

УДК 517.957

Явление буферности в обобщенном уравнении Свифта–Хоэнберга

Сандуляк Д.В.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: danzova@hotmail.ru

получена 2 сентября 2009

Ключевые слова: мультистабильность, буферность, гидродинамика, принцип подобия, асимптотические методы.

Рассматривается специальным образом обобщенное уравнение Свифта–Хоэнберга с нулевыми граничными условиями типа Дирихле на концах конечного отрезка. Устанавливается, что при увеличении длины l упомянутого отрезка и при фиксированной достаточно малой надкритичности ε количество сосуществующих устойчивых состояний равновесия у этой краевой задачи неограниченно растет, т.е. наблюдается явление буферности.

1. Общая постановка проблемы

Конвекция, связанная с неоднородным нагревом, является без преувеличения самым распространенным видом течений газа и жидкости во Вселенной. Немалую роль она играет и в разнообразных технических устройствах. Этим уже вполне объясняется стойкий и пристальный интерес исследователей к конвекции.

Для «микроскопического» описания структур предложены разнообразные модельные уравнения. К их числу принадлежит уравнение Свифта–Хоэнберга, имеющее вид

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1 + \Delta)^2 w - w^3, \quad (1)$$

где w — действительная функция пространственных и временной координат, а ε — малый положительный параметр.

В качестве объекта исследования нами выбрано специальное обобщение уравнения Свифта–Хоэнберга с одномерной пространственной переменной

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1 + \partial_x^2)^2 w + f(w), \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты РНП.2.2.2.3.8064 и РНП.2.2.1.1.5859) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракты № 02.740.11.0197 и ПЗ0).

где $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$, $w = w(t, x)$ — вещественная скалярная функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = \partial_x^2 w|_{x=0} = \partial_x^2 w|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

$\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$, ε — положительный параметр (надкритичность). Относительно функции $f(w)$ предполагаем, что $f(w) \in C^\infty$ нечётна и $f'(0)=0$, $f'''(0)/3! = a < 0$.

Выполним в краевой задаче (2), (3) замену $\pi x/l \rightarrow x$, приводящую ее к более удобному для последующего анализа виду

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1 + \nu \partial_x^2)^2 w + f(w), \quad (4)$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=\pi} = \partial_x^2 w|_{x=0} = \partial_x^2 w|_{x=\pi} = 0, \quad (5)$$

где $\nu = \pi^2/l^2$.

Фазовым пространством для данной задачи служит $\overset{\circ}{W}_2^4(0, \pi)$, где $\overset{\circ}{W}_2^4$ — замыкание в метрике соболевского пространства $W_2^4(0, \pi)$ линейала гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям (5). Нас интересует существование и устойчивость ее пространственно неоднородных состояний равновесия (так называемых диссипативных структур), бифурцирующих из нуля при уменьшении параметра ν и при фиксированной надкритичности ε , подчиненной требованиям

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Исследуем устойчивость нулевого состояния равновесия задачи (4), (5). Отбросим в (4), (5) нелинейное слагаемое $f(w)$ и применим к получившейся линейной краевой задаче метод Фурье по системе функций $\sin nx$, $n = 1, 2, \dots$. В результате убеждаемся, что за устойчивость решения $w = 0$ отвечают знаки характеристических показателей $\lambda_n = \varepsilon - (1 - n^2\nu)^2$, $n \geq 0$. Отсюда и из условия $0 < \varepsilon < 1$ следует, что состояние равновесия $w = 0$ задачи (4), (5) экспоненциально неустойчиво при

$$\nu \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\nu_-(\varepsilon)}{n^2}, \frac{\nu_+(\varepsilon)}{n^2} \right), \quad \nu_{\pm}(\varepsilon) = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}. \quad (6)$$

Структура множества (6) такова, что с ростом n интервалы $(\nu_-(\varepsilon)/n^2, \nu_+(\varepsilon)/n^2)$ начинают пересекаться во все большем числе. Поэтому при $\nu \rightarrow 0$ нулевое состояние равновесия заведомо неустойчиво и степень его неустойчивости неограниченно растет. Следует также отметить, что состав положительных показателей λ_n при уменьшении ν постоянно обновляется. В связи с этим можно ожидать, что при $\nu \rightarrow 0$ и при условиях $0 < \varepsilon < 1$ в рамках краевой задачи (4), (5) происходит бесконечная последовательность бифуркаций рождения и смерти диссипативных структур.

