*Моделирование и анализ информационных систем.* Т. 24, №2 (2017), с. 141–154
*Modeling and Analysis of Information Systems.* Vol. 24, No 2 (2017), pp. 141–154



**DOI:** 10.18255/1818-1015-2017-2-141-154

УДК 519.16 + 514.172.45

# Полиэдральные характеристики задач о сбалансированном и несбалансированном двудольных подграфах

**Бондаренко В. А.[1,2], Николаев А. В.[3], Шовгенов Д. А.[1]**

*получена 25 августа 2016*

**Аннотация.** Исследуются полиэдральные характеристики трех задач о построении оптимальных полных двудольных подграфов двудольных графов. В первой задаче рассматриваются сбалансированные подграфы с одинаковым числом вершин в каждой доле и произвольными весами ребер. В двух других задачах речь идет о несбалансированных подграфах максимального и минимального веса с неотрицательными ребрами. Устанавливается, что все три задачи являются NP-трудными. В работе изучаются многогранники и конусные разбиения рассматриваемых задач, а также их графы. Для задачи о сбалансированном подграфе приводится условие смежности вершин в полиэдральном графе и графе соответствующего конусного разбиения. Плотность полиэдрального графа оценивается снизу сверхполиномиальной функцией. Для задач о несбалансированных подграфах строятся сверхполиномиальные нижние оценки плотности графов неотрицательных конусных разбиений. Полученные результаты характеризуют временную трудоемкость задач в широком классе алгоритмов, использующих линейные сравнения.

**Ключевые слова:** полный двудольный граф, полиэдральный граф, конусное разбиение, плотность графа, NP-трудная задача

**Для цитирования:** Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А., "Полиэдральные характеристики задач о сбалансированном и несбалансированном двудольных подграфах", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:2 (2017), 141–154.

**Об авторах:**
Бондаренко Владимир Александрович, orcid.org/0000-0002-5976-3446, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия, e-mail: bond@bond.edu.yar.ru

Николаев Андрей Валерьевич, orcid.org/0000-0003-4705-2409, канд. физ.-мат. наук,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия, e-mail: andrei.v.nikolaev@gmail.com

Шовгенов Джамболет Азаматович, orcid.org/0000-0003-2022-4514, аспирант,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003, Россия, e-mail: djsh92@mail.ru

**Благодарности:**
[1] При частичной поддержке гранта РФФИ № 14-01-00333.
[2] При частичной поддержке инициативной НИР ВИП-004 АААА-А16-116070610022-6.
[3] При поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-5400.2015.13.

# Введение

Рассматривается известная комбинаторная задача о существовании сбалансированного полного двудольного подграфа.

**Сбалансированный полный двудольный подграф (balanced complete bipartite subgraph, BCBS).** Заданы двудольный граф $G = (U, V, E)$ и положительное целое $k \le |U| + |V|$. Существуют ли такие подмножества $U_x \subseteq U$ и $V_x \subseteq V$, что $|U_x| = |V_x| = k$ и $\{u, v\} \in E$ для любой пары вершин $u \in U_x$, $v \in V_x$.

К этой задаче сводится задача о клике, и она является NP-полной [12, 14]. Оптимизационная версия задачи, в которой требуется найти сбалансированный полный двудольный подграф с максимальным числом вершин, крайне трудна с точки зрения аппроксимации, для нее не известно ни одного хорошего приближенного алгоритма [11]. Значительное число работ посвящено изучению полиномиально разрешимых частных случаев задачи [7, 17]. Заметим, что полный двудольный граф также для сокращения называют бикликой [10].

Интересным является тот факт, что близкая задача о несбалансированном полном двудольном подграфе (замена условия $|U_x| = |V_x| = k$ на $|U_x| + |V_x| = k$) полиномиально разрешима. В основе алгоритма лежит известная теорема Кёнига [10].

**Теорема 1.** *(Кёниг) Для двудольного графа число рёбер в максимальном паросочетании совпадает с числом вершин в минимальном вершинном покрытии.*

Максимальное паросочетание в двудольном графе может быть найдено за время $O(|E|\sqrt{|U| + |V|})$ по алгоритму Хопкрофта–Карпа [16]. Доказательство теоремы Кёнига конструктивное и позволяет построить вершинное покрытие. Все вершины, не попавшие в минимальное вершинное покрытие, образуют максимальное независимое множество. Если рассмотреть дополнение двудольного графа, то независимое множество превратится в полный двудольный подграф.

Задачи, связанные с построением полных двудольных подграфов, часто возникают в различных прикладных областях. В частности, в вычислительной биологии для бикластеризации генов строится двудольный граф, в одну долю которого помещаются гены, а во вторую их свойства, и требуется построить наибольшую биклику [9]. Задача BCBS возникает также при проектировании интегральных схем (VLSI) для минимизации размера программируемых логических матриц (PLA) [18].

Рассмотрим три оптимизационных версии задачи о биклике во взвешенном двудольном графе.

