

УДК 517.928; 517.929

Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона

Глызин С. Д.¹

Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 1 октября 2007

Аннотация

Изучается динамика обобщенного уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями. Проведен локальный анализ потери устойчивости ненулевого состояния равновесия задачи. С учетом полученных асимптотических формул численно проанализированы фазовые перестройки, происходящие с изучаемым уравнением. На плоскости параметров построены бифуркационные кривые, соответствующие основным бифуркациям, происходящим в системе.

1. Постановка задачи

Уравнение Хатчинсона [1]

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{N(t-h)}{k} \right] N, \quad (1)$$

является, как известно, простейшим способом учета возрастной структуры в задаче о динамике популяции особей, борющихся за общую пищу. В уравнении (1) функция $N(t)$ — численность популяции, а положительные параметры r , h и k — соответственно мальтузианский коэффициент линейного роста, возраст половозрелости и средняя численность популяции, обусловленная емкостью среды. С помощью модели (1) были предприняты удачные попытки объяснения различных случаев циклического изменения численности популяции (см., например, [2, 3, 4] и многие другие).

В уравнении (1) учитывается лишь возраст половозрелости h , понятно, однако, что вклад в изменение численности для возрастных групп, перешедших этот возраст, различен. Модель динамики популяции, учитывающая ее возрастную структуру, имеет вид

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^m a_j N(t-h_j) \right] N, \quad (2)$$

где весовые коэффициенты $a_j \geq 0$ определяют вклад возрастной группы, соответствующей запаздыванию $h_j > 0$. Отметим, что $\sum_{j=1}^m a_j = 1$.

Изучение уравнения (2) с большим числом запаздываний представляет с аналитической точки зрения достаточно сложную задачу, поэтому представляется важным изучить ее сначала для $n = 2$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{aN(t-h_1) + bN(t-h_2)}{k} \right] N. \quad (3)$$

Здесь $a, b > 0$ — весовые коэффициенты, определяющие вклад каждой из возрастных групп в воспроизводство популяции. Считаем, что

$$a + b = 1, \quad (4)$$

кроме того, для определенности полагаем $h_1 > h_2$.

Представляет интерес сравнение динамических свойств уравнений (1) и (3).

2. Локальный анализ

Нормируя N на k и делая замену времени $th_1 \rightarrow t$, переходим к соотношению

$$\dot{N} = r [1 - aN(t-1) - bN(t-h)]N, \quad (5)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы „Университеты России“ (грант 04.01.452) и „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект РНП.2.1.1.630).

где rh_1 снова обозначено r , $h = h_2/h_1 < 1$.

Состояниями равновесия уравнения (5) являются так же, как и у уравнения Хатчинсона, $N = 0$ и $N = \frac{1}{a+b}$.

Легко видеть, что первое состояние равновесия неустойчиво. А для исследования устойчивости второго следует изучить расположение корней характеристического квазимногочлена уравнения (5), линеаризованного на $N = \frac{1}{a+b}$

$$\dot{N} = -\frac{r}{a+b}[aN(t-1) + bN(t-h)]. \quad (6)$$

Выражение

$$P(\lambda) \equiv \lambda + r[ae^{-\lambda} + be^{-\lambda h}] \quad (7)$$

дает искомый квазимногочлен.

Полагая $\lambda = i\omega$ и приравняв к нулю вещественные и мнимые части, получаем систему

$$\varphi(\omega) \equiv b \cos \omega h + a \cos \omega = 0, \quad (8)$$

$$r(\omega) \equiv \frac{\omega}{b \sin \omega h + a \sin \omega}. \quad (9)$$

Найдем значения параметров a , r , h , при которых корни квазимногочлена (7) переходят мнимую ось.

Следует отметить, что уравнение (3) описывает не только динамику численности популяции. Оно встречается в других задачах, требующих учета запаздывающего аргумента, при этом соотношение (4) может не выполняться. Нетрудно, однако, видеть, что заменами переменных эти два случая сводятся друг к другу.

2.1. Исследование характеристического квазимногочлена

Пусть в системе (8)-(9)

$$\varphi(\omega_0) = 0, \quad r = r(\omega_0) + \varepsilon, \quad \lambda = \tau(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon),$$

где $\tau(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0$. Положим

$$\text{sign } \tau'_0 = -\text{sign } \varphi'(\omega_0) \left(\tau'_0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \tau(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \right). \quad (10)$$

Далее, пусть $\omega_j, j = 1, 2, \dots$ — положительные корни уравнения (8), занумерованные в порядке возрастания с учетом их кратности. Из (10) следует, что числа $\pm i\omega_j$ в случае нечетных j при увеличении r приходят из левой полуплоскости, а в случае четных — из правой. Кроме того, при любых фиксированных a , h и при достаточно малом r все корни характеристического квазимногочлена (7) лежат слева от мнимой оси.

Следующее утверждение позволяет узнать, сколько пар корней может одновременно находиться на мнимой оси.

Лемма 1. Пусть параметр $h > 0$ достаточно мал, тогда существует счетное число таких значений $a_k(h)$, $r_k(h)$, $k = 1, 2, \dots$, что при $a = a_k(h)$ и $r < r_k(h)$ корни характеристического квазимногочлена (7) лежат в левой комплексной полуплоскости, а при $r = r_k(h)$ две пары корней $\pm i\omega_1(h)$ и $\pm i\omega_2(h)$ выходят на мнимую ось.

Кроме того, имеют место асимптотические формулы

$$a_k(h) = b \left[1 - \frac{\pi^4}{3} (2k+1)^2 (2k+3)^2 h^4 + O(h^5) \right], \quad (11)$$

$$r_k(h) = \frac{1}{2bh} \left[1 + \frac{\pi^2}{3} (4k^2 + 8k + 5) h^2 + O(h^3) \right], \quad (12)$$

$$\omega_{k1}(h) = \pi(2k+1) \left[1 - h + h^2 + \frac{\pi^2(2k+3)^2 - 3}{3} h^3 + O(h^4) \right], \quad (13)$$

$$\omega_{k2}(h) = \pi(2k+3) \left[1 - h + h^2 + \frac{\pi^2(2k+1)^2 - 3}{3} h^3 + O(h^4) \right], \quad (14)$$

где $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Для того, чтобы две пары корней $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$ квазимногочлена (7) оказались на мнимой оси, в соответствии с формулами (8), (9) имеем

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 h + t \cos \omega_1 &= 0, \\ \cos \omega_2 h + t \cos \omega_2 &= 0, \\ br(\omega_1) = \frac{\omega_1}{t \sin \omega_1 + \sin \omega_1 h} &= br(\omega_2) = \frac{\omega_2}{t \sin \omega_2 + \sin \omega_2 h}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $t = a/b$.

Подставляя в (15) асимптотические разложения по h для t , ω_1 и ω_2 и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h , получаем (11), (13), (14). Кроме того, из третьего равенства (15) можно получить разложение (12) для $r(h)$. Отметим, что $\omega_1(h)$ и $\omega_2(h)$ — два соседних нечетных решения уравнения (8) (каждому номеру k соответствуют два решения (8)). Такой выбор корней (8) обусловлен тем, что значение $r_k(h)$ для них минимально. Таким образом, найденные корни квазимногочлена (7) $\pm i\omega_1(h)$ и $\pm i\omega_2(h)$ первыми пересекают мнимую ось, что и доказывает лемму.

