, подчиненную требованиям $0<\sigma_0<a-1$, и рассмотрим банахово пространство $\mathscr{F}$ непрерывных при $-1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0$ вектор-функций $\varphi(t)=\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\big)$ с нормой

$$||\varphi||_{\mathscr{F}}=\max_{1\le j\le m}\Big(\max_{-1-\sigma_0\le t\le-\sigma_0}|\varphi_j(t)|\Big). \tag{11}$$

Всюду ниже нас будут интересовать решения системы (8), (9) с начальными условиями из множества

$$S=\big\{\varphi(t)=\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\big):\ \varphi_1\in S_1,\ \varphi_2\in S_2,\dots,\varphi_m\in S_m\big\}\subset\mathscr{F}. \tag{12}$$

Здесь через S_1 обозначено замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi_1(t)$, удовлетворяющих требованиям $-q_1\le\varphi_1(t)\le-q_2$, $\quad\varphi_1(-\sigma_0)=-\sigma_0$, $q_1>\sigma_0$,

$q_2 \in (0, \sigma_0)$, а в качестве $S_2, \dots, S_m$ взяты произвольные замкнутые и ограниченные подмножества пространства $C[-1-\sigma_0, -\sigma_0]$.

Формулировка строгих результатов об автоволновых режимах системы (8), (9) требует некоторых подготовительных построений. В связи с этим введем в рассмотрение решение

$$\bigl(x_\varphi(t,\,\varepsilon),\, y_{1,\varphi}(t,\,\varepsilon),\, \dots,\, y_{m-1,\varphi}(t,\,\varepsilon)\bigr), \quad t \ge -\sigma_0 \tag{13}$$

упомянутой системы, отвечающее произвольному начальному условию $\varphi(t)$ из множества S. Рассмотрим также второй положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t-\sigma_0,\,\varepsilon) = -\sigma_0$ (в случае, когда он существует) и на множестве (12) определим оператор $\Pi_\varepsilon : S \to \mathscr{F}$ посредством равенства

$$\begin{gathered}\Pi_\varepsilon(\varphi) = \bigl(x_\varphi(t+T_\varphi,\,\varepsilon),\, y_{1,\varphi}(t+T_\varphi,\,\varepsilon),\, \dots,\, y_{m-1,\varphi}(t+T_\varphi,\,\varepsilon)\bigr),\\ -1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0.\end{gathered} \tag{14}$$

Помимо (14) нам потребуется еще оператор $\Pi_0 : S \to \mathscr{F}$, который зададим формулой

$$\begin{gathered}\Pi_0(\varphi) = \bigl(x_0(t), y_1^0(t+T_0, z), \dots, y_{m-1}^0(t+T_0, z)\bigr)\Big|_{z=(\varphi_2(-\sigma_0),\dots,\varphi_m(-\sigma_0))},\\ -1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0.\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь, как и в [4,5], $T_0 = 2 + a + 1/a$, а $x_0(t)$ – периодическая функция

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \le t \le 1,\\ 1 - a(t-1) & \text{при } 1 \le t \le t_0+1,\\ -a + t - t_0 - 1 & \text{при } t_0+1 \le t \le T_0,\end{cases} \qquad x_0(t+T_0) \equiv x_0(t). \tag{16}$$

Что же касается компонент $y_1^0(t,z), \dots, y_{m-1}^0(t,z)$, зависящих от вектора $z = (z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, то при $-1-\sigma_0 \le t \le T_0 - \sigma_0$ они удовлетворяют импульсной задаче Коши

$$\begin{gathered}\dot y_j = d\,\bigl[\exp y_{j+1} - \exp y_j\bigr] \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - (1+a)\,y_j(0),\\ y_j(t_0+1+0) = y_j(t_0+1-0) - (1+1/a)\,y_j(t_0), \quad j = 1, \dots, m-1,\\ y_m = -y_1 - y_2 - \ldots - y_{m-1},\end{gathered} \tag{17}$$

$$(y_1, \dots, y_{m-1})\big|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \dots, z_{m-1}), \tag{18}$$

где $t_0 = 1 + 1/a$.

Отдельно остановимся на вопросе о корректности определения оператора (15). Главная проблема здесь заключается в том, что на промежутках времени $-\sigma_0 \le t < 1$, $1 \le t < t_0+1$ и $t_0+1 \le t \le T_0 - \sigma_0$ решение задачи Коши (17), (18) удовлетворяет нелинейной системе

$$\dot y_j = d\,\bigl[\exp y_{j+1} - \exp y_j\bigr], \quad j = 1, \dots, m-1, \quad y_m = -y_1 - y_2 - \ldots - y_{m-1}. \tag{19}$$

Поэтому возникает вопрос о продолжимости решений последней на указанные промежутки, длины которых отнюдь не малы. Ответ на него дается в следующем утверждении.

Лемма 1. *Решение* $(y_1(t), \ldots, y_{m-1}(t))$ *системы* (19) *с произвольным начальным условием* $(y_1, \ldots, y_{m-1})\big|_{t=0} = (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ *определено на полуоси* $t \geq 0$ *и стремится к нулю при* $t \to +\infty$.

