Модел. и анализ информ. систем. Т. **17**, № **2** (2010) 28–47

УДК 517.9

Релаксационные колебания электрически связанных нейроподобных осцилляторов с запаздыванием

Глызин С. Д.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

получена 22 марта 2010

Ключевые слова: релаксационные колебания, импульсный нейрон, уравнения с запаздыванием, бифуркация

Рассматривается система диффузионно связанных нелинейных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием, моделирующих электрическое взаимодействие импульсных нейронов. При условии, что скорость протекания электрических процессов в системе велика, построена предельная система, отвечающая за релаксационные циклы системы. Показано, что, наряду с синхронным, система может иметь устойчивые несинхронные циклы, найдены асимптотики этих циклов.

Введение

Для описания электрической активности нервных клеток в [1, 2] предложено следующее уравнение с запаздыванием:

$$u' = \lambda\big[-1 + f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) - f_{\mathrm{Na}}(u)\big]u. \tag{1}$$

Здесь $u(t)$ — мембранный потенциал нейрона, функции $f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) = \alpha f_1(u(t-1))$ и $f_{\mathrm{Na}}(u) = \beta f_2(u)$ характеризуют калиевый и натриевый токи соответственно. Предполагается, что $f_1(u), f_2(u)$ обладают следующими свойствами:

$$f_j(0) = 1, \quad f_j(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{u^k}, \quad u \to +\infty \quad (j = 1, 2), \tag{2}$$

кроме того, считаем, что фигурирующий в (2) асимптотический ряд можно дифференцировать по u любое число раз. Коэффициент $\lambda > 0$ определяется скоростью протекания электрических процессов в системе и велик. Отметим, что калиевый

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт №02.740.11.0197).

ток зависит от мембранного потенциала, взятого с запаздыванием, при этом выбор единичного запаздывания — удобная нормировка. При условии, что

$$\alpha - \beta - 1 > 0, \tag{3}$$

и достаточно малом ε, уравнение (1) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ (см. [2]). Рассмотрим задачу слабого электрического взаимодействия пары одинаковых осцилляторов вида (1). В системе

$$\begin{aligned} u_1' &= \lambda\big[-1 - f_{\mathrm{Na}}(u_1) + f_{\mathrm{K}}(u_1(t-1))\big]u_1 + D(u_2 - u_1), \\ u_2' &= \lambda\big[-1 - f_{\mathrm{Na}}(u_2) + f_{\mathrm{K}}(u_2(t-1))\big]u_2 + D(u_1 - u_2), \end{aligned} \tag{4}$$

коэффициент $D > 0$ порядка единицы характеризует связь нейронов между собой, а $\lambda >> 1$. Очевидно, что система (4) имеет синхронный цикл $u_1 \equiv u_2 = u_*(t, \lambda)$. Основной результат, полученный в работе, состоит в том, что при подходящем выборе параметров α, β, и D и всех $\lambda >> 1$ данная система наряду с устойчивым синхронным циклом обладает еще как минимум одним орбитально асимптотически устойчивым неоднородным циклом.

Для того чтобы приступить к асимптотическому анализу системы (4), необходимо получить асимптотику устойчивого цикла $u = u_*(t, \lambda)$ уравнения (1), поскольку изучаемая система имеет пространственно однородный цикл

$$u_1 \equiv u_2 = u_*(t, \lambda)\,. \tag{5}$$

Теоретической основой используемых ниже построений является теория релаксационных колебаний в многомерных системах, которая берет свое начало с заметки Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко [3], послужившей основой для последующих работ (см. [4–7]). К настоящему времени эта теория приняла достаточно законченный характер и в суммированном виде содержится в монографиях [8], [9]. Необходимо также отметить монографию [10] и статью [11], в которых основные идеи и методы из [8], [9] были перенесены на некоторые классы сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием. Что же касается излагаемых в данной работе результатов, то их можно рассматривать как продолжение начатых в [10], [11] исследований.

1. Релаксационный цикл парциального осциллятора

1.1. Сведение задачи к релейному уравнению. Рассмотрим сначала способы построения асимптотики релаксационного цикла уравнения (1) и доказательство его устойчивости. Наряду с большим параметром λ будем далее использовать малый параметр $0 < \varepsilon = 1/\lambda << 1$. Для асимптотического анализа уравнения (1) выполним замену $u = \exp\big(x/\varepsilon\big)$, тогда вместо (1) имеем

$$x' = -1 + \alpha f_1\Big(\exp\Big(\frac{x(t-1)}{\varepsilon}\Big)\Big) - \beta f_2\Big(\exp\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,. \tag{6}$$

Учитывая, что при $\varepsilon \to 0$ выполнены предельные соотношения:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_1\Big(\exp\Big(\frac{x(t-1)}{\varepsilon}\Big)\Big) = R(x(t-1)), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} f_2\Big(\exp\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) = R(x),$$

где релейная функция $R(x)$ определяется следующим образом:

$$R(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x > 0 \\ 1, & \text{при } x < 0 \end{cases}, \tag{7}$$

в качестве предельного для (6) следует рассматривать релейное уравнение

$$x' = -1 + \alpha R(x(t-1)) - \beta R(x). \tag{8}$$

Цикл уравнения (8) находится шагами и вычисляется следующим образом. Сначала на промежутке длины единица задается начальное условие. Будем считать, что оно принадлежит следующему классу функций:

$$S = \big\{\varphi \in C[-1-\sigma_0, -\sigma_0] \;\big|\; -q_2 \le \varphi(t) \le -q_1 \\ \text{при } -1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0 \text{ и } \varphi(-\sigma) = 1+\beta-\alpha\big\}. \tag{9}$$

Здесь q_1, q_2, σ_0 — некоторые положительные константы, которые будут определены позже.

При известной начальной функции нетрудно определить правую часть уравнения (8) и соответственно решение этого уравнения. Поскольку наша цель — нахождение периодического решения, поэтому будем интегрировать (8) до тех пор, пока решение не окажется в множестве S.

В точке $t = -\sigma_0$ начальное условие $x(-\sigma_0)$ и значение $x(-1-\sigma_0)$ отрицательны, а значит, до тех пор пока $x(t)$ или $x(t-1)$ не сменят знак, правые части меняться не будут и уравнение (8) примет вид

$$x' = -1 + \alpha - \beta. \tag{10}$$

Таким образом, на промежутке $t \in [-\sigma, 0]$ $x(t) = (\alpha - 1 - \beta)t$. В точке $t = 0$ решение $x(t)$ меняет знак и на следующем промежутке $t \in [0, 1]$ необходимо решать задачу

$$x' = -1 + \alpha \tag{11}$$

с нулевым начальным условием в точке $t = 0$. Вид решения в этом случае следующий: $x(t) = (\alpha - 1)t$. Очередное изменение релейной правой части уравнения (8) произойдет в точке $t = 1$, поскольку в ней сменит знак функция $x(t-1)$. Решая уравнение $x' = -1$ с начальным условием $x(1) = \alpha - 1$, получаем на промежутке $t \in [1, \alpha]$ $x(t) = \alpha - t$. В точке $t = \alpha$ решение $x(t)$ снова меняет знак, и поэтому на следующем промежутке решается уравнение