Следует отметить, что при $b = 1 - a$ формулы (11), (12) приобретают следующий вид:

$$a_k(h) = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{12}(2k+1)^2(2k+3)^2h^4 + O(h^5), \quad (16)$$

$$r_k(h) = \frac{1}{h} \left[1 + \frac{\pi^2}{3}(4k^2 + 8k + 5)h^2 + O(h^3) \right]. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь условия, при которых вырожденные кривые $a = a_k(h)$ могут прерваться. Выше уже отмечалось, что $\omega_{k1}(h)$ и $\omega_{k2}(h)$ — два соседних нечетных решения уравнения (8). Понятно, что при некоторых значениях h нечетное и четное решения (8) могут совпадать, и $\omega_{k1}(h)$ становится в этом случае кратным корнем. При увеличении h соответствующий корень $\omega_{k1}(h)$ перестает существовать. Таким образом, для определения крайних точек описанных кривых можно воспользоваться системой (15), дополненной уравнением

$$\varphi'(\omega_1) = -b(h \sin \omega_1 h + t \sin \omega_1) = 0. \quad (18)$$

После несложных преобразований системы (15) и уравнения (18) для отыскания k -й крайней точки получаем систему

$$\begin{aligned} \cos \omega_2 h + t \cos \omega_2 &= 0, \\ \omega_2(t \sin \omega_1 + \sin \omega_1 h) &= \omega_1(t \sin \omega_2 + \sin \omega_2 h), \\ \omega_1 &= 2\pi k - \arccos \left[-\sqrt{\frac{t^2 - h^2}{t^2(1-h^2)}} \right], \\ h\omega_1 &= \arccos \left[\sqrt{\frac{t^2 - h^2}{1-h^2}} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

Таблица 1.

№ кривой	h	a	r	ω_1	ω_2
1	0.2995	0.3447	8.9792	3.6738	6.8154
2	0.1359	0.2001	14.7813	9.9848	13.1263
3	0.0880	0.1402	20.9531	16.2720	19.4136
4	0.0651	0.1079	27.1863	22.5565	25.6981

которая может быть решена численно. В таблице 1 приведены координаты конечных точек первых четырех нейтральных кривых, вычисленные в соответствии с (19) при $b = 1 - a$. При достаточно большом k выполнено следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть k — номер нейтральной кривой на плоскости параметров t , h , тогда для конечных точек этих кривых при достаточно большом k выполнены следующие асимптотические формулы:

$$t_k = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{8k} \left(1 - \frac{\pi + 2\omega_0}{4\pi k} + O(k^{-2}) \right), \quad (20)$$

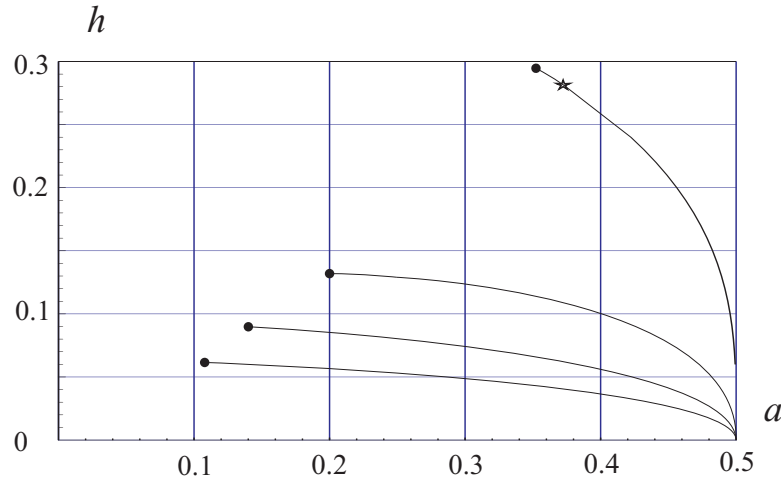


Рис. 1. Графики нейтральных кривых

$$h_k = \frac{1}{4k} - \frac{\pi + 2\omega_0}{16\pi k^2} + \frac{(\pi + 2\omega_0)^2}{64\pi^2 k^3} + O(k^{-4}), \tag{21}$$

где $\omega_0 = -\arccos\left[-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}}\right]$, $k = 1, 2, \dots$. При этом для ω_1, ω_2, r выполнено

$$\omega_{k1} = 2\pi k + \omega_0 + O(k^{-2}), \tag{22}$$

$$\omega_{k2} = (2k + 1)\pi + \omega_0 + O(k^{-2}), \tag{23}$$

$$br_k = \frac{1}{\pi^2} \left(\pi^2 + 4 + 2\sqrt{\pi^2 + 4}\right) \left(2\pi k - \omega_0 + O(k^{-1})\right). \tag{24}$$

Доказательство. Для доказательства в формулы (19) подставляются разложения величин t, h, ω_1, ω_2 в ряды по k и приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях. Разложение для r получается после подстановки полученных асимптотик в формулу (9).

С помощью утверждений лемм 1, 2 удается ответить на вопрос о характере потери устойчивости ненулевого состояния равновесия уравнения (5).

Теорема 1. Потеря устойчивости состояния равновесия $N = \frac{1}{a+b}$ уравнения (5) не может происходить так, чтобы на мнимой оси находились три пары, а при наличии двух пар не может быть резонансов 1:1 и 1:3. Резонанс 1:2 реализуется при

$$\frac{a}{b} = \frac{29 - 6\sqrt{6}}{25}, \quad h = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left[\frac{-2 + 3\sqrt{6}}{10}\right], \quad \frac{rb}{a+b} = \frac{2 + 3\sqrt{6}}{6}\omega_0, \tag{25}$$

где $\omega_0 = 2\pi - \arccos\left[\frac{-2-3\sqrt{6}}{10}\right]$.

На рис. 1 показаны графики нейтральных кривых, для значений параметров a и h на которых квазимногочлен (7) при условии (4) имеет две пары чисто мнимых корней. Жирные точки на концах кривых соответствуют значениям из таблицы 1. Звездочкой на первой кривой обозначена точка, в которой реализуется резонанс 1:2 (см. соотношения (25)). Отметим, что случай резонанса 1:2 подробно рассмотрен в статье [5]. В силу лемм 1, 2 таких кривых счетное число, причем на каждой из них $a \rightarrow 0.5$ при $h \rightarrow 0$. При малых h эти кривые $a_k = a_k(h)$ не пересекаются в силу соотношений (11) и (16) леммы 1.

При значениях h не близких к нулю и к крайним точкам (20),(21) для построения нейтральных кривых использовались численные методы. Оказалось, что кривые не пересекаются при всех h , для которых определена каждая из них.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть a, h принадлежат одной из построенных выше кривых. Обозначим через $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$ корни квазимногочлена (7) и проверим отсутствие резонансов 1:1 и 1:3.

Предположим, что имеет место резонанс 1:1, т.е. $i\omega = i\omega_1 = i\omega_2$ — корень кратности два квазимногочлена (7). В этом случае в дополнение к (8), (9) должны выполняться равенства

$$\varphi'(\omega) = 0, \quad r(h \cos \omega h - a \cos \omega) = 1. \quad (26)$$

Имеем

$$\varphi''(\omega) = (1 - h^2) \cos \omega h. \quad (27)$$

Далее, так как $r > 0$, а $0 < h < 1$, то из (8) и второго равенства (26) следует, что $\cos \omega h < 0$. Тем самым, в силу (27), имеем $\varphi'(\omega) < 0$. Это означает, что ω — корень (8) с четным номером. Согласно (10) отсюда следует, что при прохождении r через $r(\omega)$ корни из правой полуплоскости подходят к мнимой оси, касаются ее и при дальнейшем увеличении r снова уходят вправо. Поэтому существует такое $r < r(\omega)$, что пара корней (7) находится на мнимой оси. Получили противоречие.

Невозможность резонанса 1:3 доказывается также от противного. Предположим, что $3\omega_1 = \omega_2$. Из (8) легко выходит, что

$$4b^2(b^2 - a^2) \cos^3 \omega_1 h = 0, \quad 4a^2(b^2 - a^2) \cos^3 \omega_1 = 0,$$

т.е. либо $\omega_1 = \pi/2 + \pi n$ и $\omega_1 h = \pi/2 + \pi m$, либо $a = b$. В первом случае подстановки $\omega_1, \omega_1 h$ и $\omega_2, \omega_2 h$ в выражения (9) дают величины

$$r(\omega_1) = \frac{\pi + 2\pi n}{2(a(-1)^n + b(-1)^m)}, \quad r(3\omega_1) = \frac{3\pi + 6\pi n}{2(a(-1)^{n+1} + b(-1)^{m+1})},$$

имеющие разные знаки. Учитывая, что $r > 0$, искомое равенство $r(\omega_1) = r(3\omega_1)$ невозможно.