**Взвешенный сбалансированный полный двудольный подграф (weighted balanced complete bipartite subgraph, WBCBS).** Заданы: полный двудольный граф $G = (U, V, E)$, $|U| = |V| = n$, функция весов $C : E \to \mathbb{R}$ и положительное целое $k \le n$. Найти: сбалансированный полный двудольный подграф $G_x = (U_x, V_x, E_x)$ с максимальным (минимальным) суммарным весом ребер, при условии, что $|U_x| = |V_x| = k$.

**Максимальный взвешенный полный двудольный подграф (maximum weighted complete bipartite subgraph, maxWCBS).** Заданы: полный двудольный граф $G = (U, V, E)$, $|U| = |V| = n$, функция весов $C : E \to \mathbb{R}_+$ и положительное целое $k \le 2n$. Найти: полный двудольный подграф $G_x = (U_x, V_x, E_x)$ с максимальным суммарным весом ребер, при условии, что $|U_x| + |V_x| = k$.

**Минимальный взвешенный полный двудольный подграф (minimum weighted complete bipartite subgraph, minWCBS).** Заданы: полный двудольный граф $G = (U, V, E)$, $|U| = |V| = n$, функция весов $C : E \to \mathbb{R}_+$ и положительное целое $k \leq 2n$. Найти: полный двудольный подграф $G_x = (U_x, V_x, E_x)$ с минимальным суммарным весом ребер, при условии, что $|U_x| + |V_x| = k$.

Отметим, что для задачи о сбалансированной биклике вопрос о том, рассматривается ли задача на минимум или на максимум, не является принципиальным. В обоих случаях решением будет $k$-сбалансированный полный двудольный подграф. Далее ограничимся рассмотрением только варианта на максимум. Задача на минимум может быть получена из него инвертированием знака у весов ребер.

В то же время для несбалансированного случая задачи на минимум и максимум являются принципиально разными. Действительно, если мы рассмотрим граф $G$ с одинаковыми положительными весами ребер (который можно достроить до полного двудольного графа нулевыми ребрами для задачи на максимум и ребрами веса $\infty$ для задачи на минимум), то максимум достигается на сбалансированной или почти сбалансированной биклике с наибольшим числом ребер, а минимум на наиболее несбалансированной из возможных с наименьшим числом ребер. Для того, чтобы учесть эту особенность, далее рассматриваются постановки задач с неотрицательными весами ребер.

# 1. Конусные разбиения

Объектом исследования является конструкция конусного разбиения. Пусть $X$ – некоторое конечное множество точек $\mathbb{R}^d$. Рассматривается задача максимизации линейной целевой функции на множестве $X$:

$$\langle c, x \rangle \to \max,\ x \in X.$$

Обозначим
$$K(x) = \{c \in \mathbb{R}^d :\ \langle c, x \rangle \geq \langle c, y \rangle\ ,\ \forall y \in X\}. \tag{1}$$
$K(x)$ является множеством решений конечной системы линейных однородных неравенств и представляет собой выпуклый многогранный конус. Учитывая, что

$$\bigcup_{x \in X} K(x) = \mathbb{R}^d,$$

совокупность всех конусов $K(x)$ называется *конусным разбиением* пространства $\mathbb{R}^d$ по множеству $X$. Конусное разбиение является аналогом диаграммы Вороного, в точности совпадая с ней, если евклидовы нормы всех точек множества $X$ равны между собой.

Рассмотрим граф конусного разбиения. Его вершинами служат конусы разбиения, а два конуса $K(x)$ и $K(y)$ являются смежными тогда и только тогда, когда они имеют общую гипергрань:

$$\dim(K(x) \cap K(y)) = d - 1.$$

Обозначим через $\omega(X)$ плотность, или кликовое число, т.е. число вершин в наибольшей клике, графа конусного разбиения $K$ пространства $\mathbb{R}^d$ по множеству $X$.

Известно [2], что трудоемкость алгоритмов прямого типа, использующих только линейные сравнения, по поиску максимума (или минимума, если поменять знак неравенства в определении конуса) линейной целевой функции $\langle c, x\rangle$ на множестве $X$, или, что то же самое, нахождению конуса $K(x)$, которому принадлежит целевой вектор $c$, не может быть меньше значения $\omega(X) - 1$. Таким образом, $\omega(X)$ является некоторой условной характеристикой сложности задач комбинаторной оптимизации в широком классе алгоритмов.

Определим через $M(X)$ выпуклую оболочку $X$: $M(X) = \operatorname{conv}(X)$. Выпуклой оболочкой конечного множества точек служит выпуклый многогранник, который называется многогранником задачи. Отметим, что для конусного разбиения над всем пространством $\mathbb{R}^d$ (1) имеет место следующее утверждение [2].

**Лемма 1.** *Две вершины $x$ и $y$ многогранника $M(X)$ смежны тогда и только тогда, когда конусы $K(x)$ и $K(y)$ имеют общую гипергрань.*

Таким образом, для конусного разбиения пространства $\mathbb{R}^d$ по множеству $X$ граф совпадает с полиэдральным графом многогранника $M(X)$, множеством вершин которого служит множество геометрических вершин (в данном случае это $X$), а множеством ребер — совокупность геометрических ребер, т.е. множество одномерных граней.