$$x' = -1 - \beta \tag{12}$$

с нулевым начальным условием. На этом основании решение задачи на промежутке $t \in [\alpha, \alpha+1]$ имеет вид $x(t) = -(1+\beta)(t-\alpha)$. Наконец, при $t > \alpha+1$ снова, как и на начальном этапе, $x(t)$ и $x(t-1)$ отрицательны и должно решаться уравнение (10) с начальным условием $x(\alpha+1) = -1-\beta$. Решение $x(t) = -1-\beta+(\alpha-\beta-1)(t-\alpha-1)$ обращается в ноль в точке

$$T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1). \tag{13}$$

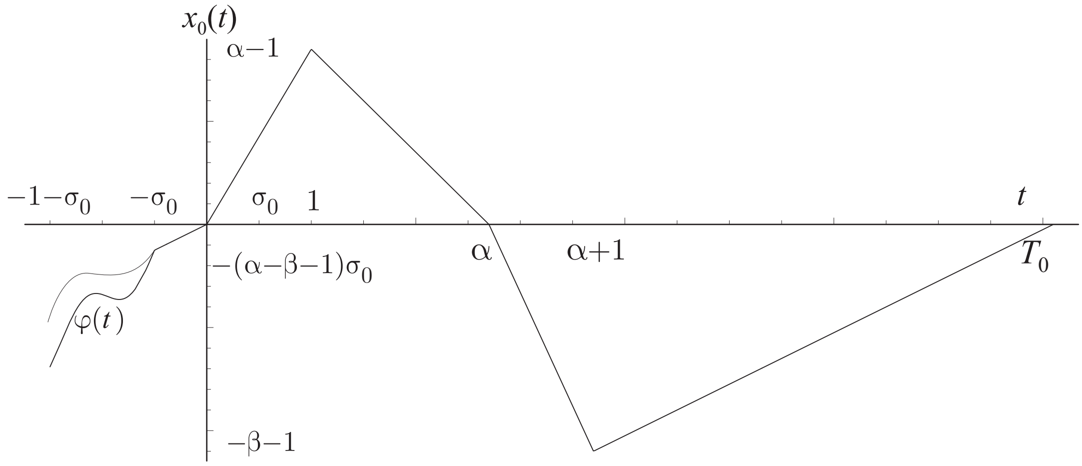

Рис. 1.

Таким образом, на интервале (α, T_0), решение задачи (8) остается отрицательным. Длина интервала отрицательности равна $1+(\beta+1)/(\alpha-\beta-1)$ и, в силу неравенства (3), больше единицы.

Если σ_0 выбрано так, что

$$\sigma_0 < \frac{1}{2}\min\Big\{1, \alpha-1, \frac{1+\beta}{\alpha-\beta-1}\Big\}, \tag{14}$$

а $q_1 > 0$ и $q_2 \geq (\alpha-1-\beta)(1+\sigma_0)$, то множество начальных функций, определенное формулой (9), переходит вдоль траекторий уравнения (8) за период T_0 в себя. Отметим, что каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием из (9) при всех $t \geq \sigma_0$ совпадает с одной и той же T_0-периодической функцией (см. рис. 1)

$$x_0(t) = \begin{cases} (\alpha-1)t & \text{при } t \in [0,1], \\ \alpha - t & \text{при } t \in [1,\alpha], \\ -(1+\beta)(t-\alpha) & \text{при } t \in [\alpha, \alpha+1], \\ -1-\beta+(\alpha-\beta-1)(t-\alpha-1) & \text{при } t \in [\alpha+1, T_0]. \end{cases} \tag{15}$$

Функция $x_0(t)$ определяет главную часть асимптотики релаксационного предельного цикла уравнения (1), а величина T_0 — главную часть периода этого цикла. В частности, выполнено утверждение.

Теорема 1. *Пусть для правых частей уравнения* (1) *выполнено предположение* (2) *и неравенство* (3), *тогда для всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *уравнение* (6) *имеет единственный экспоненциально устойчивый цикл* $x_*(t,\varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0,\varepsilon) \equiv -\sigma_0(\alpha-\beta-1)$, *где для* σ_0 *выполнено неравенство* (14), *с периодом* $T_*(\varepsilon)$, *удовлетворяющий следующим предельным соотношениям:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\max_t |x_*(t,\varepsilon) - x_0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} T_*(\varepsilon) = T_0. \tag{16}$$

Доказательство приведенной теоремы распадается на две части: сначала доказывается существование периодического решения уравнения (6). С этой целью для любой начальной функции $\varphi(t)$ из множества $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ строится приближенно решение $x_\varphi(t,\varepsilon)$ и доказывается существование T_φ, являющегося вторым положительным корнем уравнения $x_\varphi(t,\varepsilon) = 0$ таким, что $x_\varphi(T_\varphi + t, \varepsilon)$ снова принадлежит $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. На втором этапе доказательства задается оператор $\Pi_\varepsilon : S(\sigma_0, q_1, q_2) \to C[-1-\sigma_0, -\sigma_0]$ по формулам

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(T_\varphi + t, \varepsilon), \quad -1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0, \tag{17}$$

тогда существование периодического решения (6) эквивалентно существованию неподвижной точки данного оператора. Для обоснования устойчивости данного решения доказывается сжимаемость оператора Π_ε. С этой целью приближенно вычисляется уравнение в вариациях вдоль решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$.

1.2. Существование периодического решения. Перейдем к построению асимптотических формул для решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$. Будем считать, что начальная функция $\varphi(t)$ лежит в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, то есть для нее при $-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0$ выполнены соотношения

$$-q_2 \le \varphi(t) \le -q_1, \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0(\alpha - 1 - \beta). \tag{18}$$

На первом шаге построения решения рассмотрим промежуток $-\sigma_0 \le t \le \sigma_0$. В этой ситуации второе слагаемое функции правой части (6) принимает вид

$$f_1\Big(\exp\Big(\frac{x(t-1)}{\varepsilon}\Big)\Big) = f_1\Big(\exp\Big(\frac{\varphi(t-1)}{\varepsilon}\Big)\Big),$$

учитывая неравенства (18) и условия (2), имеем равномерно по $t \in [-1-\sigma_0, -\sigma_0]$ и $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$f_1\Big(\exp\Big(\frac{\varphi(t-1)}{\varepsilon}\Big)\Big) = 1 + O\Big(\exp\Big(-\frac{q_2}{\varepsilon}\Big)\Big), \tag{19}$$

таким образом на промежутке $[-\sigma_0, \sigma_0]$ решение задачи (6) может быть приближено решением начальной задачи Коши

$$x' = \alpha - 1 - \beta f_2\Big(\exp\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big), \quad x\big|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0(\alpha - 1 - \beta), \tag{20}$$

причем погрешность приближения имеет экспоненциальный порядок малости равномерно по φ и t.

Выполним в (20) замены $t = \varepsilon\tau$, $x = \varepsilon v$, тогда вместо (20) получаем

$$\frac{dv}{d\tau} = \alpha - 1 - \beta f_2\big(e^v\big). \tag{21}$$

Решение уравнения (21) может быть записано в виде

$$v - \int\limits_{-\infty}^{v} \frac{\beta(1 - f_2(e^s))}{\alpha - 1 - \beta f_2(e^s)} ds = (\alpha - 1 - \beta)\tau. \tag{22}$$

Рассмотрим предельные свойства интеграла (22) при $\tau \to \pm\infty$.

Пусть сначала $\tau \to -\infty$, тогда, из представления (22) имеем

$$v(\tau) = (\alpha - 1 - \beta)\tau + O\big(\exp{(\alpha - 1 - \beta)\tau}\big). \tag{23}$$

В случае, если $\tau \to \infty$ асимптотика решения несколько сложнее, она определяется следующим утверждением.