Для проверки требуемого факта заметим, что любое решение системы (19) записывается в виде

$$y_j(t) = \ln\big(\xi_{j+1}(t)/\xi_j(t)\big), \quad j = 1, \ldots, m-1, \tag{20}$$

где $(\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t))$ – произвольное решение линейной системы

$$\dot{\xi}_j = d\,(\xi_{j+1} - \xi_j), \quad j = 1, \ldots, m, \quad \xi_{m+1} = \xi_1 \tag{21}$$

из инвариантного конуса $K = \big\{(\xi_1, \ldots, \xi_m) : \xi_j > 0, j = 1, \ldots, m\big\}$.

Свойства системы (21) хорошо известны. Во-первых, все ее решения при $t \to +\infty$ стремятся к устойчивому одномерному инвариантному многообразию $\big\{(\xi_1, \ldots, \xi_m) : \xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m = c,\ c \in \mathbb{R}\big\}$, движения на котором задаются уравнением $\dot{c} = 0$. Во-вторых, справедлив закон сохранения $\sum_{j=1}^{m} \xi_j \equiv \mathrm{const}$. Далее, из упомянутых свойств следует, что для любого решения $(\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)) \in K$ этой системы выполняются предельные равенства

$$\lim_{t\to+\infty} \xi_1(t) = \lim_{t\to+\infty} \xi_2(t) = \ldots = \lim_{t\to+\infty} \xi_m(t) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \xi_j(0) > 0. \tag{22}$$

А отсюда и из (20) утверждение леммы 1 вытекает очевидным образом.

Другая проблема, связанная с корректностью оператора (15), состоит в том, что функции $y_j^0(t, z)$, $j = 1, \ldots, m-1$ являются разрывными в точках $t = 1$ и $t = t_0 + 1$, где согласно (17) они претерпевают конечные скачки. Однако в силу неравенства (4) и оценки $\sigma_0 < a-1$ функции $y_j^0(t+T_0, z)$, $j = 1, \ldots, m-1$ оказываются непрерывными на нужном отрезке $-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, поскольку в этом случае $T_0 - 1 - \sigma_0 > t_0 + 1$. Тем самым, условие (4) гарантирует выполнение требуемого включения $\Pi_0(\varphi) \in \mathscr{F}$ при $\forall\,\varphi \in S$.

Завершая описание подготовительной части, рассмотрим производные Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi)$ операторов (14), (15) по переменной φ. Проводя соответствующий подсчет, убеждаемся, что в данном случае эти производные представляют собой линейные операторы, действующие в пространстве

$$\mathscr{F}_0 = \big\{\mathrm{g}_0(t) = \big(\mathrm{g}_{1,0}(t),\, \mathrm{g}_{2,0}(t), \ldots, \mathrm{g}_{m,0}(t)\big) \in \mathscr{F} :\ \mathrm{g}_{1,0}(-\sigma_0) = 0\big\}$$

с нормой (11), а результаты их применения к произвольному элементу $\mathrm{g}_0(t)$ из $\mathscr{F}_0$ задаются соответственно равенствами

$$\begin{gathered} \partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\mathrm{g}_0 = \big(\mathrm{g}_1(t+T_\varphi,\, \varepsilon), \ldots, \mathrm{g}_m(t+T_\varphi,\, \varepsilon)\big) - \\ -l(\mathrm{g}_0)\,\big(\dot{x}_\varphi(t+T_\varphi,\, \varepsilon),\, \dot{y}_{1,\varphi}(t+T_\varphi, \varepsilon), \ldots, \dot{y}_{m-1,\varphi}(t+T_\varphi, \varepsilon)\big), \\ -1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0; \end{gathered} \tag{23}$$

$$
\begin{gathered}
\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) \mathrm{g}_0 = \\
= \Bigg(0, \sum_{s=1}^{m-1} \frac{\partial y_1^0}{\partial z_s}(t+T_0, z) \mathrm{g}_{s+1,0}(-\sigma_0), \sum_{s=1}^{m-1} \frac{\partial y_2^0}{\partial z_s}(t+T_0, z) \mathrm{g}_{s+1,0}(-\sigma_0), \ldots \\
\ldots, \sum_{s=1}^{m-1} \frac{\partial y_{m-1}^0}{\partial z_s}(t+T_0, z) \mathrm{g}_{s+1,0}(-\sigma_0) \Bigg), \\
z = (\varphi_2(-\sigma_0), \ldots, \varphi_m(-\sigma_0)), \quad -1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0.
\end{gathered} \tag{24}
$$

Здесь $\mathrm{g}(t,\varepsilon) = \big(\mathrm{g}_1(t,\varepsilon), \ldots, \mathrm{g}_m(t,\varepsilon)\big)$, $\mathrm{g}(t,\varepsilon) = \mathrm{g}_0(t)$ при $-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0$ – решение линейной системы, получающейся из (8), (9) при линеаризации на решении (13), а функционал $l : \mathscr{F}_0 \to \mathbb{R}$ определен соотношением

$$
l(\mathrm{g}_0) = \mathrm{g}_1(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon) / \dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon). \tag{25}
$$

Естественно возникающий вопрос о связи между операторами (14) и (15) решается следующей теоремой.

