Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, №3 (2016), с. 317–325
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 3 (2016), pp. 317–325

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-317-325

УДК 517.9

Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования решения системы параболических уравнений в виде движущегося фронта

Левашова Н. Т.[1], Мельникова А. А.[1], Быцюра С. В.

получена 20 мая 2016

Аннотация. Исследование решений начально-краевых задач для параболических уравнений является важной составляющей математического моделирования. Особый интерес для математического моделирования представляют краевые задачи, решения которых претерпевают резкое изменение в какой-либо области пространства. Такие области называются внутренними переходными слоями. В том случае, если положение переходного слоя изменяется со временем, решение параболической задачи имеет вид движущегося фронта. При доказательстве существования у начально-краевых задач решений такого вида весьма эффективным оказывается метод дифференциальных неравенств, согласно которому для данной краевой задачи строятся так называемые верхнее и нижнее решения. Суть асимптотического метода дифференциальных неравенств заключается в том, чтобы получать верхнее и нижнее решения как модификации асимптотических представлений решений краевых задач. Существование верхнего и нижнего решений является достаточным условием существования решения краевой задачи. В ходе проверки выполнения дифференциальных неравенств существенным оказывается так называемое «условие квазимонотонности». В настоящей работе рассмотрено, каким образом можно построить верхнее и нижнее решения для системы параболических уравнений при различных условиях квазимонотонности.

Ключевые слова: система параболических уравнений, переходный слой, метод дифференциальных неравенств

Для цитирования: Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Быцюра С. В., "Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования решения системы параболических уравнений в виде движущегося фронта", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:3 (2016), 317–325.

Об авторах:
Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Мельникова Алина Александровна, orcid.org/0000-0001-9019-0263, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Быцюра Светлана Владимировна, orcid.org/0000-0001-7787-437X, студентка,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: sv.bytcyura@physics.msu.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: проект 16-01-00473

Введение

В настоящей работе исследуется решение вида движущегося фронта краевой задачи для системы параболических уравнений вида

$$\begin{gathered}\varepsilon^4 u_{xx} - \varepsilon^3 u_t = f\left(u, v, x, \varepsilon\right), \quad \varepsilon^2 v_{xx} - \varepsilon v_t = g\left(u, v, x, \varepsilon\right)\\ x \in (0;1), \quad t \in (0;T],\\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T],\\ u(x,0) = u^0(x), \quad v(x,0) = v^0(x), x \in [0;1],\end{gathered} \tag{1}$$

где ε — малый параметр, f и g — достаточно гладкие функции в области $\overline{\Omega} := \{(u,v,x,\varepsilon) \in I_u \times I_v \times [0;1] \times (0;\varepsilon_0]\}$, а I_u и I_v – некоторые промежутки изменения переменных u и v, $\varepsilon_0 > 0$, $T > 0$.

Решение краевых задач в подобной постановке является важной составляющей математического моделирования. В частности, к задачам такого типа относится известная система ФицХью–Нагумо, на основании которой возможна разработка моделей, описывающих различные процессы самоорганизации, например, возбуждение в сердечной мышце [1], образование пятен на шкурах животных [2] или образование городских массивов [3]. Особый интерес для математического моделирования представляют краевые задачи, решения которых претерпевают резкое изменение в какой-либо области пространства. Такие области называются внутренними переходными слоями. В том случае, если положение переходного слоя изменяется со временем, решение параболической задачи имеет вид движущегося фронта. Как правило, наличие переходных слоев характерно для «жестких» систем, численное решение которых встречает определенные сложности. Поэтому аналитическое исследование решений краевых задач с внутренними переходными слоями является крайне важным этапом при разработке моделей.

