Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **1** (2013) 5–17

УДК 517.946

Асимптотика решения бисингулярной задачи для системы линейных параболических уравнений. I

Бутузова М. В.[1]

Московский государственный университет, 119991, г. Москва, Ленинские горы

e-mail: m.butuzova@mail.ru

получена 20 ноября 2012

Ключевые слова: сингулярные возмущения, бисингулярные задачи, асимптотические разложения

Для решения бисингулярной начально-краевой задачи для системы линейных параболических уравнений построена асимптотика произвольного порядка по малому параметру без использования процедуры согласования асимптотических разложений.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sqrt{\varepsilon}\, b\,(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = A(x,t)u + f\,(x,t), \tag{1}$$
$$(x,t) \in D = (0 < x < +\infty) \times (0 < t \le T),$$
$$u\,(x,0,\varepsilon) = \Phi\,(x),\ \ 0 \le x < +\infty, \tag{2}$$
$$u\,(0,t,\varepsilon) = 0,\ \ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $u(x,t,\varepsilon)$, $f(x,t)$ и $\Phi(x)$ — m-мерные вектор-функции с элементами $u^i(x,t,\varepsilon)$, $f^i(x,t)$ и $\Phi^i(x)$ соответственно, $A(x,t)$ — $m \times m$-матрица с элементами $a_{ij}(x,t)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр; функции $b\,(x,t)$, $a_{ij}(x,t)$, $f^i(x,t)$, $\Phi^i(x)$ — бесконечно дифференцируемые и ограниченные вместе с производными в $\overline{D}$; $b\,(x,t) > B_0 = const > 0$, $\Phi\,(0) = 0$. Данная задача является обобщением задачи, рассмотренной в [1], на случай системы уравнений.

В п. 2 построено асимптотическое разложение по малому параметру ε классического, ограниченного всюду в $\overline{D}$ решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) – (3) в виде:

$$u(x,t,\varepsilon) = \overline{u}(x,t,\varepsilon) + \Pi(\xi,t,\varepsilon) + V(\eta,t,\varepsilon) + W(\xi,t,\varepsilon) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2}\overline{u}_k(x,t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2}\Pi_k(\xi,t,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\eta,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2} w_k(\xi,t,\varepsilon), \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 12-01-00387)

где $\overline{u}_k(x,t)$ — регулярные члены асимптотики; $\Pi_k(\xi,t,\varepsilon)$ — функции пограничного слоя, описывающие поведение решения в окрестности боковой границы $x=0$ полуполосы D, $\xi = x/\sqrt{\varepsilon}$; $v_k(\eta,t)$ — функции, описывающие внутренний переходный слой в окрестности линии $\xi=\xi_0(t,\varepsilon)$, которая является характеристикой уравнений для функций Π_k, выходящей из угловой точки $(\xi,t)=(0,0)$, $\eta=[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)]/\sqrt{\varepsilon}$; $w_k(\xi,t,\varepsilon)$ — функции, устраняющие невязки, вносимые функциями v_k в граничное условие (3). В п. 3 сформулирован основной результат.

Особенность задачи состоит в том, что функции пограничного слоя Π_k определяются из уравнений в частных производных первого порядка, вследствие чего оказываются негладкими и даже разрывными (при $k\geq 2$) на характеристике $\xi=\xi_0(t,\varepsilon)$, выходящей из угловой точки полуполосы D. Таким образом, данная задача относится к так называемым бисингулярным задачам, в которых одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая — с негладкостью членов асимптотики. Для таких задач можно использовать метод согласования асимптотических разложений (см. [2]). Однако этот метод является достаточно сложным не только для обоснования построенного асимптотического разложения, но и для построения формальной асимптотики. Построение и обоснование асимптотических представлений нулевого и первого порядков можно выполнить с помощью более простой процедуры сглаживания негладких членов асимптотики (см. [3]). В данной работе предложен способ построения асимптотики произвольного порядка для решения бисингулярной задачи (1) – (3) без применения процедуры согласования. Этот способ является модификацией метода, использованного в работе [4].

2. Построение асимптотического разложения решения

1. Регулярная часть асимптотики

Задачи для регулярных членов асимптотики получаются стандартным способом — подстановкой регулярного ряда

$$\overline{u}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}\overline{u}_k(x,t)$$

в уравнение (1) и начальное условие (2).

Для $\overline{u}_0(x,t)$ имеем задачу (x входит как параметр, $0<x<+\infty$):

$$\frac{\partial\overline{u}_0}{\partial t}=-A(x,t)\overline{u}_0-f(x,t),\ 0<x<+\infty,\ 0<t\leq T, \tag{5}$$

$$\overline{u}_0(x,0)=\Phi(x). \tag{6}$$

Обозначим через $H(x,t)$ фундаментальную матрицу (зависящую от x, как от параметра) однородной системы уравнений, т.е.

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-A(x,t)H(x,t),$$

причем $H(x,0)=E$, где E — единичная матрица. Тогда решение системы (5), (6) можно записать в виде:

$$\overline{u}_0(x,t)=H(x,t)\Phi(x)-\int_0^t H(x,t)H^{-1}(x,\lambda)f(x,\lambda)d\lambda.$$

Очевидно, что $\overline{u}_0(x,t)$ — бесконечно дифференцируемая в полуполосе $\overline{D}$ функция.

Задачи для следующих членов $\overline{u}_k(x,t)$ $(k\geq 1)$ регулярной части асимптотики имеют вид

$$\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial t}=-A(x,t)\overline{u}_k+\overline{f}_k(x,t),\quad \overline{u}_k(x,0)=0,$$

где $\overline{f}_k(x,t)=-b(x,t)\frac{\partial\overline{u}_{k-1}}{\partial x}-\frac{\partial^2\overline{u}_{k-4}}{\partial x^2}$, функции $\overline{u}_k$ с отрицательными индексами считаются равными нулю. Функцию $\overline{u}_k(x,t)$ можно записать в виде:

$$\overline{u}_k(x,t)=-\int_0^t H(x,t)H^{-1}(x,\lambda)\overline{f}_k(x,\lambda)d\lambda.$$

Очевидно, что функции $\overline{u}_k(x,t)$ также бесконечно дифференцируемы в $\overline{D}$.