Теорема 1 (о $\mathbf{C^1}$-сходимости)**.** *Пусть выполнено условие* (4) *и множество S выбрано описанным выше способом. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(S) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ оператор Π_ε определен на S и удовлетворяет предельным равенствам*

$$
\begin{gathered}
\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\varphi \in S} ||\Pi_\varepsilon(\varphi) - \Pi_0(\varphi)||_{\mathscr{F}} = 0, \\
\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\varphi \in S} ||\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi)||_{\mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}_0} = 0.
\end{gathered} \tag{26}
$$

Доказательство этой теоремы опустим, поскольку в случае $m = 2$ оно приведено в статье [7]. Переход же от двумерного случая к значениям $m > 2$ носит чисто технический характер.

Остановимся на одном важном следствии из C^1-сходимости, касающемся существования и устойчивости периодических решений системы (8), (9). В связи с этим обратим внимание, что в силу (17), (18) предельный оператор (15) является надстройкой над соответствующим $(m-1)$-мерным отображением

$$
z \to \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t,z), y_2^0(t,z), \ldots, y_{m-1}^0(t,z))\big|_{t=T_0-\sigma_0}, \tag{27}
$$

где $z = (\varphi_2(-\sigma_0), \ldots, \varphi_m(-\sigma_0))$.

Действительно, любой неподвижной точке $z = z_*$ этого отображения соответствует неподвижная точка

$$
\begin{gathered}
\varphi_*(t) = \big(\varphi_1^*(t), \ldots, \varphi_m^*(t)\big) : \ \varphi_1^*(t) = x_0(t), \ \varphi_j^*(t) = y_{j-1}^0(t+T_0, z_*), \ j = 2, \ldots, m, \\
-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0
\end{gathered}
$$

оператора Π_0 (при условии, конечно, что $\varphi_j^*(t) \in S_j$, $j = 2, \ldots, m$). Последние же требования не являются ограничениями, поскольку, как уже говорилось выше, множества S_j $j = 2, \ldots, m$ из (12) можно считать произвольными замкнутыми и ограниченными подмножествами пространства $C[-1-\sigma_0, -\sigma_0]$.

Верно и обратное утверждение: если $\varphi_*(t) = \big(\varphi_1^*(t), \ldots, \varphi_m^*(t)\big) \in S$ является неподвижной точкой оператора Π_0, то с необходимостью $\varphi_1^*(t) = x_0(t)$, а вектор $z_* = (\varphi_2^*(-\sigma_0), \ldots, \varphi_m^*(-\sigma_0))$ таков, что $\Phi(z_*) = z_*$. Кроме того, в силу (24) спектр линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ состоит из двух множеств: собственного значения $\mu = 0$ бесконечной кратности и совокупности собственных значений матрицы Якоби $\Phi'(z_*)$.

Суммируя изложенные факты, приходим к выводу, что справедлив следующий результат.

Теорема 2 (о соответствии). *Каждой неподвижной точке $z = z_*$ отображения (27), удовлетворяющей условию $\det(I - \Phi'(z_*)) \neq 0$, где I – единичная матрица, соответствует релаксационный цикл системы (8), (9). Этот цикл существует при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и является экспоненциально орбитально устойчивым (неустойчивым) при $r_* < 1$ (> 1), где r_* – спектральный радиус матрицы $\Phi'(z_*)$.*

Доказательство данного утверждения также опустим, поскольку оно может быть легко получено модификацией соответствующего утверждения из [7,10] для системы связанных осцилляторов с диффузионным взаимодействием.

Теорема 2 сводит интересующую нас проблему автоволновых процессов системы (17) к поиску неподвижных точек отображения (27). Вопрос о количестве и устойчивости последних будет изучен в следующем пункте. Здесь же приведем указанное отображение к некоторому инвариантному виду, не зависящему от начального момента времени $t = -\sigma_0$.

Заметим в первую очередь, что интересующее нас отображение представляет собой оператор сдвига по траекториям системы (17) с T_0-периодическим импульсным воздействием за отрезок времени $-\sigma_0 \le t \le T_0 - \sigma_0$. А это означает, что его можно записать в инвариантной форме, заменяя указанный выше отрезок не зависящим от σ_0 промежутком $0 \le t \le T_0$.

Действительно, введем в рассмотрение оператор сдвига $P^t(z)$, $P^0(z) = z$, $P^t(0) \equiv 0$ по траекториям системы (19) и положим $\overline{z} = \Phi(z)$. Тогда отображение (27) может быть представлено в виде

$$\overline{z} = \big(P^{T_0 - t_0 - 1 - \sigma_0} \circ P_2 \circ P^{t_0} \circ P_1 \circ P^{1+\sigma_0}\big)(z),$$

где через P_1, P_2 обозначены операторы пересчета начальных условий в точках $t = 1$ и $t = t_0 + 1$ соответственно, действующие по правилам

$$P_1(z) = z - (1 + a)P^{-1}(z), \quad P_2(z) = z - (1 + 1/a)P^{-1}(z).$$

Далее, применим к левой и правой части получившегося равенства оператор P^{σ_0}. В результате с учетом очевидных соотношений

$$P^{1+\sigma_0} = P^1 \circ P^{\sigma_0}, \quad P^{T_0 - t_0 - 1 - \sigma_0} = P^{-\sigma_0} \circ P^{T_0 - t_0 - 1}$$