Алгоритмы построения асимптотических представлений решений в виде движущегося фронта задач типа (1) при различных условиях на функции f и g в правых частях уравнений описаны в работах [4,5]. Доказательство существования таких решений в работе [4] проведено при помощи операторного метода, а в работе [5] с этой целью применялся метод дифференциальных неравенств. Обоснование этого метода для различных начально-краевых задач приведено в работах [6,7]. Суть метода заключается в построении для задачи (1) двух пар непрерывных функций $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$, называемых, соответственно, верхним и нижним решениями, и удовлетворяющих следующей системе дифференциальных неравенств:

Условие H1. Упорядоченность.

$$\underline{U} \le \overline{U}; \quad \underline{V} \le \overline{V}; \quad (x,t) \in [0;1] \times (0;T].$$

Условие H2. Действие оператора на верхнее и нижнее решения.

$$\begin{gathered}L_{1\varepsilon}(\overline{U}, v) := \varepsilon^4 \overline{U}_{xx} - \varepsilon^3 \overline{U}_t - f\left(\overline{U}, v, x, \varepsilon\right) < 0 < L_{1\varepsilon}(\underline{U}, v), \quad \underline{V} \le v \le \overline{V},\\ L_{2\varepsilon}(u, \overline{V}) := \varepsilon^2 \overline{V}_{xx} - \varepsilon \overline{V}_t - g\left(u, \overline{V}, x, \varepsilon\right) < 0 < L_{2\varepsilon}(u, \underline{V}), \quad \underline{U} \le u \le \overline{U},\\ (x,t) \in [0;1] \times (0;T].\end{gathered}$$

Условие H3. Если верхнее решение не является гладким в некоторой точке $x = \bar{x}(t)$, в момент времени t, то выполняются следующие неравенства:

$$\left.\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}\right|_{\bar{x}(t)-0} - \left.\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}\right|_{\bar{x}(t)+0} \geq 0, \left.\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\right|_{\bar{x}(t)-0} - \left.\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\right|_{\bar{x}(t)+0} \geq 0,$$

аналогично, если нижнее решение не является гладким при $x = \underline{x}(t)$, то выполняются неравенства

$$\left.\frac{\partial \underline{U}}{\partial x}\right|_{\underline{x}(t)-0} - \left.\frac{\partial \underline{U}}{\partial x}\right|_{\underline{x}(t)+0} \leq 0, \left.\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}\right|_{\underline{x}(t)-0} - \left.\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}\right|_{\underline{x}(t)+0} \leq 0,$$

Условие H4. В граничных точках

$$\left.\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}\right|_{x=0} \leq 0 \leq \left.\frac{\partial \underline{U}}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad \left.\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\right|_{x=0} \leq 0 \leq \left.\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}\right|_{x=0},$$
$$\left.\frac{\partial \underline{U}}{\partial x}\right|_{x=1} \leq 0 \leq \left.\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}\right|_{x=1}, \quad \left.\frac{\partial \underline{V}}{\partial x}\right|_{x=1} \leq 0 \leq \left.\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\right|_{x=1}.$$

Условие H5. В начальный момент времени

$$\underline{U}(x, 0, \varepsilon) < u^0(x) < \overline{U}(x, 0, \varepsilon), \quad \underline{V}(x, 0, \varepsilon) < v^0(x) < \overline{V}(x, 0, \varepsilon)$$

Как показано в работе [7], существование верхнего и нижнего решений задачи (1) достаточно для существования классического решения задачи (1), которое заключено между верхним и нижним решениями.

В работах [5,8–10] предложен алгоритм построения верхнего и нижнего решений для задач с малыми параметрами при производных, согласно которому функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$, строятся как модификации асимптотических представлений решений исследуемых задач. Этот алгоритм носит название асимптотического метода дифференциальных неравенств. В ходе проверки выполнения дифференциальных неравенств существенным оказывается так называемое «условие квазимонотонности» функций f и g в правых частях уравнений (1), а именно условий на производные функций f_v и g_u. В настоящей работе рассмотрено, каким образом можно построить верхнее и нижнее решения задачи (1) для различных условий на знаки этих производных.

1. Асимптотическое представление решения

Асимптотическое представление решения задачи (1) будем строить, считая, что выполняются следующие условия:

Условие A1. Уравнение $f(u, v, x, 0) = 0$ имеет относительно u единственное решение $u = \varphi(v, x) \in I_u$, причем $f_u(\varphi(v, x), v, x, 0) > 0$.

