Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **5** (2013) 148–157

УДК 514.174.5

Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади

Шутов А. В.[1], Коломейкина Е. В.[2]

Владимирский государственный университет
600024 Россия, г. Владимир, ул. Строителей, 11
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005 Россия, г. Москва, 2-ая Бауманская ул., 5

e-mail: a1981@mail.ru; pihta2@rambler.ru

получена 21 октября 2013

Ключевые слова: разбиения, полимино

Рассматривается задача о числе решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади. Полимино представляет собой связную фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов, примыкающих друг к другу по сторонам. Разбиение называется решетчатым, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом, переводящим все разбиение в себя. Пусть $T(n)$ – число решетчатых разбиений плоскости на полимино площади n, решетка периодов которых является подрешеткой решетки $\mathbb{Z}^2$. Доказано, что $2^{n-3} + 2^{[\frac{n-3}{2}]} \leq T(n) \leq C(n+1)^3(2.7)^{n+1}$. При доказательстве нижней оценки использована явная конструкция, позволяющая построить требуемое число решетчатых разбиений плоскости. Доказательство верхней оценки основано на одном критерии существования решетчатого разбиения плоскости на полимино, а также на теории самонепересекающихся блужданий на квадратной решетке. Также доказано, что почти все полимино, дающие решетчатые разбиения плоскости, имеют большой периметр.

Введение

Полимино, как известно, представляет собой фигуру на плоскости, составленную из конечного числа единичных квадратов (клеток), которая сильно связна, то есть из любой клетки в любую другую клетку этого полимино можно попасть, переходя по общим сторонам смежных клеток.

Это понятие и сам термин "полимино" были введены в 1953 году С. В. Голомбом [1], [2], и с тех пор привлекли внимание как любителей занимательной математики, так и профессиональных исследователей всего мира.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11–01–00578–А
[2]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00633-А

Большой вклад в популяризацию математических задач, связанных с полимино, внес М. Гарднер, который в своей рубрике "Математические игры" в журнале Scientific American опубликовал серию статей, обсуждающих эти проблемы, а затем включил соответствующие главы в свои монографии [3] – [6].

Одной из основных задач было определение числа a_n всевозможных полимино (разных с точностью до трансляции) заданной площади n и числа b_n — всевозможных типов полимино (разных с точностью до движения — трансляций, поворотов, отражений), состоящих из заданного числа клеток. Легко понять, что $b_n \leq a_n \leq 8b_n$. Кларнер доказал [7] существование отличной от нуля константы роста $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$, что означает экспоненциальный характер роста чисел a_n и b_n. При этом известны оценки $\alpha > 3,980137$ [8] и $\alpha < 4,65$ [9]. В работе [10] вычислены точные значения a_n для $n \leq 56$.

Учитывая сложность задачи оценки a_n или b_n, были предприняты попытки выделить классы полимино особого вида, для которых такие оценки возможны. Подробный обзор работ по подсчету числа классов полимино можно найти в [11].

Одной из самых важных и пока не решенных задач, связанных с полимино, является нахождение необходимого и достаточного условия существования разбиения плоскости на заданные полимино. В работе [6] найдены все классы полимино, разбивающие плоскость, с числом клеток $n \leq 7$. Позднее для $n \leq 9$ аналогичное исследование было проведено в [12]. В работах [13] и [14] для всех полимино площади n с $n \leq 14$ и $n \leq 25$ соответственно найдены периодические разбиения плоскости на данное полимино с минимальным числом полимино в фундаментальной области решетки периодов или доказано отсутствие периодических разбиений на заданное полимино.

Задача о существовании алгоритма, позволяющего установить, существует ли разбиение плоскости из заданного конечного набора прототайлов, тесно связана с задачей о существовании непериодического разбиения из заданного набора прототайлов. Амман, Грюнбаум и Шепард [15] показали, что существует набор из 3 полимино, разбивающих плоскость только непериодически. Отсюда вытекает, что задача об определении того, существует ли разбиение плоскости на полимино из заданного набора, алгоритмически неразрешима. Неизвестно, является ли алгоритмически разрешимой задача о существовании разбиения плоскости на заданное полимино. Это связано с тем, что в настоящее время неизвестно, существует ли полимино, разбивающее плоскость только непериодически.

Определение. Разбиение называется *трансляционным*, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру некоторым параллельным переносом.

