*Моделирование и анализ информационных систем.* Т. 23, № 3 (2016), с. 283–290
*Modeling and Analysis of Information Systems.* Vol. 23, No 3 (2016), pp. 283–290



**DOI:** 10.18255/1818-1015-2016-3-283-290

УДК 517.9

# Асимптотический анализ в задаче моделирования процесса переноса газовой примеси в приповерхностном слое атмосферы

**Давыдова М.А., Левашова Н.Т., Захарова С.А.**

*получена 20 мая 2016*

**Аннотация.** Рассматривается модельная краевая задача для стационарного сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия-адвекция, возникающая при описании процессов переноса газовой примеси в экосистеме «лес–болото». Применение метода пограничных функций и асимптотического метода дифференциальных неравенств позволяет построить асимптотику решения погранслойного типа, доказать существование решения с такой асимптотикой и его асимптотическую устойчивость по Ляпунову, как стационарного решения соответствующей параболической задачи с определением локальной области формирования решения погранслойного типа. Последнее имеет определенное прикладное значение, т.к. позволяет выявить решение, описывающее одно из наиболее вероятных состояний экосистемы. В заключительной части работы обсуждаются достаточные условия существования решений с внутренними переходными слоями (контрастных структур).

**Ключевые слова:** уравнения реакция-диффузия-адвекция, контрастные структуры

**Для цитирования:** Давыдова М.А., Левашова Н.Т., Захарова С.А., "Асимптотический анализ в задаче моделирования процесса переноса газовой примеси в приповерхностном слое атмосферы", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 283–290.

**Об авторах:**
Давыдова Марина Александровна, orcid.org/0000-0002-9255-7353, канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: m.davydova@bk.ru

Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: natasha@npanalytica.ru

Захарова Светлана Александровна, студентка, orcid.org/0000-0002-3421-1311
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: sa.zakharova@physics.msu.ru

**Благодарности:**
Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. №16-01-00437.
Построение асимптотического приближения решения и создание фазовых портретов выполнены С.А. Захаровой при поддержке гранта Российского Научного Фонда №14-14-00956.

# 1. Постановка задачи

Стационарное распределение концентрации парниковых газов в экосистеме «лес–болото» в предположении изотропности пространства по одной из горизонтальных координат имеет вид контрастной структуры с локализацией внутреннего переходного слоя в окрестности границы между лесополосой и болотом. Это явилось основанием для применения асимптотической теории контрастных структур к исследованию одномерной модельной краевой задачи для усредненного уравнения переноса газовой примеси

$$\varepsilon^2 u'' - \varepsilon A(x)\, u' = B(u, x, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \varepsilon \in (0, 1), \tag{1}$$

с граничными условиями вида

$$u'(-1, \varepsilon) = u'(1, \varepsilon) = 0. \tag{2}$$

Здесь $u$ – безразмерная концентрация газовой примеси, $A(x)$ – горизонтальная компонента безразмерной скорости ветра. В рамках данной модели функция взаимодействия с растительностью $B(u, x, \varepsilon)$ выбирается в виде

$$B(u, x, \varepsilon) = (u - \varphi_1(x))(u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)),$$

где функции $u = \varphi_i(x)$, $i = 1, 3$ интерпретируются как безразмерные концентрации парниковых газов над лесом и болотом.

# 2. Решение погранслойного типа

Вопрос о существовании контрастных структур в задаче (1)–(2) непосредственно связан с вопросом о существовании решений погранслойного типа в следующей задаче:

$$\varepsilon^2 u'' - \varepsilon A(x)\, u' = (u - \varphi_1(x))(u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)), \quad x \in (-1, 1), \tag{3}$$

$$u'(-1, \varepsilon) = g_1, \quad u(1, \varepsilon) = g_2. \tag{4}$$

Далее будем исследовать решение погранслойного типа задачи (3)–(4), которое близко к решению $u = \varphi_1(x)$ вырожденного уравнения $B(u, x, 0) = 0$ внутри интервала $(-1, 1)$ , а в точках $x = \pm 1$ удовлетворяет граничным условиям (4). Для определённости будем считать, что $g_2 > \varphi_1(1)$ .

Пусть выполнены условия:

(У1) *Функции $A(x)$ и $\varphi_i(x)$ – достаточно гладкие функции в области $x \in [-1, 1]$, $i = 1, 2, 3$*

(У2) *Корни $u = \varphi_i(x)$ вырожденного уравнения таковы, что $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$.*
Порядок гладкости функций $A(x)$ и $\varphi_i(x)$ определяется порядком строящейся асимптотики.