имеем

$$P^{\sigma_0}(\overline{z}) = \big(P^{T_0 - t_0 - 1} \circ P_2 \circ P^{t_0} \circ P_1 \circ P^1\big)\big(P^{\sigma_0}(z)\big).$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что после замены $P^{\sigma_0}(z) \to z$ интересующее нас отображение принимает требуемую инвариантную форму

$$z \to \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} \big(P^{T_0-t_0-1} \circ P_2 \circ P^{t_0} \circ P_1 \circ P^1\big)(z),$$

или, что то же самое,

$$z \to \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t,z), y_2^0(t,z), \dots, y_{m-1}^0(t,z))\big|_{t=T_0}, \tag{28}$$

где $(y_1^0(t,z), y_2^0(t,z), \dots, y_{m-1}^0(t,z))$ – решение аналогичной (17), (18) задачи Коши для системы (17) с начальным условием

$$(y_1, \dots, y_{m-1})\big|_{t=0} = z, \quad z = (z_1, \dots, z_{m-1}). \tag{29}$$

Подчеркнем, что в силу леммы 1 это отображение заведомо определено во всем пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$.

3. Аттракторы предельного отображения

В данном пункте обратимся к актуальному в связи с теоремой 2 вопросу о количестве и устойчивости неподвижных точек отображения (28). Ниже в предположении о малости d будут найдены две группы его устойчивых неподвижных точек. В случае первой из этих групп мы усилим условие (4) и предположим, что

$$a > m - 1. \tag{30}$$

Итак, пусть выполнено условие (30). Тогда подставим в (18) соотношения

$$z_j = -\frac{1}{a}\ln\frac{1}{d} + v_j, \quad j = 1, \dots, m-1, \tag{31}$$

где $v = (v_1, \dots, v_{m-1}) \in \Omega$, Ω – произвольный компакт, и, как обычно, обозначим через $\big(y_1(t,v,d), \dots, y_{m-1}(t,v,d)\big)$ решение получившейся задачи Коши. Несложный ее анализ приводит к выводу, что при $d \to 0$ справедлива серия асимптотических равенств:

$$y_j(t,v,d) = -\frac{1}{a}\ln\frac{1}{d} + v_j + O(d^{1-(m-1)/a}) \quad \text{при} \quad 0 \le t < 1, \tag{32}$$

$$y_j(t,v,d) = \ln\frac{1}{d} + \omega_j^0(t,v) + O(d^{1-(m-1)/a}) \quad \text{при} \quad 1 \le t < t_0 + 1, \tag{33}$$

$$y_j(t,v,d) = -\frac{1}{a}\ln\frac{1}{d} + \psi_j(v) + O(d^{1-(m-1)/a}) \quad \text{при} \quad t_0 + 1 \le t \le T_0, \tag{34}$$

остатки в которых равномерны по t, v и сохраняют свой порядок малости при дифференцировании по v. Далее, фигурирующие в (33) функции $\omega_j^0(t,v)$, $j = 1, \dots, m-1$ определятся из задачи Коши

$$\begin{gathered}
\dot\omega_j = \exp\omega_{j+1} - \exp\omega_j, \quad j = 1, \dots, m-2, \\
\dot\omega_{m-1} = -\exp\omega_{m-1}, \\
\omega_j\big|_{t=1} = -a\, v_j, \quad j = 1, \dots, m-1
\end{gathered}$$

и имеют вид

$$\omega^0_{m-1}(t,v)+\ldots+\omega^0_{m-s}(t,v)= \\ =-\ln\left\{\frac{(t-1)^s}{s!}+\sum_{\ell=0}^{s-1}\frac{(t-1)^\ell}{\ell!}\exp\left(a\sum_{j=1}^{s-\ell}v_{m-j}\right)\right\},\quad s=1,\ldots,m-1. \tag{35}$$

Что же касается функций $\psi_j(v)$ из (34), то они задаются равенствами вида

$$\psi_j(v)=\omega^0_j(t,v)\big|_{t=t_0+1}-(1+1/a)\omega^0_j(t,v)\big|_{t=t_0},\quad j=1,\ldots,m-1. \tag{36}$$

Перечисленные факты (32) – (35) свидетельствуют о том, что после замены переменных (31) отображение (28) имеет при $d\to 0$ в метрике $C^1(\Omega)$ предел вида

$$v_j\to\psi_j(v),\quad j=1,\ldots,m-1. \tag{37}$$

В свою очередь, отображение (37) после перехода к переменным

$$\alpha_s=-v_{m-1}-\ldots-v_{m-s},\quad s=1,\ldots,m-1$$

принимает вид

$$\alpha_k\to\ln\big(r_{1,k}+\exp(-a\alpha_k)\big)-(1+1/a)\ln\big(r_{2,k}+\exp(-a\alpha_k)\big), \\ k=1,\ldots,m-1, \tag{38}$$