Лемма 1. *Пусть $\tau \to \infty$, тогда для решения* (22) *имеем асимптотическую формулу*

$$v(\tau) = (\alpha - 1)\tau + c_0 + O\big(\exp{(-(\alpha - 1)\tau)}\big), \tag{24}$$

где

$$c_0 = \frac{(\alpha-1)\beta}{\alpha-1-\beta}\int\limits_0^1 \frac{1-f_2(u)}{(\alpha-1-\beta f_2(u))u}\,du - \beta\int\limits_1^\infty \frac{f_2(u)}{(\alpha-1-\beta f_2(u))u}\,du. \tag{25}$$

Для доказательства подставим в формулу (22) замену

$$v(\tau) = (\alpha - 1)\tau + c_0 + v_*(\tau)$$

и разобьем интегральное слагаемое на две части так, что

$$c_0 + \beta\tau + v_*(\tau) - \beta\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1-f_2(e^s)}{\alpha-1-\beta f_2(e^s)}ds - \beta\int\limits_0^{(\alpha-1)\tau+c_0+v_*(\tau)} \frac{1-f_2(e^s)}{\alpha-1-\beta f_2(e^s)}ds = 0. \tag{26}$$

Первый из полученных интегралов обозначим $I_1 = \beta\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1-f_2(e^s)}{\alpha-1-\beta f_2(e^s)}ds$, а второй разобьем на три части вида

$$\beta\int\limits_0^\infty \frac{f_2(e^s)}{\alpha-1-\beta f_2(e^s)}\,ds - \beta\int\limits_{(\alpha-1)\tau+c_0+v_*(\tau)}^{\infty} \frac{f_2(e^s)}{\alpha-1-\beta f_2(e^s)}\,ds - \\ -\beta\int\limits_0^{(\alpha-1)\tau+c_0+v_*(\tau)} \frac{ds}{\alpha-1-\beta f_2(e^s)}\,. \tag{27}$$

В свою очередь в формуле (27) первый из интегралов обозначим I_2, второй в предположении, что c_0 — некоторая константа, а $v_*(\tau)$ ограничено при $\tau \to +\infty$, оценивается как $O\big(\exp{(-(\alpha-1)\tau)}\big)$, наконец, в третьем интеграле можно выполнить замену $s = v(\theta)$, где $v(\theta)$ — функция, задаваемая соотношением (22). После указанной замены последний из интегралов в формуле (27) преобразуется к виду

$$-\beta\int\limits_0^{(\alpha-1)\tau+c_0+v_*(\tau)} \frac{ds}{\alpha-1-\beta f_2(e^s)} = -\beta\int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = -\beta(\theta_1 - \theta_0), \tag{28}$$

где θ_0, θ_1 определяются из условий $v(\theta_0) = 0$, $v(\theta_1) = (\alpha - 1)\tau + c_0 + v_*(\tau)$. Из второго условия, очевидно, заключаем, что $\theta_1 = \tau$, а из первого с учетом (22) имеем

$$\theta_0 = -\frac{1}{\alpha - 1 - \beta} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\beta(1 - f_2(e^s))}{\alpha - 1 - \beta f_2(e^s)}\, ds. \tag{29}$$

Принимая во внимание введенные выше обозначения, из равенства (26) имеем

$$c_0 + \beta\tau + v_*(\tau) - I_1 + I_2 + O\Big(\exp\left(-(\alpha-1)\tau\right)\Big) - \beta\Big(\tau + \frac{1}{\alpha - 1 - \beta} I_1\Big) = 0,$$

откуда получаем

$$c_0 = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha - 1 - \beta}\, I_1 - I_2 \tag{30}$$

и $v_*(\tau) = O\Big(\exp\left(-(\alpha-1)\tau\right)\Big)$. Формула (25) для константы c_0 может быть получена из (30) путем замены $e^s = u$ в интегралах I_1, I_2. Лемма полностью доказана.

Лемма 1 позволяет записать равномерную оценку решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$ на промежутке $[-\sigma_0, \sigma_0]$

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \varepsilon v\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big) + r(t,\varepsilon). \tag{31}$$

Здесь $r(t,\varepsilon)$ обозначена функция, которая на данном интервале равномерно по φ и t ограничена величиной, имеющей порядок $O\Big(\exp(-a/\varepsilon)\Big)$, где a — некоторая константа. Будем и далее обозначать экспоненциально малые остатки в оценках решения $r(t,\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь промежуток изменения времени $\sigma_0 \le t \le 1 - \sigma_0$. На нем для функции f_1 правой части уравнения (6) по-прежнему выполнены неравенства (19), а аргумент функции $f_2\Big(\exp(x/\varepsilon)\Big)$ экспоненциально велик в силу оценки (31) и представления (24) для $x_\varphi(t,\varepsilon)$. Таким образом, учитывая второе равенство условий (2), заключаем, что на данном шаге уравнение (6) записывается в виде

$$x' = -1 + \alpha + r(t,\varepsilon) \tag{32}$$

с начальным условием

$$x\Big|_{t=\sigma_0} = (\alpha - 1)\sigma_0 + \varepsilon c_0 + O\Big(\exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big)\Big), \tag{33}$$

вытекающим из представления (31) и леммы 1. Уравнение (32) с начальными условиями (33) дает при $\sigma_0 \le t \le 1 - \sigma_0$ приближенное решение

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = (\alpha - 1)t + \varepsilon c_0 + r(t,\varepsilon). \tag{34}$$

Перейдем к следующему промежутку изменения $t \in [1 - \sigma_0, 1 + \sigma_0]$, особенность которого состоит в том, что он содержит точку переключения релейной системы (8). На этом промежутке остается в силе экспоненциальная оценка для $f_2\Big(\exp(x/\varepsilon)\Big) < \exp(-a/\varepsilon)$, и это слагаемое может быть опущено, функция $x(t-1)$, в свою очередь, вычисляется на данном промежутке по формулам (31). В связи с этим удобно сделать замены

$$t - 1 = \varepsilon\tau, \quad x(t-1) = \varepsilon v(\tau), \tag{35}$$

тогда уравнение (6) на данном шаге запишется в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon\left(-1 + \alpha f_1\left(e^{v}\right)\right) \tag{36}$$

с начальными условиями

$$x\Big|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = (\alpha-1)(1-\sigma_0) + \varepsilon c_0 + r(1-\sigma_0,\varepsilon). \tag{37}$$

Интегрируя (36) с учетом (37), получаем

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \alpha - 1 + \varepsilon\Big[(\alpha-1)\tau + c_0 + \alpha\int\limits_{-\infty}^{\tau}\Big(f_1\big(\exp(v(s))\big) - 1\Big)\,ds\Big] + r(t,\varepsilon). \tag{38}$$

Для продолжения процесса пошаговой оценки решения найдем по формуле (38) значение функции $x_\varphi(t,\varepsilon)$ в граничной точке $t = 1+\sigma_0$. Из (38) получаем

$$x(t,\varepsilon)\Big|_{t=1+\sigma_0} = \alpha - 1 + (\alpha-1)\sigma_0 + \varepsilon c_0 + \\ + \varepsilon\alpha\int\limits_{-\infty}^{\sigma_0/\varepsilon}\Big(f_1\big(\exp(v(s))\big) - 1\Big)\,ds + O\Big(\exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big)\Big). \tag{39}$$

