Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**2** (2007) 40–43

УДК 519.68:[681.5137+612.8.001.57+007.51/52]

О характеристическом наборе коэффициентов черно-белых цифровых изображений, построенных на основе гексагональной решетки

Каплий И. А., Парфенов П. Г.
Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14,
e-mail: wekapl@yandex.ru,

получена 28 мая 2007

Аннотация

Рассмотрены понятия, связанные с вычислением эйлеровой характеристики изображений, построенных на основе гексагональной решетки. Получены необходимые условия того, чтобы шестнадцатимерный вектор с неотрицательными целыми компонентами был характеристическим набором для некоторого изображения.

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с изображениями, построенными на основе гексагональной решетки [1, 2, 3, 4]. В ней приводятся результаты, касающиеся такого рода структур, аналогичные тем, которые получены в работах [5, 6, 7] для изображений, построенных на основе традиционной прямоугольной решетки. Гексагональную решетчатую структуру, представленную на рис. 1, будем интерпретировать как условный экран, составленный из пикселов в форме правильных шестиугольников. Естественным образом изображение на этом экране можно задавать матрицей $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ со значениями элементов либо 0, либо 1, что соответствует белой или черной цветности пиксела.

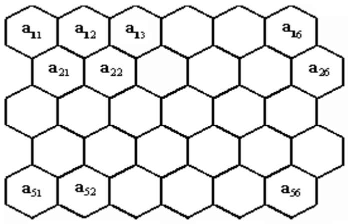

Рис. 1.

Под гексагональным фрагментом S размера 2×2 изображения A будем понимать совокупность четырех примыкающих пикселов $a_{ij}, a_{i+1j}, a_{ij+1}, a_{i+1j+1}$, для нечетных i, а для четных i такая совокупность состоит из пикселов $a_{ij}, a_{ij+1}, a_{i+1j+1}, a_{i+1j+2}$. Символика $S \subseteq A$ означает, что S является фрагментом размера 2×2 изображения A. Всего существует 16 типов такого рода фрагментов, геометрически они представлены на рис. 2.

Под характеристическим набором коэффициентов изображения A, построенным по системе фрагментов $S_k, k = 0, 1, \ldots, 15$, будем понимать шестнадцатимерный вектор $g = \{g_k : k = 0, 1, \ldots, 15\}$, компонентами которого является соответствующее число фрагментов типа S_k содержащихся в изображении A. Этот набор представлен в третьей строке таблицы на рис. 3.

Для изображений, построенных на основе гексагональной решетки, верна [8] теорема о том, что существует функция $F(S)$, определенная на гексагональных фрагментах, такая, что эйлерова характеристика изображения A может быть вычислена по формуле

$$\chi(A) = \sum_{S \subseteq A} F(S). \tag{1}$$

Положим для удобства $F(S_k) = \gamma_k, k = 0, 1, \ldots, 15$, и выпишем соотношение (1) для изображений, порожденных шестнадцатью типами гексагональных фрагментов, тогда получится система:

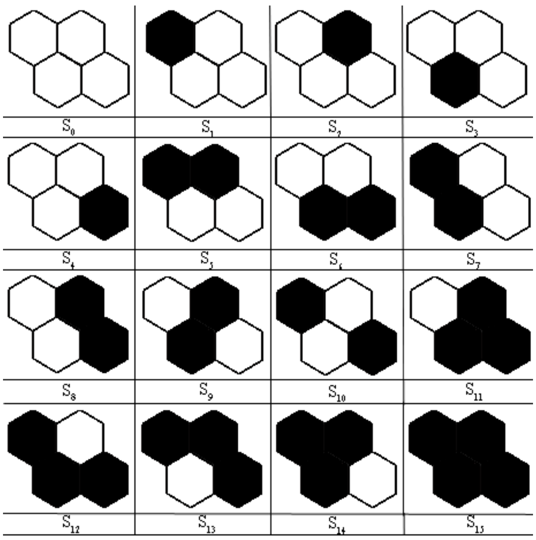

Рис. 2.

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}
0 0	1 0	0 1	0 0	0 0	1 1	0 1	0 0	1 0	1 0	0 1	0 1	1 0	1 1	1 1	1 1
0 0	0 0	0 0	0 1	1 0	0 0	0 1	1 1	1 0	0 1	1 0	1 1	1 1	1 0	0 1	1 1
g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}

Рис. 3.

$$\begin{cases} \gamma_0 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_7 + \gamma_8 = 1 \\ 2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + 2\gamma_4 + \gamma_9 = 1 \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_{10} = 2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + 2\gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_7 + \gamma_{11} = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_8 + \gamma_{12} = 1 \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_{13} = 1 \\ 2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_6 + \gamma_8 + \gamma_{14} = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 + \gamma_8 + \gamma_{15} = 1 \end{cases}$$

Общим решением этой системы будет пятипараметрическое семейство функций $F(S)$:

$$\begin{array}{lll} \gamma_0 = F(S_0) = 0, & \gamma_6 = F(S_6) = -d, & \gamma_{11} = F(S_{11}) = a + b + c - d - e - 1, \\ \gamma_1 = F(S_1) = a, & \gamma_7 = F(S_7) = e, & \gamma_{12} = F(S_{12}) = e - c - d, \\ \gamma_2 = F(S_2) = b, & \gamma_8 = F(S_8) = -e, & \gamma_{13} = F(S_{13}) = d - b - e, \\ \gamma_3 = F(S_3) = c, & \gamma_9 = F(S_9) = b + c - 1, & \gamma_{14} = F(S_{14}) = d + e - a, \\ \gamma_4 = F(S_4) = 1 - a - b - c, & \gamma_{10} = F(S_{10}) = 1 - b - c, & \gamma_{15} = F(S_{15}) = 0, \\ \gamma_5 = F(S_5) = d, & & \end{array}$$

где a, b, c, d, e — произвольные действительные параметры.