В случае $a = b$ из уравнения (8) для ω_1 имеем

$$\omega_1 \frac{1+h}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \text{либо} \quad \omega_1 \frac{1-h}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n. \quad (28)$$

Нетрудно проверить, что как первое, так и второе соотношение (28) влечет равенство нулю $r(\omega_1)$, а это, как и в предыдущем случае, противоречит условию положительности r .

Утверждение теоремы о значениях параметров, при которых реализуется резонанс 1:2, проверяется непосредственно.

2.2. Построение нормальной формы

Для исследования окрестности нетривиального состояния равновесия уравнения (3) при условии (4) выполним замену $N = 1 + n$, откуда

$$\dot{n} = -r[an(t-1) + (1-a)n(t-h)](1+n). \quad (29)$$

Предположим, что параметры a_0 и h_0 выбраны принадлежащими одной из критических кривых, описанных выше, тогда по формуле (9) можно найти такое r_0 , при котором характеристический квазимногочлен (7) имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$. Предположим, кроме того, что условия (25) существования резонанса 1:2 не выполнены.

Рассмотрим возмущенную задачу (29) в близком к критическому случае $r = r_0 + \varepsilon_1$, $a = a_0 + \varepsilon_2$, $h = h_0 + \varepsilon_3$. Порядки малости параметров надкритичности естественно принять одинаковыми, следовательно, будем считать выполненными соотношения $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \alpha\varepsilon$, $\varepsilon_3 = \beta\varepsilon$.

Для построения нормальной формы задачи (29) в окрестности тривиального состояния равновесия выполним замену

$$n(t) = \sqrt{\varepsilon}(z_1(s) \exp(i\omega_1 t) + \bar{z}_1(s) \exp(-i\omega_1 t) + z_2(s) \exp(i\omega_2 t) + \bar{z}_2(s) \exp(-i\omega_2 t)) + \varepsilon u_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, s) + \dots, \quad (30)$$

где $s = \varepsilon t$. Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ приводит на первом шаге к верному тождеству. На втором шаге для определения $u_1(t, s)$ имеем линейное уравнение с запаздыванием вида

$$Lu_1 \equiv \dot{u}_1 + r_0[a_0 u_1(t-1, s) + (1-a_0)u_1(t-h_0, s)] = -r_0(z_1 \exp(i\omega_1 t) + z_2 \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}) \times \\ \times [a_0(z_1 \exp(i\omega_1(t-1)) + z_2 \exp(i\omega_2(t-1))) + \\ + (1-a_0)(z_1 \exp(i\omega_1(t-h_0)) + z_2 \exp(i\omega_2(t-h_0))) + \text{к.с.}], \quad (31)$$

где к.с. обозначено выражение, комплексно сопряженное к выражению, находящемуся в тех же скобках.

Определяя решение уравнения (31), в виде суммы гармоник, на которые распадается его правая часть, получаем следующее выражение для функции u_1 :

$$u_1 = \frac{i\omega_1}{P(2i\omega_1)} z_1^2 \exp(2i\omega_1 t) + \frac{i\omega_2}{P(2i\omega_2)} z_2^2 \exp(2i\omega_2 t) + \\ + \frac{i(\omega_1 + \omega_2)}{P(i(\omega_1 + \omega_2))} z_1 z_2 \exp(i(\omega_1 + \omega_2)t) + \frac{i(\omega_1 - \omega_2)}{P(i(\omega_1 - \omega_2))} z_1 \bar{z}_2 \exp(i(\omega_1 - \omega_2)t) + \text{к.с.} \quad (32)$$

Наконец, на третьем шаге в результате приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ получаем уравнение

$$Lu_2 + (z_1' P'(i\omega_1) \exp(i\omega_1 t) + z_2' P'(i\omega_2) \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}) = \\ = -r_0(z_1 \exp(i\omega_1 t) + z_2 \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}) \cdot [a_0 u_1(t-1) + (1-a_0)u_1(t-h_0)] + \\ + \left(u_1 + \frac{1}{r_0}\right) [i\omega_1 z_1 \exp(i\omega_1 t) + i\omega_2 z_2 \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}] + \\ + r_0(1-a_0)\beta [i\omega_1 z_1 \exp(i\omega_1(t-h_0)) + i\omega_2 z_2 \exp(i\omega_2(t-h_0)) + \text{к.с.}] - \\ - r_0\alpha [z_1 \exp(i\omega_1 t)(\exp(i\omega_1) - \exp(i\omega_1 h_0)) + \\ + z_2 \exp(i\omega_2 t)(\exp(i\omega_2) - \exp(i\omega_2 h_0)) + \text{к.с.}] \quad (33)$$

Здесь штрихом обозначены производные функций $z_1(s)$, $z_2(s)$ по s , а $P'(i\omega) = 1 - r_0(a_0 \exp(-i\omega) + (1-a_0)h_0 \exp(-i\omega h_0))$ — производная квазимногочлена (7). Из условий разрешимости уравнения (33) среди двухчастотных по t с частотами ω_1 и ω_2 функций получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z_1' = \Phi_1 z_1 + (A_{11} z_1^2 + A_{12} z_2^2) z_1, \\ z_2' = \Phi_2 z_2 + (A_{21} z_1^2 + A_{22} z_2^2) z_2, \quad (34)$$

представляющая собой укороченную нормальную форму задачи (29). Параметры системы (34) вычисляются по формулам

$$\Phi_j = \frac{1}{P'(i\omega_j)} \left(\frac{i\omega_j}{r_0} + r_0(\alpha(\exp(i\omega_j h_0) - \exp(i\omega_j)) + \beta i\omega_j(1-a_0)\exp(i\omega_j h_0)) \right), \\ A_{jk} = -\frac{1}{P'(i\omega_j)} \left(2i\omega_j + \frac{(\omega_1 + \omega_2)\omega_j}{P(i(\omega_1 + \omega_2))} + \frac{(\omega_j - \omega_k)\omega_j}{P(i(\omega_j - \omega_k))} \right), \\ A_{jj} = -\frac{1}{P'(i\omega_j)} \left(i\omega_j + \frac{\omega_j^2}{P(2i\omega_j)} \right), \quad j, k = 1, 2, j \neq k.$$

Для упрощения системы (34) выполним в ней полярную замену $z_j = \xi_j \exp(i\tau_j)$, $j = 1, 2$. В полученной системе

$$\dot{\xi}_1 = \varphi_1 \xi_1 + (a_{11} \xi_1^2 + a_{12} \xi_2^2) \xi_1, \quad (35)$$

$$\dot{\xi}_2 = \varphi_2 \xi_2 + (a_{21} \xi_1^2 + a_{22} \xi_2^2) \xi_2, \quad (36)$$

$$\dot{\tau}_1 = \psi_1 + b_{11} \xi_1^2 + b_{12} \xi_2^2, \quad (37)$$

$$\dot{\tau}_2 = \psi_2 + b_{21} \xi_1^2 + b_{22} \xi_2^2, \quad (38)$$

где $\varphi_j + i\psi_j = \Phi_j$, $a_{jk} + ib_{jk} = A_{jk}$, $j, k = 1, 2$, первые два уравнения не зависят от третьего и четвертого, поэтому их можно изучать отдельно.

Рассмотрим задачу качественного анализа системы (35)-(36) в зависимости от параметров h_0 , α и β . Напомним, что для выбранной кривой вырождения и фиксированного h_0 могут быть найдены величины $a_0, r_0, \omega_1, \omega_2$ (см. результаты предыдущего пункта), а по ним — коэффициенты системы (35)-(38) $a_{ij}(h_0)$, $i, j = 1, 2$. Коэффициенты линейной части системы будем рассматривать как функции не только h_0 , но также α и β , $\varphi_j = \varphi_j(h_0, \alpha, \beta)$.