Построенная таким образом регулярная часть асимптотики $\overline{u}(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяет формально уравнению (1), начальному условию (2), но не удовлетворяет, вообще говоря, граничному условию (3).

2. Функции пограничного слоя

Чтобы устранить невязку, внесенную в граничное условие функциями $\overline{u}_k$, строим погранслойную часть асимптотики ($\xi=x/\sqrt{\varepsilon}$)

$$\Pi(\xi,t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}\Pi_k(\xi,t,\varepsilon). \tag{7}$$

Задача для ряда (7) имеет вид:

$$\varepsilon\frac{\partial^2\Pi}{\partial\xi^2}-b(\sqrt{\varepsilon}\xi,t)\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}-\frac{\partial\Pi}{\partial t}=A(\sqrt{\varepsilon}\xi,t)\Pi,\ 0<\xi<+\infty,\ 0<t\leq T, \tag{8}$$

$$\Pi(\xi,0,\varepsilon)=0,\ \Pi(0,t,\varepsilon)=-\overline{u}(0,t,\varepsilon). \tag{9}$$

Разложим коэффициент $b(\sqrt{\varepsilon}\xi,t)$ и элементы матрицы $A(\sqrt{\varepsilon}\xi,t)$ в ряды Тейлора с центром разложения в точке $(0,t)$, оставим в левой части уравнения (8) члены

$$L_\pi\Pi:=-[b_0(t)+\sqrt{\varepsilon}b_1(t)\xi]\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}-A_0(t)\Pi-\frac{\partial\Pi}{\partial t}$$

и перепишем его в виде:

$$L_\pi\Pi=[\varepsilon b_2(t)\xi^2+\varepsilon^{3/2}b_3(t)\xi^3+\ldots]\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}+[\sqrt{\varepsilon}A_1(t)\xi+\varepsilon A_2(t)\xi^2+\ldots]\Pi-\varepsilon\frac{\partial^2\Pi}{\partial\xi^2}, \tag{10}$$

где

$$b_k(t)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k b}{\partial x^k}(0,t),\ A_k(t)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k A}{\partial x^k}(0,t),\ k=0,1,\ldots$$

Подставляя в уравнение (10) и условия (9) ряд (7), получаем задачи для нахождения функций $\Pi_k(\xi, t, \varepsilon)$:

$$L_\pi \Pi_k = \pi_k(\xi, t, \varepsilon), \quad 0 < \xi < +\infty,\, 0 < t \le T,$$
$$\Pi_k(\xi, 0, \varepsilon) = 0,\, \Pi_k(0, t, \varepsilon) = -\overline{u}_k(0, t),$$

где $\pi_k(\xi, t, \varepsilon)$ выражаются рекуррентно через Π_i с номерами $i < k$ и их производные, в частности $\pi_0(\xi, t, \varepsilon) \equiv 0$.

Заметим, что в оператор L_π включен член $\sqrt{\varepsilon} b_1(t)\xi(\partial/\partial\xi)$. Такая структура оператора L_π будет важна для построения функций внутреннего переходного слоя $v_k(\eta, t)$. Это не усложняет по существу процедуру построения функций Π_k, но дает возможность существенно упростить оператор L_v (см. ниже формулу (18)), с помощью которого строятся функции внутреннего переходного слоя $v_k(\eta, t)$.

Обозначим $H(0, t)$ через $H_0(t)$. Матрица $H_0(t)$ удовлетворяет уравнению $\partial H_0/\partial t = -A_0(t)H_0$. Делая замену переменных

$$\Pi_k(\xi, t, \varepsilon) = H_0(t)\widetilde{\Pi}_k(\xi, t, \varepsilon),$$

приходим к задачам для функций $\widetilde{\Pi}_k(\xi, t, \varepsilon)$:

$$\widetilde{L}_\pi \widetilde{\Pi}_k := -[b_0(t) + \sqrt{\varepsilon}\xi b_1(t)]\frac{\partial \widetilde{\Pi}_k}{\partial \xi} - \frac{\partial \widetilde{\Pi}_k}{\partial t} = H_0^{-1}(t)\pi_k(\xi, t, \varepsilon),$$
$$\widetilde{\Pi}_k(\xi, 0, \varepsilon) = 0,\ \widetilde{\Pi}_k(0, t, \varepsilon) = -H_0^{-1}(t)\overline{u}_k(0, t).$$

Очевидно, что система уравнений для вектор–функции $\widetilde{\Pi}_k$ распадается (в отличие от системы для Π_k) на m отдельных уравнений для ее компонент $\widetilde{\Pi}_k^i$ $(1 \le i \le m)$. Задача для $\widetilde{\Pi}_k^i$ имеет вид,

$$\widetilde{L}_\pi \widetilde{\Pi}_k^i = \widetilde{\pi}_k^i(\xi, t, \varepsilon),\ 0 < \xi < +\infty,\ 0 < t \le T, \tag{11}$$
$$\widetilde{\Pi}_k^i(\xi, 0, \varepsilon) = 0,\ \widetilde{\Pi}_k^i(0, t, \varepsilon) = p_k^i(t),$$

где $p_k^i(t)$ — i-я компонента вектор-функции $-H_0^{-1}(t)\overline{u}_k(0, t)$.