Условие A2. Уравнение $h(v, x) := g(\varphi(v, x), v, x, 0) = 0$ имеет ровно три изолированных корня $v = v^i(x) \in I_v$, $i = 1, 2, 3$, причем на всем отрезке $[0; 1]$ выполнены неравенства $v^1(x) < v^2(x) < v^3(x)$; $h_v(v^i(x), x) > 0$, $i = 1, 3$; $h_v(v^2(x), x) < 0$.

Условие А3. (Условие квазимонотонности). Пусть всюду в $\overline{\Omega}$ выполняется одна из следующих систем неравенств:

$$\begin{array}{ll} \textbf{A3.1}\ f_v(u,v,x,\varepsilon)<0,\ g_u(u,v,x,\varepsilon)<0 & \textbf{A3.2}\ f_v(u,v,x,\varepsilon)>0,\ g_u(u,v,x,\varepsilon)>0; \\ \textbf{A3.3}\ f_v(u,v,x,\varepsilon)<0,\ g_u(u,v,x,\varepsilon)>0 & \textbf{A3.4}\ f_v(u,v,x,\varepsilon)>0,\ g_u(u,v,x,\varepsilon)<0, \end{array}$$

и в каждом случае справедливы неравенства

$$g_v\left(\varphi\left(v^{1,3},x\right),v^{1,3},x,0\right)f_u\left(\varphi\left(v^{1,3},x\right),v^{1,3},x,0\right)+$$
$$+g_u\left(\varphi\left(v^{1,3},x\right),v^{1,3},x,0\right)f_v\left(\varphi\left(v^{1,3},x\right),v^{1,3},x,0\right)>0.$$

Пусть в каждый момент времени t внутренний переходный слой сосредоточен в окрестности точки $x^* \in (0;1)$, а в начальный момент времени $x^*(0,\varepsilon)=x_{00}$. Кривая $x=x^*(t,\varepsilon)$ делит область $\bar{D}:=\{[0;1]\times[0;T]\}$ на плоскости (x,t) на две подобласти: $\bar{D}^-:=\{[0;x^*(t,\varepsilon)]\times[0;T]\}$ и $\bar{D}^+:=\{[x^*(t,\varepsilon);1]\times[0;T]\}$.

Асимптотическое представление решения задачи (1) в каждый момент времени строится отдельно в каждой из этих подобластей:

$$u=\begin{cases}u^{(-)},\ (x,t)\in\bar{D}^-,\\ u^{(+)},\ (x,t)\in\bar{D}^+;\end{cases}\qquad v=\begin{cases}v^{(-)},\ (x,t)\in\bar{D}^-,\\ v^{(+)},\ (x,t)\in\bar{D}^+.\end{cases}$$

Согласно алгоритму Васильевой [11] для описания решения в окрестности переходного слоя, а также в окрестности граничных точек отрезка $[0;1]$ вводятся растянутые переменные

$$\xi=\frac{x-x^*(t,\varepsilon)}{\varepsilon},\quad \zeta_-=\frac{x}{\varepsilon},\quad \zeta_+=\frac{1-x}{\varepsilon}.$$

Каждая из функций $u^{(-)}$ и $u^{(+)}$ представляет собой сумму трех слагаемых:

$$\begin{aligned}u^{(\mp)}&=\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)+Q^{(\mp)}u(\xi,t,\varepsilon)+P^{(\mp)}u(\zeta_\mp,\varepsilon),\\ v^{(\mp)}&=\bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon)+Q^{(\mp)}v(\xi,t,\varepsilon)+P^{(\mp)}v(\zeta_\mp,\varepsilon).\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $\bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ – регулярные части асимптотического представления, $Q^{(\mp)}u(\xi,t,\varepsilon)$, $Q^{(\mp)}v(\xi,t,\varepsilon)$ – функции, описывающие переходный слой, $Pu^{(\mp)}(\zeta_\mp,\varepsilon)$, $Pv^{(\mp)}(\zeta_\mp,\varepsilon)$ – функции пограничных слоев в окрестностях точек $x=0$ и $x=1$, соответственно.