Двумерная система (35)-(36) подробно изучена, например, в [6]. Для ее качественного анализа решающее значение имеет, с одной стороны, диссипативность, а с другой — существование и устойчивость состояний равновесия с неотрицательными координатами.

Необходимым условием диссипативности (35)-(36) является отрицательность коэффициентов $a_{11}(h_0)$, $a_{22}(h_0)$. Это условие выполнено для всех значений параметров, лежащих на первой кривой, $h_0 \in (0, h_{11})$, где $h_{11} \approx 0.2995$ — граничная точка (см. таблицу 1), кроме того, на этой кривой сохраняют знак величины $\varphi_j(h_0, 0, 0) > 0$, $j = 1, 2$. Коэффициенты a_{ij} , $i \neq j$ в свою очередь меняют знак на промежутке $h_0 \in (0, h_{11})$, причем

$$a_{12}(h_0) > 0 \text{ при } h_0 \in (h_{13}, h_{11}), \quad a_{12}(h_0) < 0 \text{ при } h_0 \in (0, h_{13}), \quad (39)$$

$$a_{21}(h_0) > 0 \text{ при } h_0 \in (h_{14}, h_{11}), \quad a_{21}(h_0) < 0 \text{ при } h_0 \in (0, h_{14}), \quad (40)$$

где $h_{13} \approx 0.247$, $h_{14} \approx 0.116$. Таким образом, на промежутке $(0, h_{13})$ хотя бы одно из чисел a_{12} или a_{21} отрицательно, поэтому система (35)-(36) диссипативна. На промежутке же (h_{13}, h_{11}) эти числа положительны, и, следовательно, необходимо дополнительно проверить условие Каменкова

$$\Delta(h_0) \equiv a_{11}(h_0)a_{22}(h_0) - a_{12}(h_0)a_{21}(h_0) > 0.$$

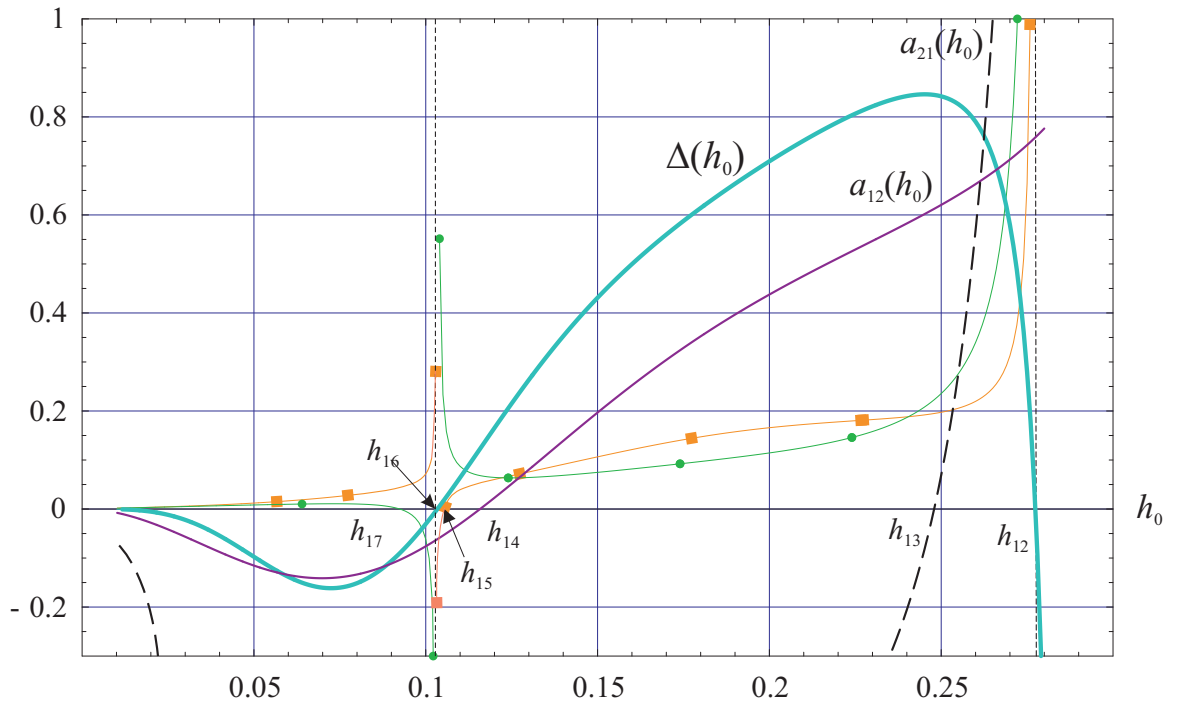


Рис. 2. Графики зависимостей величин Δ , a_{12} , a_{21} , $-\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $-\frac{\Delta_2}{\Delta}$ от параметра h_0 для первой кривой вырождения

Непосредственные вычисления показали, что

$$\Delta(h_0) > 0 \text{ при } h_0 \in (h_{15}, h_{12}) \quad \text{и} \quad \Delta(h_0) < 0 \text{ при } h_0 \in (0, h_{15}) \cup (h_{12}, h_{11}), \quad (41)$$

где $h_{12} \approx 0.277$. Следовательно, для значений параметров на первой кривой вырождения нормальная форма (35)-(36) диссипативна при $h_0 \in (0, h_{12})$ и не диссипативна при $h_0 \in (h_{12}, h_*) \cup (h_*, h_{11})$. Точка $h_* \approx 0.287189$ соответствует резонансу 1:2 (см. формулы (25)), и для нее нормальная форма выглядит иначе (см. [5]).

Перейдем к вопросу существования и устойчивости состояний равновесия (35)-(36). Наряду с тривиальным состоянием равновесия $(0, 0)$ данная система может иметь еще три неподвижные точки:

$$\left(0, \sqrt{-\frac{\varphi_2}{a_{22}}}\right), \left(\sqrt{-\frac{\varphi_1}{a_{11}}}, 0\right), \left(\sqrt{-\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \sqrt{-\frac{\Delta_2}{\Delta}}\right), \quad (42)$$

где $\Delta_1 = -\varphi_1 a_{22} + \varphi_2 a_{12}$, $\Delta_2 = -\varphi_2 a_{11} + \varphi_1 a_{21}$. На рис. 2, 6 кружками отмечены кривые, определяющие зависимость от h величины $-\frac{\Delta_1}{\Delta}$, а квадратами — величины $-\frac{\Delta_2}{\Delta}$ при α, β равных нулю. Нетрудно видеть,

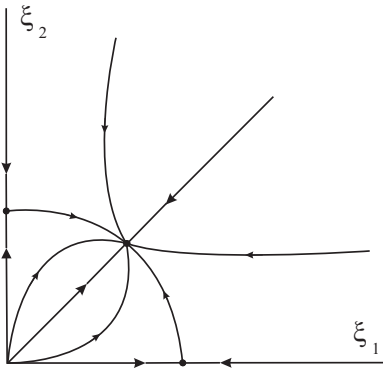


Рис. 3.

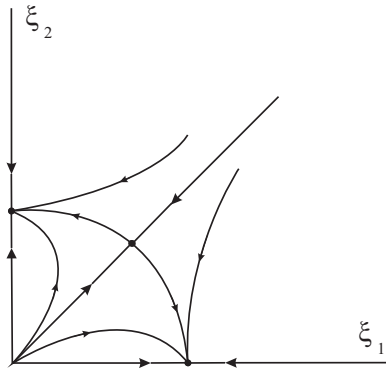


Рис. 4.