Характеристики уравнения (11) определяются уравнением

$$\frac{d\xi}{dt} = b_0(t) + \sqrt{\varepsilon} b_1(t)\xi,$$

откуда для характеристик, выходящих из точек $(\xi = 0, t = t_0)$ оси t, получается выражение

$$\xi = \xi(t, t_0, \varepsilon) := \int_{t_0}^{t} b_0(s) \exp\left(\sqrt{\varepsilon}\int_s^t b_1(\sigma)d\sigma\right) ds.$$

Угловая характеристика, соответствующая $t_0 = 0$ (будем обозначать её $\xi = \xi_0(t, \varepsilon)$), разбивает полуполосу $\overline{D}_\xi = (0 \le \xi < +\infty) \times (0 \le t \le T)$ на две части $\overline{D}_1 = (0 \le \xi \le \xi_0(t, \varepsilon)) \times (0 \le t \le T)$ и $\overline{D}_2 = (\xi_0(t, \varepsilon) \le \xi < +\infty) \times (0 \le t \le T)$. В D_2 все функции $\widetilde{\Pi}_k^i$ тождественно равны нулю в силу нулевого начального условия $\widetilde{\Pi}_k^i(\xi, 0, \varepsilon) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$. В D_1 функции $\widetilde{\Pi}_k^i(\xi, t, \varepsilon)$ на характеристике $\xi = \xi(t, t_0, \varepsilon)$ можно представить в виде

$$\widetilde{\Pi}_k^i(\xi(t, t_0, \varepsilon), t, \varepsilon) = p_k^i(t_0) - \int_{t_0}^{t} \widetilde{\pi}_k^i(\xi(s, t_0, \varepsilon), s, \varepsilon)ds.$$

Производные $\dfrac{\partial\widetilde{\Pi}_k^i}{\partial\xi}$ при $k \geq 0$ и сами функции $\widetilde{\Pi}_k^i$ при $k \geq 2$ имеют на угловой характеристике скачки, которые несложно вычислить, используя явные выражения для этих функций.

Таким образом, построенная сумма $\overline{u} + \Pi$ удовлетворяет формально исходному уравнению (1) всюду в D, за исключением точек угловой характеристики, а также начальному и граничному условиям (2) и (3). При этом погранслойная составляющая построенного разложения является разрывной на угловой характеристике $\xi = \xi_0(t,\varepsilon)$. В то же время решение $u(x,t,\varepsilon)$ исходной задачи (1) – (3) является сколь угодно гладким во всей области D, и, следовательно, сумма $\overline{u} + \Pi$ не может представлять собой асимптотическое разложение решения $u(x,t,\varepsilon)$ во всей области $\overline{D}$.

3. Функции внутреннего переходного слоя

Чтобы устранить скачки функций Π_k и их производных $\partial\Pi_k/\partial\xi$ на угловой характеристике, строим функции внутреннего переходного слоя $v_k(\eta,t,\varepsilon)$, $\eta = [\xi - \xi_0(t,\varepsilon)]/\sqrt{\varepsilon}$.

С этой целью представим скачки функций Π_k и $\partial\Pi_k/\partial\xi$ в виде рядов по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и подставим эти ряды в разложения (скачок функции Π_k обозначим $[\Pi_k]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)}$)

$$\Big[\Pi\Big]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)} = \varepsilon\Big[\Pi_2\Big]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)} + \varepsilon^{3/2}\Big[\Pi_3\Big]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)} + \ldots \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}\right]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)} = \left[\frac{\partial\Pi_0}{\partial\xi}\right]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)} + \sqrt{\varepsilon}\left[\frac{\partial\Pi_1}{\partial\xi}\right]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)} + \ldots \,.$$

Сгруппировав слагаемые при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$, приходим к равенствам:

$$[\Pi]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)} = \varepsilon\alpha_2(t) + \varepsilon^{3/2}\alpha_3(t) + \ldots \quad , \tag{12}$$

$$\left[\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}\right]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)} = \beta_0(t) + \sqrt{\varepsilon}\beta_1(t) + \ldots \quad , \tag{13}$$

где функции $\alpha_k(t)$ и $\beta_k(t)$ выражаются через известные функции $b(x,t)$, $A(x,t)$, $\overline{u}_i(x,t)$ $(i \leq k)$ и их производные, например, $\beta_0(t) = H_0(t)f(0,0)b_0^{-1}(0)$.

Задача для ряда

$$V(\eta,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\eta,t)$$

имеет вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2} - \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} b\left(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon) + \varepsilon\eta, t\right) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} b_0(t) - b_1(t)\xi_0(t,\varepsilon)\right]\frac{\partial V}{\partial\eta} - \frac{\partial V}{\partial t} = $$
$$= A\left(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon) + \varepsilon\eta, t\right)V. \tag{14}$$

$$\Big[V(\eta,t,\varepsilon)\Big]_{\eta=0} = -\Big[\Pi(\xi,t,\varepsilon)\Big]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)}, \tag{15}$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial\eta}\right]_{\eta=0} = -\sqrt{\varepsilon}\left[\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}\right]_{\xi=\xi_0(t,\varepsilon)}, \tag{16}$$

$$V(\eta,0,\varepsilon) = 0. \tag{17}$$

Разложим коэффициент b и элементы матрицы A в ряды Тейлора с центром разложения в точке $(0,t)$, оставим в левой части уравнения (14) члены

$$L_v V := \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} - A_0(t)V - \frac{\partial V}{\partial t} \tag{18}$$

и перепишем его в виде:

$$\begin{aligned} L_v V \;=\; & \left\{\sqrt{\varepsilon}\left[b_1(t)\eta + b_2(t)\xi_0^2(t,\varepsilon)\right] + \varepsilon\left[2b_2(t)\eta\,\xi_0(t,\varepsilon) + b_3(t)\xi_0^3(t,\varepsilon)\right] + \ldots\right\}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \\ & + \left\{\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)A_1(t) + \varepsilon\left[\eta A_1(t) + \xi_0^2(t,\varepsilon)A_2(t)\right] + \ldots\right\}V. \end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что в уравнении (19) коэффициент при $\partial V/\partial\eta$ является величиной порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Это достигнуто за счет того, что в оператор L_π, с помощью которого строились функции Π_k, был включен член $\sqrt{\varepsilon}b_1(t)\xi(\partial/\partial\xi)$. Если бы это не было сделано, то коэффициент при $\partial V/\partial\eta$ в уравнении (19) был бы величиной порядка (1), и тогда оператор L_v содержал бы слагаемое $\partial/\partial\eta$ с коэффициентом, зависящим от времени. Это значительно усложнило бы процедуру построения функций v_k, поскольку их нельзя было бы найти в явном виде.