Обозначая значения соответствующих пикселов через p_1, p_2, p_3, p_4 (рис. 4) и интерполируя с помощью многочлена значения таблично заданной функции $F(S_k), k = 0, 1, \ldots, 15$, получаем аналогично [6] функцию $F(S)$ в виде полинома

$$F(p_1, p_2, p_3, p_4) = ap_1 + bp_2 + cp_3 + (1 - a - b - c)p_4 + (d - a - b)p_1p_2 + \\ + (e - a - c)p_1p_3 - p_2p_3 + (a + c - e - 1)p_2p_4 + (a + b - d - 1)p_3p_4 + p_1p_2p_3 + p_2p_3p_4.$$

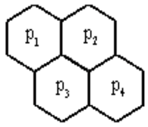

Рис. 4.

Применение соотношения (1) дает возможность строить стандартным способом [6] полиномы, вычисляющие эйлерову характеристику изображений, построенных на основе гексагональной решетки.

Используя полученное пятипараметрическое семейство выражений $\gamma_k = F(S_k), k = 0, 1, \ldots, 15$, можно вывести необходимые условия того, чтобы упорядоченный набор из шестнадцати неотрицательных целых чисел мог быть характеристическим набором для некоторого черно-белого цифрового изображения, построенного на основе гексагональной решетки, а именно верно

Утверждение. *Для любого характеристического набора* $g = \{g_k : k = 0, 1, ...15\}$ *верны соотношения*

1. $g_1 - g_4 + g_{11} - g_{14} = 0$,

2. $g_2 - g_4 + g_9 - g_{10} + g_{11} - g_{13} = 0$,

3. $g_3 - g_4 + g_9 - g_{10} + g_{11} - g_{12} = 0$,

4. $g_5 - g_6 - g_{11} - g_{12} + g_{13} + g_{14} = 0$,

5. $g_7 - g_8 - g_{11} + g_{12} - g_{13} + g_{14} = 0$.

Доказательство. Так как [8]

$$\chi(A) = \sum_{S \subseteq A} F(S) = \sum_{k=0}^{15} g_k \gamma_k =$$

$$= (g_4 - g_9 + g_{10} - g_{11}) + (g_1 - g_4 + g_{11} - g_{14}) * a + (g_2 - g_4 + g_9 - g_{10} + g_{11} - g_{13}) * b +$$
$$+ (g_3 - g_4 + g_9 - g_{10} + g_{11} - g_{12}) * c + (g_5 - g_6 - g_{11} - g_{12} + g_{13} + g_{14}) * d +$$
$$+ (g_7 - g_8 - g_{11} + g_{12} - g_{13} + g_{14}) * e$$

и $\chi(A) = const$, а a, b, c, d, e — произвольные действительные числа, то коэффициенты при этих параметрах равны 0. Отсюда следует Утверждение.

Список литературы

1. *Golay, M.J.E.* Hexagonal pattern transformation / *M.J.E. Golay* // IEEE Trans. Computers. — 1969. — C-18. — 8. — P. 733 – 740.

2. *Прэтт, У.* Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. / *У. Прэтт.* — М.: Мир, 1982. — Кн.2. — 480 с.

3. *Preston, K.* Feature extraction by Golay hexagonal pattern transformation / *K. Preston* // IEEE Trans. Computers. — 1971. — C-20, C.20. — 9. — P. 1007 – 1014.

4. *Farmer, David W.* Groups and Symmetry: A Guide to Discovering Mathematics (Mathematical World, Vol. 5) (Mathematical World) (Paperback) / *David W. Farmer.* — American Mathematical Society, 1996. — 102 p.

5. *Парфенов, П.Г.* Об эйлеровой характеристике изображения / *П.Г. Парфенов* // Архитектура и программное обеспечение вычислительных систем. Ярославль, 1992. — С. 76 – 79.

6. *Парфенов, П.Г.* Многочлены на изображениях, вычисляющие эйлерову характеристику / *П.Г. Парфенов* // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 2002. – Т. 9, № 1. — С. 19 – 20.

7. *Парфенов, П.Г.* О некоторых свойствах характеристического набора коэффициентов черно-белого цифрового изображения / *П.Г. Парфенов* // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 2005. — Т.12, № 1. — С. 52 – 54.

8. *Парфенов, П.Г.* Об эйлеровой характеристике изображения, построенного на основе гексагональной и треугольной решетки / *П.Г. Парфенов, Л.М. Завьялова* // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 1993. — Вып. 2. С. 84 – 91.

On the Characteristic Set of Black and White Digital Image Coefficients Constructed in the Basis of a Hexagonal Lattice

Kapliy I.A., Parfenov P.G.

The concepts associated with the calculation of Euler's characteristics of images constructed on the basis of hexagonal lattices are considered. The necessary conditions for a sixteen-dimensional vector with non-negative integer components to be a characteristic set of some image are obtained.