Для оценки интеграла в формуле (39) разобьем его на четыре части следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\sigma_0/\varepsilon}\Big(f_1\big(\exp(v(s))\big) - 1\Big)\,ds = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon} + \int\limits_{-\infty}^{0}\Big(f_1\big(\exp(v(s))\big) - 1\Big)\,ds + \\ + \int\limits_{0}^{\infty} f_1\big(\exp(v(s))\big)\,ds - \int\limits_{\sigma_0/\varepsilon}^{\infty} f_1\big(\exp(v(s))\big)\,ds. \tag{40}$$

Последнее слагаемое в равенстве (40), очевидно, мало и имеет экспоненциальную оценку. Для упрощения второго и третьего слагаемых (40) выполним в них замену $\exp\big(v(s)\big) = u$, в результате с учетом (21), (22) получим

$$x(1+\sigma_0,\varepsilon) = \alpha - 1 - \sigma_0 + \varepsilon c_1 + O\Big(\exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big)\Big), \tag{41}$$

где

$$c_1 = c_0 - \alpha\int\limits_{0}^{\exp(v_0)}\frac{1-f_1(u)}{(\alpha-1-\beta f_2(u))u}\,du + \alpha\int\limits_{\exp(v_0)}^{\infty}\frac{f_1(u)}{(\alpha-1-\beta f_2(u))u}\,du. \tag{42}$$

В формуле (42) v_0 обозначено значение функции $v(\tau)$ из формулы (22) в точке ноль.

Четвертый шаг выполнения алгоритма связан с построением решения на промежутке $1+\sigma_0 \le t \le \min\{2+\sigma_0, \alpha-\sigma_0\}$.

Функция $x_\varphi(t,\varepsilon)$ вычисляется в этом случае либо по формуле (34) для $t \in [1+\sigma_0, 2-\sigma_0]$, либо по формуле (38) при $t \in [2-\sigma_0, 2+\sigma_0]$. Как в том, так и в другом случаях решение $x_\varphi(t,\varepsilon)$ положительно и отделено от нуля так, что

$$\Big|f_1\Big(\exp\Big(\frac{x_\varphi(t-1,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big| < \exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big). \tag{43}$$

В начальной точке рассматриваемого промежутка выполнено равенство (41) и, следовательно, имеет место оценка

$$\Big|f_2\Big(\exp\Big(\frac{x_\varphi(1+\sigma_0,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big| < \exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big), \tag{44}$$

в связи с чем, до тех пор пока $x_\varphi(t,\varepsilon)$ не приблизилось к нулю, уравнение (6) может быть записано в виде

$$x' = -1 + r(t,\varepsilon). \tag{45}$$

Решая его с начальным условием (41), получаем

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \alpha - t + \varepsilon c_1 + r(t,\varepsilon). \tag{46}$$

В случае, если $\alpha-\sigma_0 > 2+\sigma_0$, будем интегрировать (45) вплоть до $t=\alpha-\sigma_0$ шагами. Учитывая вид решения (46), это можно сделать, сохраняя выполненными оценки (43) и (44).

Переходим к следующему шагу, который включает точку переключения релейной функции в правой части (8). Пусть $t \in [\alpha-\sigma_0, \alpha+\sigma_0]$, тогда функция $x_\varphi(t-1,\varepsilon)$ вычисляется по формуле (38), положительна и отделена от нуля, в связи с этим величина $f_1\big(\exp(x_\varphi(t-1,\varepsilon)/\varepsilon)\big)$ экспоненциально мала и задача (6) записывается на данном шаге в виде

$$x' = -1 - \beta f_2\Big(\exp\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) + r(t,\varepsilon). \tag{47}$$

Отбросим в (47) малую добавку $r(t,\varepsilon)$ и выполним замену

$$t-\alpha = \varepsilon\tau, \quad x = \varepsilon w, \tag{48}$$

уравнение (47) перепишется в этом случае в виде

$$\frac{dw}{d\tau} = -1 - \beta f_2\big(e^w\big). \tag{49}$$

Интегральное представление решения данного уравнения

$$w + \int\limits_w^\infty \frac{\beta f_2(e^s)}{1+\beta f_2(e^s)}ds = -\tau + c_1 \tag{50}$$

обладает при $\tau \to \pm\infty$ необходимыми свойствами, позволяющими «сшить» его с решением на предыдущем и последующем шагах.

Для предельных значений τ выполнено следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\tau \to -\infty$, тогда выполнено асимптотическое представление*

$$w(\tau) = -\tau + c_1 + O\big(\exp \beta\tau\big). \tag{51}$$

Если же $\tau \to +\infty$, то для решения (50) *имеет место асимптотическая формула*

$$w(\tau) = -(\beta+1)\tau + c_2 + O\big(\exp\left(-(\beta+1)\tau\right)\big), \tag{52}$$

где для c_2 выполнено

$$c_2 = (\beta+1)\left[c_1 + \frac{\beta}{1+\beta}\int\limits_0^1 \frac{1-f_2(u)}{(1+\beta f_2(u))u}\,du - \beta\int\limits_1^\infty \frac{f_2(u)}{(1+\beta f_2(u))u}\,du\right], \tag{53}$$

а c_1 определяется формулой (53).

Вычисление константы c_2 и доказательство леммы 2 выполняется аналогично соответствующему доказательству леммы 1. Приближенное решение уравнения (6) с равномерной оценкой погрешности имеет на данном шаге вид

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = \varepsilon w\Big(\frac{t-\alpha}{\varepsilon}\Big) + r(t,\varepsilon). \tag{54}$$

На шестом шаге уравнение (6) решается на промежутке $\alpha+\sigma_0 \le t \le \alpha+1-\sigma_0$. Здесь $f_1\big(\exp(x_\varphi(t-1,\varepsilon)/\varepsilon)\big)$ по-прежнему мало, а значение $x_\varphi(t,\varepsilon)$ в точке $\alpha+\sigma_0$ отрицательно и отделено от нуля при малых ε. В связи с этим на данном шаге решается уравнение

$$x' = -1-\beta + r(t,\varepsilon). \tag{55}$$

Начальное условие для уравнения (55) определяется представлением решения (54) и предельной формулой (52) из леммы 2

$$x\Big|_{t=\alpha+\sigma_0} = -(\beta+1)\sigma_0 + \varepsilon c_2 + O\Big(\exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big)\Big). \tag{56}$$

Интегрирование (55), (56) дает оценку решения на данном промежутке

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = -(1+\beta)(t-\alpha) + \varepsilon c_2 + r(t,\varepsilon). \tag{57}$$

Седьмой шаг интегрирования уравнения (6) выполняется вблизи точки изменения знака производной решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$. Уравнение (6) на данном шаге записывается в виде

$$x' = -1-\beta + \alpha f_1\Big(\exp\Big(\frac{x(t-1)}{\varepsilon}\Big)\Big) + r(t,\varepsilon),$$

а $x(t-1)$ вычисляется по формуле (54). После замены переменных

$$t-\alpha-1 = \varepsilon\tau, \quad x(t-1,\varepsilon) = \varepsilon w(\tau) \tag{58}$$

и отбрасывания экспоненциально малого остатка приходим к уравнению

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon\Big(-1-\beta+\alpha f_1\big(\exp(w(\tau))\big)\Big) \tag{59}$$