Сделаем в уравнении (19) замену переменных

$$V(\eta,t,\varepsilon) = H_0(t)\widetilde{V}(\eta,t,\varepsilon). \tag{20}$$

Уравнение для ряда $\widetilde{V}(\eta,t,\varepsilon)$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widetilde{V}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \widetilde{V}}{\partial t} \;=\; & \left\{\sqrt{\varepsilon}\Big[b_1(t)\eta + b_2(t)\xi_0^2(t,\varepsilon)\Big] + \cdots\right\}\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \eta} + \\ & + \left\{\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)H_0^{-1}(t)A_1(t)H_0(t) + \cdots\right\}\widetilde{V}. \end{aligned} \tag{21}$$

Подставим в уравнение (21) ряд

$$\widetilde{V}(\eta,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\widetilde{v}_i(\eta,t), \tag{22}$$

представим функцию $\xi_0(t,\varepsilon)$ в виде ряда по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в правой и левой частях (21). В результате получим для функций $\widetilde{v}_k(\eta,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 \widetilde{v}_k}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \widetilde{v}_k}{\partial t} = \widetilde{f}_k(\eta,t),\; k \ge 1, \tag{23}$$

где $\widetilde{f}_1(\eta,t) \equiv 0$, $\widetilde{f}_k(\eta,t)$ при $k \ge 2$ рекуррентно выражаются через функции $\widetilde{v}_i(\eta,t)$ $(i = 1,2,\ldots,k-1)$ и их производные $\partial\widetilde{v}_i/\partial\eta$. Например,

$$\widetilde{f}_2(\eta,t) = \left[b_1(t)\eta + b_2(t)\xi_0^2(t,0)\right]\frac{\partial \widetilde{v}_1}{\partial \eta} + \xi_0(t,0)H_0^{-1}(t)A_1(t)H_0(t)\widetilde{v}_1. \tag{24}$$

При переходе от переменных (x,t) к переменным (η,t) полуполоса $\overline{D} = (0 \le x < +\infty) \times (0 \le t \le T)$ на плоскости (x,t) переходит во множество

$\overline{D}_\eta = (-\xi_0(t,\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon} \le \eta < +\infty) \times (0 \le t \le T)$ на плоскости (η, t). Будем строить функции $v_k(\eta,t)$ в полосе $D_\eta^\infty = (-\infty < \eta < +\infty) \times (0 \le t \le T)$, содержащей множество $\overline{D}_\eta$.

Делая в равенствах (15) – (17) замену переменной (20), представляя $\widetilde{V}$ в виде (22) и учитывая разложения (12), (13), получаем дополнительные условия для функций $\widetilde{v}_k(\eta,t)$:

$$\widetilde{v}_k(+0,t) - \widetilde{v}_k(-0,t) = -H_0^{-1}(t)\alpha_k(t), \quad \frac{\partial \widetilde{v}_k}{\partial \eta}(+0,t) - \frac{\partial \widetilde{v}_k}{\partial \eta}(-0,t) = -H_0^{-1}(t)\beta_{k-1}(t),$$
$$\widetilde{v}_k(\eta,0) = 0. \tag{25}$$

Заметим, что $\alpha_1(t) \equiv 0$, $\alpha_k(0) = 0$ $(k \ge 2)$, но, вообще говоря, $\beta_k(0) \ne 0$ $(k \ge 0)$.

Из (23), (25) получаются задачи для функций $\widetilde{v}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, причем, как нетрудно видеть, задача для вектор-функции $\widetilde{v}_k$ распадается на m отдельных задач для ее компонент $\widetilde{v}_k^i$. Это дает возможность строить функции $\widetilde{v}_k^i$ точно так же, как скалярные функции v_k в статье [1]. Опишем построение для $k = 1$ и $k = 2$.

Из равенств (23), (25) при $k = 1$ получаем задачи для функций $\widetilde{v}_1^i(\eta,t)$. Их решения имеют вид:

$$\widetilde{v}_1^i(\eta,t) = \frac{f^i(0,0)}{2\sqrt{\pi} b_0(0)} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\lambda}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-\lambda)}\right] d\lambda, \ -\infty < \eta < +\infty, \ 0 \le t \le T.$$

Нетрудно получить следующие оценки (при $\eta \ne 0$, $0 < t \le T$):

$$|\widetilde{v}_1^i(\eta,t)| \le C\sqrt{t} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \ \left|\frac{\partial \widetilde{v}_1^i}{\partial \eta}(\eta,t)\right| \le C \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \ \left|\frac{\partial \widetilde{v}_1^i}{\partial t}(\eta,t)\right| \le \frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right). \tag{26}$$

Буквой C здесь и далее обозначаются положительные постоянные, не зависящие от ε (вообще говоря, разные в разных оценках). Очевидно, оценки вида (26) имеют место и для функций $v_1^i(\eta,t)$.