Аналогично строятся конусные разбиения положительного ортанта $\mathbb{R}^d_+$ для задач на максимум и минимум

$$K^+_{\max}(x) = \{c \in \mathbb{R}^d_+ : \ \langle c, x\rangle \geq \langle c, y\rangle\,, \ \forall y \in X\}, \tag{2}$$

$$K^+_{\min}(x) = \{c \in \mathbb{R}^d_+ : \ \langle c, x\rangle \leq \langle c, y\rangle\,, \ \forall y \in X\}. \tag{3}$$

Эта конструкция, в свою очередь, является двойственной к полиэдру задачи, который определяется как доминанта выпуклой оболочки множества $X$:

$$\operatorname{dmt}(X) = \operatorname{conv}(V) + \mathbb{R}^d_+,$$

и применяется при анализе задач с неотрицательными исходными данными [13]. В нашем случае это неотрицательные веса ребер.

Изучению полиэдральных графов многогранников, графов конусных разбиений и их взаимосвязи со сложностью задач комбинаторной оптимизации посвящено большое число работ. В частности, были получены результаты для многогранников задачи коммивояжера [1] и задач об остовном дереве при дополнительных ограничениях [4], а также для неотрицательных конусных разбиений для задач о кратчайшем и самом длинном пути [5], задачи о разрезе [3, 8] и многих других [2].

## 2. Сбалансированный полный двудольный подграф

**Теорема 2.** *Задача WBCBS является NP-трудной.*

*Доказательство.* Ограничимся рассмотрением задачи на максимум. Рассуждения для случая на минимум проводятся полностью аналогично.

Рассмотрим двудольный граф $G = (U, V, E)$, $|U| = |V| = n$. Построим взвешенный полный двудольный граф $G^* = (U, V, E^*)$ с функцией весов вида:

$$c(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j) \in E, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В графе $G^*$ найдется такая биклика $x$, что $|U_x| = |V_x| = k$, с суммарным весом ребер $k^2$ (это максимально возможный вес $k$-сбалансированного полного двудольного подграфа) тогда и только тогда, когда $x$ является бикликой в графе $G$. NP-полная задача BCBS полиномиально сводится к задаче WBCBS, соответственно последняя является NP-трудной. □

*Замечание:* в статье для удобства используются веса ребер вида $-1$, $0$, $1$ и $+\infty$. Отметим, что в силу конечности числа ребер в полном графе последние можно заменить на такие целые положительные веса $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, что для любого $i$ вес $a_i$ строго больше суммарного веса всех ребер $a_{i-1}$.

Каждому допустимому решению $x$ задачи WBCBS, то есть каждому $k$-сбалансированному подграфу графа $G$, сопоставим характеристический вектор из пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ по следующему правилу:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in U(x), j \in V(x), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через $X_{n,k}$ множество характеристических векторов всех допустимых решений и рассмотрим многогранник задачи о взвешенном сбалансированном полном двудольном подграфе $WBCBS(n,k) = \operatorname{conv}(X_{n,k})$, а также конусное разбиение $K_{n,k}$ пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ по множеству $X_{n,k}$. Через $c \in \mathbb{R}^{n^2}$ определим вектор с весами ребер графа $G$. Тогда суммарный вес ребер подграфа $G_x$ равен значению целевой функции $\langle c, x \rangle$.

**Лемма 2.** *Две вершины $x$ и $y$ многогранника $WBCBS(n,k)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие двудольные подграфы не имеют общих долей:*

$$U(x) \neq U(y) \text{ и } V(x) \neq V(y),$$

*либо доли в одной части совпадают, а в другой отличаются не более чем одной вершиной:*

$$\left[ \begin{array}{l} U(x) = U(y), |V(x) \backslash V(y)| = 1, \\ V(x) = V(y), |U(x) \backslash U(y)| = 1. \end{array} \right.$$

*Доказательство.* В силу Леммы 1 смежность вершин многогранника $WBCBS(n,k)$ равносильна смежности конусов в разбиении $K_{n,k}$. Проведем доказательство с точки зрения конусного разбиения.

Пусть $x, y \in X_{n,k}$. Смежность конусов $K_{n,k}(x)$ и $K_{n,k}(y)$ означает, что найдется такой вектор $c \in \mathbb{R}^{n^2}$, что в конусном разбиении $K_{n,k}$ вектор $c$ принадлежит исключительно конусам $K_{n,k}(x)$ и $K_{n,k}(y)$ (конусы имеют общую гипергрань)

$$\exists c \in \mathbb{R}^{n^2}, \forall z \in X_{n,k} \backslash \{x, y\} : \langle c, x \rangle = \langle c, y \rangle > \langle c, z \rangle \,. \tag{4}$$

Пусть подграфы $x$ и $y$ не имеют общих долей. Построим вектор весов ребер $c$ по следующему правилу (Рис. 1):