Определение. Разбиение называется *решетчатым*, если любую фигуру разбиения можно перевести в любую другую фигуру параллельным переносом, причем это преобразование переводит все разбиение в себя.

Без ограничения общности можно считать, что все вершины полимино являются точками целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$. Очевидно, что решетчатые разбиения плоскости являются подмножеством трансляционных разбиений. Мы будем рассматривать решетчатые разбиения плоскости на полимино, гомеоморфные диску. Также мы будем предполагать, что решетка периодов разбиения является подрешеткой целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$.

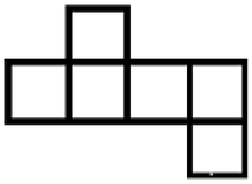


Рис. 1. Полимино

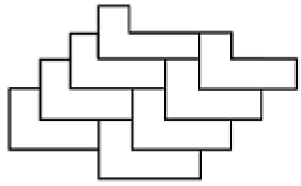


Рис. 2. Пример решетчатого разбиения

Можно доказать, что топологически решетчатых разбиений плоскости два, а именно: правильные разбиения плоскости на квадраты и шестиугольники. Пусть n — площадь полимино, то есть полимино состоит из n квадратов площадью 1 квадратная единица каждый. Возникает задача подсчитать число $T(n)$ решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади n, решетка периодов которых является подрешеткой $\mathbb{Z}^2$. Числа $T(n)$ для малых значений n были вычислены в работах Роудса [12] и Малеева [16]. Число решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади, топологически эквивалентных правильному разбиению плоскости на квадраты, рассмотрено в работе Брлеко и Фросини [17]. Кроме того, в работе [18] был предложен алгоритм сложности $O(n^2)$, позволяющий определить, порождает ли полимино площади n решетчатое разбиение плоскости. Позднее данный алгоритм был усовершенствован в работе [19].

Определение. Разбиение называется *изоэдрическим*, если для любых двух его фигур существует движение из группы симметрии этого разбиения, переводящее одну фигуру в другую.

Очевидно, что решетчатые разбиения являются частным случаем изоэдрических. Полиномиальный по сложности алгоритм, определяющий, дает ли полимино изоэдрическое разбиение плоскости, был найден в работе [20]. Компьютерный алгоритм поиска разбиений на полимино в случае, когда разбиение можно получить из одного прототайла, используя лишь поворотную симметрию, представлен в работах [21], [22].

Теорема 1. *Для числа $T(n)$ решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади n, решетка периодов которых является подрешеткой решетки $\mathbb{Z}^2$, справедлива следующая оценка:*

$$2^{n-3} + 2^{[\frac{n-3}{2}]} \le T(n) \le C(n+1)^3(2,7)^{n+1}.$$

1. Нижняя оценка на число решетчатых разбиений на полимино заданной площади

Рассмотрим оценку снизу. Пусть n — площадь полимино. Берем произвольную последовательность w из нулей и единиц длины $n-1$. Строим по ней ломаную следующим образом: 0 в последовательности соответствует сдвигу вправо, 1 в последовательности соответствует сдвигу вверх. Далее сдвигаем ломаную на вектор $(-1;1)$. Полученная ломаная с исходной не пересекаются. Дополняем эти две ломаные двумя уголками до образования полимино. Легко видеть, что получили полимино площади n.

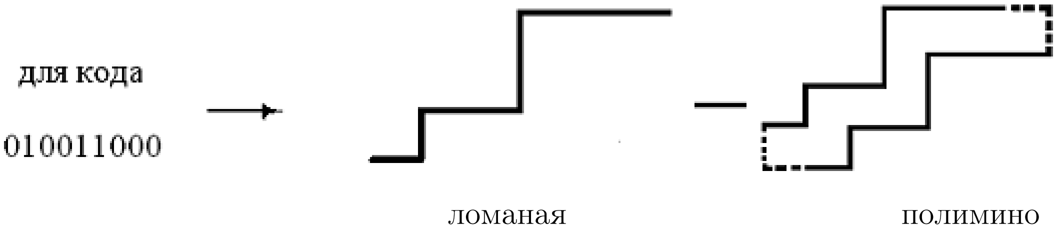


Рис. 3. Пример образования полимино из кода

Все такие полимино дают решетчатые разбиения плоскости, причем при фиксированном n эти разбиения имеют одну и ту же решетку периодов, порожденную векторами $(-1;1)$ и $(n;1)$. Будем говорить, что построенное разбиение порождено кодом w. Таких разбиений ровно 2^{n-1}. Однако разбиения, полученные таким образом, могут повторяться. Для того, чтобы найти нижнюю оценку на число неповторяющихся разбиений, достаточно поделить их количество 2^{n-1} на 8, поскольку из одного разбиения движениями (поворотами на углы, кратные 90^o, и соответствующими отражениями) больше 8 разбиений не сделать.