Задачи для функций $\widetilde{v}_2^i(\eta,t)$ $(1 \le i \le m)$ получаются из равенств (23), (25) при $k = 2$. Функцию $\widetilde{v}_2^i$ представим в виде

$$\widetilde{v}_2^i(\eta,t) = \overset{\approx}{v}{}_2^i(\eta,t) + \overline{v}_2^i(\eta,t),$$

где $\overset{\approx}{v}{}_2^i(\eta,t)$ — решение задачи (однородное уравнение с неоднородным условием для скачка функции и ее производной):

$$\frac{\partial^2 \overset{\approx}{v}{}_2^i}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \overset{\approx}{v}{}_2^i}{\partial t} = 0, \ -\infty < \eta < +\infty, \ 0 < t \le T,$$

$$\overset{\approx}{v}{}_2^i(+0,t) - \overset{\approx}{v}{}_2^i(-0,t) = -\left(H_0^{-1}(t)\alpha_2(t)\right)^i, \ \frac{\partial \overset{\approx}{v}{}_2^i}{\partial \eta}(+0,t) - \frac{\partial \overset{\approx}{v}{}_2^i}{\partial \eta}(-0,t) = -\left(H_0^{-1}(t)\beta_1(t)\right)^i,$$

$$\overset{\approx}{v}{}_2^i(\eta,0) = 0,$$

$\overline{v}_2^i(\eta,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 \overline{v}_2^i}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \overline{v}_2^i}{\partial t} = \widetilde{f}_2^i(\eta,t), \ -\infty < \eta < +\infty, \ 0 < t \le T,$$
$$\overline{v}_2^i(\eta,0) = 0,$$

функция $\widetilde{f}_2^i(\eta,t)$ — i-я компонента функции $\widetilde{f}_2(\eta,t)$, (см.(24)).

Для функций $\widetilde{v}_2^i$ имеют место оценки:

$$\left|\widetilde{v}_2^i(\eta,t)\right| \le C\sqrt{t}Q_1(\eta)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \left|\frac{\partial\widetilde{v}_2^i}{\partial\eta}(\eta,t)\right| \le CQ_2(\eta)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right),$$
$$\left|\frac{\partial\widetilde{v}_2^i}{\partial t}(\eta,t)\right| \le \frac{C}{\sqrt{t}}\,Q_2(\eta)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right),$$

где

$$Q_j(\eta) = \sum_{i=0}^{j} |\eta|^i, \quad j = 1,2,\ldots \tag{27}$$

В силу равенства (20) такие же оценки имеют место и для функций $v_2^i(\eta,t)$.

Функции $v_k^i(\eta,t)$ $(1 \le i \le m)$ с номерами $k \ge 3$ определяются так же, как функции $v_2^i(\eta,t)$, и в отношении них справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Функции $v_k^i(\eta,t)$ бесконечно дифференцируемы при $\eta \ne 0$ и для них имеют место оценки*

$$|v_k^i(\eta,t)| \le C\sqrt{t}Q_l(\eta)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right), \left|\frac{\partial v_k^i}{\partial\eta}(\eta,t)\right| \le CQ_q(\eta)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right),$$
$$\left|\frac{\partial v_k^i}{\partial t}\right| \le \frac{C}{\sqrt{t}}Q_n(\eta)\exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right),$$

где l,q,n — некоторые натуральные числа, зависящие от k.

Доказательство леммы проводится так же, как аналогичной леммы в [1].

Итак, построенная часть асимптотики $\overline{u}(x,t,\varepsilon)+\Pi(\xi,t,\varepsilon)+V(\eta,t,\varepsilon)$ удовлетворяет формально исходному уравнению (1) всюду в D, начальному условию (2), но не удовлетворяет граничному условию (3), т.к. $v_k|_{x=0} = v_k(-\xi_0(t,\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon},t) \ne 0$.

4. Функции $w_k(\xi,t,\varepsilon)$

Для устранения невязок, вносимых в граничное условие функциями v_k, строим функции $w_k(\xi,t,\varepsilon)$.

Задачу для ряда

$$W(\xi,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{\varepsilon})^k w_k(\xi,t,\varepsilon)$$

запишем в виде:

$$\varepsilon\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2} - b\Big(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)+\varepsilon\,\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}},t\Big)\frac{\partial W}{\partial\xi} - \frac{\partial W}{\partial t} =$$
$$= A\Big(\sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)+\varepsilon\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}},t\Big)W,\ 0<\xi<+\infty,\ 0<t\le T, \tag{28}$$

$$W(0,t,\varepsilon) = -V\Big(-\frac{\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}},t,\varepsilon\Big), \quad W(\xi,0,\varepsilon) = 0. \tag{29}$$

Разложим коэффициент b и элементы матрицы A в ряды Тейлора с центром разложения в точке $(0, t)$, оставим в левой части уравнения (28) члены

$$L_w W \equiv \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \big[b_0(t) + \sqrt{\varepsilon} b_1(t)\xi_0(t,\varepsilon)\big] \frac{\partial W}{\partial \xi} - A_0(t)W - \frac{\partial W}{\partial t}$$

и перепишем его в виде:

$$L_w W = \left\{ \varepsilon \left[b_1(t) \frac{\xi - \xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_2(t)\xi_0^2(t,\varepsilon) \right] + \varepsilon^{3/2} \left[2b_2(t)\xi_0(t,\varepsilon) \frac{\xi - \xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_3(t)\xi_0^3(t,\varepsilon) \right] + \right.$$
$$\left. + \ldots \right\} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \left\{ \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)A_1(t) + \varepsilon \left[\frac{\xi - \xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} A_1(t) + \xi_0^2(t,\varepsilon) A_2(t) \right] + \ldots \right\} W. \qquad (30)$$

Сделаем в уравнении (30) замену переменной

$$W(\xi, t, \varepsilon) = H_0(t)\widetilde{W}(\xi, t, \varepsilon). \qquad (31)$$