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in U(x), j \in V(x) \text{ или } i \in U(y), j \in V(y), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5}$$

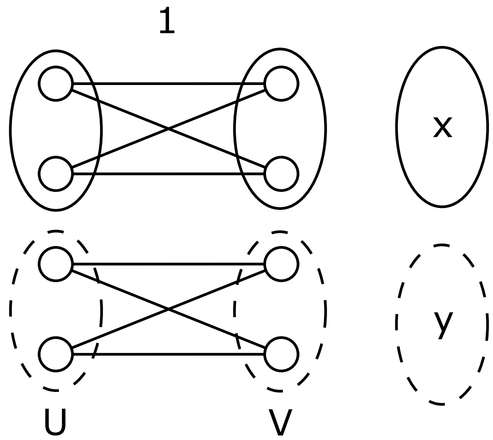


Рис. 1: Функция весов для сбалансированного подграфа без общих долей
Fig. 1. The weight function for a balanced subgraph without common parts

В таком случае получаем

$$\langle c, x\rangle = \langle c, y\rangle = k^2,$$

и это максимально возможный вес $k$-сбалансированной биклики в графе.

Рассмотрим произвольный подграф $z \in X_{n,k} \backslash \{x, y\}$.

- Если $z$ включает хотя бы одну вершину в доле $U$, не принадлежащую $U(x) \cup U(y)$, то $\langle c, z\rangle < k^2$, так как все ребра инцидентные этой вершине имеют нулевой вес.
- Если $z$ включает в доле $U$ как вершины из $U(x)\backslash U(y)$, так и из $U(y)\backslash U(x)$, тогда в правой доле $V$ лишь вершины $V(x) \cap V(y)$ имеют с ними ненулевые ребра одновременно. Но $|V(x) \cap V(y)| < k$, а значит, хотя бы одно ребро имеет нулевой вес, и $\langle c, z\rangle < k^2$.
- Если $U(z) = U(x)$ $(U(z) = U(y))$, то следует аналогично рассмотреть долю $V$ и показать, что при $z \neq x$ $(z \neq y)$ получаем $\langle c, z\rangle < k^2$.

Таким образом, конусы $K_{n,k}(x)$ и $K_{n,k}(y)$ смежны по условию (4).

Пусть подграфы $x$ и $y$ совпадают в одной доле. Без ограничения общности будем считать, что $V(x) = V(y)$. Пусть $|U(x)\backslash U(y)| = 1$. Построим вектор весов $c$ следующего вида (Рис. 2):

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in U(x) \cap U(y), j \in V(x) = V(y), \\ 0, & \text{если } i \in U(x) \triangle U(y), j \in V(x) = V(y), \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

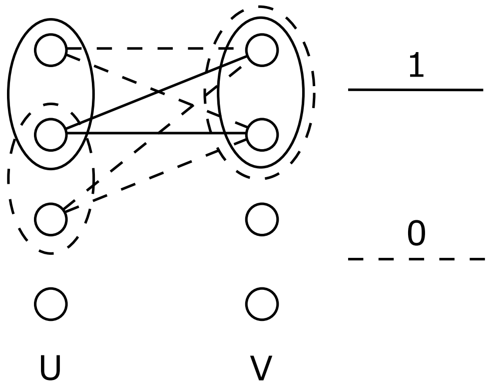


Рис. 2: Функция весов для сбалансированного подграфа с общей долей
Fig. 2. The weight function for a balanced subgraph with a common part

По построению получаем

$$\langle c, x\rangle = \langle c, y\rangle = k(k-1).$$

Рассмотрим произвольный подграф $z \in X_{n,k} \backslash \{x, y\}$.

- Если $z$ включает хотя бы одну вершину в доле $U$, не принадлежащую $U(x) \cup U(y)$, то все ребра, инцидентные этой вершине, имеют отрицательный вес, и

$$\langle c, z\rangle \leq k(k-1) - k < k(k-1).$$

- Если $z$ включает обе вершины из $U(x) \triangle U(y)$, то инцидентные им ребра имеют нулевой или отрицательный вес, и

$$\langle c, z\rangle \leq k(k-2) < k(k-1).$$

Соответственно, конусы $K_{n,k}(x)$ и $K_{n,k}(y)$ являются смежными.

Остается рассмотреть случай $|U(x) \backslash U(y)| \geq 2$. Обозначим через

$$a = |U(x) \cap U(y)| \leq k-2.$$

Тогда симметрическая разность $U(x) \triangle U(y)$ содержит $2(k-a)$ вершин из которых можно выбрать $k-a$ вершин

$$\binom{2(k-a)}{k-a} \geq 6$$

различными способами. Следовательно, найдутся такие подграфы $z, t \in X_{n,k} \backslash \{x, y\}$, что

$$\begin{gathered} V(z) = V(t) = V(x) = V(y), \\ U(z) \cap U(t) = U(x) \cap U(y), \\ U(z) \cup U(t) = U(x) \cup U(y). \end{gathered}$$