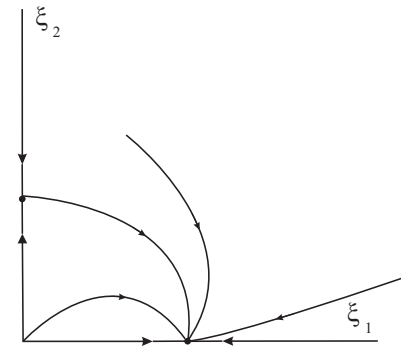


Рис. 5.

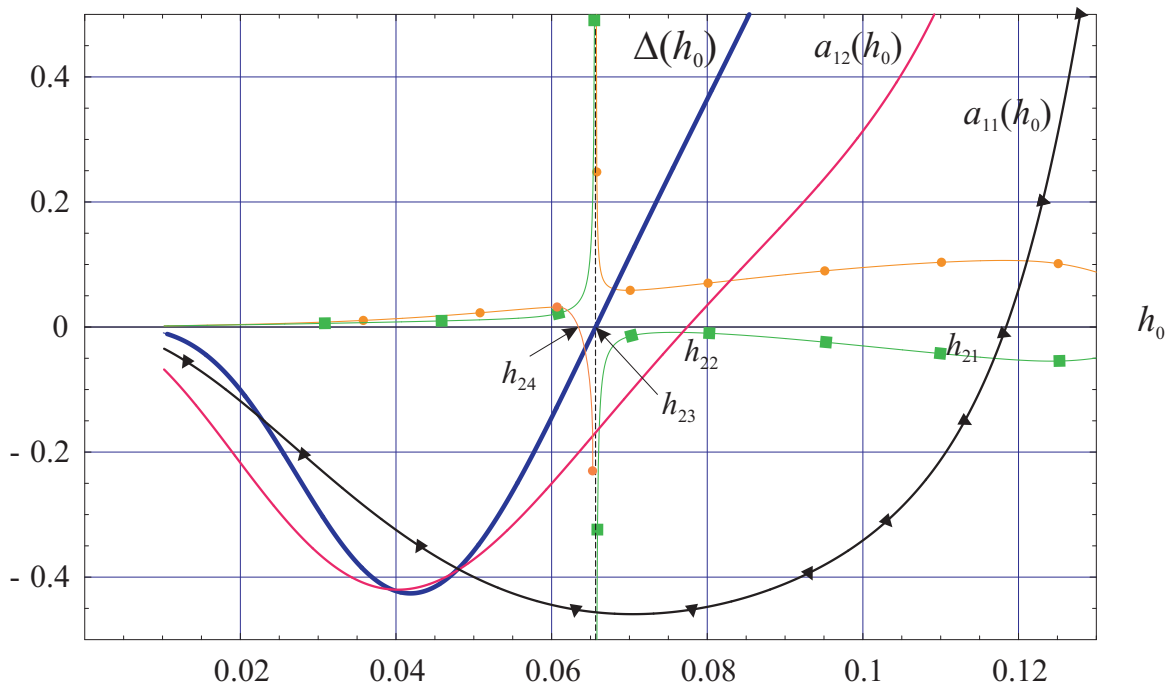


Рис. 6. Графики зависимостей величин $\Delta, a_{11}, a_{12}, -\frac{\Delta_1}{\Delta}, -\frac{\Delta_2}{\Delta}$ от параметра h_0 для второй кривой вырождения

что при $0 < h_0 < h_{17}$ и $h_{15} < h_0 < h_{12}$ система (35)-(36) имеет все три состояния равновесия (42), а в остальных случаях — только первые два.

Фазовый портрет нормальной формы (35), (36) полностью определяется значениями параметров r_0, a_0, h_0 . При значениях $h_{15} < h_0 < h_{12}$ и $a_0(h_0)$, принадлежащих первой кривой вырождения, оказывается, что система (35), (36) имеет фазовый портрет, изображенный на рис. 3. Это означает, что исходное уравнение с запаздыванием (29) должно иметь при значениях параметров близких к критическим устойчивые двухчастотные колебания. Обозначим $\xi_{10} = \sqrt{-\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \xi_{20} = \sqrt{-\frac{\Delta_2}{\Delta}}$ координаты устойчивого состояния равновесия системы (35), (36), тогда исходная задача (29) также будет иметь устойчивое двухчастотное решение с асимптотикой

$$n(t) = \sqrt{\varepsilon}\xi_{10} \cos(\tau_1\omega_1) + \sqrt{\varepsilon}\xi_{20} \cos(\tau_2\omega_2) + \varepsilon\xi_{10}\xi_{20} [De^{i(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)} + Ee^{i(\omega_1\tau_1-\omega_2\tau_2)} + \text{к.с.}] + \xi_{10}^2(Ae^{2i\omega_1\tau_1} + \bar{A}e^{-2i\omega_1\tau_1}) + \xi_{20}^2(Ae^{2i\omega_2\tau_2} + \bar{A}e^{-2i\omega_2\tau_2}) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где $\tau_1 = t(1 + (b_{11} + \alpha b_{12} + c_{11}\xi_1^2 + c_{12}\xi_2^2)\varepsilon) + \varphi_1, \tau_2 = t(1 + (b_{21} + \alpha b_{22} + c_{21}\xi_1^2 + c_{22}\xi_2^2)\varepsilon) + \varphi_2$, а φ_1 и φ_2 — начальные фазы.

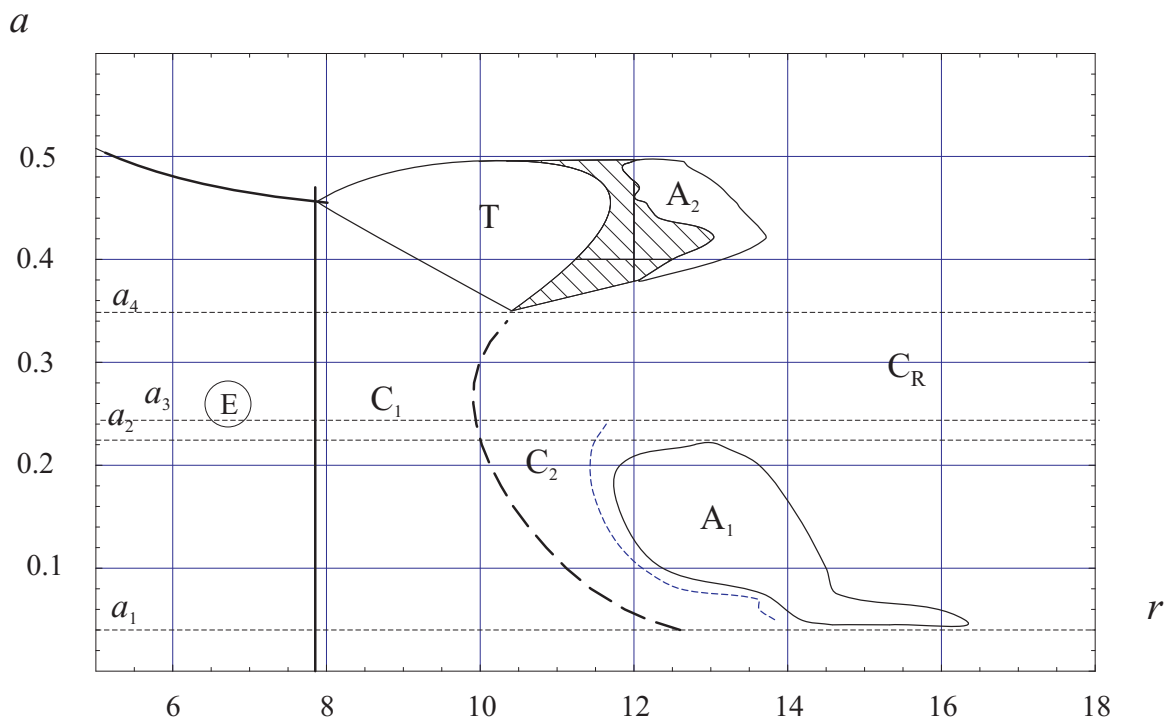


Рис. 7.