Данная оценка грубая, наша задача улучшить ее в 2 с небольшим раза. На множестве последовательностей из 0 и 1 определим действие группы G. Введем два порождающих преобразования: g_1 — изменение порядка последовательности на обратный и g_2 — инвертирование, то есть замена нулей на единицы и наоборот. В данной группе 4 элемента: тождественный, два порождающих и их композиция. Это известная коммутативная группа 4 порядка $D_2 = \{g_0 = e, g_1, g_2, g_3 = g_1 g_2\}$.

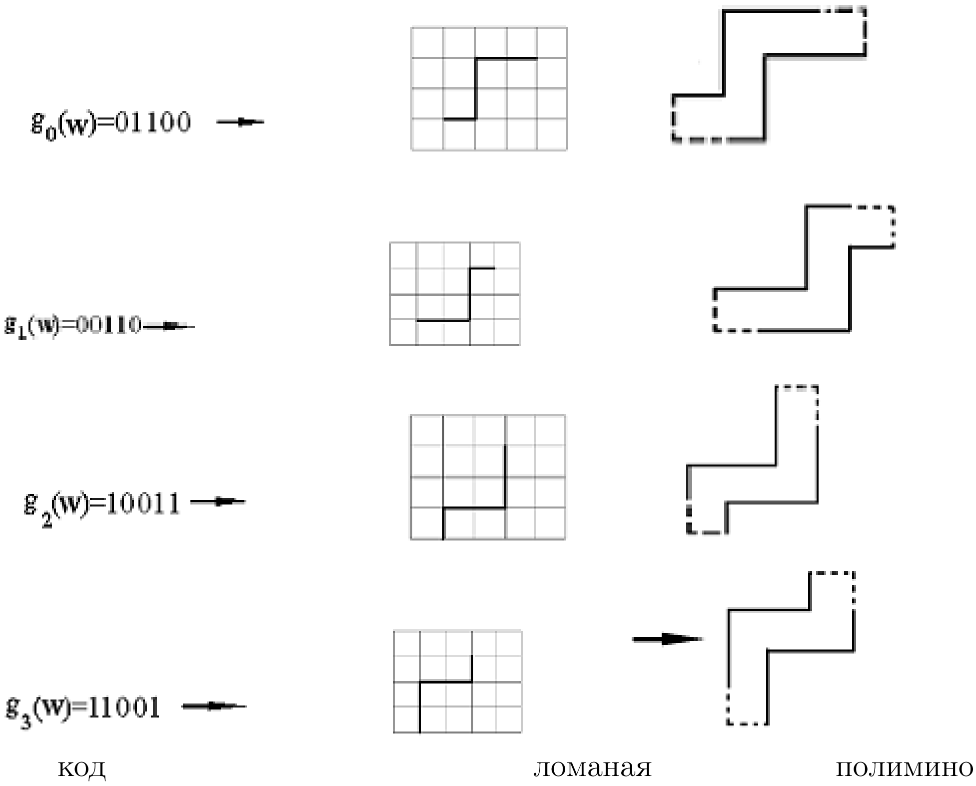


Рис. 4. Действие группы D_2

Становится очевидным следующее утверждение:

Лемма 1. *Коды порождают одинаковые с точностью до движения плоскости разбиения тогда и только тогда, когда последовательности из 0 и 1 будут эквивалентны относительно введенной группы D_2.*

Для определения числа неповторяющихся разбиений нам нужно подсчитать количество орбит группы. Для этого воспользуемся леммой Бернсайда:

Лемма 2. *Число орбит группы равно числу неподвижных точек ее элементов, деленному на число элементов группы.*

Напомним, что *неподвижной точкой* относительно некоторого преобразования для данной задачи является последовательность заданной длины, не меняющаяся под действием этого преобразования.

Сколько последовательностей перейдет в себя под действием тождественного преобразования? Количество неподвижных точек, а именно, последовательностей длины $n-1$, при действии тождественного преобразования равно количеству последовательностей длины $n-1$, то есть 2^{n-1}.