Таким образом,

$$\langle c, x\rangle + \langle c, y\rangle = \langle c, x \cup y\rangle + \langle c, x \cap y\rangle = \langle c, z \cup t\rangle + \langle c, z \cap t\rangle = \langle c, z\rangle + \langle c, t\rangle,$$

и хотя бы один из подграфов $z$ или $t$ имеет вес не меньший, чем $x$ и $y$. Конусы $K_{n,k}(x)$ и $K_{n,k}(y)$ не являются смежными. $\square$

**Теорема 3.** *Плотность полиэдрального графа многогранника $WBCBS(n,k)$ задачи о взвешенном сбалансированном полном двудольном подграфе сверхполиномиальна по параметрам $n$ и $k$:*

$$\omega(WBCBS(n,k)) \geq \binom{n}{k} = \Omega\left(\left(\frac{n}{k}\right)^k\right).$$

*Доказательство.* Рассмотрим подмножество $k$-сбалансированных двудольных подграфов $Y_{n,k} \subset X_{n,k}$ следующего вида: занумеруем все вершины в каждой доле числами от 1 до $n$, и будем рассматривать лишь подграфы с одинаковыми номерами выбранных вершин в левой и правой долях. Любые два подграфа $x, y \in Y_{n,k}$ не имеют общих долей, следовательно, по Лемме 2 соответствующие вершины многогранника $WBCBS(n,k)$ являются смежными. Соответственно $Y_{n,k}$ образует клику в полиэдральном графе многогранника задачи

$$|Y_{n,k}| = \binom{n}{k}.$$

Асимптотическая нижняя оценка является стандартной для числа сочетаний. □

# 3. Максимальный полный двудольный подграф

Теперь обратимся к несбалансированному случаю.

**Теорема 4.** *Задача $maxWCBS$ является NP-трудной.*

*Доказательство.* Воспользуемся рассуждением для Теоремы 2. Рассмотрим двудольный граф $G$, всем ребрам назначим вес 1 и дополним его до полного взвешенного графа $G^*$ ребрами нулевого веса. В графе $G^*$ найдется биклика $x$ веса $k^2$ тогда и только тогда, когда $x$ является $k$-сбалансированной бикликой в графе $G$. Задача BCBS полиномиально сводится к задаче maxWCBS. □

По аналогии со сбалансированным случаем каждому допустимому решению задачи maxWCBS сопоставим характеристический вектор $x \in \mathbb{R}_+^{n^2}$. Обозначим через $X_{n,k}^u$ множество характеристических векторов всех допустимых решений и рассмотрим неотрицательное конусное разбиение $K_{n,k}^{max}$ положительного ортанта $\mathbb{R}_+^{n^2}$ по множеству $X_{n,k}^u$ для задачи на максимум (2).

**Теорема 5.** *Плотность графа конусного разбиения $K_{n,k}^{max}$ задачи о взвешенном полном двудольном подграфе сверхполиномиальна по параметрам $n$ и $k$:*

$$\omega(K_{n,k}^{max}) \geq \binom{n}{s} = \Omega\left(\left(\frac{n}{s}\right)^s\right), \text{ для } k = 2s,$$

$$\omega(K_{n,k}^{max}) \geq \binom{n-1}{s} = \Omega\left(\left(\frac{n-1}{s}\right)^s\right), \text{ для } k = 2s+1.$$

*Доказательство.* Для четного $k$ можно воспользоваться конструкцией из доказательства Теоремы 3 с одинаковым выбором вершин в левой и правой долях. Неотрицательные конусы $s$-сбалансированных биклик без одинаковых долей будут попарно смежны по условию Леммы 2. Отметим, что при доказательстве этой части критерия смежности использовались неотрицательные 0/1-веса (Рис. 1).

Вариант с нечетным $k$ сводится к четному. Зафиксируем в левой и правой долях по одной вершине. Например, вершины с номером $n$. Рассмотрим множество $Y_{n,k}^{max}$двудольных подграфов следующего вида:

$$|U_x| = s, U_x \subseteq \{1, 2, 3, \ldots n-1\},$$
$$|V(x)| = s+1, \{n\} \in V(x),$$

содержащих вершину с номером $n$ в правой доле.

Для любых двух подграфов $x$ и $y$ из $Y_{n,k}^{max}$ можно построить вектор весов $c$ по правилу (5). Подграфы $x$ и $y$ имеют максимально возможный вес для биклик с $2s+1$ вершинами:

$$\langle c, x\rangle = \langle c, y\rangle = s(s+1).$$

Любой двудольный подграф $z$, включающий вершины не из $U(x) \cup U(y)$, или одновременно вершины из $U(x) \backslash U(y)$ и $U(y) \backslash U(x)$, будет иметь меньший вес. Следовательно, по условию (4), конусы $K_{n,k}^{max}(x)$ и $K_{n,k}^{max}(y)$ смежны, а $Y_{n,k}^{max}$ образует клику в графе конусного разбиения. Учитывая исключение вершины с номером $n$, случай нечетного $k$ сводится к четному в графе с $n-1$ вершиной в каждой доле. □

Заметим, что все результаты и доказательства для задачи о максимальном полном двудольном подграфе повторяют аналогичные для сбалансированного случая. Это ожидаемо, учитывая, что для максимизации числа ребер (весов ребер) искомый подграф должен быть максимально близок к сбалансированному. Для задачи на минимум ситуация будет несколько иной.