В случае, если $0 < h_0 < h_{17}$, фазовый портрет нормальной формы (35) изображен на рис. 4. Этой ситуации у исходного уравнения (29) соответствуют сосуществующие устойчивые одночастотные колебания с частотами ω_1 и ω_2 . Наконец, при $h_0 \in (h_{17}, h_{16}) \cup (h_{17}, h_{16})$ фазовый портрет (35) принимает вид, представленный на рис. 5, с точностью до замены ξ_1 на ξ_2 . В этом случае у исходного уравнения (29) от состояния равновесия бифурцирует одночастотный режим.

3. Численный анализ исследуемой системы

Перейдем к описанию результатов численного анализа уравнения (5). Хорошее представление о фазовых перестройках, происходящих с этой динамической системой, могут дать разбиения плоскости параметров r, a , вычисленные при различных значениях h (на рисунке 7 приведены такие разбиения при $h = 0.2$). Сразу отметим, что все вычисления производились в предположении, что $b = 1 - a$. Величина параметра h , как оказывается, имеет решающее значение для сценария фазовых перестроек, происходящих с (5). Наиболее простая ситуация реализуется при достаточно большом $h < 1$. В этом случае при изменении параметра r происходит стандартная бифуркация Андронова–Хопфа и динамика уравнения (5) определяется ответвившимся устойчивым циклом, который при увеличении r приобретает релаксационный характер. Иные сценарии фазовых перестроек реализуются при относительно малых значениях h , к рассмотрению которых мы и переходим.

Опишем способы получения разбиений и принятые на рис. 7 обозначения. С помощью системы (8)-(9) нетрудно построить кривые $r_1(a), r_2(a), \dots$ такие, что при $r = r_j(a)$ на мнимую ось выходит пара комплексно сопряженных корней квазимногочлена (7). Зависимости $r = r_j(a)$ обозначены на рис. 7 толстыми кривыми. При $h = 0.2$ на плоскость параметров r, a попадает две, а при $h = 0.1$ — три такие кривые. Точкам пересечения кривых соответствует ситуация, когда характеристический квазиполином имеет две пары корней на мнимой оси, эти значения a, h, r были найдены в разделе, посвященном локальному анализу уравнения (5). В области параметров, находящейся левее указанных кривых, асимптотически устойчиво состояние равновесия $N \equiv 1$. Полученная область обозначена буквой E .

При переходе параметров уравнения (5) через кривые $r = r_j(a)$ его нетривиальное состояние равновесия мягко теряет устойчивость и от этого состояния равновесия в результате бифуркации Андронова–Хопфа ответвляется цикл. В окрестностях точек пересечения кривых, в соответствии с результатами предыдущего пункта, от состояния равновесия может ответвиться устойчивый тор. Области существования и орбитной асимптотической устойчивости таких циклов и торов обозначены соответственно буквами T и C_1 .

Далее, цикл C_1 может претерпеть бифуркацию удвоения периода и превратиться в цикл C_2 (условно двойного периода). Кривая, на которой происходит первая бифуркация удвоения, обозначена на рисунках толстым пунктиром, а вторая — тонким.

При достаточно большом r уравнение (5) обладает только релаксационными циклами, близкими к циклам стандартного уравнения Хатчинсона (1). Область существования и устойчивости таких режимов обозначена C_R .

Наконец, на рисунках выделены области, обозначенные A_1, A_2, \dots , в которых система (5) ведет себя неупорядоченно. Относительно обозначений осталось отметить, что на рисунках оставлены заштрихованные области, в которых характер фазовых перестроек до конца не определен, в силу тонкой структуры разбиения этих областей и ограниченности вычислительных ресурсов.

Перейдем к обсуждению методов построения кривых, определяющих разбиение плоскости параметров r, a . Способ получения кривых $r_j(a)$ уже обсуждался выше. Построение линий, на которых происходит удвоение периода, также не представляет особых затруднений. Несколько иначе дело обстоит с инвариантными торами и колебательными режимами на них. Нам необходимо отличать возникающие в этом случае многочастотные режимы от периодических, с одной стороны, и от хаотических — с другой. В этой ситуации наиболее естественно было бы определить функцию спектральной плотности, по которой можно судить о частотных составляющих функции решения. Однако с вычислительной точки зрения гораздо предпочтительнее следующий простой критерий. Поскольку в рамках данного вычислительного эксперимента нас не интересует, какие именно составляющие входят в частотный спектр решения, то можно, во-первых, с некоторой заданной точностью установить, что функция решения не является периодической, и, во-вторых, убедиться, что старший ляпуновский показатель уравнения (5), вычисленный на этом решении, близок к нулю.

Перейдем к наиболее сложному вопросу — к определению границ областей A_1, A_2, \dots . Для их нахождения, как и в случае двухчастотных колебаний, вычислялся старший ляпуновский показатель λ_{max} . Как известно, положительность этого показателя служит одним из признаков хаотичности аттрактора динамической системы. Следует сразу отметить, что для дифференциальных уравнений с запаздыванием только старший показатель и может быть относительно просто вычислен. Кроме того, серьезной спецификой задачи (5) является тот факт, что при достаточно больших значениях r колебательные режимы (5) растут по амплитуде и становятся близки к релаксационным. Вследствие перечисленных причин представляется естественным использовать вариант алгоритма вычисления старшего ляпуновского показателя, называемый методом динамических перенормировок [7]. Кратко напомним его суть.

Для вычисления старшего ляпуновского показателя необходимо, наряду с исходным уравнением (5), рассмотреть это уравнение в вариациях на решении $N_*(t)$, принадлежащем аттрактору (5). Решая уравнение в вариациях

$$\dot{u} = r \left[(1 - aN_*(t-1) - (1-a)N_*(t-h))u - (au(t-1) + (1-a)u(t-h))N_* \right] \quad (43)$$

с начальными условиями $u(t+s)|_{t=0} = u_0(s)$, $s \in [-1, 0]$ такими, что $\|u_0(s)\| = 1$, можно определить величину

$$\lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|u(t+s)\|}{t}, \quad (44)$$

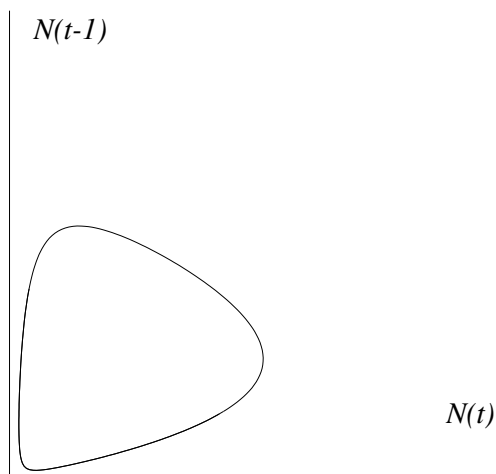
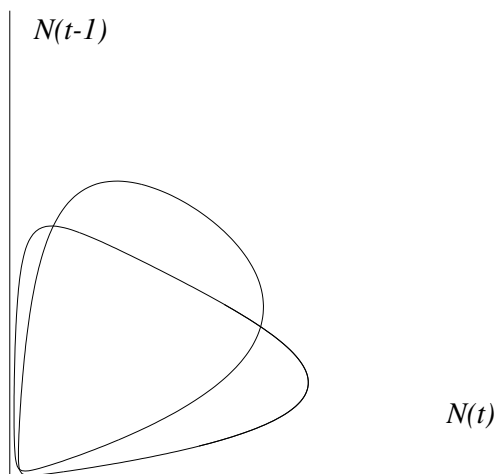
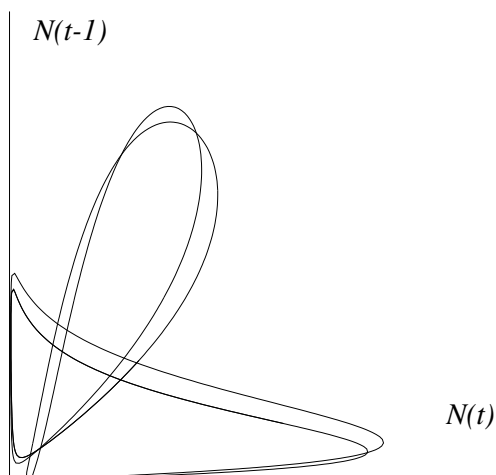
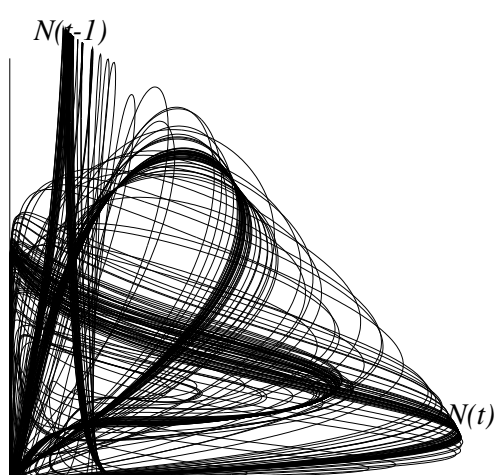
которая и является оценкой старшего ляпуновского показателя аттрактора уравнения (5). Здесь под $\|*\|$ понимается норма в пространстве непрерывных функций $C[-1, 0]$.