Для $\widetilde{W}(\xi, t, \varepsilon)$ получим уравнение:

$$\widetilde{L}_w \widetilde{W} := \varepsilon \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial \xi^2} - \Big[b_0(t) + \sqrt{\varepsilon} b_1(t)\xi_0(t,\varepsilon)\Big] \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \xi} - \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} =$$
$$= \left\{ \varepsilon \Big[b_1(t) \frac{\xi - \xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_2(t)\xi_0^2(t,\varepsilon) \Big] + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^{3/2} \Big[2b_2(t)\xi_0(t,\varepsilon) \frac{\xi - \xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + b_3(t)\xi_0^3(t,\varepsilon) \Big] + \ldots \right\} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \xi} +$$
$$+ \left\{ \sqrt{\varepsilon}\xi_0(t,\varepsilon)H_0^{-1}(t)A_1(t)H_0(t) + +\varepsilon \Big[\frac{\xi - \xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} H_0^{-1}(t)A_1(t)H_0(t) + \right.$$
$$\left. + \xi_0^2(t,\varepsilon)H_0^{-1}(t)A_2(t)H_0(t) \Big] + \ldots \right\} \widetilde{W}. \qquad (32)$$

Подставим в уравнение (32) ряд

$$\widetilde{W}(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\varepsilon})^k \widetilde{w}_k(\xi, t, \varepsilon). \qquad (33)$$

Учитывая, что функция $\xi_0(t, \varepsilon)$ при каждом значении t есть величина порядка $O(1)$, и предполагая априори, что для значений $q > 0$ функции

$$\sqrt{\varepsilon}\, \frac{\partial \widetilde{w}_k}{\partial \xi}, \quad \left[\frac{\xi - \xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right]^q \sqrt{\varepsilon}\, \frac{\partial \widetilde{w}_k}{\partial \xi}, \quad \left[\frac{\xi - \xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right]^q \widetilde{w}_k$$

также являются величинами порядка $O(1)$, переписываем уравнение (32), группируя вместе слагаемые одного порядка малости по отношению к ε:

$$\sqrt{\varepsilon}\widetilde{L}_w\widetilde{w}_1+\varepsilon\widetilde{L}_w\widetilde{w}_2+\ldots=$$
$$=\varepsilon\left\{\left[b_1(t)\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}+b_2(t)\xi_0^2(t,\varepsilon)\right]\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{w}_1}{\partial\xi}+\xi_0(t,\varepsilon)H_0^{-1}(t)A_1(t)H_0(t)\widetilde{w}_1\right\}+$$
$$+\varepsilon^{3/2}\left\{\left[b_1(t)\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}+b_2(t)\xi_0^2(t,\varepsilon)\right]\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{w}_2}{\partial\xi}+\xi_0(t,\varepsilon)H_0^{-1}(t)A_1(t)H_0(t)\widetilde{w}_2+\right.$$
$$+\left[2b_2(t)\xi_0(t,\varepsilon)\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}+b_3(t)\xi_0^3(t,\varepsilon)\right]\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{w}_1}{\partial\xi}+$$
$$\left.+\left[\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}H_0^{-1}(t)A_1(t)H_0(t)+\xi_0^2(t,\varepsilon)H_0^{-1}(t)A_2(t)H_0(t)\right]\widetilde{w}_1\right\}+\ldots\equiv$$
$$\equiv\varepsilon\chi_2(\xi,t,\varepsilon)+\varepsilon^{3/2}\chi_3(\xi,t,\varepsilon)+\ldots \tag{34}$$

Заметим, что функции $\chi_k(\xi,t,\varepsilon)$ $(k\geq 2)$ при нашем априорном предположении в каждой точке полуполосы D_ξ будут величинами порядка $O(1)$.

Сделаем в равенствах (29) замены переменных (31) и (20) и представим $\widetilde{W}$ в виде (33), а $\widetilde{V}$ в виде (22). Тогда первое равенство из (29) примет вид:

$$\sqrt{\varepsilon}\widetilde{w}_1(0,t,\varepsilon)+\varepsilon\widetilde{w}_2(0,t,\varepsilon)+\ldots=-\sqrt{\varepsilon}\widetilde{v}_1\left(-\frac{\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}},t\right)-\varepsilon\widetilde{v}_2\left(-\frac{\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}},t\right)-\ldots, \tag{35}$$

а из второго равенства (29) получим:

$$\widetilde{w}_k(\xi,0,\varepsilon)=0,\ k\geq 1. \tag{36}$$

Из (34) – (36) получаются задачи для $\widetilde{w}_k$ $(k=1,2,\ldots)$, причем, как нетрудно видеть, задача для вектор-функции $\widetilde{w}_k$ распадается на m отдельных задач для ее компонент $\widetilde{w}_k^i$. При $k=1$ для компоненты $\widetilde{w}_1^i$ $(1\leq i\leq m)$ из (34) – (36) получается задача

$$\widetilde{L}_w\widetilde{w}_1^i=0,\ \widetilde{w}_1^i(0,t,\varepsilon)=-\widetilde{v}_1^i(-\xi_0(t,\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon},t),\ \widetilde{w}_1^i(\xi,0,\varepsilon)=0. \tag{37}$$

Решение этой задачи не имеет явного представления, поэтому определим функцию $\widetilde{w}_1^i$ иначе. Возьмем в качестве $\widetilde{w}_1^i(\xi,t,\varepsilon)$ функцию

$$\widetilde{w}_1^i(\xi,t,\varepsilon)=-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_0^t\frac{\widetilde{v}_1^i(-\xi_0(\lambda,\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon},\lambda)}{(t-\lambda)^{3/2}}\,\xi\,\exp\left\{-\frac{[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)+\xi_0(\lambda,\varepsilon)]^2}{4\varepsilon(t-\lambda)}\right\}d\lambda.$$