где

$$r_{1,1}=1+1/a,\quad r_{2,1}=1/a, \tag{39}$$

$$r_{1,k}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})=\frac{(1+1/a)^k}{k!}+\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{(1+1/a)^\ell}{\ell!}\exp(-a\alpha_{k-\ell}), \\ r_{2,k}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})=\frac{1}{a^k\,k!}+\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{1}{a^\ell\,\ell!}\exp(-a\alpha_{k-\ell}),\quad k=2,\ldots,m-1. \tag{40}$$

Таким образом, мы можем утверждать, что оно имеет единственную экспоненциально устойчивую неподвижную точку $(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_{m-1}^*)$, которой в исходном отображении (28) отвечает устойчивая неподвижная точка вида

$$z_*=(z_1^*,\ldots,z_{m-1}^*),\quad z_j^*=-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{d}+v_j^*+O(d^{1-(m-1)/a}), \\ j=1,\ldots,m-1,\quad d\to 0, \tag{41}$$

где $v^*_{m-1}=-\alpha_1^*$, $v^*_{m-s}=\alpha^*_{s-1}-\alpha^*_s$, $s=2,\ldots,m-1$.

Интересно отметить, что отображение (28) инвариантно относительно преобразования

$$(z_1,\ldots,z_{m-1})\xrightarrow{\mathscr{A}}(z_2,z_3,\ldots,z_{m-1},-z_1-z_2-\ldots-z_{m-1}). \tag{42}$$

Поэтому найденная нами неподвижная точка (41) порождает сразу m устойчивых неподвижных точек

$$z_*^{(k)}=\mathscr{A}^k z_*,\quad k=0,1,\ldots,m-1 \tag{43}$$

(подчеркнем, что $\mathscr{A}^m = I$, где I – единичный оператор). Остается добавить, что в исходной системе (5) этим точкам отвечает набор из m устойчивых релаксационных периодических движений, переходящих друг в друга при циклических перестановках координат u_j, $j = 1, \dots, m$.

При отыскании второй группы устойчивых неподвижных точек отображения (28) вернемся к прежнему условию (4) на параметр a. Как и в предыдущем случае, здесь достаточно знать какую-либо одну устойчивую неподвижную точку, а остальные получаются из нее по правилам (42), (43).

Итак, положим в (18)

$$z_j = \frac{1}{a(m-1)} \ln \frac{1}{d} + v_j, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad v = (v_1, \dots, v_{m-1}) \in \Omega, \tag{44}$$

где, как и ранее, Ω – произвольный компакт. Характерная особенность данного случая состоит в том, что при условиях (44) предельное отображение (37) оказывается тождественным по части переменных. Поэтому ниже при построении асимптотики при $d \to 0$ компонент $y_j(t, v, d)$, $j = 1, \dots, m-1$ решения задачи Коши (17), (18), (44) в некоторых формулах будут учтены поправки порядка d^σ, где $\sigma = 1 - [a(m-1)]^{-1} > 0$.

Обратимся сначала к промежутку $0 \le t < 1$. Несложный подсчет показывает, что здесь

$$y_j(t, v, d) = \frac{1}{a(m-1)} \ln \frac{1}{d} + v_j + d^\sigma \delta_j(t, v) + o(d^\sigma), \quad j = 1, \dots, m-1, \tag{45}$$

где

$$\delta_j = t(\exp v_{j+1} - \exp v_j), \quad j = 1, \dots, m-2; \quad \delta_{m-1} = -t \exp v_{m-1}. \tag{46}$$

Далее, при $1 \le t < t_0 + 1$ с учетом уже установленных соотношений (45), (46) приходим к равенствам

$$\begin{gathered} y_j(t, v, d) = -\frac{1}{m-1} \ln \frac{1}{d} - a\, v_j + d^\sigma (\exp v_{j+1} - \exp v_j) + o(d^\sigma), \\ j = 1, \dots, m-2; \end{gathered} \tag{47}$$

$$\begin{gathered} y_{m-1}(t, v, d) = -\frac{1}{m-1} \ln \frac{1}{d} + \\ + \ln \left[(t-1) \exp \left(a \sum_{k=1}^{m-2} v_k \right) + \exp(-a\, v_{m-1}) \right] + O(d^\sigma). \end{gathered} \tag{48}$$

И наконец, при $t_0 + 1 \le t \le T_0$ получаем асимптотические представления

$$\begin{gathered} y_j(t, v, d) = \frac{1}{a(m-1)} \ln \frac{1}{d} + v_j + \\ + d^\sigma (t - t_0 - 1 - 1/a)(\exp v_{j+1} - \exp v_j) + o(d^\sigma), \quad j = 1, \dots, m-2; \end{gathered} \tag{49}$$

$$\begin{gathered} y_{m-1}(t, v, d) = \frac{1}{a(m-1)} \ln \frac{1}{d} + \\ + \ln \left[t_0 \exp \left(a \sum_{k=1}^{m-2} v_k \right) + \exp(-a\, v_{m-1}) \right] - \\ -(1 + 1/a) \ln \left[(t_0 - 1) \exp \left(a \sum_{k=1}^{m-2} v_k \right) + \exp(-a\, v_{m-1}) \right] + O(d^\sigma). \end{gathered} \tag{50}$$

Добавим еще, что во всех формулах (45) – (50) остатки имеют указанный порядок малости равномерно по t, v и сохраняют его при дифференцировании по v.