Пусть $(A(1))^2 + 4(\varphi_2(1) - \varphi_1(1))(\varphi_2(1) - \varphi_3(1)) < 0$. Тогда в силу условия (У2) точки покоя $(\varphi_1(1), 0)$ и $(\varphi_3(1), 0)$ на фазовой плоскости $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ присоединенной системы

$$\begin{aligned} &d\widetilde{v}/d\rho_+ = A(1)\widetilde{v} + (\widetilde{u} - \varphi_1(1))(\widetilde{u} - \varphi_2(1))(\widetilde{u} - \varphi_3(1)), \\ &d\widetilde{u}/d\rho_+ = \widetilde{v}, \quad -\infty < \rho_+ < 0 \end{aligned} \tag{5}$$

классифицируются как точки покоя типа седла, а точка $(\varphi_2(1), 0)$ – как фокус.

Для существования решения погранслойного типа задачи (3)–(4) достаточно, чтобы прямая $\widetilde{u} = g_2$ на плоскости $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ пересекала сепаратрису, входящую в седло $(\varphi_1(1), 0)$ при $\rho_+ \to -\infty$ [1]. Соответствующее пересечение обеспечивает следующее условие на значение $g_2$ :

(У3) *Если* $A(1) = \sqrt{\frac{1}{2}}(\varphi_1(1) + \varphi_3(1) - 2\varphi_2(1))$, *то* $\varphi_1(1) < g_2 \leqslant \varphi_3(1)$ ;
*если* $A(1) > \sqrt{\frac{1}{2}}(\varphi_1(1) + \varphi_3(1) - 2\varphi_2(1))$, *то* $g_2 > \varphi_1(1)$;
*если* $A(1) < \sqrt{\frac{1}{2}}(\varphi_1(1) + \varphi_3(1) - 2\varphi_2(1))$, *то* $\varphi_1(1) < g_2 \leqslant \hat{u}$,
*где* $\hat{u}$ *– наибольшее из возможных значений таких, что* $\varphi_1(1) < \hat{u} < \varphi_3(1)$,
$\widetilde{v}(\hat{u}) = 0, \quad \hat{u} \neq \varphi_2(1)$.

В частности, пусть $B = u(u-1)(u-4)$ . Положение сепаратрис в верхней полуплоскости фазовой плоскости $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ при различных значениях коэффициента $A(1)$ представлено на рис. 1–3.

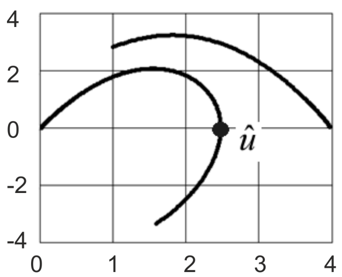


Рис. 1. $A(1) = 1$, $\widehat{u} = 2.5$

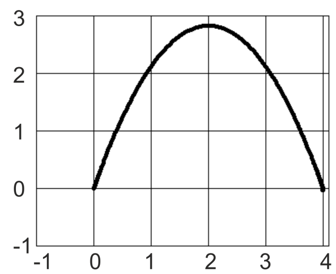


Рис. 2. $A(1) = \sqrt{2}$


Рис. 3. $A(1) = 1.9$

Условие (У3) выполнено, если $0 < g_2 \leq 2.5$ при $A(1) = 1$ , $0 < g_2 \leq 4$ при $A(1) = \sqrt{2}$, и, наконец $g_2 > 0$ при $A(1) = 1.9$ .

В соответствии с методом пограничных функций [2] асимптотику погранслойного решения ищем в виде ряда:

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi u^+(\rho_+, \varepsilon) + \Pi u^-(\rho_-, \varepsilon), \tag{6}$$

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \ldots, \quad \Pi u^\pm(\rho_\pm, \varepsilon) = \Pi u_0^\pm(\rho_\pm) + \varepsilon \Pi u_1^\pm(\rho_\pm) + \ldots,$$

$$\rho_- = (x+1)/\varepsilon, \quad \rho_+ = (x-1)/\varepsilon.$$

В нулевом приближении имеем:

$$\begin{aligned} &d^2\Pi u_0^-/d\rho_-^2 - A\left(-1\right)d\Pi u_0^-/d\rho_- = B\left(\varphi_1\left(-1\right) + \Pi u_0^-, -1, 0\right), \\ &d\Pi u_0^-(0)/d\rho_- = 0, \quad \Pi u_0^-\left(+\infty\right) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$B\left(\varphi_1\left(-1\right) + \Pi u_0^-, -1, 0\right) = \Pi u_0^-\left(\varphi_1\left(-1\right) - \varphi_2\left(-1\right) + \Pi u_0^-\right)\left(\varphi_1\left(-1\right) - \varphi_3\left(-1\right) + \Pi u_0^-\right).$$