Учитывая, что $\|u(t+s)\|$ меняется по экспоненциальному закону, важно вовремя произвести перенормировку в уравнении (43). В соответствии с методом Бенеттина это делается через равные промежутки изменения t , которые определяются в значительной степени экспериментальным путем. Метод динамической перенормировки позволяет автоматизировать этот процесс. В нем выбираются два положительных параметра u_{min} и u_{max} , при переходе $\|u(t+s)\|$ через которые и происходит перенормировка. В этом случае оценка старшего ляпуновского показателя производится по формуле

$$\lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[m_1(t) \ln(u_{max}) + m_2(t) \ln(u_{min})]}{t}, \quad (45)$$

где $m_1(t)$ и $m_2(t)$ — количества переключений на отрезке $[0, t]$, связанные с достижением u_{max} и u_{min} соответственно.

При относительно больших значениях параметра r для метода Бенеттина не удается подобрать величину периода перенормировок, и он перестает давать удовлетворительные результаты. Метод динамических перенормировок в этой ситуации позволяет получить удовлетворительную оценку λ_{max} . Следует, впрочем,

Рис. 8. $a = 0.15, r = 10$ Рис. 9. $a = 0.15, r = 10.6$ Рис. 10. $a = 0.15, r = 11.6$ Рис. 11. $a = 0.15, r = 12.9$

отметить, что при достаточно большом r перестает работать и этот метод, однако происходит это практически одновременно с достижением границы применимости вычислительных методов Рунге–Кутты, применяемых для решения уравнений (5), (43).

Опишем теперь сценарии фазовых перестроек, происходящих при изменении r для различных a и h . Пусть сначала $h = 0.2$ (см. рис. 7), тогда для $a > a_5$, $a_5 = 0.5$ и $0 < a < a_1$, $a_1 \approx 0.03$ фазовые перестройки близки к происходящим с уравнением Хатчинсона и состоят в рождении при критическом значении r (см. раздел, посвященный локальному анализу) в результате бифуркации Андронова–Хопфа устойчивого цикла, который при увеличении r приобретает признаки релаксационного.

При $a_3 < a < a_4$, где $a_3 \approx 0.249$, $a_4 \approx 0.347$, в отличие от предыдущего случая дополнительно происходит бифуркация удвоения, а при $a_2 < a < a_3$, где $a_2 \approx 0.221$ — две бифуркации удвоения. На промежутках изменения a (a_1, a_2) и (a_4, a_5) фазовые перестройки более сложные (см. рис. 7). Рассмотрим их на примере значений $a = 0.15$ в первом случае и $a = 0.44$ — во втором.

Пусть $a = 0.15$, тогда сценарий фазовых перестроек определяется следующим образом:

1. При $0 < r < r_1$, где $r_1 = 5\pi/2$, устойчивым режимом задачи (5) является состояние равновесия $N = 1$.
2. При $r_1 < r < r_2$, где $r_2 \approx 10.531$, система имеет устойчивый цикл C_1 , ответвляющийся от состояния

равновесия $N = 1$ при $r = r_1$ в результате бифуркации Андронова–Хопфа (на рис. 8 представлен фазовый портрет цикла C_1 при $r = 10$ на плоскости $N(t), N(t - 1)$).

3. При $r_2 < r < r_3$, где $r_3 \approx 11.584$, устойчив цикл C_2 условно двойного периода, возникающий при $r = r_2$ (см. рис. 9, где изображен цикл C_1 при $r = 10.6$).
4. При $r_3 < r < r_4$, где $r_3 \approx 11.584$, устойчив цикл C_4 условно учетверенного периода, который ответвляется от C_2 при $r = r_3$ (см. рис. 10 для $r = 11.6$).
5. Далее происходит каскад бифуркаций удвоения, приводящий к хаотическим колебаниям, которые наблюдаются на промежутке $r_5 < r < r_6$, где $r_5 \approx 11.845$, $r_6 \approx 14.135$. (см. рис. 11 для $r = 12.9$).
6. При $r > r_5$ устойчив релаксационный цикл большой амплитуды.

На рисунке 12 приведен график изменения старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max}(r)$ при $11.7 \leq r \leq 14.2$. Предпринятые для построения графика вычисления показывают, что на указанном промежутке хаотические колебания многократно сменяют периодические, имеется большое, вероятно счетное, число окон периодичности.

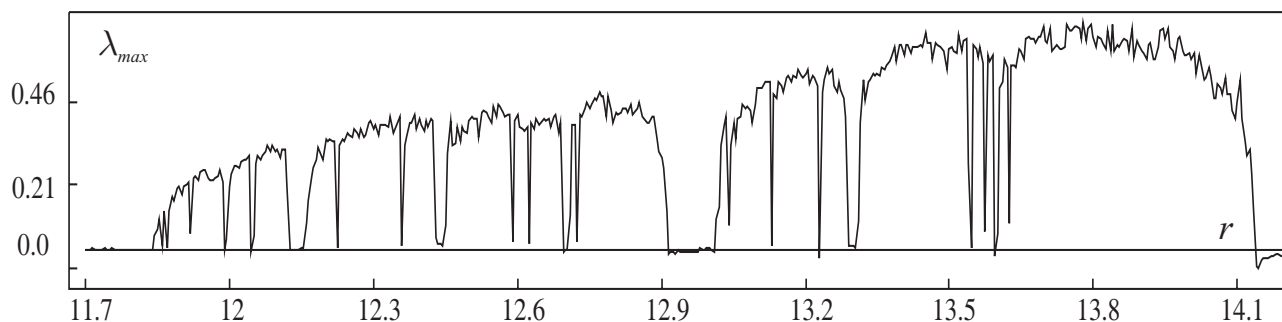
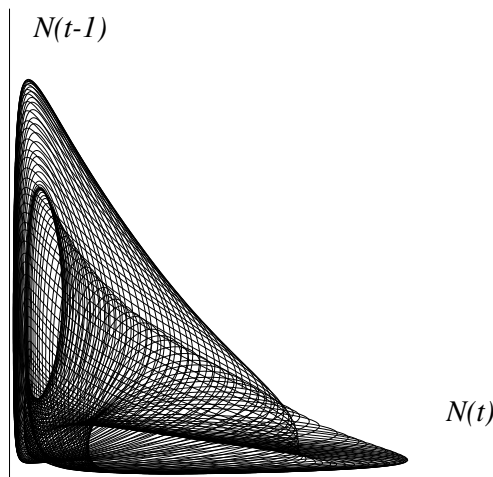
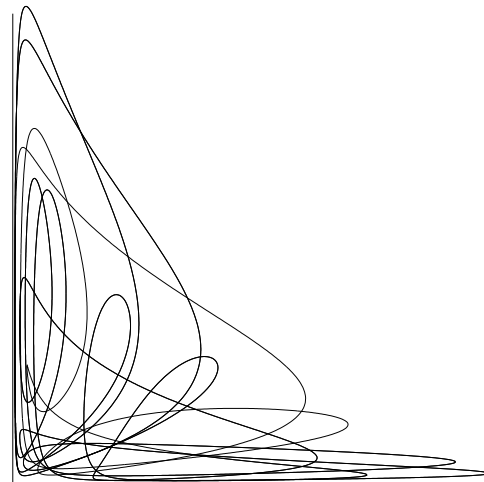