Из приведенного асимптотического анализа следует, что в случае (44) отображение (28) записывается в виде

$$v_j \to v_j + d^\sigma(a - 1/a)(\exp v_{j+1} - \exp v_j) + o(d^\sigma), \quad j = 1, \dots, m-2; \tag{51}$$

$$\begin{gathered} v_{m-1} \to \ln\left[t_0 \exp\left(a \sum_{k=1}^{m-2} v_k\right) + \exp(-a\, v_{m-1})\right] - \\ -(1 + 1/a) \ln\left[(t_0 - 1) \exp\left(a \sum_{k=1}^{m-2} v_k\right) + \exp(-a\, v_{m-1})\right] + O(d^\sigma). \end{gathered} \tag{52}$$

Анализ получившегося отображения тесно связан со свойствами вспомогательного одномерного отображения

$$\alpha \to \psi_{r_1, r_2}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \ln\big(r_1 + \exp(-a\alpha)\big) - (1 + 1/a) \ln\big(r_2 + \exp(-a\alpha)\big) \tag{53}$$

с двумя параметрами $r_1, r_2 > 0$, удовлетворяющими условию

$$r_1 > (1 + 1/a) r_2. \tag{54}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *При выполнении неравенства (54) отображение (53) имеет единственную глобально экспоненциально устойчивую неподвижную точку* $\alpha_* = \alpha_*(r_1, r_2)$.

Доказательство. Отметим сначала вытекающие из явного вида функции $\psi_{r_1, r_2}(\alpha)$ (см. (53)) асимптотические свойства

$$\begin{gathered} \lim_{\alpha \to +\infty} \psi_{r_1, r_2}(\alpha) = \ln r_1 - (1 + 1/a) \ln r_2, \\ \psi_{r_1, r_2}(\alpha) = \alpha + \big(r_1 - (1 + 1/a) r_2\big) \exp(a\alpha) + O\big(\exp(2a\alpha)\big), \quad \alpha \to -\infty. \end{gathered} \tag{55}$$

Учитывая, далее, в (55) условие (54), приходим к выводу, что при всех достаточно больших $\alpha > 0$ выполняется неравенство $\psi_{r_1, r_2}(\alpha) < \alpha$, а при всех достаточно больших по модулю отрицательных α – неравенство $\psi_{r_1, r_2}(\alpha) > \alpha$. Таким образом, отображение (53) заведомо имеет хотя бы одну неподвижную точку $\alpha = \alpha_*$, являющуюся, очевидно, корнем уравнения

$$\exp(\alpha_*) = \frac{r_1 + \exp(-a\alpha_*)}{\big(r_2 + \exp(-a\alpha_*)\big)^{1 + 1/a}}. \tag{56}$$

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости найденной неподвижной точки. В связи с этим обратим внимание, что требование (54) влечет выполнение неравенства $r_1 > r_2$. Используя данный факт, убеждаемся, что, во-первых,

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\alpha} \psi_{r_1, r_2}(\alpha) = \\ = \exp(-a\alpha) \left(\frac{a(r_1 - r_2)}{\big(r_1 + \exp(-a\alpha)\big)\big(r_2 + \exp(-a\alpha)\big)} + \frac{1}{r_2 + \exp(-a\alpha)} \right) > 0, \\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}; \end{gathered} \tag{57}$$

во-вторых, за устойчивость неподвижной точки $\alpha = \alpha_*$ отвечает мультипликатор

$$\mu_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\alpha}\,\psi_{r_1,r_2}(\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_*} = \left(\frac{v_*+r_2}{v_*+r_1}\right)^a \left(1+\frac{a(r_1-r_2)}{v_*+r_1}\right)\Big|_{v_*=\exp(-a\alpha_*)}, \tag{58}$$

являющийся положительным (при выводе равенства (58) привлекались соотношения (56), (57)). Кроме того, учитывая, что $a > 1$, и опираясь на очевидные оценки

$$\left(\frac{v_*+r_1}{v_*+r_2}\right)^a = \left(1+\frac{r_1-r_2}{v_*+r_2}\right)^a > 1+\frac{a(r_1-r_2)}{v_*+r_2} > 1+\frac{a(r_1-r_2)}{v_*+r_1},$$

нетрудно увидеть, что $\mu_* < 1$.

Итак, мы убедились, что любая возможная неподвижная точка $\alpha = \alpha_*$ отображения (53) является экспоненциально устойчивой. А это значит, что на самом деле такая точка единственна и в силу монотонности нашего отображения (см. (57)) глобально устойчива. Лемма 2 доказана.