# 4. Минимальный полный двудольный подграф

**Теорема 6.** *Задача minWCBS является NP-трудной.*

*Доказательство.* Рассмотрим двудольный граф $G$ с ребрами двух возможных весов: 1 и $n^2$. Будем считать, что вместо выбора вершин в подграф мы исключаем вершины и все инцидентные им ребра из полного графа. Тогда задача minWCBS о поиске двудольного подграфа на $k$ вершинах минимального веса эквивалентна задаче о поиске подмножества из $2n-k$ вершин с максимальным числом инцидентных ребер веса $n^2$ для исключения. Заметим, что суммарный вклад всех ребер веса 1 меньше вклада одного ребра веса $n^2$. Построим невзвешенный двудольный граф $G^*$, удалив из $G$ все ребра единичного веса. Рассматриваемая задача является задачей о максимальном $q$-вершинном покрытии в графе $G^*$ для $q = 2n - k$.

**Максимальное $q$-вершинное покрытие (maximum $q$-vertex cover).** Задан граф $G = (V, E)$ и положительное целое $q < |V|$. Найти подмножество вершин $U \subset V$ с наибольшим числом инцидентных ребер, такое что $|U| = q$.

Задача о максимальном $q$-вершинном покрытии является NP-трудной даже для двудольных графов [6, 15]. □

Рассмотрим конусное разбиение $K_{n,k}^{min}$ пространства $\mathbb{R}_+^{n^2}$ по множеству $X_{n,k}^u$ характеристических векторов допустимых решений minWCBS для задачи на минимум (3). Обозначим:

$$m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

**Теорема 7.** *Пусть*

$$k = 3s \text{ и } \frac{9}{4}m < k < 3m, \tag{6}$$

*тогда плотность графа конусного разбиения $K_{n,k}^{min}$ задачи о минимальном взвешенном полном двудольном подграфе сверхполиномиальна по параметрам $n$ и $k$:*

$$\omega(K_{n,k}^{min}) \geq \binom{m}{s} = \Omega\left(\left\lfloor \frac{3n}{2k} \right\rfloor^{\frac{k}{3}}\right).$$

*Доказательство.* Без ограничения общности будем считать, что $n = 2m$. В противном случае можно выбрать по вершине в каждой доле и исключить их из дальнейших построений.

Разобьем множества вершин в каждой доле на два равных непересекающихся подмножества $U = U_1 \cup U_2$, $V = V_1 \cup V_2$. Внутри каждого множества занумеруем вершины числами от 1 до $m$.

Рассмотрим множество $Y_{n,k}^{min}$ подграфов следующего вида: для любого подмножества

$$\{x_1, x_2, \dots, x_s\} \subset \{1, 2 \dots m\}$$

мы строим двудольный подграф $x$, включающий вершины с номерами $\{x_1, \dots, x_s\}$ из множеств $U_1, V_1$ и $V_2$.

Покажем, что конусы решений из множества $Y_{n,k}^{min}$ являются попарно смежными. Рассмотрим два произвольных подграфа $x, y$ из $Y_{n,k}^{min}$. Построим функцию весов ребер $c$ следующего вида (Рис. 3):

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in U(x) \backslash U(y), j \in V(x), \\ & \text{или } i \in U(y) \backslash U(x), j \in V(y), \\ & \text{или } i \in U(x) \cup U(y), j \in V(x) \cap V(y), \\ 1, & \text{если } i \in U(x) \cap U(y), j \in V(x) \triangle V(y), \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $|U(x) \cap U(y)| = a$, тогда

$$\langle c, x \rangle = \langle c, y \rangle = 2a(s - a). \tag{7}$$

Отметим, что по построению множества $Y_{n,k}^{min}$:

$$2s - m \leq a < s. \tag{8}$$

Рассмотрим произвольный двудольный подграф $z$ с числом вершин $k = 3s$.

- Если $z$ включает хотя бы одну вершину в доле $U$, не принадлежащую $U(x) \cup U(y)$, то $\langle c, z \rangle = \infty$, так как все инцидентные этой вершине ребра имеют бесконечный вес.