На основе проделанного линейного анализа конкретизируем поставленную выше бифуркационную проблему. Наиболее простая и естественная ситуация, которая может здесь возникнуть, заключается в следующем: при всех $\nu_-(\varepsilon) < \nu < \nu_+(\varepsilon)$ краевая задача (4), (5) имеет пару непрерывно зависящих от ν диссипативных структур

$$w_1(x, \nu, \varepsilon) = w_0(x, \nu, \varepsilon), \quad w_2(x, \nu, \varepsilon) = w_0(\pi - x, \nu, \varepsilon), \quad (7)$$

где функция $w_0(x, \nu, \varepsilon)$ обладает свойствами:

$$\partial_x w_0(x, \nu, \varepsilon) \neq 0 \text{ при любом } \nu \in (\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon)), w_0(x, \nu_{\pm}(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0. \quad (8)$$

Поскольку задача (4), (5) инвариантна по отношению к замене $\pi - x \rightarrow x$, ее диссипативные структуры существуют парами, т.е. если имеется какое-либо состояние равновесия $w = w(x)$, то таковым будет и $w = w(\pi - x)$.

Требования (8) означают, что при уменьшении ν пара диссипативных структур (7) сначала бифурцирует из нулевого состояния равновесия (при $\nu = \nu_+(\varepsilon)$), а затем «умирает» на нем (при $\nu = \nu_-(\varepsilon)$). С помощью принципа подобия можно построить и другие диссипативные структуры задачи (4), (5), бифурцирующие из нуля при уменьшении ν .

Суть принципа подобия состоит в следующем. Продолжим функцию $w_0(x, \nu, \varepsilon)$ по переменной x на отрезок $[-\pi, 0]$ нечетным образом, а затем на всю ось x по периодичности с периодом 2π . Тогда при любом натуральном n функция $w_0(nx, n^2\nu, \varepsilon)$ по-прежнему будет удовлетворять краевой задаче (4), (5), если, конечно, $n^2\nu \in (\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon))$. Из этого следует, что на каждом из интервалов

$$\nu_-(\varepsilon)/n^2 < \nu < \nu_+(\varepsilon)/n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

задача (4), (5) имеет две диссипативные структуры, задающиеся равенствами

$$w_n^1 = w_0(nx, n^2\nu, \varepsilon), w_n^2 = w_0(\pi - nx, n^2\nu, \varepsilon). \quad (10)$$

Сопоставляя область неустойчивости (6) с интервалами (9) и учитывая свойства (3), убеждаемся, что семействами (10) при $n = 1, 2, \dots$ исчерпываются все диссипативные структуры краевой задачи (4), (5), бифурцирующие из ее нулевого состояния равновесия. Кроме того, как уже отмечалось выше, с ростом n интервалы (9) начинают пересекаться во все возрастающем числе, а значит, и количество сосуществующих диссипативных структур (10) при $\nu \rightarrow 0$ неограниченно растет.

Следует отметить, что пока все изложенные построения, связанные с принципом подобия, носят условный характер, так как мы еще не доказали существования основной пары диссипативных структур (7).

2. Локальная постановка задачи

Ясно, что проблема существования основных диссипативных структур (7) с нужными свойствами (3) может стать локальной только при дополнительном предположении о малости длины интервала $(\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon))$, что эквивалентно малости параметра ε . Таким образом, при нахождении состояний равновесия (7) будем считать, что

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad \nu = 1 + \delta\sqrt{\varepsilon}, \delta \in (-1, 1), \quad (11)$$

где параметр δ , имеющий порядок единицы, отвечает за изменение ν на требуемом интервале $(\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon))$.

Для отыскания диссипативных структур краевой задачи (4), (5) при условиях (11) воспользуемся аналогом стандартного одночастотного метода [1], т.е. подставим в (4), (5) ряд по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ вида

$$w = \sqrt{\varepsilon}w_1(x) + \varepsilon w_2(x) + \varepsilon^{3/2}w_3(x) + \dots, \quad w_1(x) = \xi_0 \sin x, \quad (12)$$

где ξ_0 — неизвестная «амплитуда». Приравнивая затем коэффициенты при ε и $\varepsilon^{3/2}$ в левой и правой частях получившегося выражения, для нахождения w_1 и w_3 приходим к краевым задачам:

$$-(1 + \partial_x^2)^2 w_2 = 0, \quad w_2|_{x=0,\pi} = \partial_x^2 w_2|_{x=0,\pi} = 0, \quad (13)$$

$$-(1 + \partial_x^2)w_3 = (\delta^2 - 1)w_1 - aw_1^3, \quad w_3|_{x=0,\pi} = \partial_x^2 w_3|_{x=0,\pi} = 0. \quad (14)$$

Из краевой задачи (13) вытекает равенство

$$w_2 = \xi_1 \sin x, \quad (15)$$

где вещественная постоянная ξ_1 , как и аналогичная ей постоянная ξ_0 из (12), пока произвольна. Учитывая вид w_2 и равенство $\partial_x^2 w_2 + \partial_x^4 w_2 = 0$, убеждаемся, что условие разрешимости второй из приведенных краевых задач имеет вид

$$a \frac{3}{4} \xi_0^3 - (\delta^2 - 1) \xi_0 = 0. \quad (16)$$

Фигурирующее в (11) ограничение $|\delta| < 1$ на параметр $|\delta|$ позволяет найти из уравнения разветвления (16) амплитуду

$$\xi_0(\delta) = \sqrt{\frac{4(\delta^2 - 1)}{3a}}. \quad (17)$$

Подставляя ее в равенства для w_1 , полностью определяем первый член ряда (12). Что же касается следующей амплитуды ξ_1 , то она находится из условия разрешимости аналогичной (13),(14) краевой задачи для $w_4(x)$, причем для нее получается уже линейное неоднородное уравнение вида $a \frac{3}{2} \xi_0^2 \xi_1 = \varphi$. А так как в дальнейшем явная формула для ξ_1 нам не потребуется, то вычисление правой части φ этого уравнения опустим. Отметим только, что описанный алгоритм отыскания коэффициентов ряда (12) продолжается неограниченно, причем аддитивная добавка $\xi_{k-1} \sin x$, возникающая на k -м шаге, определяется через шаг из условия разрешимости краевой задачи для $w_{k+2}(x)$.

Строгий смысл изложенным формальным построениям придает следующее утверждение.

Теорема 1. При выполнении условий (11) краевая задача (4) имеет две экспоненциально устойчивые диссипативные структуры:

$$w_1(x, \delta, \varepsilon) = w_0(x, \delta, \varepsilon), \quad w_2(x, \delta, \varepsilon) = w_0(\pi - x, \delta, \varepsilon), \quad (18)$$

$$w_0(x, -1, \varepsilon) = w_0(x, 1, \varepsilon) \equiv 0, \quad (19)$$

где функция $w_0(x, \delta, \varepsilon)$ допускает (в метрике пространства $\overset{\circ}{W}_2^4(0, \pi)$) равномерное по δ из любого фиксированного отрезка $[\delta_1, \delta_2] \in (-1, 1)$ асимптотическое представление (12),(17).

Сформулированная теорема представляет собой один из вариантов классической бифуркационной теоремы Гьюринга–Пригожина [1]. Ее обоснование существенно опирается на тот факт, что при условиях (11) краевая задача (4) в достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия имеет экспоненциально орбитально устойчивое одномерное инвариантное многообразие [1]

$$w = \xi \sin x + \Phi(\xi, \varepsilon, \delta), \quad (20)$$

параметризованное некоторой координатой $\xi : |\xi| \leq \xi_0$, $\xi_0 = \text{const} > 0$. Здесь функция Φ со значениями в $W_2^4(0, \pi)$ достаточно гладко зависит от $(\xi, \sqrt{\varepsilon}, \delta)$ и такова, что $\Phi(0, \varepsilon, \delta) \equiv 0$, $\Phi'_\xi(0, 0, \delta) \equiv 0$.

Наличие многообразия (20) позволяет свести проблему поиска интересующих нас состояний равновесия к аналогичной одномерной задаче. Действительно, опираясь на стандартную технику построения нормальных форм, нетрудно убедиться, что после нормировок $\xi/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow \xi$, $\varepsilon t \rightarrow t$ уравнение на указанном многообразии записывается в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = (1 - \delta^2)\xi + a\frac{3}{4}\xi^3 + \varepsilon\Omega(\xi, \varepsilon, \delta). \quad (21)$$

Здесь Ω – гладкая по совокупности переменных ξ , $\sqrt{\varepsilon}$, δ скалярная функция, удовлетворяющая тождеству $\Omega(0, \varepsilon, \delta) \equiv 0$. Как и отмеченное выше аналогичное свойство функции Φ , данное равенство означает, что точке $\xi = 0$ на многообразии (20) отвечает состояние равновесия $w = 0$ исходной задачи (4). Добавим еще, что в силу инвариантности последней относительно замены $w \rightarrow -w$ функции Φ, Ω являются нечетными по ξ .

На завершающем этапе обоснования введем в рассмотрение укороченную нормальную форму

$$\frac{d\xi}{dt} = (1 - \delta^2)\xi + a\frac{3}{4}\xi^3$$

и заметим, что двум экспоненциально устойчивым ее состояниям равновесия $\xi = \pm\xi_0(\delta)$ в полном уравнении (21) отвечают аналогичные состояния равновесия

$$\xi = \pm\xi(\varepsilon, \delta) : \quad \xi(0, \delta) = \xi_0(\delta), \quad \xi(\varepsilon, 1) = \xi(\varepsilon, -1) \equiv 0$$

(последние два тождества — следствия того факта, что при $\delta = \pm 1$ в уравнении (21) происходят бифуркации типа вилки, в результате которых и возникают эти состояния равновесия).

Возвращаясь к интересующей нас проблеме, подставим найденные чуть выше положения равновесия $\xi = \pm\xi(\varepsilon, \delta)$ в (20). В результате получим требуемые диссипативные структуры (18). Остается добавить, что асимптотическое представление (12) для $w_0(x, \delta, \varepsilon)$ вытекает из гладкости многообразия (20) и правой части уравнения (21) по $\sqrt{\varepsilon}$, а тождества (19) — из свойств $\xi(\varepsilon, \pm 1) \equiv 0$ функции $\xi(\varepsilon, \delta)$. Теорема 1 доказана.

Из установленной теоремы и принципа подобия немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, что при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и при каждом натуральном n на соответствующем интервале (9) изменения параметра ν краевая задача (4) имеет пару диссипативных структур*

$$w_n^1(x, \nu, \varepsilon) = w_0(nx, \delta_n(\nu, \varepsilon), \varepsilon), \quad w_n^2(x, \nu, \varepsilon) = w_0(\pi - nx, \delta_n(\nu, \varepsilon), \varepsilon), \quad (22)$$

$$\text{где} \quad \delta_n(\nu, \varepsilon) = (n^2\nu - 1)/\sqrt{\varepsilon}. \quad (23)$$

Отметим, что, как следует из равенств (19), состояния равновесия (22) обладают свойствами $w_n^1|_{\nu=\nu_{\pm}(\varepsilon)/n^2} \equiv w_n^2|_{\nu=\nu_{\pm}(\varepsilon)/n^2} \equiv 0$, т.е. возникают из нуля при $\nu = \nu_{\pm}(\varepsilon)/n^2$. Заметим еще, что поскольку в данной теореме параметры ε и ν независимы, то при фиксированном $\varepsilon > 0$ и при $\nu \rightarrow 0$ количество сосуществующих диссипативных структур (22) неограниченно увеличивается (имеет порядок $\sqrt{\varepsilon/\nu}$). При этом их состав постоянно обновляется, так как каждая пара состояния равновесия (22) «живет» лишь в своей ячейке (9). Тем самым, при $\nu \rightarrow 0$ наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций их рождения и смерти.

3. Исследование устойчивости

Для того чтобы сформулировать основной результат данной работы, касающийся устойчивости построенных выше состояний равновесия (22), фиксируем произвольно два числа δ_1 и δ_2 , удовлетворяющие неравенствам

$$-1/\sqrt{3} < \delta_1 < \delta_2 < 1/\sqrt{3}. \quad (24)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_1, \delta_2) \in (0, 1)$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и при каждом $n \geq 1$ пара диссипативных структур (22), (23) краевой задачи (4) экспоненциально устойчива на отрезке*

$$[(1 + \delta_1\sqrt{\varepsilon})/n^2, (1 + \delta_2\sqrt{\varepsilon})/n^2] \quad (25)$$

изменения параметра ν .

Доказательство. Для обоснования приведенной теоремы фиксируем произвольно номер n и линеаризуем краевую задачу (4) на состоянии равновесия $w = w_n^1(x, \nu, \varepsilon)$. Подчеркнем, что случай $w = w_n^2(x, \nu, \varepsilon)$ не нуждается в отдельном рассмотрении, так как w_n^2 переходит в w_n^1 либо после замены $\pi - x \rightarrow x$ (при $n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$), либо в результате замены $w \rightarrow -w$ (при $n = 2k, k = 1, 2, \dots$). Выполним, далее, в получившейся линейной краевой задаче замену $nx \rightarrow x$ и будем искать ее решения в форме Эйлера, т.е. в виде $w = h(x) \exp(\lambda t)$. В результате для определения $h(x)$ и возможных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ приходим к спектральной задаче

$$-(1 + (1 + \delta\sqrt{\varepsilon})\partial_x^2)^2 h + (\varepsilon + f'(w_0(x, \delta, \varepsilon)))h = \lambda h, \quad (26)$$

$$h|_{x=0} = h|_{x=n\pi} = \partial_x^2 h|_{x=0} = \partial_x^2 h|_{x=n\pi} = 0, \quad (27)$$

где $w_0(x, \delta, \varepsilon)$ — функция из (7), а параметр δ задан равенством $\delta = \delta_n(\nu, \varepsilon)$ (см. (23)). Итак, проблема устойчивости пары состояний равновесия (22), (23) свелась к анализу расположения спектра задачи (26), (27). В связи с этим обратим внимание, что в силу самосопряженности фигурирующего в левой части уравнения (26) дифференциального оператора этот спектр состоит из счетного числа действительных собственных значений.

Наряду с задачей (26), (27) введем в рассмотрение вспомогательную краевую задачу

$$-(1 + \partial_x^2)^2 h = \lambda h, h|_{x=0, n\pi} = \partial_x^2 h|_{x=0, n\pi} = 0,$$

получающуюся из исходной при $\varepsilon = 0$. Непосредственная проверка показывает, что ее собственные значения имеют вид

$$\lambda(z) = -(1 - z^2)^2, z = m/n, m = 1, \dots, \quad (28)$$

а отвечающие им собственные функции задаются равенствами $w = \sin(mx/n)$, $m > 0$. Из формул (28) вытекает, что равномерно по n все пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственных значений задачи (26), (27) лежат на полуоси $(-\infty, 0]$. Однако, в силу того, что $\lambda(z)|_{z=1} = 0$, заведомо существуют и так называемые критические точки спектра, стремящиеся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Ясно, что именно от их знаков зависит в конечном итоге устойчивость интересующих нас состояний равновесия.

При построении асимптотики критических собственных значений существенно то обстоятельство, что при $\varepsilon = 0$ отвечающие им собственные функции

$$h = \sin(1 + z)x, z = k/n, k \in \mathbb{Z} \quad (29)$$

можно представить в виде

$$h = h_1(x) \cos(zx) + h_2(x) \sin(zx), \quad (30)$$

$$h_1(x)|_{x=0, \pi} = \partial_x^2 h_1(x)|_{x=0, \pi}, \quad \partial_x h_2(x)|_{x=0, \pi} = \partial_x^3 h_2(x)|_{x=0, \pi}. \quad (31)$$

Поэтому будем искать их в указанном виде и при $\varepsilon > 0$. Подставляя выражение (30) в уравнение (26), получаем систему

$$\begin{aligned} -h_1 - 2[1 + \delta\sqrt{\varepsilon}]\{\partial_x^2 h_1 - z^2 h_1 + 2z\partial_x h_2\} - (1 + \delta\sqrt{\varepsilon})^2(\partial_x^4 h_1 - 6z^2\partial_x^2 h_1 + z^4 h_1 + \\ + 4z\partial_x^3 h_2 - 4z^3\partial_x h_2) + (f'(w_0) + \varepsilon)h_1 = \lambda h_1, \\ -h_2 - 2(1 + \delta\sqrt{\varepsilon})\{-2z\partial_x h_1 + \partial_x^2 h_2 - z^2 h_2\} - (1 + \delta\sqrt{\varepsilon})^2(-4z\partial_x^3 h_1 + 4z^3\partial_x h_1 + \\ + \partial_x^4 h_2 - 6z^2\partial_x^2 h_2 + z^4 h_2) + (f'(w_0) + \varepsilon)h_2 = \lambda h_2, \end{aligned} \quad (32)$$

которую дополним граничными условиями (31). Для удобства параметр z (принимаящий, напомним, дискретные значения $\pm k/n, k = 0, 1, \dots$) будем здесь считать меняющимся непрерывно на некотором отрезке $|z| \leq z_0$, где $z_0 > 0$ достаточно мало. То же самое относится и к параметру δ : считаем, что он независимо от n, ε, ν непрерывно меняется на отрезке $[\delta_1, \delta_2]$ (см. (24)).

Из очевидной связи краевых задач (26), (27) и (31), (32) следует, что проблема устойчивости диссипативных структур (22), (23) сводится к асимптотическому вычислению собственных значений задачи (31), (32), стремящихся к нулю при $\varepsilon, z \rightarrow 0$. Действительно, предположим, что мы уже нашли одно из таких собственных значений

$$\lambda = \lambda(z, \delta, \varepsilon) : |z| \leq z_0, \delta \in [\delta_1, \delta_2], \lambda(0, \delta, 0) \equiv 0 \quad (33)$$

и ему отвечает собственная функция с компонентами $h_j(x, z, \delta, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, для которых в силу (30) справедливы равенства вида $h_1(x, z, \delta, 0) = \sin x$, $h_2(x, z, \delta, 0) = \pm \cos x$. Тогда, продолжая h_1 с отрезка $0 \leq x \leq \pi$ на всю ось x по закону нечетности и 2π -периодичности, а h_2 — по четности и 2π -периодичности, получим набор критических собственных значений

$$\lambda = \lambda(z, \delta, \varepsilon)|_{z=\pm k/n, \delta=\delta_n(\nu, \varepsilon)}, k = 0, 1, \dots, k/n \leq z_0 \quad (34)$$

исходной задачи (26), (27) и соответствующий набор собственных функций

$$h = \left(h_1(x, z, \delta, \varepsilon) \cos zx - h_2(x, z, \delta, \varepsilon) \sin zx \right) \Big|_{z=\pm k/n, \delta=\delta_n(\nu, \varepsilon)}. \quad (35)$$

При $\varepsilon = z = 0$ краевая задача (32), (31) распадается на две независимые краевые задачи

$$\begin{aligned} -(1 + \partial_x^2)^2 h_1 &= \lambda h_1, h_1|_{x=0, \pi} = \partial_x^2 h_1|_{x=0, \pi}, \\ -(1 + \partial_x^2)^2 h_2 &= \lambda h_2, \partial_x h_2|_{x=0, \pi} = \partial_x^3 h_1|_{x=0, \pi}, \end{aligned} \quad (36)$$

каждая из которых имеет простое нулевое собственное значение с собственными функциями $h_1^0(x) = \sin x$ и $h_2^0(x) = \cos x$ соответственно. Остальные же собственные значения задач (3.12) являются отрицательными. Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный левыми частями уравнений (32) в пространстве $L_2([0, \pi]; R^2)$ (область определения $E = W_2^4([0, \pi]; R^2)$ этого оператора состоит из вектор-функций $\text{colon}(h_1; h_2)$, удовлетворяющих граничным условиям (31)). Из отмеченного чуть выше следует, что при всех достаточно малых ε и z оператор L имеет двумерное инвариантное подпространство

$$E_0(\varepsilon, z, \delta) = \text{span}\{v_1(x, \varepsilon, z, \delta), v_2(x, \varepsilon, z, \delta)\} \subset E, \quad (37)$$

где $v_j(x, 0, 0, \delta) = e_j(x)$, $j = 1, 2$, $e_1(x) = \text{colon}(\sin x, 0)$, $e_2(x) = \text{colon}(0, \cos x)$.

Инвариантность пространства (37) означает существование такой матрицы второго порядка $\Lambda(\varepsilon, z, \delta)$, $\Lambda(0, 0, \delta) = 0$, что

$$LV = V\Lambda, \quad (38)$$

где по столбцам матрицы V размера 2×2 стоят базисные функции пространства $E_0(\varepsilon, z, \delta)$. Отметим также, что матрицы V и Λ можно выбрать гладко зависящими от $\sqrt{\varepsilon}, \delta, z$, так как от этих параметров гладко зависят коэффициенты уравнений (32).

Итак, проблема устойчивости состояний равновесия (22), (23) свелась к исследованию знаков собственных значений матрицы $\Lambda(\varepsilon, z, \delta)$, что, в свою очередь, требует

знания нескольких членов ее тейлоровского разложения по $\sqrt{\varepsilon}$ и z . Для их нахождения подставим в равенство (38) ряды

$$\begin{aligned}\Lambda &= \varepsilon\Lambda_1 + \sqrt{\varepsilon}z\Lambda_2 + z^2\Lambda_3 + \dots, \\ V &= V_0 + \sqrt{\varepsilon}V_1 + zV_2 + \varepsilon V_3 + \sqrt{\varepsilon}zV_4 + z^2V_5 + \dots,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}V_0 &= [e_1(x), e_2(x)], & V_j &= [v_{1j}, v_{2j}], \quad j = 1, \dots, 5; \\ v_{1j} &= \text{colon}(h_{1j}, 0), & v_{2j} &= \text{colon}(0, h_{2j}), \quad j = 1, 3, 5; \\ v_{1j} &= \text{colon}(0, h_{1j}), & v_{2j} &= \text{colon}(h_{2j}, 0), \quad j = 2, 4;\end{aligned}$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 \\ 0 & \lambda_6 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ и z , для определения функций $h_{1j}, h_{2j}, j = 1, \dots, 5$ получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач, из условий разрешимости которых найдутся элементы матриц $\Lambda_j, j = 1, 2, 3$.

Действуя указанным выше способом, убеждаемся, что $h_{11} = h_{21} = h_{12} = h_{22} = 0$, а функции $h_{1j}, h_{2j}, j = 3, 4, 5$ являются решениями краевых задач ($L_0 = -(1 + \partial_x^2)^2$)

$$\begin{aligned}L_0 h_{13} + (1 - \delta^2 + 3a\xi_0^2(\delta) \sin^2 x) \sin x &= \lambda_1 \sin x, & h_{13}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^2 h_{13}|_{x=0,\pi} = 0, \\ L_0 h_{23} + (1 - \delta^2 + 3a\xi_0^2(\delta) \sin^2 x) \cos x &= \lambda_2 \cos x, & \partial_x h_{23}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^3 h_{23}|_{x=0,\pi} = 0, \\ L_0 h_{24} &= (\lambda_3 + 4\delta) \sin x, & h_{24}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^2 h_{24}|_{x=0,\pi} = 0, \\ L_0 h_{14} &= (\lambda_4 + 4\delta) \cos x, & \partial_x h_{14}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^3 h_{14}|_{x=0,\pi} = 0, \\ L_0 h_{15} &= (\lambda_5 + 4) \sin x, & h_{15}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^2 h_{15}|_{x=0,\pi} = 0, \\ L_0 h_{25} &= (\lambda_6 + 4) \cos x, & \partial_x h_{25}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^3 h_{25}|_{x=0,\pi} = 0.\end{aligned}$$

Что же касается разрешимости этих задач, то она обеспечивается подходящим выбором постоянных $\lambda_j, j = 1, \dots, 6$, а именно, равенствами

$$\lambda_1 = \frac{3a}{2}\xi_0^2(\delta), \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -4\delta, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = -4. \quad (39)$$

Полученной информации о матрице $\Lambda(\varepsilon, z, \delta)$ достаточно для анализа знаков ее определителя и следа при всех $\varepsilon, |z| \ll 1$. Действительно, функции $\text{tr}\Lambda(\varepsilon, 0, \delta), \det\Lambda(\varepsilon, 0, \delta)$, являются четными по z и $\det\Lambda(\varepsilon, 0, \delta) \equiv 0$, так как, во-первых, краевая задача (32), (31) не меняется при заменах $z \rightarrow -z, h_2 \rightarrow -h_2$; во-вторых, при $z = 0$ она имеет нулевое собственное значение с собственной функцией

$$\text{colon}(0, \partial_x w_0(x, \delta, \varepsilon)), \quad (40)$$

где w_0 — функция, фигурирующая в (7). А отсюда и из формул (17), (39) заключаем, что

$$\text{tr}\Lambda = -2(1 - \delta^2)\varepsilon - 8z^2 + O(\varepsilon^{3/2} + \sqrt{\varepsilon}z^2 + z^4), \quad (41)$$

$$\det\Lambda = 8z^2[(1 - 3\delta^2)\varepsilon + 2z^2 + O(\varepsilon^{3/2} + \sqrt{\varepsilon}z^2 + z^4)]. \quad (42)$$

Из тейлоровского разложения (41) вытекает отрицательность $\text{tr}\Lambda$ при любом фиксированном $\delta \in (-1, 1)$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0, |z|$. Поэтому в анализе нуждается только знак функции $z^{-2} \det \Lambda$. Но при $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$ в силу выбора δ_1, δ_2 (см. (24)) первое слагаемое в квадратных скобках из формулы (42) положительно, что влечет неравенство $z^{-2} \det \Lambda > 0$ при всех $\varepsilon, |z| \ll 1$.

Подведем итог. Как следует из проведенного анализа, интересующие нас критические собственные значения задачи (26), (27) являются собственными значениями матриц

$$\Lambda_k = \Lambda(\varepsilon, z, \delta)|_{z=k/n, \delta=\delta_n(\nu, \varepsilon)}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm k_0, \quad (43)$$

где k_0 – целая часть nz_0 . Заметим, далее, что поскольку при значениях ν из отрезка (9) автоматически выполняется неравенство $\delta_n^2(\nu, \varepsilon) < 1/3$, то все эти матрицы оказываются гурвицевыми. Исключение составляет только матрица (43) с номером $k = 0$, одно собственное значение которой отрицательно, а другое равно нулю. Однако при обратном переходе от задачи (32), (31) к (26), (27) нулевое собственное значение пропадает, так как в силу (33), (29) и (40) ему отвечает нулевая собственная функция. Теорема 3 доказана.

Следует отметить, что отрезки (25), как и исходные интервалы (9), с ростом n начинают пересекаться во все большем числе. А это значит, что при любом фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при $\nu \rightarrow 0$ наряду с ростом общего числа сосуществующих диссипативных структур (22), (23) неограниченно увеличивается и количество устойчивых среди них. Точнее говоря, теорема 3 гарантирует существование порядка $(\delta_2 - \delta_1)/(2\sqrt{\nu})$ устойчивых состояний равновесия. Тем самым, установлено, что при $\nu \rightarrow 0$ в рамках краевой задачи (2) реализуется хорошо известное явление буферности.

Литература

1. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х., Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым // Тр. Института матем. и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, №1. С. 109-140.

The buffer phenomenon in the generalization of the Swift–Hohenberg equation

Keywords: buffer phenomenon, multistability, hydrodynamics, asymptotic methods

The generalization of the Swift–Hohenberg equation is considered in this article. We establish that the number of steady-state solutions unrestrictedly grows up when the delay tends to infinity and other parameters are correctly fixed.

Сведения об авторе: Сандуляк Дарья Владимировна,
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова,
аспирант, ассистент кафедры диф. уравнений, младший научный сотрудник.