Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, №3 (2017), с. 259–279
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 3 (2017), pp. 259–279

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-259-279

УДК 517.957

Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия

Антипов Е. А., Волков В. Т.[1], Левашова Н. Т.[1], Нефедов Н. Н.[1]

получена 15 декабря 2016

Аннотация. В настоящей работе проведено исследование решения вида движущегося фронта начально-краевой задачи реакция-диффузия с малым коэффициентом диффузии. Задачи в таких постановках можно использовать для моделирования физических процессов, связанных с распространением автоволновых фронтов, в частности в биофизике или при описании процессов горения. Решение вида фронта – это функция, которая характеризуется тем, что в области её определения существует подобласть, в которой функция обладает большим градиентом. Эта подобласть называется внутренним переходным слоем. В нестационарном случае положение переходного слоя изменяется со временем, что, как известно, затрудняет численное решение задачи, а также обоснование корректности численных расчетов. В таком случае необходимым компонентом исследования является аналитический подход. В настоящей работе для аналитического исследования решения поставленной задачи применены асимптотические методы. В частности, при помощи алгоритма Васильевой построено асимптотическое приближение решения в виде разложения по степеням малого параметра, а доказательство существования решения вида движущегося фронта проведено при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств. Используемые методы также позволяют получить уравнение, описывающее движение фронта. С этой целью в области переходного слоя осуществляется переход к локальным координатам. В настоящей работе по сравнению с известными ранее публикациями, касающимися двумерных задач с внутренними переходными слоями, метод перехода к локальным координатам в окрестности фронта был модифицирован, что привело к упрощению алгоритма определения уравнения движения кривой.

Ключевые слова: задача реакция-диффузия, двумерный движущийся фронт, асимптотическое представление, малый параметр, асимптотический метод дифференциальных неравенств

Для цитирования: Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., "Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:3 (2017), 259–279.

Об авторах: Антипов Евгений Александрович, orcid.org/0000-0001-6734-683X, зам. нач. упр. информатизации, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: a.evgen.a@gmail.com

Волков Владимир Тарасович, orcid.org/0000-0002-4205-4141, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: volkovvt@mail.ru

Левашова Наталия Тимуровна, orcid.org/0000-0002-1916-166X, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Нефедов Николай Николаевич, orcid.org/0000-0002-3651-6434, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Ленинские горы, д. 1, стр. 2, г. Москва, 119991, Россия, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Благодарности:
[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект №16-01-00437.

Введение

В настоящей работе проведено исследование решения вида движущегося фронта начально-краевой задачи реакция-диффузия с малым коэффициентом диффузии. Задачи в таких постановках можно использовать для моделирования физических процессов, связанных с распространением автоволновых фронтов, в частности в биофизике или при описании процессов горения. Решение вида фронта – это функция, которая характеризуется тем, что в области её определения существует подобласть, в которой функция обладает большим градиентом. Эта подобласть называется внутренним переходным слоем. В нестационарном случае положение переходного слоя изменяется со временем, что, как известно, затрудняет численное решение задачи, а также обоснование корректности численных расчетов. В таком случае необходимым компонентом исследования является аналитический подход. В настоящей работе для аналитического исследования решения поставленной задачи применены асимптотические методы. В частности, при помощи алгоритма Васильевой [1] построено асимптотическое приближение решения в виде разложения по степеням малого параметра, а доказательство существования решения вида движущегося фронта проведено при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств, применение которого для параболических уравнений продемонстрировано в работах [2–7]. Используемые методы также позволяют получить уравнение, описывающее движение фронта. С этой целью в области переходного слоя осуществляется переход к локальным координатам. В настоящей работе по сравнению с известными ранее публикациями [8–11], касающимися двумерных задач с внутренними переходными слоями, метод перехода к локальным координатам в окрестности фронта был модифицирован, что привело к упрощению алгоритма определения уравнения движения кривой.

1. Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения реакция-диффузия.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\Delta u - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = f(u,x,y,\varepsilon), \quad x\in\mathbb{R}, \;\; y\in(0,a), \;\; t\in(0,T],\\
&u_y(x,0,t,\varepsilon) = u_y(x,a,t,\varepsilon) = 0, \;\; x\in\mathbb{R}, \;\; t\in[0,T],\\
&u(x,y,t,\varepsilon) = u(x+L,y,t,\varepsilon), \;\; x\in\mathbb{R}, \;\; y\in[0,a], \;\; t\in[0,T],\\
&u(x,y,0,\varepsilon) = u_{init}(x,y), \;\; x\in\mathbb{R}, \;\; y\in[0,a].
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ – малый параметр. Будем считать, что функция $f(u,x,y,\varepsilon)$ – L – периодическая по переменной x, достаточно гладкая в области $I_u\times\bar{D}$, где I_u – допустимый интервал значений u, $\bar{D}=\{(x,y):\mathbb{R}\times[0,a]\}$, $u_{init}(x,y)$ – непрерывная функция в $\bar{D}$, L – периодическая по переменной x.

Будем рассматривать задачу в постановке (1), считая что выполнен ряд условий.

Условие C1.

Пусть функция $f(u,x,y,\varepsilon)$ такова, что вырожденное уравнение $f(u,x,y,0)=0$ имеет в области $\bar{D}$ три изолированных корня $u=\varphi^{(\mp)}(x,y)$, $u=\varphi^{(0)}(x,y)$, причем всюду в области $\bar{D}$ выполняются неравенства $\varphi^{(-)}(x,y)<\varphi^{0}(x,y)<\varphi^{(+)}(x,y)$ и

$f_u\left(\varphi^{(\mp)}(x,y),x,y,0\right)>0,\ f_u\left(\varphi^{0}(x,y),x,y,0\right)<0.$

Мы будем исследовать решение задачи (1), которое имеет вид движущегося фронта, а именно, такое решение, которое в каждый момент времени вблизи прямой $y=0$ близко к поверхности $\varphi^{(-)}(x,y)$, а в близи прямой $y=a$ близко к поверхности $\varphi^{(+)}(x,y)$ и резко изменяется от значений на поверхности $\varphi^{(-)}(x,y)$ до значений на поверхности $\varphi^{(+)}(x,y)$ в окрестности некоторой кривой $y=h(x,t)$, достаточно удаленной от границ $y=0$ и $y=a$. В этом случае говорят, что решение задачи (1) содержит внутренний переходный слой в окрестности этой кривой.

Будем считать, что $y=h(x,t)$ – это та кривая, на которой решение $u(x,y,t,\varepsilon)$ задачи (1) в каждый момент времени принимает значение, равное $\varphi^{0}(x,y)$.

Кривая $y=h(x,t)$ в каждый момент времени делит область $\bar{D}$ на две части: $\bar{D}^{(-)}=\{(x,y):\mathbb{R}\cup[0;h(x,t)]\}$ и $\bar{D}^{(+)}=\{(x,y):\mathbb{R}\cup[h(x,t);a]\}$.

Для детального описания переходного слоя перейдем в окрестности этой кривой к локальным координатам (l,r) с помощью соотношений

$$x=l-r\sin\alpha\quad y=h(l,t)+r\cos\alpha, \tag{2}$$

где

$$\sin\alpha=\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}, \tag{3}$$

α – угол между осью y и нормалью к кривой $y=h(x,t)$, проведенной в область $y>h(x,t)$ в каждый момент времени t, r – расстояние от этой кривой по нормали к ней. Будем считать что $r>0$ в области $D^{(+)}$, $r<0$ в области $D^{(-)}$, $r=0$ на кривой $y=h(x,t)$, l – x – координата точки на этой кривой, из которой нормаль проводится; производные функции $h(x,t)$ в выражении (3) берутся при $x=l$.