Рис. 12. $h = 0.2$, $a = 0.15$

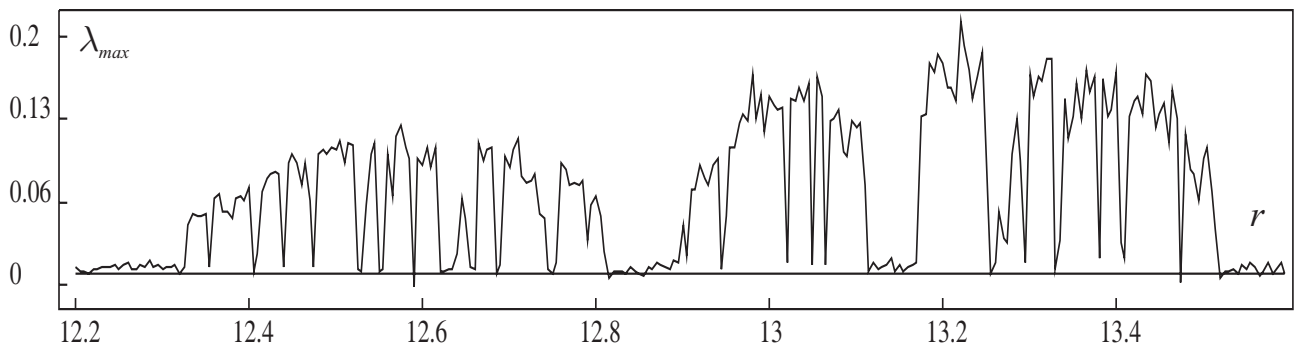
Перейдем теперь к описанию сценария фазовых перестроек, происходящих при $a = 0.44$. Главное отличие этого случая от рассмотренного выше состоит в том, что в некотором интервале изменения r здесь наблюдаются двухчастотные колебания. Перечислим происходящие при данном значении a фазовые перестройки.

1. Так же как и в предыдущем случае при $0 < r < r_1$, где $r_1 = 5\pi/2$, устойчивым режимом задачи (5) является состояние равновесия $N = 1$, соответственно при $r = r_1$ от него мягко ветвится устойчивый цикл C_1 .
2. При $r_1 < r < r_2$, где $r_2 \approx 8.26$, устойчив цикл C_1 .
3. При $r_2 < r < r_3$, где $r_3 \approx 10.34$, уравнение (5) имеет устойчивый двумерный тор (см. рис. 13). Для обоснования этого факта на данном промежутке вычислялся старший ляпуновский показатель и делались попытки найти период получающегося колебательного режима. Как оказалось, $0 \leq \lambda_{max}(r) < 0.001$ и на промежутке изменения t длины 1000 периода не обнаружено. (Для сравнения, период рождающегося при $r = r_1$ цикла равен 0.8.) Это позволяет утверждать, что исследуемый режим — двухчастотный.
4. На промежутке $r_3 < r < r_4$, где $r_4 \approx 11.36$, в фазовом пространстве системы, вероятно, сохраняется инвариантный тор, однако однозначно утверждать, что устойчивыми решениями уравнения (5) являются двухчастотные колебания, уже невозможно, поскольку вычисленный для устойчивых режимов на этом промежутке старший ляпуновский показатель уже не настолько близок к нулю, как в предыдущем случае, кроме того, имеются многочисленные окна периодичности, когда устойчивы циклы большого периода (см., например, рис. 14).
5. При $r = r_4$ инвариантный тор разрушается и на его месте остается устойчивый цикл, который при $r \approx 12.197$ претерпевает бифуркацию удвоения периода. Этот цикл жестко теряет устойчивость при $r \approx 12.323$.

Рис. 13. $a = 0.44$, $r = 9.7$ Рис. 14. $a = 0.44$, $r = 10.35$

6. При $r_5 < r < r_6$, где $r_5 \approx 12.321$, $r_6 \approx 13.51$ уравнение (5) имеет хаотические режимы. Отметим, что при $r = r_5$ хаотический режим возникает нелокально и сосуществует с устойчивым циклом.
7. Наконец, при $r > r_6$, как и в предыдущем случае, устойчив релаксационный цикл большой амплитуды.

Некоторую дополнительную информацию о хаотических колебаниях уравнения (5) дает график изменения старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max}(r)$, построенный для $12.2 \leq r \leq 13.6$ (см. рис. 15). Как и при $a = 0.15$, график зависимости $\lambda_{max}(r)$ имеет большое число участков, на которых λ_{max} близко к нулю. Эти участки соответствуют окнам периодичности изучаемой динамической системы.

Рис. 15. $h = 0.2$, $a = 0.44$

4. Заключение

Основным результатом численных и аналитических исследований системы (3), моделирующей динамику популяции с двумя возрастными группами, способными к воспроизводству, является наличие нескольких различных сценариев ее фазовых перестроек при изменении мальтузианского коэффициента линейного роста. Было обнаружено, что существенное отличие этого сценария от изменений, происходящих со стандартным уравнением Хатчинсона, наблюдается лишь в относительно узкой окрестности критических кривых. Отметим существенное отличие найденных сценариев с точки зрения размаха колебаний. Так, в случае стандартного сценария амплитуда колебаний нарастает в зависимости от коэффициента линейного роста по экспоненциальному закону, в случае же возникновения двухчастотных и

хаотических колебаний их амплитуда нарастает относительно медленно и лишь при потере ими устойчивости и переходе к периодическим колебаниям релаксационного характера амплитуда последних резко растет.

Литература

1. *Hutchinson, G. E.* Circular causal system in ecology / *G. E. Hutchinson* // *Ann. N.-Y. Acad. Sci.* — 1948. — V. 50. — P. 221 – 246.
2. *May, R.M.* Stability and complexity in model ecosystem / *R.M. May*. — Princeton: Princeton Univ. Press., 1973.
3. *May, R. M.* Time delay, density dependence and single oscillations / *R. M. May, G. R. Conway, M. P. Hassel, T. R. E. Southwood.* // *J. Anim. Ecology.* — 1974. — V. 43. — P. 747 – 770.
4. *Stirzacker, D.* On a population model / *D. Stirzacker* // *Math. Biosci.* — 1975. — V. 23. — P. 329 – 336.
5. *Киселева, Е. О.* Локальная динамика уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями в критическом случае резонанса 1:2 / *Е. О. Киселева* // *Моделирование и анализ информационных систем.* — 2007 — Т. 14, №2. — С. 53 – 57.
6. *Гуженхеймер, Д.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / *Д. Гуженхеймер, Ф. Холмс.* — Москва – Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
7. *Глызин, Д. С.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора / *Д. С. Глызин, С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов* // *Дифференциальные уравнения.* — 2005. — Т. 41, № 2. — С. 268 – 273.

A registration of age groups for the Hutchinson's equation

Glyzin S.D.

The dynamics of a generalized Hutchinson's equation with two delays is investigated. A local analysis of a loss of a stability for the nonzero equilibrium state for the problem has been made. Phase reorganizations have been analyzed with numerical methods with the help of the obtained asymptotic formulas. The bifurcation curves that correspond to the principal bifurcations, which take place in the system, have been built on the parameters' plane.