Анализируя фазовый портрет системы, которая соответствует уравнению из задачи (7), видим, что задача (7) имеет тривиальное решение: $\Pi u_0^-\left(\rho_-\right) = 0$.

Аналогично получаем задачу для определения функции $\Pi u_0^+\left(\rho_+\right)$:

$$\begin{aligned} &d^2\Pi u_0^+/d\rho_+^2 - A\left(1\right)d\Pi u_0^+/d\rho_+ = B\left(\varphi_1\left(1\right) + \Pi u_0^+, 1, 0\right), \\ &\Pi u_0^+\left(0\right) = g_2 - \varphi_1\left(1\right), \quad \Pi u_0^+\left(-\infty\right) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$B\left(\varphi_1\left(1\right) + \Pi u_0^+, 1, 0\right) = \Pi u_0^+\left(\varphi_1\left(1\right) - \varphi_2\left(1\right) + \Pi u_0^+\right)\left(\varphi_1\left(1\right) - \varphi_3\left(1\right) + \Pi u_0^+\right).$$

Если положить $\widetilde{u}(\rho_+) = \varphi_1\left(1\right) + \Pi u_0^+(\rho_+)$, то уравнению из задачи (8) будет соответствовать система (5). В силу условия (У3) существует решение задачи (8). В качестве решения выбираем монотонно изменяющуюся функцию от значения $g_2 - \varphi_1\left(1\right)$ при $\rho_+ = 0$ до нуля при $\rho_+ \to -\infty$, причем $\left|\Pi u_0^+\left(\rho_+\right)\right| \le Ce^{\chi_0\rho_+}, \quad \chi_0 > 0$.

Константы, значения которых не зависят от $\varepsilon$, здесь и далее будем обозначать буквой $C$.

При $n > 0$ для членов разложения $\Pi u^+\left(\rho_+\right)$ имеем линейные задачи:

$$\begin{aligned} &d^2\Pi u_n^+/d\rho_+^2 - A\left(1\right)d\Pi u_n^+/d\rho_+ - \widetilde{B}_u^+(\rho_+)\Pi u_n^+ = f_n^+\left(\rho_+\right), \quad -\infty < \rho_+ < 0, \\ &\Pi u_n^+\left(0\right) = -\overline{u}_n\left(1\right), \quad \Pi u_n^+\left(-\infty\right) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\widetilde{B}_u^+(\rho_+) = (\widetilde{u} - \varphi_2(1))(\widetilde{u} - \varphi_3(1)) + (\widetilde{u} - \varphi_1(1))(\widetilde{u} - \varphi_3(1)) + (\widetilde{u} - \varphi_1(1))(\widetilde{u} - \varphi_2(1))$ , $f_n^+\left(\rho_+\right)$ – известные функции, причем $\left|f_n^+\left(\rho_+\right)\right| \le Ce^{\overline{\chi}_n^+\rho_+}, \quad \overline{\chi}_n^+ > 0$.

Поскольку решения задач (9) представимы в явном виде

$$\Pi u_n^+\left(\rho_+\right) = -\frac{\overline{u}_n\left(1\right)}{\widetilde{v}\left(0\right)}\widetilde{v}\left(\rho_+\right) - \widetilde{v}\left(\rho_+\right)\int\limits_{\rho_+}^{0} e^{A(1)s}\left(\widetilde{v}\left(s\right)\right)^{-2}ds\int\limits_{-\infty}^{s} e^{-A(1)\eta}\widetilde{v}\left(\eta\right)f_n^+\left(\eta\right)d\eta,$$

то для функций $\Pi u_n^+$ легко получить экспоненциальные оценки:

$$\left|\Pi u_n^+\left(\rho_+\right)\right| \le Ce^{\chi_n^+\rho_+}, \quad \chi_n^+ > 0.$$