Вернемся к отображению (51), (52) и заметим, что при $d = 0$ в силу указанных в лемме 2 свойств вспомогательного отображения (53) отображение (51), (52) допускает экспоненциально устойчивое $(m-2)$-мерное инвариантное многообразие, состоящее из неподвижных точек. Упомянутое многообразие задается равенством

$$\begin{gathered}\{(v_1,\ldots,v_{m-1}):\ v_{m-1} = v_* - v_1 - v_2 - \ldots - v_{m-2},\\ v_j \in \mathbb{R},\ j=1,\ldots,m-2\},\end{gathered} \tag{59}$$

где $v = v_*$ – единственный корень уравнения

$$v = \ln[t_0 + \exp(-a\,v)] - (1+1/a)\ln[t_0 - 1 + \exp(-a\,v)].$$

При малых $d > 0$ аналог инвариантного многообразия (59) сохраняется, а сужение на него отображения (51), (52) представляет собой оператор, асимптотически близкий к тождественному. В связи с этим указанный оператор можно аппроксимировать соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В нашем случае эта система имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dv_j}{d\tau} &= \exp v_{j+1} - \exp v_j, \quad j=1,\ldots,m-3,\\ \frac{dv_{m-2}}{d\tau} &= \exp(v_* - v_1 - v_2 - \ldots - v_{m-2}) - \exp v_{m-2}.\end{aligned} \tag{60}$$

Ясно также, что любому ее экспоненциально устойчивому состоянию равновесия $\mathscr{O}$ в исходном отображении (51), (52) при всех достаточно малых $d > 0$ отвечает устойчивая неподвижная точка $\mathscr{O}(d)$, асимптотически близкая к $\mathscr{O}$.

Анализ системы (60) не вызывает затруднений. Действительно, после замен $v_j = w_j + v_*/(m-1)$, $j = 1,\ldots,m-2$, $\tau\exp(v_*/(m-1)) \to \tau$ она приводится к виду

$$\begin{gathered}\dot w_j = \exp w_{j+1} - \exp w_j, \quad j=1,\ldots,m-2,\\ w_{m-1} = -w_1 - w_2 - \ldots - w_{m-2}.\end{gathered} \tag{61}$$

А отсюда и из отмеченных выше свойств аналогичной системы (19) вытекает, что нулевое состояние равновесия системы (61) глобально экспоненциально устойчиво.

Возвращаясь к отображению (28), приходим к выводу, что при условии (4) и при всех $d \ll 1$ оно допускает экспоненциально устойчивую неподвижную точку

$$z_{**} = (z_1^{**}, \dots, z_{m-1}^{**}), \quad z_j^{**} = \frac{1}{a(m-1)} \ln \frac{1}{d} + \frac{v_*}{m-1} + o(1), \\ j = 1, \dots, m-1, \tag{62}$$

а также серию устойчивых неподвижных точек

$$z_{**}^{(k)} = \mathscr{A}^k z_{**}, \quad k = 1, \dots, m-1. \tag{63}$$

Как и в случае (41), (43), в исходной системе (5) неподвижным точкам (62), (63) соответствуют устойчивые релаксационные периодические движения, переходящие друг в друга при циклических перестановках компонент u_j, $j = 1, \dots, m$. Добавим еще, что при условии (30) найденные нами две группы устойчивых периодических решений сосуществуют.

4. Заключение

Подводя итоги работы, отметим, что теорема 2 о соответствии и проделанный в пункте 3 асимптотический анализ отображения (28) приводят к следующему утверждению, являющемуся основным результатом данной статьи.

Теорема 3. *Пусть параметр a удовлетворяет неравенству (30)(удовлетворяет неравенству (4) и не удовлетворяет неравенству (30)). Тогда для любых достаточно малых $d_2 > d_1 > 0$ найдется такое достаточно большое $\lambda_0 = \lambda_0(d_1, d_2) > 0$, что при всех $d_1 \le d \le d_2$, $\lambda \ge \lambda_0$ система (5) имеет как минимум две (одну) группы решений, каждая из которых состоит из m экспоненциально орбитально устойчивых автоволновых периодических движений.*

Из сформулированной теоремы следует, что при согласованном уменьшении d и увеличении параметров λ, m в системе (5) наблюдается феномен буферности, а точнее, происходит неограниченное накапливание сосуществующих устойчивых циклов. Отметим, что буферность наблюдается и для ряда других классов цепочек осцилляторов с однонаправленной связью (см. [16–20]).

Список литературы

[1] Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., “Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным”, *Докл. АН СССР*, **102**:5 (1955), 889–891; [Mishchenko E. F., Pontryagin L. S., “Periodicheskiye resheniya sistem differentsial'nykh uravneniy, blizkiye k razryvnym”, *Dokl. AN SSSR*, **102**:5 (1955), 889–891, (in Russian).]

[2] Колесов А. Ю., Колесов Ю. С., “Релаксационные колебания в математических моделях экологии”, *Тр. МИРАН*, **199** (1993); English transl.: Kolesov A. Yu., Kolesov Yu. S., “Relaxational oscillations in mathematical models of ecology”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **199** (1995), 1–126.

[3] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Реле с запаздыванием и его C^1-аппроксимация”, *Тр. Мат. ин-та РАН*, **216** (1997), 126–153; English transl.: Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “Relay with delay and its C^1-approximation”, *Dynamical systems and related topics. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **216** (1997), 119–146.

[4] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Дискретные автоволны в системах с запаздыванием из экологии”, *Доклады академии наук*, **434**:6 (2010), 735–738; English transl.: Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Discrete autowaves in delay systems in ecology”, *Doklady mathematics*, **82**:2 (2010), 794–797.