с начальным условием

$$x\Big|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon} = -(\beta+1)(1-\sigma_0) + \varepsilon c_2 + r(\alpha+1-\sigma_0,\varepsilon). \tag{60}$$

Решение $x_\varphi(t,\varepsilon)$ на данном шаге записывается в виде

$$x_\varphi(t,\varepsilon) = -1-\beta+\varepsilon\Big[-(\beta+1)\tau + c_2 + \alpha\int\limits_{-\infty}^{\tau} f_1\big(\exp(w(s))\big)\,ds\Big] + r(t,\varepsilon). \tag{61}$$

Для перехода к следующему шагу найдем приближенное значение решения в точке $t=\alpha+1+\sigma_0$. Имеем

$$x_\varphi(\alpha+1+\sigma_0,\varepsilon) = -(1+\beta)(\sigma_0+1)+\varepsilon c_2+\varepsilon\alpha\int\limits_{-\infty}^{\sigma_0/\varepsilon} f_1\big(\exp(w(s))\big)\,ds + O\Big(\exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big)\Big). \tag{62}$$

Интеграл в правой части (62) преобразуем по аналогии интегралом (40) из шага три. Представим интеграл из (62) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\sigma_0/\varepsilon} f_1\big(\exp(w(s))\big)\,ds = \int\limits_{-\infty}^{0} f_1\big(\exp(w(s))\big)\,ds - \\ -\int\limits_{0}^{\infty}\Big(1-f_1\big(\exp(w(s))\big)\Big)\,ds + \int\limits_{\sigma_0/\varepsilon}^{\infty}\Big(1-f_1\big(\exp(w(s))\big)\Big)\,ds + \frac{\sigma_0}{\varepsilon}. \tag{63}$$

Среди слагаемых правой части (63) третье слагаемое экспоненциально мало, а в первом и втором интеграле следует выполнить замену $u=\exp(w(s))$, где $w(s)$, напомним, — функция, определяемая равенством (50). После данных замен приходим к представлению

$$x(\alpha+1+\sigma_0,\varepsilon) = -1-\beta+(\alpha-\beta-1)\sigma_0+\varepsilon c_3 + O\Big(\exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big)\Big), \tag{64}$$

где

$$c_3 = c_2 + \alpha\int\limits_{\exp(w_0)}^{\infty}\frac{f_1(u)}{(1+\beta f_2(u))u}\,du - \alpha\int\limits_{0}^{\exp(w_0)}\frac{1-f_1(u)}{(1+\beta f_2(u))u}\,du. \tag{65}$$

Здесь $w(0)$ обозначено w_0.

Перейдем теперь к последнему шагу для вычисления решения $x_\varphi(t,\varepsilon)$. Пусть $\alpha+1+\sigma_0 \le t \le \min\{\alpha+2+\sigma_0, T_0-\sigma_0\}$. В данном случае в силу формулы (57)

$$f_1\Big(\exp\Big(\frac{x(t-1)}{\varepsilon}\Big)\Big) = 1 + O\Big(\exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big)\Big), \tag{66}$$

кроме того, в соответствии с условием (64) в точке $t=\alpha+1+\sigma_0$

$$f_2\Big(\exp\Big(\frac{x(\alpha+1+\sigma_0)}{\varepsilon}\Big)\Big) = 1 + O\Big(\exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big)\Big), \tag{67}$$

тем самым, необходимо решить уравнение

$$x' = -1 + \alpha - \beta + r(t, \varepsilon) \tag{68}$$

с начальным условием (64). Нетрудно видеть, что функция

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -1 - \beta + (\alpha - 1 - \beta)(t - \alpha - 1) + \varepsilon c_3 + r(t, \varepsilon) \tag{69}$$

дает необходимую асимптотику решения, равномерную по φ и ε. Отметим, что в случае $\alpha + 2 + \sigma_0 < T_0 - \sigma_0$ формула (69) остается пригодной вплоть до $t = T_0 - \sigma_0$, в этом можно убедиться интегрируя уравнение (6) шагами длины единица. На каждом из шагов будут выполняться соотношения, аналогичные (66), (67), а следовательно, сохранится и асимптотика решения (69).

Формула (69) позволяет найти точку $t = T_\varphi(\varepsilon) - \sigma_0$, в которой выполнено равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = -(\alpha - 1 - \beta)\sigma_0. \tag{70}$$

Применяя формулу (69), получаем асимптотику

$$T_\varphi(\varepsilon) = T_0 - \varepsilon \frac{c_3}{\alpha - \beta - 1} + O\Big(\exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big)\Big). \tag{71}$$

Суммируя результаты выполненного в данном пункте анализа, заключаем, что корень $T_\varphi(\varepsilon)$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -(\alpha - 1 - \beta)\sigma_0$ определяется однозначно, а формула (71) дает равномерную по φ и по ε асимптотику. Далее, объединяя все полученные выше асимптотические представления для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$. (см. (31), (34), (38), (46), (54), (57), (61),(69)), приходим к выводу, что

$$\max_{-\sigma_0 \le t \le T_0 - \sigma_0} \big| x_\varphi(t, \varepsilon) - x_0(t) \big| = O(\varepsilon), \tag{72}$$

где $x_0(t)$ — функция (15), а остаток равномерен по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Формулы (71), (72) свидетельствуют о том, что оператор (17) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, кроме того, равномерно по φ

$$\max_{-1 - \sigma_0 \le t \le -\sigma_0} \big| x_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon), \varepsilon) - x_0(t) \big| = O(\varepsilon). \tag{73}$$

Что же касается требуемого включения $\Pi_\varepsilon S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2)$, то в силу (73) оно будет заведомо выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_0(t) \in \widetilde{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \tag{74}$$

где $\widetilde{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ — множество функций, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (9) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что на параметр σ_0 нами уже наложено ограничение (14), обеспечивающее свойства $x_0(\sigma_0) = -(\alpha - \beta - 1)\sigma_0$ и $x_0(t) < 0$ при $-1 - \sigma_0 \le t \le -\sigma_0$. Поэтому справедливости включения (74) добиваемся за счет параметров q_1, q_2, предполагая, что

$$0 < q_1 < -\max_{-1 - \sigma_0 \le t \le -\sigma_0} x_0(t), \quad q_2 > -\min_{-1 - \sigma_0 \le t \le -\sigma_0} x_0(t). \tag{75}$$

Из приведенных рассуждений следует, что при выполнении условий (14), (75) на параметры σ_0, q_1, q_2 оператор Π_ε, являющийся очевидным образом компактным, преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Отсюда в соответствии с принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Нетрудно видеть, что решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (6) с начальной функцией $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \le t \le -\sigma_0$ оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi\Big|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (71)–(73) удовлетворяет требуемым свойствам (16).