Каждое слагаемое в суммах (2) представляется в виде разложения по степеням малого параметра ε, например

$$Q^{(-)}v(x,t,\varepsilon)=Q_0v^{(-)}(x,t)+\varepsilon Q_1v^{(-)}(x,t)+\varepsilon^2Q_2v^{(-)}(x,t)+\dots+\varepsilon^nQ_nv^{(-)}(x,t)+\dots.$$

Функция $x^*(t,\varepsilon)$ также представляется в виде разложения

$$x^*(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\dots+\varepsilon^nx_n(t)+\dots\tag{3}$$

Компоненты асимптотических представлений гладко сшиваются в точке x^* в каждый момент времени t.

Обозначим через $\tilde{v}(\xi, x^*)$ нулевое приближение асимптотического представления v-компоненты решения задачи (1), а через $\Phi(\xi, x^*)$ его производную по ξ :

$$\tilde{v}(\xi, x^*) = \begin{cases} v^1(x^*) + Q_0 v^{(-)}(\xi, t), & (x,t) \in \bar{D}^-; \\ v^3(x^*) + Q_0 v^{(+)}(\xi, t), & (x,t) \in \bar{D}^+; \end{cases} \qquad \Phi(\xi, x^*) = \begin{cases} \Phi^{(-)} = \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}, & \xi \le 0; \\ \Phi^{(+)} = \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}, & \xi \ge 0. \end{cases}$$

Для нулевого приближения u-компоненты решения получается выражение [4]

$$\tilde{u}\,(\xi, x^*) = \varphi\,(\tilde{v}(\xi, x^*), x^*)\,.$$

Функция $\tilde{v}(\xi, x^*)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} = h(\tilde{v}, x^*); \qquad \tilde{v}(-\infty, x^*) = v^1(x^*), \quad \tilde{v}(+\infty, x^*) = v^3(x^*). \tag{4}$$

Здесь через W обозначена скорость движения фронта: $W = \dfrac{dx^*}{dt}$.

Справедлива следующая **лемма** (см. [6]).

Для каждого значения $x^*(t)$ при фиксированном значении $t \in (0;T]$ существует единственная величина W такая, что задача (4) имеет единственное решение $\tilde{v}(\xi, x^*)$. Из условия гладкого сшивания асимптотических представлений нулевого порядка получаем следующее уравнение:

$$\Phi^{(-)}(0, x_0) = \Phi^{(+)}(0, x_0). \tag{5}$$

Здесь учтено разложение функции $x^*(t, \varepsilon)$ в ряд (3).

Условие A4. Пусть существует решение уравнения (5) с начальным условием $x_0(0) = x_{00}$.

При выполнении условий **A.1** – **A.4**, используя алгоритм Васильевой, можно получить функции U_n, V_n — асимптотическое представление произвольного порядка n решения задачи (1), а также разложение (3) порядка n.

2. Верхнее и нижнее решения

Введем обозначения

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i(t) - \varepsilon^{n+1}\delta(t), \;\; \bar{\xi} = \tfrac{x - \bar{x}(t)}{\varepsilon};$$
$$\underline{x}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i(t) + \varepsilon^{n+1}\delta(t), \;\; \underline{\xi} = \tfrac{x - \underline{x}(t)}{\varepsilon}.$$

Кривая $\bar{x}(t)$ делит область $\bar{D}$ на подобласти $D^-_{up} := \{[0; \bar{x}(t,\varepsilon)] \times [0;T]\}$ и $D^+_{up} := \{[\bar{x}(t,\varepsilon); 1] \times [0;T]\}$, а кривая $\underline{x}(t)$ – на подобласти $D^-_{low} := \{[0; \underline{x}(t,\varepsilon)] \times [0;T]\}$ и $D^+_{low} := \{[\underline{x}(t,\varepsilon); 1] \times [0;T]\}$.

В области D^-_{up} будем строить функции $\overline{U}^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $\overline{V}^{(-)}(x,\varepsilon)$, в области D^+_{up} — функций $\overline{U}^{(+)}(x,\varepsilon)$ и $\overline{V}^{(+)}(x,\varepsilon)$; аналогично для нижнего решения — функций $\underline{U}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ и $\underline{V}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$.

Функция $\delta(t)$ выбирается таким образом, чтобы выполнялись условия **H1** и **H3** для верхнего и нижнего решений.