Нетрудно показать, что функция $\widetilde{w}_1^i$ удовлетворяет начальному и граничному условиям из (37), но не удовлетворяет уравнению из (37) точно. Для невязки $\widetilde{L}_w\widetilde{w}_1^i$ несложно получить выражение:

$$\widetilde{L}_w\widetilde{w}_1^i=-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_0^t\frac{\widetilde{v}_1^i(-\xi_0(\lambda,\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon},\lambda)}{(t-\lambda)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)+\xi_0(\lambda,\varepsilon)]^2}{4\varepsilon(t-\lambda)}\right\}\times$$
$$\times\frac{\xi_0(t,\varepsilon)-\xi_0(\lambda,\varepsilon)-b_0(t)(t-\lambda)-\sqrt{\varepsilon}b_1(t)(t-\lambda)\xi_0(t,\varepsilon)}{t-\lambda}\,d\lambda\equiv g_1^i(\xi,t,\varepsilon).$$

Лемма 2. *Функции $\widetilde{w}_1^i(\xi,t,\varepsilon)$ и $g_1^i(\xi,t,\varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\widetilde{w}_1^i(\xi,t,\varepsilon)\right| \le C(\sqrt{t})^p\, Q_l\left(\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon t}}\right)\exp\left\{-\frac{\left[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)\right]^2}{4\varepsilon t}\right\}, \tag{38}$$

$$\left|\frac{\partial \widetilde{w}_1^i}{\partial \xi}(\xi,t,\varepsilon)\right| \le \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\,(\sqrt{t})^{p-1} Q_q\left(\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon t}}\right)\exp\left\{-\frac{\left[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)\right]^2}{4\varepsilon t}\right\}, \tag{39}$$

$$\left|\frac{\partial^2 \widetilde{w}_1^i}{\partial \xi^2}(\xi,t,\varepsilon)\right| \le \frac{C}{\varepsilon}\,(\sqrt{t})^{p-2} Q_n\left(\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon t}}\right)\exp\left\{-\frac{\left[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)\right]^2}{4\varepsilon t}\right\}, \tag{40}$$

$$\left|g_1^i(\xi,t,\varepsilon)\right| \le C\sqrt{\varepsilon}\, Q_r\left(\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon t}}\right)\exp\left\{-\frac{\left[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)\right]^2}{4\varepsilon t}\right\}, \tag{41}$$

$$\left|\frac{\partial g_1^i}{\partial \xi}(\xi,t,\varepsilon)\right| \le \frac{C}{\sqrt{t}}\, Q_s\left(\frac{\xi-\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon t}}\right)\exp\left\{-\frac{\left[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)\right]^2}{4\varepsilon t}\right\}, \tag{42}$$

где $p=1$, $l=1$, $q=2$, $n=3$, $r=2$, $s=3$, а функция Q_j определена равенством (27).

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3 из [1].

Итак, $g_1^i(\xi,t,\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon})$, т.е. функция $\widetilde{w}_1^i(\xi,t,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению из (37) с точностью до величин порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Иначе говоря, слагаемое $\sqrt{\varepsilon}\widetilde{L}_w\widetilde{w}_1$ в левой части уравнения (34) является величиной порядка $O(\varepsilon)$. Перенесем это слагаемое в правую часть уравнения (34) и включим в уравнение для вектор-функции $\widetilde{w}_2$.

Таким образом, для компонент $\widetilde{w}_2^i(\xi,t,\varepsilon)$ $(1\le i\le m)$ из (34) – (36) получаем задачи

$$\begin{gathered}\widetilde{L}_w\widetilde{w}_2^i = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}g_1^i(\xi,t,\varepsilon)+\chi_2^i(\xi,t,\varepsilon),\\ \widetilde{w}_2^i(0,t,\varepsilon) = -\widetilde{v}_2^i\left(-\frac{\xi_0(t,\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}},t\right),\ \widetilde{w}_2^i(\xi,0,\varepsilon)=0,\end{gathered} \tag{43}$$

где χ_2^i — i-я компонента функции χ_2 из равенства (34).

Функцию $\widetilde{w}_2^i$ возьмем в виде:

$$\widetilde{w}_2^i(\xi,t,\varepsilon)=\overline{w}_2^i(\xi,t,\varepsilon)+\widetilde{\widetilde{w}}_2^i(\xi,t,\varepsilon)+\widehat{w}_2^i(\xi,t,\varepsilon),$$

где

$$\overline{w}_2^i(\xi,t,\varepsilon)=-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_0^t\frac{\widetilde{v}_2^i(-\xi_0(\lambda,\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon},\lambda)}{(t-\lambda)^{3/2}}\,\xi\,\exp\left\{-\frac{[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)+\xi_0(\lambda,\varepsilon)]^2}{4\varepsilon(t-\lambda)}\right\}d\lambda,$$

$$\widetilde{\widetilde{w}}_2^i(\xi,t,\varepsilon)=\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\lambda}{\sqrt{t-\lambda}}\int_0^{+\infty}g_1^i(s,\lambda,\varepsilon)\exp\left\{-\frac{[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)+\xi_0(\lambda,\varepsilon)-s]^2}{4\varepsilon(t-\lambda)}\right\}ds,$$

$$\widehat{w}_2^i(\xi,t,\varepsilon)=-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_0^t\frac{d\lambda}{\sqrt{t-\lambda}}\int_0^{+\infty}\chi_2^i(s,\lambda,\varepsilon)\exp\left\{-\frac{[\xi-\xi_0(t,\varepsilon)+\xi_0(\lambda,\varepsilon)-s]^2}{4\varepsilon(t-\lambda)}\right\}ds.$$

Можно доказать, что

1) Функция $\overline{w}_2^i$ удовлетворяет начальному и граничному условиям (43), и для функций $\overline{w}_2^i(\xi,t,\varepsilon)$ и $g_2^i(\xi,t,\varepsilon) := \widetilde{L}_w\overline{w}_2^i$ имеют место оценки типа (38) – (42) с $p = 1$, $l = 2$, $q = 3$, $n = 4$, $r = 3$, $s = 4$. Таким образом, $\varepsilon\widetilde{L}_w\overline{w}_2^i = O(\varepsilon^{3/2})$. Этот член будет включен в правую часть уравнения для функции $\widetilde{w}_3^i$.