1.3. Устойчивость периодического решения. Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 1, т. е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t, \varepsilon)$ с нулевым приближением (15). Из явной формулы (17) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ, а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством (см. [11])

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) g_0 = g(t + T_\varphi, \varepsilon) - \frac{g(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{x'_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)} x'_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \le t \le -\sigma_0, \tag{76}$$

где функция $g_0(t)$ — произвольный элемент пространства

$$C_0 = \big\{ g_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0],\ g_0(-\sigma_0) = 0 \big\},$$

а через $g(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \le t \le T_\varphi - \sigma_0$ обозначено решение линейного уравнения

$$g' = \alpha A_1(t - 1, \varepsilon) g(t - 1) - \beta A_2(t, \varepsilon) g, \tag{77}$$

с начальной функцией $g_0(t)$, $-1 - \sigma_0 \le t \le -\sigma_0$, причем

$$A_j(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} f'_j\Big(\exp\big(x\big) \Big) \cdot \exp\big(x\big) \Big|_{x = x_\varphi(t, \varepsilon)/\varepsilon}, \quad j = 1, 2. \tag{78}$$

Из соотношения (76) следует, что проблема оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ в пространстве C_0 с нормой $\|g_0\| = \max\limits_{-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0} |g_0(t)|$ сводится к анализу введенного выше решения $g(t, \varepsilon)$ уравнения (77). Покажем, что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \le t \le T_\varphi - \sigma_0} |g(t, \varepsilon)| \le M \exp(-a/\varepsilon) \|g_0\| \tag{79}$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от ε, φ, g_0) постоянными M, $a > 0$.

Рассмотрим сначала отрезок $-\sigma_0 \le t \le 1 - \sigma_0$, на котором из (77) для $g(t, \varepsilon)$ имеем явную формулу

$$g(t, \varepsilon) = \alpha \int\limits_{-\sigma_0}^{t} \exp\Big(-\beta \int\limits_{s}^{t} A_2(\tau, \varepsilon)\, d\tau \Big) \cdot A_1(s - 1, \varepsilon) g_0(s - 1)\, ds,\ -\sigma_0 \le t \le 1 - \sigma_0. \tag{80}$$

Для рассматриваемого отрезка изменения t решение $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ совпадает с функцией $\varphi(t - 1)$, удовлетворяющей условиям (18), кроме того, для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ выполнена асимптотическая формула (31). Отсюда и из свойств (2) функций $f_1(u)$, $f_2(u)$, в свою очередь, следует, что фигурирующие в (77) коэффициенты $A_1(t,\varepsilon)$, $A_2(t,\varepsilon)$ допускают оценки вида

$$\max_{-\sigma_0\le t\le 1-\sigma_0}|A_1(t-1,\varepsilon)|\le M\exp(-a/\varepsilon),\qquad \max_{-\sigma_0\le t\le 1-\sigma_0}|A_2(t,\varepsilon)|\le M\exp(-a/\varepsilon). \quad (81)$$

Учитывая (81) в (80), убеждаемся, что

$$\max_{-\sigma_0\le t\le 1-\sigma_0}|g(t,\varepsilon)|\le M\exp(-a/\varepsilon)\|g_0\|. \quad (82)$$

Для доказательства оценки (82) на всем промежутке изменения t воспользуемся методом шагов. В этих целях разобьем отрезок $[1-\sigma_0, T_\varphi-\sigma_0]$ на куски $[1-\sigma_0+k, 2-\sigma_0+k]$, $k=0,1,\ldots,k_0$ длины единица и $[2-\sigma_0+k_0, T_\varphi-\sigma_0]$, где $k_0=\lfloor T_\varphi-2\rfloor$, $\lfloor * \rfloor$ — целая часть. Учитывая равномерные по $\varphi\in S(\sigma_0,q_1,q_2)$ асимптотические формулы

$$\max_{-\sigma_0\le t\le T_\varphi-\sigma_0}|A_j(t,\varepsilon)|=O(1/\varepsilon),\quad j=1,2$$

и неравенства

$$\begin{aligned}|g(t,\varepsilon)|\le{}&|g(1-\sigma_0+k,\varepsilon)|+\\ &+\alpha\int\limits_{1-\sigma_0+k}^{t}\exp\Big(-\beta\int\limits_{s}^{t}A_2(\tau)\,d\tau\Big)\cdot|A_1(s-1,\varepsilon)|\cdot|g_0(s-1)|\,ds,\quad t\ge 1-\sigma_0+k,\end{aligned}$$

а также оценки вида (82) на $(k-1)$-м отрезке, получаем требуемую оценку на k-м отрезке изменения t.

Применяя установленное выше неравенство (79) к производной Фреше оператора Π_ε (76), приходим к выводу, что

$$\sup_{\varphi\in S(\sigma_0,q_1,q_2)}\big\|\partial_\varphi\Pi_\varepsilon(\varphi)\big\|_{C_0\to C_0}\le M\exp(-a/\varepsilon). \quad (83)$$

Нетрудно видеть, что оценка (83) обеспечивает сжимаемость оператора Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi=\varphi_*(t,\varepsilon)$ в $S(\sigma_0,q_1,q_2)$). Вместе с тем, согласно (83) спектральный радиус оператора $\partial_\varphi\Pi_\varepsilon(\varphi)$ экспоненциально мал, тем самым, все мультипликаторы μ цикла $x_*(t,\varepsilon)$, являющиеся (за исключением простого единичного) собственными значениями этого оператора, лежат в круге $\big\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|\le M\exp(-a/\varepsilon)\big\}$. Теорема 1 полностью доказана.

В заключение данного пункта отметим, что полученному выше циклу $x_*(t,\varepsilon)$ соответствует релаксационный цикл

$$u_*(t,\lambda)=\exp\big(\lambda\,x_*(t,1/\lambda)\big) \quad (84)$$

исходного уравнения (1), для периода $T_*(\lambda)$ которого справедлива вытекающая из (71) формула

$$T_*(\lambda)=T_0-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{c_3}{\alpha-\beta-1}+O\big(\exp\big(-a\lambda\big)\big). \quad (85)$$

2. Билокальная модель

Формулировка основных результатов. Для асимптотического анализа билокальной модели (4) выполним в ней замены $u_j = \exp\left(\frac{x_j}{\varepsilon}\right)$, $j = 1, 2$, где $\varepsilon = 1/\lambda$

$$\begin{aligned} x_1' &= \varepsilon d\Big(\exp\left(\frac{x_2 - x_1}{\varepsilon}\right) - 1\Big) - 1 + \alpha f_1\Big(\exp\left(\frac{x_1(t-1)}{\varepsilon}\right)\Big) - \beta f_2\Big(\exp\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\Big), \\ x_2' &= \varepsilon d\Big(\exp\left(\frac{x_1 - x_2}{\varepsilon}\right) - 1\Big) - 1 + \alpha f_1\Big(\exp\left(\frac{x_2(t-1)}{\varepsilon}\right)\Big) - \beta f_2\Big(\exp\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\Big). \end{aligned} \tag{86}$$

Система (86) имеет, очевидно, однородный цикл $x_1 \equiv x_2 = x_*(t,\varepsilon)$, где $x_*(t,\varepsilon)$ — релаксационный цикл уравнения (6) из теоремы 1. Представляет интерес задача об устойчивости этого цикла, и, кроме того, проблема существования и устойчивости неоднородных циклов, которые в силу инвариантности (86) относительно замены

$$(x_1, x_2) \to (x_2, x_1). \tag{87}$$

возникают парами. Будем далее предполагать, что

$$\alpha < 2(1+\beta). \tag{88}$$

Условие (88) носит технический характер и причины его введения прояснятся ниже. Кроме того, для удобства дальнейшего асимптотического анализа перейдем в (86) к новым переменным $x_1 = x$ и $(x_2 - x_1)/\varepsilon = y$. В результате система (86) примет вид

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon d(\exp(y) - 1) + F(x, x(t-1), \varepsilon), \\ y' &= d(\exp(-y) - \exp(y)) + G(x, x(t-1), y, y(t-1), \varepsilon), \end{aligned} \tag{89}$$