2.1. Верхнее и нижнее решения в случае одинаковых знаков производных f_v и g_u

Если выполняются неравенства **A3.1** или **A3.2**, верхнее и нижнее решения строятся путем модификации асимптотических представлений решения U_{n+1} в порядке $n+1$:

$$\begin{aligned}
\overline{U}^{(\mp)} &= U_{n+1}^{(\mp)}(\bar{\xi},\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\left(\alpha^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)\right) + \varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon),\\
\overline{V}^{(\mp)} &= V_{n+1}^{(\mp)}(\bar{\xi},\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\left(\beta^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)\right) + \varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon);\\
\underline{U}^{(\mp)} &= U_{n+1}^{(\mp)}(\underline{\xi},\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}\left(\alpha^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)\right) + \varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon),\\
\underline{V}^{(\mp)} &= V_{n+1}^{(\mp)}(\underline{\xi},\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}\left(\beta^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}v(\underline{\xi},t)\right) + \varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon).
\end{aligned}$$

Здесь через $U_{n+1}^{(\mp)}(\bar{\xi},\varepsilon)$ обозначены асимптотические представления функций $u^{(\mp)}$, в которых аргумент ξ заменен на $\bar{\xi}$, аналогичный смысл имеют обозначения $V_{n+1}^{(\mp)}(\bar{\xi},\varepsilon)$. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ представляют собой модификацию регулярной части. Эти функции являются решением системы уравнений

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = A; \quad \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)} + \bar{g}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = B, \tag{6}$$

где A и B — положительные константы и введено обозначение
$\bar{f}_u^{(\mp)}(x) = f(\varphi(v^{1,3}(x),x), v^{1,3}(x), x, 0)$; аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_v^{(\mp)}(x)$, $\bar{g}_u^{(\mp)}(x)$ и $\bar{g}_v^{(\mp)}(x)$.

Если выполнены условия **A3.1** или **A3.2**, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ принимают положительные значения на отрезке $x \in [0;1]$.

Функции $q^{(\mp)}u$ и $q^{(\mp)}v$ устраняют невязки порядка ε^{n+1}, возникающие в результате модификации регулярной части в неравенствах из условия **H2**, и эти неравенства оказываются выполненными при выборе достаточно больших значений констант A и B в равенствах (6).

Функции $p^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon)$ и $p^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon)$ подбираются таким образом, чтобы краевые условия задачи (1) выполнялись точно, тогда условие **H4** оказывается выполненным.

Проверка условия упорядоченности осуществляется в полной аналогии с работой [12]

2.2. Верхнее и нижнее решения в случае различных знаков производных f_v и g_u

Если выполняются неравенства **A3.3** или **A3.4**, верхнее и нижнее решения строятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\overline{U}^{(\mp)} &= U_{n+1}^{(\mp)}(\bar{\xi},\varepsilon) + \varepsilon^{n}q_1^{(\mp)}u(\bar{\xi},t) + \varepsilon^{n+1}\left(\alpha^{(\mp)}(x) + \overline{q}_2^{(\mp)}u(\bar{\xi},t)\right) + \varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon),\\
\overline{V}^{(\mp)} &= V_{n+1}^{(\mp)}(\bar{\xi},\varepsilon) + \varepsilon^{n}q_1^{(\mp)}v(\bar{\xi},t) + \varepsilon^{n+1}\left(\beta^{(\mp)}(x) + \overline{q}_2^{(\mp)}v(\bar{\xi},t)\right) + \varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon);\\
\underline{U}^{(\mp)} &= U_{n+1}^{(\mp)}(\underline{\xi},\varepsilon) - \varepsilon^{n}q_1^{(\mp)}u(\underline{\xi},t) + \varepsilon^{n+1}\left(-\alpha^{(\mp)}(x) + \underline{q}_2^{(\mp)}u(\underline{\xi},t)\right) + \varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon),\\
\underline{V}^{(\mp)} &= V_{n+1}^{(\mp)}(\underline{\xi},\varepsilon) - \varepsilon^{n}q_1^{(\mp)}v(\underline{\xi},t) + \varepsilon^{n+1}\left(-\beta^{(\mp)}(x) + \underline{q}_2^{(\mp)}v(\underline{\xi},t)\right) + \varepsilon^{n+1}p^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon).
\end{aligned}$$