2) Функция $\approx{w}_2^i\,(\xi,t,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$L_w \stackrel{\approx}{w}{}_2^i = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, g_1^i(\xi,t,\varepsilon),$$

т.е. устраняет невязку $\widetilde{L}_w\widetilde{w}_1^i$, внесенную в уравнение (34) функцией $\widetilde{w}_1^i$. Для функции $\stackrel{\approx}{w}{}_2^i$ справедливы оценки типа (38) – (40) с $p = 2$, $l = 2$, $q = 3$, $n = 4$.

3) Функция $\widehat{w}_2^i$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{L}_w\widehat{w}_2^i = \chi_2^i(\xi,t,\varepsilon)$$

и для нее имеют место оценки типа (38) – (40) с $p = 3$, $l = 3$, $q = 4$, $n = 5$.

При $\xi = 0$ функции $\stackrel{\approx}{w}{}_2^i$ и $\widehat{w}_2^i$ отличны от нуля, т.е. вносят невязки в граничное условие (35). Из оценок функций $\stackrel{\approx}{w}{}_2^i$ и $\widehat{w}_2^i$ следует, что эти невязки являются, соответственно, величинами порядка $O(\varepsilon^{3/2})$ и $O(\varepsilon^2)$. Мы устраним их при построении функций $\widetilde{w}_3^i$ и $\widetilde{w}_4^i$. Отметим также, что функции $\stackrel{\approx}{w}{}_2^i$ и $\widehat{w}_2^i$ удовлетворяют нулевому начальному условию.

Таким образом, функция $\sqrt{\varepsilon}\widetilde{w}_1(\xi,t,\varepsilon) + \varepsilon\widetilde{w}_2(\xi,t,\varepsilon)$ удовлетворяет нулевому начальному условию, уравнению (32) с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^{3/2})$, граничному условию (35) с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^{3/2})$, и для функции $\widetilde{w}_2(\xi,t,\varepsilon)$ (и следовательно, для функции $w_2(\xi,t,\varepsilon) = H_0(t)\widetilde{w}_2(\xi,t,\varepsilon)$) имеют место оценки типа (38) – (40) при $p = 1$, $l = 3$, $q = 4$, $n = 5$.

Функции $\widetilde{w}_k$ при $k \geq 3$ определяются аналогично $\widetilde{w}_2$. Так же, как в [1], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. *Для функций $\overline{w}_k(\xi,t,\varepsilon)$, $\stackrel{\approx}{w}_k\,(\xi,t,\varepsilon)$, $\widehat{w}_k(\xi,t,\varepsilon)$ и $g_k(\xi,t,\varepsilon) \equiv L_w\overline{w}_k$ имеют место оценки типа (38) – (40) и (41), (42) соответственно, где $p = 1$ для функций $\overline{w}_k$, $p = 2$ для функций $\stackrel{\approx}{w}_k$, $p = 3$ для функций $\widehat{w}_k$; l, q, n, r, s — некоторые натуральные числа, зависящие от k.*

3. Основной результат

Обозначим через $U_n(x,t,\varepsilon)$ частичную сумму n-го порядка построенного ряда (4).

Теорема. *Функция $U_n(x,t,\varepsilon)$ является равномерным в полуполосе $\overline{D}$ асимптотическим приближением для решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) – (3) с точностью порядка $O\left((\sqrt{\varepsilon})^{n+1}\right)$, т.е. при достаточно малом ε имеет место неравенство*

$$\|u - U_n\| \leq C(\sqrt{\varepsilon})^{n+1},\ (x,t) \in \overline{D},$$

где постоянная C не зависит от ε, а под нормой вектора понимается его евклидова норма.

Доказательство теоремы будет приведено в следующей статье.

Список литературы

1. *Бутузова М. В.* Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной параболической задачи с негладкими пограничными функциями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1176–1191. (English transl.: *Butuzova M. V.* Construction of the asymptotics of the solution of a singularly perturbed parabolic problem with nonsmooth boundary functions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000. 40:8. P. 1129–1144.)

2. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с. (English transl.: *Ilin A. M.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems (Translations of Mathematical Monographs. Volume 102). American Mathematical Society, 1992.)

3. *Бутузов В. Ф., Нестеров А. В.* Об асимптотике решения уравнения параболического типа с малыми параметрами при старших производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 4. С. 865–870. (English transl.: *Butuzov V. F., Nesterov A.V.* On the asymptotic behaviour of the solution of a parabolic equation with small parameters in the highest derivatives // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1982. V. 22. No 4. P. 100 – 105.)

4. *Булычева О. Н., Сушко В. Г.* Построение приближенного решения для одной сингулярно возмущенной параболической задачи с негладким вырождением // Фундаментальная и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 4. С. 881–905. (*Bulychëva O.N. and Sushko V.G.* Construction of the approximative solution for a singularly perturbed parabolic problem with nonsmooth degeneration // Fundam. Prikl. Mat. 1995. V. 1. No 4. P. 881–905.)

Asymptotics of the Solution of Bisingular Problem for a System of Linear Parabolic Equations. I

Butuzova M. V.

M.V. Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia

Keywords: singular perturbations, bisingular problems, asymptotic expansions

Given a bisingular parabolic problem for a system of linear parabolic equations, we construct an asymptotics for the solution of any order with respect to a small parameter, without using the joining procedure for asymptotic expansions.

Сведения об авторе: Бутузова Мария Валентиновна,
МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет,
научный сотрудник