[5] Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., “Об одной модификации уравнения Хатчинсона”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50**:12 (2010), 2099–2112; English transl.: Kolesov A. Yu., Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., “A modification of Hutchinson's equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:12 (2010), 1990–2002.

[6] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона”, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 51–82; English transl.: Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “The theory of relaxation oscillations for Hutchinson's equation”, *Sbornik: Mathematics*, **202**:6 (2011), 829–858.

[7] Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Автоволновые процессы в цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием”, *УМН*, **67**:2(404) (2012), 109–156; English transl.: Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Self-excited wave processes in chains of diffusion-linked delay equations”, *Russian Math. Surveys*, **67**:2 (2012), 297–343.

[8] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференц. уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: I”, *Differential Equations*, **47**:7 (2011), 927–941.

[9] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II”, *Дифференц. уравнения*, **47**:12 (2011), 1675–1692; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: II”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1697–1713.

[10] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III”, *Дифференц. уравнения*, **48**:2 (2012), 155–170; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Relaxation self-oscillations in neuron systems: III”, *Differential Equations*, **48**:2 (2012), 159–175.

[11] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Дискретные автоволны в нейронных системах”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **52**:5 (2012), 840–858; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Discrete autowaves in neural systems”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **2**:5 (2012), 702–719.

[12] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах”, *Матем. заметки*, **93**:5 (2013), 684–701; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Modeling the Bursting Effect in Neuron Systems”, *Mathematical Notes*, **93**:5 (2013), 676–690.

[13] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М, 1975, 248 с.; English transl.: Mishchenko E. F., Rozov N. Kh., *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Plenum Press, 1980, 228 pp.

[14] Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Физматлит, М., 1995; [Mishchenko E. F., Kolesov Yu. S., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., *Periodicheskiye dvizheniya i bifurkatsionnyye protsessy v singulyarno vozmushchennykh sistemakh*, Fizmatlit, M., 1995, (in Russian).]

[15] Кащенко С. А., Майоров В. В., *Модели волновой памяти*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009, 288 с.; [Kashchenko S. A., Mayorov V. V., *Modeli volnovoy pamyati*, Knizhnyy dom "LIBROKOM", M., 2009, 288 pp., (in Russian).]

[16] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., “Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых цепочках однонаправленно связанных уравнений”, *Теоретическая и математическая физика*, **175**:1 (2013), 62–83; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., “Periodic traveling-wave-type solutions in circular chains of unidirectionally coupled equations”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **175**:1 (2013), 499–517.

[17] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Автоволновые процессы в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов", *Избранные вопросы математической физики и анализа. Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова*, Тр. МИАН, **285**, МАИК, М., 2014, 89–106; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "Autowave processes in continual chains of unidirectionally coupled oscillators", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **285**, 2014, 81–98.

[18] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Явление буферности в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов", *Теоретическая и математическая физика*, **181**:2 (2014), 254–275; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "Buffering effect in continuous chains of unidirectionally coupled generators", *Theoretical and Mathematical Physics*, **181**:2 (2014), 1349–1366.

[19] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Явление буферности и хаос в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов", *Доклады Академии наук*, **457**:3 (2014), 278–281; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "Buffer Phenomenon and Chaos in Circular Chains of Unidirectionally Coupled Oscillators", *Doklady Mathematics*, **90**:1 (2014), 509–513.

[20] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., "Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов", *Изв. РАН.*, Сер. матем., **78**, 2014, 73–108; English transl.: Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., "The buffer phenomenon in ring-like chains of unidirectionally connected generators", *Izvestiya: Mathematics*, **78**, 2014, 708–743.

Self-excited Wave Processes in Chains of Unidirectionally Coupled Impulse Neurons

Glyzin S. D.[*,**], Kolesov A. Yu.[*], Rozov N. Kh..[***]

[*] *P.G. Demidov Yaroslavl State University,*
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia
[**] *Scientific Center in Chernogolovka RAS*
Lesnaya str., 9, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia
[***] *M.V. Lomonosov Moscow State University,*
Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia

Keywords: impulse neurons, chain of unidirectionally coupled oscillators, travelling wave, asymptotic behaviour, stability, buffer phenomenon

The article is devoted to the mathematical modeling of neural activity. We propose new classes of singularly perturbed differential-difference equations with delay of Volterra type. With these systems, the models as a single neuron or neural networks are described. We study attractors of ring systems of unidirectionally coupled impulse neurons in the case where the number of links in the system increases indefinitely. In order to study periodic solutions of travelling wave type of this system, some special tricks are used which reduce the existence and stability problems for cycles to the investigation of auxiliary system with impulse actions. Using this approach, we establish that the number of stable self-excited waves simultaneously existing in the chain increases unboundedly as the number of links of the chain increases, that is, the well-known buffer phenomenon occurs.

Сведения об авторах:
Глызин Сергей Дмитриевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей;
Отдел прикладных сетевых исследований НЦЧ РАН,
ведущий научный сотрудник;
Колесов Андрей Юрьевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений
Розов Николай Христович,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, декан факультета
педагогического образования