где функции $F(x,\varepsilon)$ и $G(x,y,\varepsilon)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} F(x,u,\varepsilon) &= -1 + \alpha f_1\Big(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\Big) - \beta f_2\Big(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big), \\ G(x,u,y,v,\varepsilon) &= \frac{\alpha}{\varepsilon}\bigg(f_1\Big(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + v\right)\Big) - \\ &- f_1\Big(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\Big)\bigg) - \frac{\beta}{\varepsilon}\bigg(f_2\Big(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + y\right)\Big) - f_2\Big(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big)\bigg). \end{aligned} \tag{90}$$

Фиксируем постоянную σ_0, подчиненную требованиям (14), и рассмотрим банахово пространство $\mathfrak{F}$ непрерывных при $-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0$ начальных вектор-функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{F}} = \max_j \left(\max_{-1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0} |\varphi_j(t)|\right). \tag{91}$$

Всюду ниже нас будут интересовать решения системы (89) с начальными условиями из множества

$$S = \big\{\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) : \ \varphi_1 \in S_1, \ \varphi_2 \in S_2\big\} \subset \mathfrak{F}. \tag{92}$$

Здесь через S_1 обозначена введенная при доказательстве теоремы 1 совокупность непрерывных функций $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, параметры q_1, q_2 в которой удовлетворяют неравенствам (75), а в качестве S_2 взято произвольное замкнутое и ограниченное подмножество пространства $C[-1-\sigma_0, -\sigma_0]$.

Для формулировки утверждений об устойчивых режимах системы (89) введем ряд дополнительных обозначений. Рассмотрим, в частности, решение $\big(x_\varphi(t,\varepsilon), y_\varphi(t,\varepsilon)\big)$, $t \geq -\sigma_0$ данной системы, отвечающее произвольному начальному условию $\varphi(t) \in S$. Обозначим T_φ второй положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t-\sigma_0,\varepsilon) = -\sigma_0$ и на множестве (92) определим оператор $\Pi_\varepsilon : S \to \mathfrak{F}$ с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = \big(x_\varphi(T_\varphi + t,\varepsilon), y_\varphi(T_\varphi + t,\varepsilon)\big), \quad -1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \tag{93}$$

аналогичного (17). Наряду с (93) введем оператор $\Pi_0 : S \to \mathfrak{F}$, задаваемый формулой

$$\Pi_0(\varphi) = \big(x_0(t), y_0(T_0 + t, z)\big)\big|_{z=\varphi(-\sigma_0)}, \quad -1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \tag{94}$$

Здесь, как и ранее, T_0 — величина (13), а $x_0(t)$ — периодическая функция (15). Что же касается компоненты $y_0(t,z)$, $z \in \mathbb{R}$, то при $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$ она является решением уравнения

$$y' = d(\exp(-y) - \exp(y)) \tag{95}$$

с начальным условием $y(-\sigma_0) = z$ и импульсным воздействием

$$\begin{aligned} &y(+0) = \frac{\alpha-1}{\alpha-1-\beta}\, y(-0), \qquad y(1+0) = y(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha-1}\, y(+0),\\ &y(\alpha+0) = (1+\beta) y(\alpha-0), \quad y(\alpha+1+0) = y(\alpha+1-0) - \alpha y(\alpha+0). \end{aligned} \tag{96}$$

Задача (95), (96) относится к классу систем с импульсным воздействием. Это означает, что в моменты времени $t = 0$, $t = 1$, $t = \alpha$ и $t = \alpha + 1$ ее решение $y_0(t,z)$ претерпевает конечные скачки, которые определяются по правилам (96). Заметим, что в силу неравенств (88), а также дополнительного к (14) требования

$$\sigma_0 < \frac{2\beta + 2 - \alpha}{\alpha - 1 - \beta},$$

функция $y_0(t + T_0, z)$ оказывается непрерывной на отрезке $-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Тем самым, условие (14) гарантирует выполнение требуемого включения $\Pi_0(\varphi) \in \mathfrak{F}$ при любых φ из S.

Завершая описание подготовительной части, рассмотрим производные Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi)$ операторов (93), (94) по переменной φ. Проводя соответствующий подсчет, убеждаемся, что в данном случае эти производные представляют собой линейные операторы, действующие в пространстве

$$\mathfrak{F}_0 = \big\{g_0(t) = \big(g_{1,0}(t), g_{2,0}(t)\big) \in \mathfrak{F} : \ g_{1,0}(-\sigma_0) = 0\big\} \tag{97}$$

с нормой (91), а результаты их применения к произвольному элементу $g_0(t) \in \mathfrak{F}_0$ задаются соответственно равенствами

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) g_0 = {}&\big(g_1(t + T_\varphi,\varepsilon), g_2(t + T_\varphi,\varepsilon)\big) - \\ &- \frac{g_1(T_\varphi - \sigma_0,\varepsilon)}{x'_\varphi(T_\varphi - \sigma_0,\varepsilon)}\big(x'_\varphi(t + T_\varphi,\varepsilon), y'_\varphi(t + T_\varphi,\varepsilon)\big), \quad -1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \end{aligned} \tag{98}$$

$$\partial_\varphi \Pi_0(\varphi) g_0 = \Big(0, \frac{\partial y_0}{\partial z}\Big|_{z=\varphi(-\sigma_0)} g_{2,0}(-\sigma_0)\Big), \quad -1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0. \tag{99}$$

Здесь $g(t,\varepsilon) = \big(g_1(t,\varepsilon), g_2(t,\varepsilon)\big)$, $-\sigma_0 \le t \le T\varphi - \sigma_0$ — решение линейной системы

$$\begin{aligned} g_1' &= a_{11}(t,\varepsilon)g_1 + a_{12}(t,\varepsilon)g_1(t-1) + a_{13}(t,\varepsilon)g_2, \\ g_2' &= a_{21}(t,\varepsilon)g_1 + a_{22}(t,\varepsilon)g_1(t-1) + a_{23}(t,\varepsilon)g_2 + a_{24}(t,\varepsilon)g_2(t-1), \end{aligned} \tag{100}$$

с коэффициентами

$$a_{11} = \frac{\partial F}{\partial x}(x,u,\varepsilon)\Big|_{\substack{x=x_\varphi(t,\varepsilon)\\ u=x_\varphi(t-1,\varepsilon)}}, \ a_{12} = \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,\varepsilon)\Big|_{\substack{x=x_\varphi(t,\varepsilon)\\ u=x_\varphi(t-1,\varepsilon)}}, \ a_{13} = \varepsilon d\exp(y_\varphi(t,\varepsilon)),$$

$$a_{21} = \frac{\partial G}{\partial x}(x,u,y,v,\varepsilon)\Big|_{\substack{x=x_\varphi(t,\varepsilon),\, u=x_\varphi(t-1,\varepsilon)\\ y=y_\varphi(t,\varepsilon),\, v=y_\varphi(t-1,\varepsilon)}}, \ a_{22} = \frac{\partial G}{\partial u}(x,u,y,v,\varepsilon)\Big|_{\substack{x=x_\varphi(t,\varepsilon),\, u=x_\varphi(t-1,\varepsilon)\\ y=y_\varphi(t,\varepsilon),\, v=y_\varphi(t-1,\varepsilon)}},$$

$$a_{23} = \frac{\partial G}{\partial y}(x,u,y,v,\varepsilon)\Big|_{\substack{x=x_\varphi(t,\varepsilon),\, u=x_\varphi(t-1,\varepsilon)\\ y=y_\varphi(t,\varepsilon),\, v=y_\varphi(t-1,\varepsilon)}} - 2d\,\mathrm{ch}(y_\varphi(t,\varepsilon)),$$

$$a_{24} = \frac{\partial G}{\partial v}(x,u,y,v,\varepsilon)\Big|_{\substack{x=x_\varphi(t,\varepsilon),\, u=x_\varphi(t-1,\varepsilon)\\ y=y_\varphi(t,\varepsilon),\, v=y_\varphi(t-1,\varepsilon)}},$$

и начальной функцией $g_0(t)$ из пространства $\mathfrak{F}_0$.