Перепишем дифференциальные операторы, входящие в уравнение (1), в переменных r,l,t.

$$\nabla=\left\{-\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sqrt{1+h_x^2}}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial l};\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{h_x\sqrt{1+h_x^2}}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial l}\right\}; \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)=\\&=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\left(rh_{xt}-h_th_x\sqrt{1+h_x^2}\right)\frac{\partial}{\partial l};\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\Delta=&\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{h_{xx}}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial r}+\\&+\frac{1+h_x^2}{\left(rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}\right)^3}\left(2rh_xh_{xx}^2+h_xh_{xx}\left(1+h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}-rh_{xxx}\left(1+h_x^2\right)\right)\frac{\partial}{\partial l}+\\&+\frac{\left(1+h_x^2\right)^2}{\left(rh_{xx}-(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial l^2}.\end{aligned} \tag{6}$$

Производные функции $h(x,t)$, входящие в выражения (4) – (6), берутся при $x = l$. Введем растянутую переменную

$$\xi = \frac{r}{\varepsilon}. \tag{7}$$

В переменных ξ, l, t дифференциальный оператор в уравнении (1) принимает вид

$$\varepsilon^2\Delta - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial l}\right) + \sum_{i=2}\varepsilon^i L_i,$$

где L_i – дифференциальные операторы первого или второго порядка по переменным ξ и l.

1.1. Присоединенные системы

Запишем так называемое присоединенное уравнение для задачи (1):

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi} = f(\tilde{u}, x, h(x,t), 0),$$

которое будем рассматривать отдельно на каждой из полупрямых $\xi \le 0$ и $\xi \ge 0$, считая переменные x и t, а также функцию $h(x,t)$ параметрами. В каждом случае можно свести это уравнение к соответствующей присоединенной системе уравнений:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi} = \Phi, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = W\Phi + f(\tilde{u}, x, h(x,t), 0), \tag{8}$$

где через W обозначено следующее выражение:

$$W = \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}. \tag{9}$$

Точки $(\varphi^{(-)}, 0)$ и $(\varphi^{(+)}, 0)$ на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ являются точками покоя типа седла системы (8) в силу неравенства $f_u\left(\varphi^{(\mp)}(x,y), x, y, 0\right) > 0$ из условия C2.

Разделив второе уравнение системы (8) на первое, а затем домножив обе части полученного равенства на Φ, получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\Phi(\tilde{u}, h(x,t), W)$.

При всех $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ рассмотрим следующие задачи Коши:

$$\begin{aligned} &\Phi^{(-)}\frac{\partial\Phi^{(-)}}{\partial\tilde{u}} = W\Phi^{(-)} + f(\tilde{u}, x, h(x,t), 0), \quad \varphi^{(-)}(x, h(x,t)) < \tilde{u} \leqslant \varphi^0(x, h(x,t)),\\ &\Phi^{(-)}\left(\varphi^{(-)}(x, h(x,t)), h(x,t), W\right) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

и

$$\begin{aligned} &\Phi^{(+)}\frac{\partial\Phi^{(+)}}{\partial\tilde{u}} = W\Phi^{(+)} + f(\tilde{u}, x, h(x,t), 0), \quad \varphi^0(x, h(x,t)) \leqslant \tilde{u} < \varphi^{(+)}(x, h(x,t)),\\ &\Phi^{(+)}\left(\varphi^{(+)}(x, h(x,t)), h(x,t), W\right) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Условие C2.

Пусть при всех $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ существует такое семейство кривых $h(x,t)$, что определены решения задач Коши (10) и (11), где через W обозначено выражение (9), причем выполняются неравенства:

$$\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(x,t), W) > 0, \quad \varphi^{(-)}(x, h(x,t)) < \tilde{u} \leqslant \varphi^0(x, h(x,t));$$
$$\Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(x,t), W) > 0, \quad \varphi^0(x, h(x,t)) \leqslant \tilde{u} < \varphi^{(+)}(x, h(x,t)).$$

Условия существования решения задач типа (10) и (11) сформулированы в [12].