При $n > 0$ относительно функций $\Pi u_n^-$ имеем аналогичные задачи

$$\begin{aligned} &d^2\Pi u_n^-/d\rho_-^2 - A\left(-1\right)d\Pi u_n^-/d\rho_- - \overline{B}_u^-\Pi u_n^- = f_n^-\left(\rho_-\right), \quad 0 < \rho_- < +\infty, \\ &d\Pi u_n^-(0)/d\rho_- = -\overline{u}_{n-1}'(-1), \quad \Pi u_n^-\left(+\infty\right) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

решения которых представимы в виде:

$$\Pi u_n^- = \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)} \int\limits_0^{+\infty} e^{(\lambda_1 - A(-1))\xi} f_n^-(\xi) d\xi - \frac{1}{\lambda_1} \overline{u}'_{n-1}(-1) \right) e^{\lambda_1 \rho_-} + \Pi \widetilde{u}_n^-,$$

где $\Pi \widetilde{u}_n^- = -Y_1(\rho_-) \int\limits_0^{\rho_-} e^{-A(-1)\xi} Y_2(\xi) f_n^-(\xi) d\xi + Y_2(\rho_-) \int\limits_{+\infty}^{\rho_-} e^{-A(-1)\xi} Y_1(\xi) f_n^-(\xi) d\xi$ — частное решение неоднородного уравнения из задачи (10), $Y_k(\rho_-) = \frac{e^{\lambda_k \rho_-}}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}}$ — ФСР однородного уравнения, $\lambda_k = \frac{A(-1) \mp \sqrt{A^2(-1) + 4\overline{B}_u^-}}{2}$ , $k = 1, 2$,
$\overline{B}_u^- = (\varphi_1(-1) - \varphi_2(-1))(\varphi_1(-1) - \varphi_3(-1))$, $f_n^-(\rho_-)$ – известные функции.

Справедливы оценки: $|\Pi u_n^-(\rho_-)| \le C e^{\chi_n^- \rho_-}$, $\quad \chi_n^- < 0$.

Доказательство существования решения задачи (3)–(4) с асимптотикой (6) основано на идеях асимптотического метода дифференциальных неравенств (см., напр., [3, 4]). Верхнее $\beta_n(x,\varepsilon)$ и нижнее $\alpha_n(x,\varepsilon)$ решения строятся в виде стандартных модификаций асимптотического разложения (6):

$$\beta_n(x,\varepsilon) = \varphi_1(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \ldots + \varepsilon^n(\bar{u}_n(x) + \gamma) + \Pi u_0^+(\rho_+) + \varepsilon \Pi u_1^+(\rho_+) + \ldots +$$
$$+\varepsilon^n \Pi u_n^+(\rho_+) + \varepsilon^n \Pi_\beta u_n^+(\rho_+) + \varepsilon \Pi u_1^-(\rho_-) + \ldots + \varepsilon^{n+1} \Pi u_{n+1}^-(\rho_-)$$
$$\alpha_n(x,\varepsilon) = \varphi_1(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \ldots + \varepsilon^n(\bar{u}_n(x) - \gamma) + \Pi u_0^+(\rho_+) + \varepsilon \Pi u_1^+(\rho_+) + \ldots +$$
$$+\varepsilon^n \Pi u_n^+(\rho_+) + \varepsilon^n \Pi_\alpha u_n^+(\rho_+) + \varepsilon \Pi u_1^-(\rho_-) + \ldots + \varepsilon^{n+1} \Pi u_{n+1}^-(\rho_-),$$

где $\gamma > 0$ , а функции $\Pi_{\alpha,\beta} u_n^+(\rho_+)$ определяются как решения следующих задач:

$$d^2 \Pi_{\alpha,\beta} u_n^+ / d\rho_+^2 - A(1)\, d\Pi_{\alpha,\beta} u_n^+ / d\rho_+ - \widetilde{B}_u^+(\rho_+) \Pi_{\alpha,\beta} u_n^+ =$$
$$= \mp \gamma \Pi u_0^+ \left( 3\Pi u_0^+ + 4\varphi_1(1) - 2(\varphi_2(1) + \varphi_3(1)) \right) \pm \Psi(\rho_+), -\infty < \rho_+ < 0,$$
$$\Pi_{\alpha,\beta} u_n^+(0) = 0, \Pi_{\alpha,\beta} u_n^+(-\infty) = 0.$$

Здесь $0 < \Psi(\rho_+) \le C_\Psi exp(\overline{\sigma}\rho_+)$, $\overline{\sigma} > 0$ , $C_\Psi > 0$ .