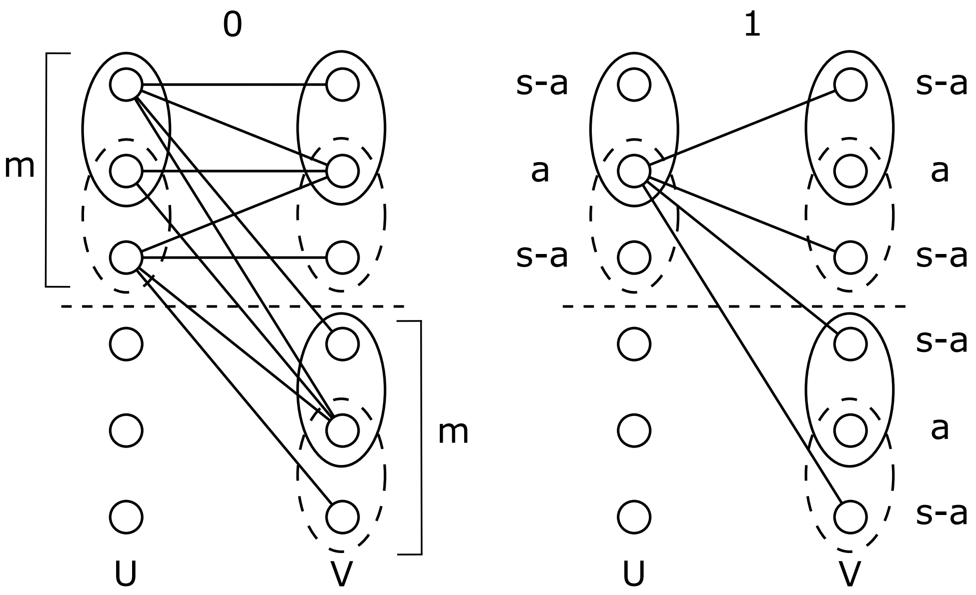


Рис. 3: Функция весов для минимального несбалансированного подграфа
Fig. 3. The weight function for a minimum unbalanced subgraph

- Если $z$ включает в доле $U$ как вершины из $U(x)\backslash U(y)$, так и из $U(y)\backslash U(x)$, то в правой доле $V$ лишь вершины $V(x) \cap V(y)$ имеют с ними ребра конечного веса одновременно:

$$|V(x) \cap V(y)| = 2a,$$
$$|U(x) \cup U(y)| = 2s - a,$$
$$(2s - a) + 2a = 2s + a < 3s = k.$$

  Для двудольного подграфа $z$ конечного веса в данном случае не хватает вершин.

- Если $U(z) \subseteq U(x)$, и $z$ включает хотя бы одну вершину из $U(x)\backslash U(y)$, то в правой доле только вершины из $V(x)$ имеют с выбранной вершиной ребра конечного веса. В данном случае если $\langle c, z\rangle < \infty$, то $z = x$. Случай с вершиной из $U(y)\backslash U(x)$ рассматривается аналогично.

- Если $U(z) \subseteq U(x) \cap U(y)$, тогда

$$\langle c, z\rangle = b(3s - b - 2a), \tag{9}$$

  где $b = |U(z)|$. По построению величина $b$ удовлетворяет следующим ограничениям:

$$3s - 2m \leq b \leq a. \tag{10}$$

  Предположим, что вес подграфа $z$ (9) не превосходит весов $x$ и $y$ (7), тогда, с учетом неравенств (6, 8, 10), выполняется следующая система:

$$\begin{cases} b(3s-b-2a) \le 2a(s-a), \\ \frac{3}{4}m < s < m, \\ 2s-m \le a < s, \\ 3s-2m \le b \le a, \\ m,s,a,b > 0, \end{cases}$$

которая не имеет решений ни при каких значениях параметров $m, s, a, b$. Таким образом, вес любого подграфа $z$ строго больше весов $x$ и $y$. По условию (4) конусы $K^{min}_{n,k}(x)$ и $K^{min}_{n,k}(y)$ смежны, а $Y^{min}_{n,k}$ образует клику в графе конусного разбиения. По построению, получаем

$$|Y^{min}_{n,k}| = \binom{m}{s} = \Omega\left(\left\lfloor\frac{3n}{2k}\right\rfloor^{\frac{k}{3}}\right).$$

□

## 5. Заключение

Задачи о построении оптимальных двудольных подграфов исследовались многими авторами и имеют множество практических применений. Для трех рассматриваемых задач о сбалансированном подграфе с произвольными весами и несбалансированных подграфах минимального и максимального веса с неотрицательными весами установлены NP-полнота задач и сверхполиномиальные плотности графов многогранников и конусных разбиений. Во всех трех случаях полиэдральные характеристики коррелируют со сложностью задачи.

Отметим, что задача о минимальном полном двудольном подграфе является NP-трудной, при том, что близкая задача о существовании несбалансированного двудольного подграфа на $k$ вершинах полиномиально разрешима. Возможно, именно в связи с этим задача minWCBS оказалась наиболее трудной для анализа, а вопрос о сложности двойственной задачи о максимальном $q$-вершинном покрытии в двудольном графе был открыт в течение многих лет [6].

## Список литературы / References

[1] Бондаренко В. А., “Неполиномиальная нижняя оценка сложности задачи коммивояжера в одном классе алгоритмов”, *Автоматика и телемеханика*, **9** (1983), 45–50; [Bondarenko V. A., “Nonpolynomial lowerbound of the traveling salesman problem complexety in one class of algorithms”, *Automation and remote control*, **44**:9 (1983), 1137–1142.]