Сколько последовательностей перейдет в себя под действием изменения кода последовательности на обратный? Чтобы последовательность была неподвижным элементом, она должна быть симметрична. Половину последовательности выбираем произвольно, далее отражаем. Отдельно подсчитаем количество симметричных последовательностей разной четности:

а) если длина последовательности $(n-1)$ – четное число, то количество таких последовательностей равно $2^{\frac{n-1}{2}}$;

б) если длина последовательности $(n-1)$ – нечетное число, то количество таких последовательностей равно $2^{\frac{n-1-1}{2}} \cdot 2^1 = 2^{\frac{n}{2}}$, поскольку в центре последовательности либо 0, либо 1.

Инверсия неподвижных точек не имеет.

Теперь рассмотрим композицию инверсии и переписывания элементов последовательности в обратном порядке. Для нечетной длины $(n-1)$ неподвижных точек нет, так как центральный элемент обязательно меняется. Для четной длины $(n-1)$ последовательности, как и для второго преобразования, первую половину пишем произвольно, вторую половину отражаем и затем вторую половину инвертируем. Число последовательностей, не меняющихся при этом преобразовании, равно $2^{\frac{n-1}{2}}$.

Далее сложим все неподвижные элементы при действии на них элементов группы D_2. Таким образом, число орбит данной группы по лемме Бернсайда

а) для $(n-1)$ нечетного равно $\frac{2^{n-1}+2^{n/2}}{4} = 2^{n-3} + 2^{\frac{n}{2}-2}$;

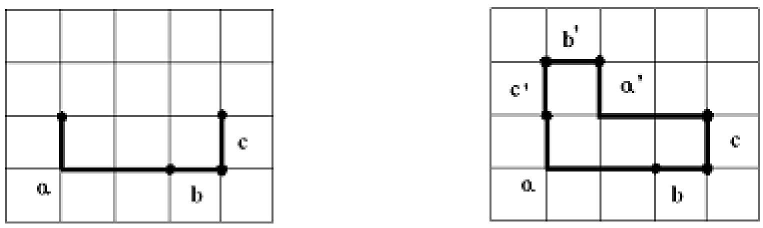
б) для $(n-1)$ четного число орбит группы равно $\frac{2^{n-1}+2^{\frac{n-1}{2}}+2^{\frac{n-1}{2}}}{4} = 2^{n-3} + 2^{\frac{n-3}{2}}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что обе формулы могут быть записаны в виде $2^{n-3} + 2^{[\frac{n-3}{2}]}$, где $[\cdot]$ – целая часть числа.

2. Верхняя оценка на число решетчатых разбиений на полимино заданной площади

Вместо площади будем теперь фиксировать периметр полимино. Заметим, что значение периметра всегда четное число $2p$. Обозначим через $T_0(p)$ число решетчатых разбиений плоскости на полимино полупериметра p. Нужно понять, как устроено решетчатое разбиение. Для этого воспользуемся критерием из статьи Гамбини и Вьюилона [18]. Любую ломаную на клетчатой бумаге можно закодировать словом из 4 символов, например: 1 – вправо, 2 – вверх, 3 – влево, 4 – вниз.

Ломаная AB, соединяющая различные точки A и B, имеет направление движения от точки, расположенной левее или ниже, к точке расположенной правее или выше друг относительно друга. Для незамкнутой ломаной данное кодирование единственно, для замкнутой ломаной — нет. Для слова a определим обратное слово a' как код той же самой ломаной, взятый в обратном порядке. Покажем на рис. 5 пример полимино при $a = 411$, $b = 1$, $c = 2$. Тогда $a' = 332$, $b' = 3$, $c' = 4$:



ломаная abc граница $abca'b'c'$ полимино

Рис. 5

Сформулируем теорему из работ [18], [23]:

Теорема 2. *Полимино дает решетчатое разбиение тогда и только тогда, когда его граница представима в виде $abca'b'c'$ для некоторых a, b, c, причем слово* c *может быть пустым. При этом различным решетчатым разбиениям соответствуют различные представления границы.*

Разъясним геометрический смысл слова abc. Это незамкнутая ломаная длины p без самопересечений (поскольку полимино имеет несамопересекающуюся границу) с отмеченными двумя точками, концами слов a и b. Точки нужны для того, чтобы мы могли найти границы слов a, b, c и построить обратные слова, то есть восстановить полимино. Поэтому число решетчатых разбиений на полимино заданного периметра не превосходит числа таких ломаных. Берем полимино, дающее разбиение, у него есть код $abca'b'c'$, оставляем от него только abc. Нам нужно оценить сверху число несамопересекающихся ломаных длины p с двумя отмеченными точками, это и даст требуемую верхнюю оценку. Оценка точной не будет, поскольку при дописывании сопряженных слов могут появляться самопересечения (например, самопересечение обязательно возникает, если слова a и c совпадают).