Функции $q_1^{(-)}u(\bar{\xi},t)$, $q_1^{(-)}v(\bar{\xi},t)$ являются решением следующей задачи:

$$
\begin{gathered}
q_1^{(-)}u=\varphi_v\left(\tilde{v}\left(\bar{\xi}\right),x_0\right)q_1^{(-)}v;\\
\frac{\partial^2 q_1^{(-)}v}{\partial\bar{\xi}^2}+\frac{dx_0}{dt}\frac{\partial q_1^{(-)}v}{\partial\bar{\xi}}-g_u\left(\bar{\xi}\right)q_1^{(-)}u-g_v\left(\bar{\xi}\right)q_1^{(-)}v=\pm 2\delta\varphi_v\left(\tilde{v}\left(\bar{\xi}\right),x_0\right)\Phi^{(-)},\ \bar{\xi}<0;\\
q_1^{(-)}v(0,t)=p,\quad q_1^{(-)}v(-\infty,t)=0.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь обозначено $g_u\left(\bar{\xi}\right)=g_u\left(\varphi_v\left(\tilde{v}\left(\bar{\xi}\right),x_0\right),\tilde{v}\left(\bar{\xi}\right),x_0,0\right)$ и аналогичный смысл имеет обозначение $g_u\left(\bar{\xi}\right)$.

Знак «+» в правой части дифференциального уравнения из (7) ставится, если выполнено условие **A3.4**, а если выполнено условие **A3.3**, то ставится знак «−». Величина p в граничном условии при $\bar{\xi}=0$ задачи (7) выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие **H3**. Постановка задачи для функций $q_1^{(+)}u$, $q_1^{(+)}v$, определенных при $\bar{\xi}\geq 0$ получается, если заменить в (7) верхние индексы «(−)» на «(+)».

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в случае выполнения условия **A3.3** являются решением системы уравнений

$$
\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}+\bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}=A;\quad -\bar{g}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}+\bar{g}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}=B,
$$

а если выполнено условие **A3.4**, эти функции суть решения системы

$$
\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}-\bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}=A;\quad \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}+\bar{g}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}=B,
$$

где A и B — положительные константы. В каждом случае $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ принимают положительные значения на отрезке $x\in[0;1]$ в силу выполнения условия **A3**.

Функции $q_2^{(\mp)}u$ и $q_2^{(\mp)}v$ устраняют невязки порядка ε^{n+1}, возникающие в результате модификации регулярной части в неравенствах из условия **H2**.

Существование верхнего и нижнего решений задачи (1) позволяет доказать следующую теорему

Теорема 1. *При выполнении условий A1-A4 для любых достаточно гладких начальных функций $u^0(x)$, $v^0(x)$, лежащих между верхним $\overline{U},\overline{V}$ и нижним $\underline{U},\underline{V}$ решениями:*

$$
\underline{U}(x,t,\varepsilon)<u^0(x)<\overline{U}(x,t,\varepsilon),\quad \underline{V}(x,t,\varepsilon)<v^0(x)<\overline{V}(x,t,\varepsilon),
$$

существует решение $u(x,t,\varepsilon)$, $v(x,t,\varepsilon)$ задачи (1), которое при любом $t\in[0;T]$ заключено между этими верхним и нижним решениями и для которого функции $U_n(x,t,\varepsilon)$, $V_n(x,t,\varepsilon)$ являются равномерным в области $\bar{D}_T:(x,t)\in[0;1]\times(0;T]$ асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

Список литературы / References

[1] FitzHugh R. A., "Impulses and physiological states in theoretical model of nerve membrane", *Biophys. J.*, **1** (1961), 445–466.

[2] Murray J. D., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications, Third Edition*, Springer, 2003.

[3] Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Яковенко Л. В., "Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред", *Биофизика*, **60**:3 (2015), 574–582; English transl.: Sidorova A. E., Levashova N. T., Melnikova A. A., Yakovenko L. V, "A model of a human dominated urban ecosystem as an active medium", *Biophysics*, **60**:3 (2015), 466–473.