[2] Бондаренко В. А., Максименко А. Н., *Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации*, ЛКИ, М., 2008, 184 с.; [Bondarenko V. A., Maksimenko A. N., *Geometricheskie konstruktsii i slozhnost v kombinatornoy optimizatsii*, LKI, Moscow, 2008, (in Russian).]

[3] Бондаренко В. А., Николаев А. В., “Комбинаторно-геометрические свойства задачи о разрезе”, *Доклады Академии наук*, **452**:2 (2013), 127–129; [Bondarenko V. A., Nikolaev A. V., “Combinatorial and Geometric Properties of the Max-Cut and Min-Cut Problems”, *Doklady Mathematics*, **88**:2 (2013), 516–517.]

[4] Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А., "Полиэдральные графы задач об остовных деревьях при дополнительных ограничениях", *Моделирование и анализ информационных систем*, **22**:4 (2015), 453–463; [Bondarenko V. A., Nikolaev A. V., Shovgenov D. A., "1-Skeletons of the Spanning Tree Problems with Additional Constraints", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **22**:4 (2015), 453–463, (in Russian).]

[5] Максименко А. Н., "Комбинаторные свойства многогранника задачи о кратчайшем пути", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44**:9 (2004), 1693–1696; [Maksimenko A. N., "Combinatorial properties of the polyhedron associated with the shortest path problem", *Comput. Math. Math. Phys.*, **88**:2 (2013), 1611–1614.]

[6] Apollonio N., Simeone B., "The maximum vertex coverage problem on bipartite graphs", *Discrete Applied Mathematics*, **165** (2014), 37–48.

[7] Arbib C., Mosca R., "Polynomial algorithms for special cases of the balanced complete bipartite subgraph problem", *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **39** (1999), 3–22.

[8] Bondarenko V., Nikolaev A., "On Graphs of the Cone Decompositions for the Min-Cut and Max-Cut Problems", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **2016** (2016), 6 pages, Article ID 7863650.

[9] Cheng Y., Church G. M., "Biclustering of expression data", Proceedings of the Eighth International Conference on Intelligent Systems for Molecular Biology, 2000, 93–103.

[10] Diestel R., *Graph Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010, 410 pp.

[11] Feige U., Kogan S., *Hardness of approximation of the Balanced Complete Bipartite Subgraph problem. Tech. Rep. MCS04-04*, Dept. of Comp. Sci. and Appl. Math., The Weizmann Inst. of Science, 2004.

[12] Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979, 340 pp.

[13] Grötschel M., Lovasz L., Schrijver A., *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 1993, 362 pp.

[14] Johnson D. S., "The NP-completeness column: An ongoing guide", *Journal of Algorithms*, **8**:3 (1987), 438–448.

[15] Joret G., Vetta A., "Reducing the rank of a matroid", *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, **17**:2 (2015), 143–156.

[16] Hopcroft J. E., Karp R. M., "An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs", *SIAM Journal on Computing*, **2**:4 (1973), 225–231.

[17] Mubayi D., Turàn G., "Finding bipartite subgraphs efficiently", *Information Processing Letters*, **110**:5 (2010), 174–177.

[18] Ravi S. S., Lloyd E. L., "The complexity of near-optimal programmable logic array folding", *SIAM Journal on Computing*, **17**:4 (1988), 696–710.

---

**Bondarenko V. A.**[1,2], **Nikolaev A. V.**[3], **Shovgenov D. A.**[1], "Polyhedral Characteristics of Balanced and Unbalanced Bipartite Subgraph Problems", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:2 (2017), 141–154.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2017-2-141-154

**Abstract.** We study the polyhedral properties of three problems of constructing an optimal biclique in a bipartite graph. In the first problem we consider a balanced biclique with the same number of vertices in both parts and arbitrary edge weights. In the other two problems it is required to find maximum or minimum unbalanced bicliques with a fixed number of vertices and non-negative edges. All three problems are established to be NP-hard. We study the polytopes and the cone decompositions of these problems and their 1-skeletons. We describe the adjacency criterion in the 1-skeleton of the balanced biclique polytope. Clique number of 1-skeleton is estimated from below by a superpolynomial function. For both unbalanced biclique problems we establish the superpolynomial lower bounds on the clique numbers of the graphs of non-negative cone decompositions. These values characterize the time complexity in a broad class of algorithms based on linear comparisons.

**Keywords:** biclique, 1-skeleton, cone decomposition, clique number, NP-hard problem

**About the authors:**
Vladimir Bondarenko, orcid.org/0000-0002-5976-3446, doctor of science, professor,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: bond@bond.edu.yar.ru,

Andrei Nikolaev, orcid.org/0000-0003-4705-2409, PhD,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: andrei.v.nikolaev@gmail.com

Dzhambolet Shovgenov, orcid.org/0000-0003-2022-4514, graduate student,
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: djsh92@mail.ru

**Acknowledgments:**
[1] Partially supported by the Russian Foundation for Basic Research project 14-01-00333.
[2] Partially supported by the initiative R&D VIP-004 AAAA-A16-116070610022-6.
[3] Supported by the President's of Russian Federation grant MK-5400.2015.1.