Способов отметить две точки на ломаной длины p существует $p(p+1)/2$, оценим их сверху выражением p^2. Осталось оценить сверху число несамопересекающихся ломаных длины p. Такие ломаные известны под названием "self-avoiding walk" в квадратной сетке и для их числа доказана оценка [24], согласно которой их количество не превосходит $C\cdot(2,7)^p$. Итак, мы получили, что число решетчатых разбиений на полимино с периметром p не превосходит

$$T_0(p) \leq C \cdot p^2 \cdot (2,7)^p.$$

Осталось перейти к площади. Имеем связь площади и периметра $2p \leq 2n+2$, легко получаемую методом математической индукции. Для получения верхней оценки числа решетчатых разбиений плоскости на полимино остается просуммировать предыдущую оценку по p от 1 до $n+1$:

$$T(n) \leq \sum_{p=1}^{n+1} T_0(p) \leq \Sigma_{p=1}^{n+1} C \cdot (2,7)^p \cdot p^2.$$

Заменяя все слагаемые суммы на наибольшее, получаем оценку

$$T(n) \leq C(n+1)^3(2,7)^{n+1},$$

что и требовалось.

3. О периметре полимино, порождающих решетчатые разбиения плоскости

Теорема 3. *Пусть $T_1(n)$ – число решетчатых разбиений плоскости на полимино площади n и полупериметра $p < 0,697n$, решетка периодов которых является подрешеткой решетки $\mathbb{Z}^2$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_1(n)}{T(n)} = 0.$$

С учетом того, что

$$2[\sqrt{n}] \leq p \leq n+1,$$

данная теорема фактически означает, что почти все решетчатые разбиения плоскости порождаются полимино большого периметра.

Доказательство.

Воспользуемся ранее доказанной оценкой

$$T_0(p) \leq C \cdot p^2 \cdot (2,7)^p.$$

Имеем

$$T_1(n) \leq \sum_{p=1}^{[0,697n]} T_0(p) \leq \Sigma_{p=1}^{[0,697n]} C \cdot (2,7)^p \cdot p^2.$$

Заменяя все слагаемые суммы на наибольшее, получаем оценку

$$T_1(n) \leq C(0,697)^3(2,7)^{0,697},$$

и остается заметить, что $(2,7)^{0,697} < 2$.

Список литературы

1. *Голомб С.В.* Полимино. М.: Мир, 1975. (*Golomb S.W.* Polyominoes. 1996. 198 p. ISBN: 9780691024448)

2. *Golomb S.W.* Checkerboards and polyominoes // Amer. Math. Monthly. 1954. 61. P. 672–682.

3. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. 2-е изд. М.: Мир, 1999, 447 с. (*Gardner M.* Mathematical puzzles and diversions. The University of Chicago press, 1987. ISBN: 978-0226282534.)

4. *Гарднер М.* Математические досуги. М.: Мир, 1972. 496 с. (*Gardner M.* Mathematical Recreations: A Collection in Honor of Martin Gardner. Dover, 1998. ISBN 0-486-40089-1.)

5. *Гарднер М.* Математические новеллы. М.: Мир, 1974. 456 с. (*Gardner M.* Mathematical Carnival: A New Round-up of Tantalizers and Puzzles from «Scientific American». Knopf Publishing Group, 1975. ISBN 0-394-49406-7.)

6. *Гарднер М.* Путешествие во времени. М.: Мир, 1990. 341 с. (*Gardner M.* Time Travel and Other Mathematical Bewilderments. W.H. Freeman and Company, 1987. ISBN 0-7167-1925-8.)

7. *Klarner D.* A Cell growth problems // Cand. J. Math. 1967. 19. P. 851–863.

8. *Barequet G., Moffie M., Rib A., Rote G.* Counting polyominoes on twisted cylinders // Integers. 2006. 6. A22.

9. *Klarner D.A., Rivest R.L.* A procedure for improving the upper bound for the number of n-ominoes // Canad. J. Math. 1973. 25. P. 585–602.

10. *Jensen I.* Counting polyominoes: A parallel implementation for cluster computing // Lecture Notes in Computer Science. 2003. 2659. P. 203–212.

11. *Bousquet-Melou M., Brak R.* Exactly Solved Models // In Polygons, Polyominoes and Polycubes. / Ed. A. J. Guttman // Lecture Notes in Physics. Springer, 2009. P. 43–78.

12. *Glenn C. Rhoads* Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. 174. P. 329–353.

13. *Rhoads G. C.* Planar Tilings and the Search for an Aperiodic Prototile: PhD dissertation, Rutgers University, 2003.

14. *Myers J.* Polyomino, polyhex and polyiamond tiling. http://www.srcf.ucam.org/jsm28/tiling/

15. *Ammann R., Grunbaum B., Shephard G.* Aperiodic tiles // Discrete and Computational Geometry. 1991. 6. P. 1–25.

16. *Малеев А.В.* Алгоритм и компьютерная программа перебора вариантов упаковок полимино в плоскости // Кристаллография. 2013. Т. 58, № 5. С. 749–756. (*Maleev A.V.* Algorithm and Computer-Program Search for Variants of Polyomino Packings in Plane // Crystallography. 2013. V. 58, No 5. P. 749–756 [in Russian].)

17. *Srecko Brlek, Andrea Frosini, Simone Rinaldi, Laurent Vuillon.* Tilings by translation: enumeration by a rational language approach// The electronic journal of combinatorics. 2006. 13, R15.

18. *Ian Gambini, Laurent Vuillon.* An algorothm for deciding if a polyomino tiles the plane by translations // RAIRO – Theoretical Informatics and Applications. 2007. 41.2. P. 147–155.

19. *Brlek S., Provencal X., Fedou J.-M.* On the tiling by translation problem // Discrete Applied Mathematics. 2009. 157, P. 464–475.

20. *Keating K., Vince A.* Isohedral Polyomino Tiling of the Plane // Discrete and Computational Geometry. 1999. 21. P. 615–630.

21. *Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G., Schattschneider D.* Enumeration of Polyominoes, Polyiamonds and Polyhexes for Isohedral Tilings with Rotational Symmetry // H. Ito et al. (Eds.): KyotoCGGT 2007, LNCS 4535, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008. P. 68–78.

22. *Fukuda H., Mutoh N., Nakamura G., Schattschneider D.* A Method to Generate Polyominoes and Polyiamonds for Tilings with Rotational Symmetry // Graphs and Combinatorics. 2007. 23. P. 259–267.

23. *Beauquier D., Nivat M.* On Translating One Polyomino To Tile the Plane// Discrete Comput. Geom. 1991. V. 6. P. 575–592.

24. *Madras N., Slade G.* The self-Avoiding Walk // Birkhäuser. ISBN 978–0–8176–3891–7.

The Estimation of the Number of Lattice Tilings of a Plane by a Given Area Polyomino

Shutov A. V., Kolomeykina E. V.

Vladimir State University, Stroitelei str., 11, Vladimir, 600024, Russia
Moscow State Technical University, 2-nd Bauman str., 5, Moscow, 105005, Russia

Keywords: tilings, polyomino

We study a problem of a number of lattice plane tilings by given area polyominoes. A polyomino is a connected plane geometric figure formed by joining edge to edge a finite number of unit squares. A tiling is a lattice tiling if each tile can be mapped to any other tile by translation which maps the whole tiling to itself. Let $T(n)$ be a number of lattice plane tilings by given area polyominoes such that its translation lattice is a sublattice of $\mathbb{Z}^2$. It is proved that $2^{n-3}+2^{[\frac{n-3}{2}]} \leq T(n) \leq C(n+1)^3(2.7)^{n+1}$. In the proof of a lower bound we give an explicit construction of required lattice plane tilings. The proof of an upper bound is based on a criterion of the existence of lattice plane tiling by polyomino and on the theory of self-avoiding walk. Also, it is proved that almost all polyominoes that give lattice plane tilings have sufficiently large perimeters.

Сведения об авторах:
Шутов Антон Владимирович,
Владимирский государственный университет,
канд. физ.-мат. наук, доцент
Коломейкина Екатерина Викторовна,
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана,
канд. физ.-мат. наук, доцент