[4] Бутузов В. Ф., Неделько И. В., "Контрастная структура типа ступеньки в системе двух сингулярно возмущенных параболических уравнений", *Матем. моделирование*, **13**:12 (2000), 23–42; English transl.: Butuzov V. F., Nedelko I. V., "Step-type contrast structure in a system of two singularly perturbed parabolic equations", *Matem. Mod.*, **60**:3 (2001), 23–42.

[5] Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений", *Дифференциальные уравнения*, **51**:3 (2015), 339–358; English transl.: Levashova N. T., Melnikova A. A., "Step-like contrast structure in a singularly perturbed system of parabolic equations", *Differential Equations*, **51**:3 (2015), 342–361.

[6] Fife P. C., McLeod J. B., "The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion. Equations to Travelling Front Solutions", *Arch. ration. mech. anal.*, **65**:4 (1977), 335–361.

[7] Pao C. V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press. New York, 1992.

[8] Волков В. Т., Нефедов Н. Н., "Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:4 (2006), 615–623; English transl.: Volkov V. T., Nefedov N. N., "Development of the asymptotic method of differential inequalities for investigation of periodic contrast structures in reaction-diffusion equations", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz*, **46**:4 (2006), 585–593.

[9] Божевольнов Ю. В.,Нефедов Н. Н., "Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:2 (2010), 276–285; English transl.: Bozhevol'nov Yu. V., Nefedov N. N., "Front motion in a parabolic reaction-diffusion problem", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz*, **50**:2 (2010), 264–273.

[10] Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., "Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:10 (2014), 1594–1607; English transl.: Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N.N., "Asymptotics of the front motion in the reaction-diffusion-advection problem", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **54**:10 (2014), 1536–1549.

[11] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, М, 1990, 208 с.; [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F, *Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij*, Vysshaja shkola, Moskva, 1990 (in Russian).] 208 pp.

[12] Левашова Н. Т., Петровская Е. С., "Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования асимптотики решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в виде контрастной структуры типа ступеньки", *Ученые записки физического факультета*, 2014, № 1, 1–13; [Levashova N. T., Petrovskaya E. S., "Primenenie metoda differentsialnykh neravenstv dlya obosnovaniya asimptotiki resheniya sistemy dvukh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy v vide kontrastnoy struktury tipa stupenki", *Uchenye zapiski fizicheskogo fakulteta*, 2014, № 1, 1–13 (in Russian).]

Levashova N. T., Melnikova A. A., Bytsyura S. V., "The Application of the Differential Inequalities Method for Proving the Existence of Moving Front Solution of the Parabolic Equations System", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:3 (2016), 317–325.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-3-317-325

Abstract. Investigations of initial boundary value problems for parabolic equations solutions are an important component of mathematical modeling. In this regard of special interest for mathematical modeling are the boundary value problem solutions that undergo sharp changes in any area of space. Such areas are called internal transitional layers. In case when the position of a transitional layer changes over time, the solution of a parabolic equation behaves as a moving front. For the purpose of proving the existence of such initial boundary value problem solutions, the method of differential inequalities is very effective. According to this method the so-called upper and lower solutions are to be constructed for the initial boundary value problem. The essence of an asymptotic method of differential inequalities is in receiving the upper and lower solutions as modifications of asymptotic submissions of the solutions of boundary value problems. The existence of the upper and lower solutions is a sufficient condition of existence of a solution of a boundary value problem. While proving the differential inequalities the so-called "quasimonotony" condition is essential. In the present work it is considered how to construct the upper and lower solutions for the system of the parabolic equations under various conditions of quasimonotony.

Keywords: parabolic equations system, internal transitional layer, differential inequalities method

On the authors:
Levashova Natalia Timurovna, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Melnikova Alina Aliksandrovna, orcid.org/0000-0001-9019-0263, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: melnikova@physics.msu.ru

Bytsyura Svetlana Vladimirovna, orcid.org/0000-0001-7787-437X, student,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskiye Gory, 1, bld. 2, Moscow, 119991, Russia, e-mail: sv.bytcyura@physics.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by Russian fund of basic researches, project 16-01-00473