В результате проверки соответствующих дифференциальных неравенств [4] доказывается

**Теорема**. *Пусть выполнены условия (У1)–(У3). Тогда существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (3)–(4) такое что*

$$|u(x,\varepsilon) - U_n(x,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1, 1],$$

*где $U_n(x,\varepsilon)$ – частичная сумма $n$-го порядка асимптотического ряда (6), $C$ – не зависящая от $\varepsilon$ константа.*

Если рассмотреть параболическую задачу, соответствующую задаче (3)–(4), с начальной функцией $u^0(x)$ такой, что $\alpha_1(x,\varepsilon) \le u^0(x) \le \beta_1(x,\varepsilon)$ , то её стационарное решение $u(x,\varepsilon)$ с асимптотикой (6) будет асимптотически устойчивым по Ляпунову, и, следовательно, единственным в указанной области [5]. Это утверждение легко доказать, если применить асимптотический метод дифференциальных неравенств к исследованию вышеупомянутой параболической задачи.

# 3. Контрастные структуры

Сформулируем основные условия существования контрастных структур в задаче (1)–(2).

Пусть $(A(x))^2 + 4B_u(\varphi_2(x), x, 0) < 0$ при $x \in [-1, 1]$ , выполнены условия (У1 ) , (У2) и условие

(У3$^0$) *Существует значение* $x_0 \in (-1, 1)$ *такое, что*

$$A(x_0) = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\varphi_1(x_0) + \varphi_3(x_0) - 2\varphi_2(x_0)\right).$$

При описании контрастных структур существенную роль играет присоединенная система

$$\begin{aligned} d\widetilde{v}/d\xi &= A\left(x\right)\widetilde{v} + \left(\widetilde{u} - \varphi_1\left(x\right)\right)\left(\widetilde{u} - \varphi_2\left(x\right)\right)\left(\widetilde{u} - \varphi_3\left(x\right)\right), \\ d\widetilde{u}/d\xi &= \widetilde{v}, \quad -\infty < \xi < +\infty. \end{aligned} \tag{11}$$

Определим функцию $H\left(x\right) = \widetilde{v}^{+}\left(0, x\right) - \widetilde{v}^{-}\left(0, x\right)$ , $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta = O\left(\varepsilon\right)$, где $\widetilde{v}^{\mp}\left(\xi, x\right)$ – решения системы (11) с условиями $\widetilde{u}^{\mp}\left(\mp\infty, x\right) = \varphi_i\left(x\right)$, $i = 1, 3$, $\widetilde{v}^{\mp}\left(\mp\infty, x\right) = 0$. В силу условия (У3$^0$) при $x = x_0$ на фазовой плоскости системы (11) существует сепаратриса, соединяющая седла $(\varphi_1(x_0), 0)$ и $(\varphi_3(x_0), 0)$. Следовательно, $H\left(x_0\right) = 0$ .

(У4). *Пусть* $H'(x_0) > 0$.

Асимптотическое разложение решения $u(x,\varepsilon)$ типа контрастной структуры получается в результате $C^1$ – сшивания двух асимптотик погранслойного типа в точке $x = \widehat{x}$ :

$$\begin{aligned} u^{-} &= \overline{u}^{-}\left(x,\varepsilon\right) + Qu^{-}\left(\xi,\varepsilon\right) + \Pi u^{-}\left(\rho_{-},\varepsilon\right), x \in [-1, \widehat{x}), \\ u^{+} &= \overline{u}^{+}\left(x,\varepsilon\right) + Qu^{+}\left(\xi,\varepsilon\right) + \Pi u^{+}\left(\rho_{+},\varepsilon\right), x \in (\widehat{x}, 1], \end{aligned} \tag{12}$$

$$\xi = (x - \widehat{x})/\varepsilon,$$

где $\overline{u}^{-}\left(x,\varepsilon\right) = \varphi_1\left(x\right) + \varepsilon\overline{u}_1^{-}\left(x\right) + \ldots, \overline{u}^{+}\left(x,\varepsilon\right) = \varphi_3\left(x\right) + \varepsilon\overline{u}_1^{+}\left(x\right) + \ldots$ – регулярные части разложений, $\Pi u^{\pm}\left(\rho_{\pm},\varepsilon\right) = \Pi u_0^{\pm}\left(\rho_{\pm}\right) + \varepsilon\Pi u_1^{\pm}\left(\rho_{\pm}\right) + \ldots$ – функции, описывающие пограничные слои в окрестности точек $x = \pm 1$ , $Qu^{\pm}\left(\xi,\varepsilon\right) = Qu_0^{\pm}\left(\xi\right) + \varepsilon Qu_1^{\pm}\left(\xi\right) + \ldots$ – функции, описывающие пограничные слои в окрестности точки $x = \hat{x}$, положение которой определяется условием $u\left(\hat{x},\varepsilon\right) = \varphi_2\left(\hat{x}\right)$ , а значение ищется в виде

$$\hat{x} = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots, \tag{13}$$

где в качестве главного члена выбирается значение $x_0$, определяемое условием (У3$^0$).