Сформулируем утверждение о связи между операторами (93) и (94).

Теорема 2 (о C^1-сходимости)**.** *Пусть выполнены условия* (3), (14) *и множество* S *выбрано описанным выше способом. Тогда найдется такое достаточно малое* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(S) > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *оператор* Π_ε *определен на* S *и удовлетворяет предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\varphi\in S}\big\|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \Pi_0(\varphi)\big\|_{\mathfrak{F}} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\varphi\in S}\big\|\partial_\varphi\Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi\Pi_0(\varphi)\big\|_{\mathfrak{F}_0\to\mathfrak{F}_0} = 0. \tag{101}$$

Обоснованию теоремы 2 посвящен следующий раздел данной статьи, который будет опубликован позднее. Здесь же остановимся на одном важном следствии из C^1-сходимости, касающемся существования и устойчивости периодических решений системы (89). Заметим, что в силу (95), (96) предельный оператор (94) является надстройкой над соответствующим одномерным отображением

$$z \to \Psi(z) \equiv y_0(t,z)\big|_{t=T_0+0}, \tag{102}$$

где $z = \varphi_2(-\sigma_0)$. Действительно, любой неподвижной точке $z = z_*$ этого отображения соответствует неподвижная точка

$$\varphi_*(t) = \big(\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t)\big) : \ \varphi_1^*(t) = x_0(t), \ \varphi_2^*(t) = y_0(t+T_0, z_*), \quad -1-\sigma_0 \le t \le -\sigma_0 \tag{103}$$

оператора Π_0 (при условии, конечно, что $\varphi_2^*(t)$ принадлежит множеству S_2 из (92)). Последнее же требование не является ограничением, поскольку, как уже говорилось выше, S_2 можно считать произвольным замкнутым и ограниченным подмножеством пространства $C[-1-\sigma_0, -\sigma_0]$.

Выполнено и обратное утверждение: если $\varphi_*(t) = \big(\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t)\big) \in S$ есть неподвижная точка оператора Π_0, то с необходимостью $\varphi_1^*(t) = x_0(t)$, а величина $z_* = \varphi_2^*(-\sigma_0)$ такова, что $\Phi(z_*) = z_*$. Кроме того, в силу (99) спектр линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi)$ состоит из двух точек: собственного значения $\mu = 0$ бесконечной кратности и простого собственного значения $\mu = \Phi'(z_*)$. Суммируя изложенные факты, приходим к выводу, что справедлив следующий результат.

Теорема 3 (о соответствии)**.** *Каждой неподвижной точке $z = z_*$, $|\Phi'(z_*)| \neq 1$ отображения* (102) *соответствует релаксационный цикл системы* (89)*, существующий при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и являющийся экспоненциально орбитально устойчивым (неустойчивым) в случае* $|\Phi'(z_*)| < 1$ (> 1).

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу о существовании релаксационного цикла. В связи с этим обозначим через $\varphi_*(t) \in S$ неподвижную точку оператора (94), отвечающую неподвижной точке $z = z_*$ отображения (102). Рассмотрим, затем, уравнение

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) - \varphi = 0. \tag{104}$$

Предельные равенства (101), а также приведенные чуть выше спектральные свойства оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ позволяют утверждать, что к уравнению (104) в точке $(\varphi, \varepsilon) = (\varphi_*(t), 0)$ пространства $\mathfrak{F} \times \mathbb{R}$ можно применить теорему о неявном отображении по переменной φ. Отсюда следует, что из (104) может быть единственным образом найдена неподвижная точка

$$\varphi = \varphi_*^\varepsilon(t) \in S, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|\varphi_*^\varepsilon(t) - \varphi_*(t)\|_{\mathfrak{F}} = 0$$

оператора (93). Решение $\big(x_\varphi(t,\varepsilon), y_\varphi(t,\varepsilon)\big)|_{\varphi=\varphi_*^\varepsilon}$ системы (89), отвечающее этой неподвижной точке, будет очевидно, периодическим с периодом $T = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*^\varepsilon}$.

Устойчивость найденного периодического решения определяется его мультипликаторами. Из проделанных выше построений следует, что все они (за исключением простого единичного) являются собственными значениями оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*^\varepsilon)$, который в силу соотношения

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\varphi \in S} \big\|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*^\varepsilon) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)\big\|_{\mathfrak{F}_0 \to \mathfrak{F}_0} = 0,$$

вытекающего из (101), имеет одно простое собственное значение, асимптотически близкое к $\Phi'(z_*)$. Остальной спектр данного оператора лежит в круге $\big\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq r_0\big\}$, радиус $r_0 = r_0(\varepsilon)$ которого асимптотически мал по ε. Таким образом, удается показать, что устойчивость или неустойчивость цикла $\varphi_*(t)$ имеет место одновременно с устойчивостью или неустойчивостью грубой неподвижной точки $z = z_*$ отображения (102). Теорема 3 доказана.

Доказанная теорема позволяет свести проблему существования и устойчивости автоволновых решений системы (89) к поиску неподвижных точек одномерного отображения (102). В свою очередь, вопрос о количестве и устойчивости этих неподвижных точек, как и доказательство теоремы 2, решается в следующей части данной статьи, которая будет опубликована позже.

Список литературы

1. *Майоров В. В., Мышкин И. Ю.* Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 11. С. 64–76.

2. *Кащенко С. А., Майоров В. В.* Об одном дифференциально-разностном уравнении, моделирующем импульсную активность нейрона // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 12. С. 13–25.

3. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // ДАН СССР. 1955. Т. 102, № 5. С. 889–891.

4. *Мищенко Е. Ф.* Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21, № 5. С. 627–654.

5. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Доказательство некоторых асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений с малым параметром // ДАН СССР. 1958. Т. 120, № 5. С. 967–969.

6. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23, № 5. С. 643–660.

7. *Понтрягин Л. С.* Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21, № 5. С. 605–626.

8. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 248 с.

9. *Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995. 336 с.

10. *Колесов Ю. С., Колесов А. Ю.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии. М.: Наука, 1993. 125 с. (Тр. МИАН. Т. 199.)

11. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Реле с запаздыванием и его C^1-аппроксимация // Тр. МИАН. 1997. Т. 216. С. 126–153.

Relaxation oscillations of electrically coupled neuron-like systems with delay

Glyzin S. D.

Keywords: relaxation oscillations, spiking neuron, differential-difference equation, bifurcations

The system of diffusion coupled nonlinear differential-difference equations with delay modelling the electrical interaction of pulse neurons is studied. Given the speed of electrical processes in the system is high, the limit system, responsible for relaxation cycles, is constructed. Along with a synchronous cycle the system permits stable asynchronous cycles, which asymptotics are presented.

Сведения об авторе:
Глызин Сергей Дмитриевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей