Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **3** (2011) 58–62

УДК 517.9

Устойчивость бегущих волн в уравнении Гинзбурга–Ландау с малой диффузией

Кащенко А.А.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: sa-ahr@yandex.ru

получена 1 сентября 2011

Ключевые слова: бегущая волна, малый параметр, уравнение Гинзбурга–Ландау

Исследуется устойчивость бегущих волн в зависимости от значений параметров. Найдены необходимые условия неустойчивости и достаточные условия устойчивости бегущих волн.

Введение

Уравнение Гинзбурга–Ландау возникает при описании большого класса волновых явлений в пространственно распределенных системах [1–2].

Известно, что динамика уравнения Гинзбурга–Ландау может быть достаточно сложной [3], однако большинство результатов о поведении решений этого уравнения получены численно.

В настоящей работе аналитически будут получены необходимые и достаточные условия устойчивости решений вида бегущих волн для уравнения Гинзбурга–Ландау с малой диффузией.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Гинзбурга–Ландау с малой диффузией

$$\dot{u} = u(1-(1+ib)|u|^2) + \varepsilon^2(1+id)u'' \tag{1}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t,x). \tag{2}$$

Здесь u — комплекснозначная функция, ε — малый положительный параметр, точкой обозначена производная по t, а штрихом — по x. Краевая задача (1), (2) имеет набор решений вида „бегущих волн“: $u_k = \rho_k e^{i\omega_k t + ikx}$, где

$$\rho_k = \sqrt{1-\varepsilon^2 k^2}, \quad \omega_k = -b(1-\varepsilon^2k^2) - \varepsilon^2 dk^2,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственные контракты № 14.740.11.0873 и № П2223) и гранта Президента Российской Федерации (контракт № МК-3867.2011.1).

k — целое. Поставим задачу исследования устойчивости бегущих волн при достаточно малых значениях параметра ε.

2. Исследование расположения корней характеристического полинома

Хорошо известно, что для параболических уравнений работает теорема Ляпунова об устойчивости решений по первому приближению, поэтому будем исследовать линеаризованную на бегущей волне краевую задачу.

Для удобства изучения устойчивости найденных решений, в уравнении (1) сделаем замену $u = u_k(1 + v)$, где $v = v_1 + iv_2$. После сокращения на u_k получим уравнение на v_1 и v_2:

$$\begin{aligned} &i\omega_k(1 + v_1 + iv_2) + \dot{v_1} + i\dot{v_2} = (1 + v_1 + iv_2)[1 - (1 + ib)\rho_k^2(1 + 2v_1 + \\ &+ v_1^2 + v_2^2)] + \varepsilon^2(1 + id)[-k^2(1 + v_1 + iv_2) + 2ik(v_1' + iv_2') + v_1'' + iv_2''], \\ &v_1(t, x + 2\pi) \equiv v_1(t, x), \qquad v_2(t, x + 2\pi) \equiv v_2(t, x). \end{aligned} \tag{3}$$

С помощью стандартных методов построим семейство характеристических многочленов для линеаризованной системы (3) (при каждом целом n имеем характеристический полином):

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + 2\lambda(2\varepsilon^2 dkin + \varepsilon^2 n^2 + 1 - \varepsilon^2 k^2) + (d^2 + 1)\varepsilon^2 n^2(\varepsilon^2 n^2 - 4\varepsilon^2 k^2) + \\ &+ 2(1 - \varepsilon^2 k^2)((bd + 1)\varepsilon^2 n^2 + 2(d - b)\varepsilon^2 kni) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Очевидно, что уравнение (4) имеет нулевой корень при $n = 0$.

Для каждого номера волны k будем исследовать расположение корней уравнения (4) при всех целых ненулевых значениях n.

2.1. Получение достаточных условий неустойчивости

Рассмотрим случай асимптотически больших номеров волн. Пусть z — произвольное фиксированное число из объединения интервалов $(-1, 1)\backslash\{0\}$. Представим k в виде $k = z/\varepsilon + \theta_z + k_1$, где $\theta_z \in [0, 1)$ и дополняет z/ε до целого, k_1 — целое число. Уравнение (4) тогда принимает вид

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + 2\lambda[2\varepsilon din(z + \varepsilon(\theta_z + k_1)) + 1 - z^2 - 2z\varepsilon(\theta_z + k_1) + O(\varepsilon^2)] + \\ &+ 2(1 - z^2 - 2z\varepsilon(\theta_z + k_1))[(bd + 1)\varepsilon^2 n^2 + 2(d - b)\varepsilon ni(z + \varepsilon(\theta_z + k_1))] - \\ &- 4(d^2 + 1)\varepsilon^2 n^2 z^2 + o(\varepsilon^2) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Зафиксируем θ_z, тогда корни уравнения (5) зависят от ε регулярно. Исследуем их расположение. При $\varepsilon = 0$ и любом n есть корень $\lambda = 0$, поэтому при ненулевых ε разложим корень λ по степеням $\varepsilon : \lambda = \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + O(\varepsilon^3)$, где λ_1 и λ_2 — комплексные числа.

Приравняем коэффициенты уравнения (5) при одинаковых степенях ε, найдем λ_1 и $\operatorname{Re}\lambda_2$:

$$\lambda_1 = 2(b - d)niz, \qquad \operatorname{Re}\lambda_2 = -(bd + 1)n^2 + \frac{2z^2(b^2 + 1)n^2}{1 - z^2}.$$

Заметим, что λ_1 и $\operatorname{Re}\lambda_2$ от θ_z не зависят, поэтому при $\theta_z = \theta_z(\varepsilon)$ асимптотика получается равномерной по θ_z из отрезка [0,1], и проведенные выше вычисления правомерны.

При условии $bd+1<0$ при любом z из объединения интервалов $(-1,1)\backslash\{0\}$ $\operatorname{Re}\lambda_2$ будет положительной. Если же $bd+1>0$, то действительная часть λ_2 будет положительной при

$$\sqrt{\frac{bd+1}{2b^2+bd+3}}=z_2<|z|<1.$$

Из вышесказанного следует, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $z\in(-1,1)$ — произвольно фиксировано. Пусть выполнено неравенство $bd+1<0$. Тогда при всех достаточно малых ε бегущая волна $U_{z,k_1}(t,x)$ неустойчива.*

Теорема 2. *Пусть $z\in(-1,-z_2)\cup(z_2,1)$ — произвольное фиксированное число. Пусть выполнено неравенство $bd+1>0$. Тогда при всех достаточно малых ε бегущая волна $U_{z,k_1}(t,x)$ неустойчива.*

Здесь и далее

$$\begin{aligned}&U_{z,k_1}(t,x)=u_{z/\varepsilon+\theta_z+k_1}(t,x)=\sqrt{1-(z+\varepsilon(\theta_z+k_1))^2}\exp(i(z/\varepsilon+\theta_z+k_1)x)\cdot\\&\cdot\exp\left(i(-b+(b-d)(z+\varepsilon(\theta_z+k_1))^2)t\right).\end{aligned}$$

2.2. Получение достаточных условий устойчивости

Везде далее считаем, что $bd+1>0$.

В уравнении (4) введем обозначения. Пусть $\varepsilon k=z$, $\varepsilon n=m$. Отметим, что из условия неотрицательности ρ_k имеем $|z|<1$. Тогда получим уравнение

$$\begin{aligned}&\lambda^2+2\lambda(2dizm+m^2+1-z^2)+(d^2+1)m^2(m^2-4z^2)+\\&+2(1-z^2)((bd+1)m^2+2(d-b)izm)=0.\end{aligned}\tag{6}$$

В новых терминах нас интересует расположение корней (6) в зависимости от z при каждом ненулевом m. В пункте 2.1. было доказано, что при $|z|>z_2$ наблюдается неустойчивость, поэтому нас будут интересовать только значения $|z|<z_2$. Будем искать корни уравнения (6) в виде $\lambda=a+ic$. Подставляя это соотношение в уравнение (6), получим:

$$\begin{aligned}&2a+a^2+2ic+2iac-c^2+2m^2+2am^2+2icm^2+2bdm^2+m^4+d^2m^4-\\&-4ibmz+4idmz+4iadmz-4cdmz-2az^2-2icz^2-6m^2z^2-2bdm^2z^2-\\&-4d^2m^2z^2+4ibmz^3-4idmz^3=0.\end{aligned}\tag{7}$$

Выделим действительную и мнимую части уравнения. Из мнимой части выразим c через a и подставим это соотношение в действительную часть уравнения (7). В результате приходим к соотношению

$$\begin{aligned}&(1+a+m^2-z^2)^{-2}[2(1-z^2)^2(1+bd-(3+2b^2+bd)z^2)m^2+\\&+(1-z^2)(5+4bd+d^2-(13+12bd+d^2)z^2)m^4+(1+d^2)m^8+\\&+2(2+bd+d^2-(4+bd+3d^2)z^2)m^6+a^4+4(m^2+1-z^2)a^3+\\&+[5(m^2+1-z^2)^2+4d^2z^2m^2+m^2((d^2+1)(m^2-4z^2)+2(1-z^2)(1+bd))]a^2+\\&+[(m^2+1-z^2)^2+4d^2z^2m^2+m^2((d^2+1)(m^2-4z^2)+2(1-z^2)(1+bd))]\cdot\\&\cdot2(m^2+1-z^2)a]=0.\end{aligned}\tag{8}$$

Заметим, что нас интересуют только неотрицательные корни a уравнения (8). Выражение $1-z^2+m^2$ при любом m и любом $|z|<1$ положительно, следовательно,

$1 + a + m^2 - z^2$ не равно нулю. Очевидно, что если при фиксированном z и всех ненулевых значениях m коэффициенты при всех степенях a будут положительны, то уравнение (8) не будет иметь неотрицательных корней при этом значении z.

Лемма 1. *Пусть $z \in (-z_2, z_2)$. Тогда коэффициенты при a^1 и a^2 уравнения* (8) *положительны.*

Доказательство.

Докажем, что при $|z| < z_2$ выражение

$$(m^2 + 1 - z^2)^2 + 4d^2z^2m^2 + m^2((d^2 + 1)(m^2 - 4z^2) + 2(1 - z^2)(1 + bd)) \tag{9}$$

положительно. Преобразуем (9):

$$\begin{aligned}&(m^2 + 1 - z^2)^2 + 4d^2z^2m^2 + m^2((d^2 + 1)(m^2 - 4z^2) + 2(1 - z^2)(1 + bd)) =\\ &= 1 + 2(2 + bd)m^2 + (2 + d^2)m^4 - 2(1 + 4m^2 + bdm^2)z^2 + z^4.\end{aligned}$$

В результате замены $z^2 = t$ получим квадратный трехчлен относительно t:

$$f(t) = 1 + 2(2 + bd)m^2 + (2 + d^2)m^4 - 2(1 + 4m^2 + bdm^2)t + t^2.$$

Докажем, что при $t < z_2^2$ значения $f(t)$ положительны. Заметим, что значение выражения $f(t)$ в точке z_2^2 равно положительному числу, а вершина параболы (графика $f(t)$) находится правее этой точки. Отсюда вытекает положительность выражения (9), а следовательно, положительность коэффициентов при a^1 и a^2 уравнения (8).

Коэффициенты при a^4 и a^3 в уравнении (8) положительны при любом ненулевом m и $|z| < 1$. При $|z| < z_0 = \min\{z_2, z_4, z_6\}$, где

$$z_4 = \sqrt{\frac{5 + 4bd + d^2}{13 + 12bd + d^2}}, \qquad z_6 = \sqrt{\frac{2 + bd + d^2}{4 + bd + 3d^2}},$$

коэффициент при a^0 уравнения (8) положителен при любом ненулевом значении m.

Как следствие, получаем теорему.

Теорема 3. *Пусть выполнено неравенство $bd + 1 > 0$. Пусть $z \in (-z_0, z_0)$ — произвольное фиксированное число. Тогда при всех достаточно малых ε бегущая волна $u_{z/\varepsilon}$ устойчива.*

Легко видеть, что при дополнительном условии $|b| \geq |d|$ наименьшим из чисел z_2, z_4, z_6 является z_2.

Теорема 4. *Пусть $bd + 1 > 0$ и $|b| \geq |d|$. Тогда при всех достаточно малых ε бегущая волна $u_{z/\varepsilon}$ устойчива, если $|z| < z_2$, и неустойчива, если $z_2 < |z| < 1$.*

Выводы

Относительно устойчивости по Ляпунову решений уравнения (1) вида бегущих волн получены следующие результаты.

1. При выполнении неравенства $bd + 1 < 0$ неустойчивы все бегущие волны.

2. При выполнении системы неравенств $bd + 1 > 0, \quad |b| < |d|$ бегущие волны $u_{z/\varepsilon}$ при $|z| < z_0$ устойчивы, а при $|z| > z_2$ неустойчивы.

3. При выполнении системы неравенств $bd + 1 > 0, \quad |b| \geq |d|$ выражение z_2 является критическим значением, в том смысле, что при $|z| < z_2$ наблюдается устойчивость, а при $|z| > z_2$ — неустойчивость.

Список литературы

1. Гинзбург В.И., Ландау Л.Д. К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 1064.

2. Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие / Н.А. Кудряшов. Долгопрудный: Интеллект, 2010. 368 с.

3. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.

Analysis of Running Waves Stability in the Ginzburg–Landau Equation with Small Diffusion

Kashchenko A.A.

Keywords: running wave, small parameter, Ginzburg–Landau equation

We study the local dynamics of the Ginzburg–Landau equation with small diffusion in a neibourhood of running waves. We find necessary conditions of running waves instability and sufficient conditions of their stability.

Сведения об авторе:

Кащенко Александра Андреевна,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

студентка 5 курса математического факультета