Построение рядов (12) выполняется в соответствии с п. 2. Коэффициенты $x_i$ ряда (13) определяются из условия гладкого сшивания асимптотик при $x = \widehat{x}(\varepsilon)$ :

$$\begin{gathered}\left(du^+(\hat{x})/dx - du^-(\hat{x})/dx\right) = H\left(\hat{x}\right) + \\ + \varepsilon\left(\varphi_3'\left(\hat{x}\right) - \varphi_1'\left(\hat{x}\right) + dQu_1^+(0,\hat{x})/d\xi - dQu_1^-(0,\hat{x})/d\xi\right) + \ldots\end{gathered} \tag{14}$$

Подставляя ряд (13) в уравнение (14), с учетом явного вида функций $Qu_k^{\pm}$, получаем последовательность разрешимых, в силу условия (У4), уравнений относительно $x_i$, $i > 0$ :

$$H'(x_0)x_i + G_i\left(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\right) = 0,$$

где $G_i\left(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}\right)$ – известные функции.

# Список литературы / References

[1] Давыдова М.А., “Существование и устойчивость решений с пограничными слоями в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция”, *Математические заметки*, **98**:6 (2015), 45–55; English transl.:M. A. Davydova, “Existence and Stability of Solutions with Boundary Layers in Multidimensional Singularly Perturbed Reaction-Diffusion-Advection Problems”, *Math. Notes*, **98**:6 (2015), 853–864.

[2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, М., 1990, 208 с.; [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F, *Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij*, Vysshaja shkola, Moskva, 1990 (in Russian).] 208 pp.

[3] Нефедов Н.Н., “Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных снгулярно возмущенных задач с внутренними слоями”, *Дифференц. уравнения*, **31**:7 (1995), 1132–1139; English transl.: Nefedov N.N., “The method of differential inequalities for some classes of nonlinear singularly perturbed problems with internal layers”, *Differential Equations*, **31**:7 (1995), 1077–1085.

[4] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., “Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями”, *Труды Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова*, **268** (2010), 258–283; English transl.: Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N., “Singularly perturbed problems with boundary and internal layers”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **268** (2010), 258–283.

[5] Pao C.V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press. New York, London, 1992, 777 pp.

**Davydova M.A. , Levashova N.T., Zakharova S.A.**, "The Asymptotical Analysis for the Problem of Modeling the Gas Admixture in the Surface Layer of the Atmosphere", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 283–290.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2016-3-283-290

**Abstract.** In the present work the model boundary value problem for a stationary singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation arising at the description of gas impurity transfer processes in an ecosystem "forest – swamp" is considered. Application of a boundary functions method and an asymptotic method of differential inequalities allow to construct an asymptotics of the boundary layer type solution, to prove the existence of the solution with such an asymptotics and its asymptotic stability by Lyapunov as the stationary solution of the corresponding parabolic problem with the definition of local area of boundary layer type solution formation. The latter has a certain importance for applications, since it allows to reveal the solution describing one of the most probable conditions of the ecosystem. In the final part of the work sufficient conditions for existence of solutions with interior transitional layers (contrast structures) are discussed.

**Keywords:** reaction-diffusion-advection type equations, contrast structures

**On the authors:** Davydova Marina Aleksandrovna, orcid.org/0000-0002-9255-7353, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: m.davydova@bk.ru

Levashova Natalia Timurovna, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: natasha@npanalytica.ru

Zakharova Svetlana Aleksandrovna, orcid.org/0000-0002-3421-1311, student,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia,
e-mail: sa.zakharova@physics.msu.ru

**Acknowledgments:**
This work was supported by Russian fund of basic researches, project 16-01-00473
The building of the asymptotic approach of the solution and the phase portraits creation were made by S.A. Zakharova with support of Russian Science Foundation 14-14-00956.