Условие C2 гарантирует существование на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ сепаратрисы $\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(x,t), W)$, выходящей из седла $(\varphi^{(-)}, 0)$ при $\xi \to -\infty$, и сепаратрисы $\Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(x,t), W)$, входящей в седло $(\varphi^{(+)}, 0)$ при $\xi \to +\infty$.

Введем функцию

$$H_0(h(x,t), t, W) = \Phi^{(-)}(\varphi^0(x, h(x,t)), h(x,t), W) - \Phi^{(+)}(\varphi^0(x, h(x,t)), h(x,t), W).$$

Для каждого набора параметров x, t, $h(x,t)$ и W величина $H_0(h(x,t), t, W)$ равна расстоянию между сепаратрисами $\Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(x,t), W)$ и $\Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(x,t), W)$ на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ при $\tilde{u} = \varphi^0(x, h(x,t))$.

Условие C3.

Пусть для всех значений $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ существует функция $h_0(x,t)$ – решение уравнения

$$H_0(h_0(x,t), t, W_0) = 0, \quad \text{где} \quad W_0 = \frac{h_{0t}}{\sqrt{1 + h_{0x}^2}}. \tag{12}$$

Условие C3 означает пересечение при $h(x,t) = h_0(x,t)$ сепаратрис $\Phi^{(-)}$ и $\Phi^{(+)}$ на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$.

В некоторых случаях, например, если функция $f(\tilde{u}, x, h(x,t), 0)$ представляет собой кубический многочлен, уравнение кривой $h_0(x,t)$ можно получить в явном виде [11]. В остальных случаях задачу можно решать численно.

2. Построение асимптотического приближения решения

Асимптотическое приближение $U(x,y,t,\varepsilon)$ решения задачи (1) будем строить отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{(-)}$ и $\bar{D}^{(+)}$:

$$U = \begin{cases} U^{(-)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}^{(-)} \times [0,T], \\ U^{(+)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}^{(+)} \times [0,T]. \end{cases}$$

Каждую из функций $U^{(-)}$ и $U^{(+)}$ будем представлять в виде сумм трех слагаемых

$$U^{(\mp)} = \bar{u}^{(\mp)}(x,y,\varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t, \varepsilon) + \Pi^{(\mp)}(x, \eta^{(\mp)}, \varepsilon). \tag{13}$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,y,\varepsilon)$ – регулярная часть асимптотического представления, $Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t, \varepsilon)$ – функции, описывающие переходный слой, ξ – растянутая переменная вблизи кривой локализации переходного слоя, определенная равенством (7),

$\Pi^{(\mp)}(x, \eta^{(\mp)}, \varepsilon)$ – функции, описывающие поведение решения вблизи границ $y = 0$ и $y = a$, соответственно. Здесь $\eta^{(-)} = \dfrac{y}{\varepsilon}$, $\eta^{(+)} = \dfrac{y-a}{\varepsilon}$. Каждое слагаемое в (13) представляет собой разложение по степеням малого параметра ε, в частности:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x, y, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x, y) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x, y) + \ldots, \tag{14}$$

$$Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t, \varepsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t) + \ldots \tag{15}$$

Кривую $y = h(x,t)$ также будем искать в виде разложения по степеням параметра ε:

$$h(x,t) = h_0(x,t) + \varepsilon h_1(x,t) + \varepsilon^2 h_2(x,t) + \ldots \tag{16}$$

Функции $U^{(-)}(x, y, t, \varepsilon)$ и $U^{(+)}(x, y, t, \varepsilon)$ и их производные по направлению нормали к кривой $y = h(x,t)$ будем непрерывно сшивать на этой кривой в каждый момент времени t:

$$U^{(-)}(x, h(x,t), t, \varepsilon) = U^{(+)}(x, h(x,t), t, \varepsilon) = \varphi^0(x, h(x,t)), \tag{17}$$

$$\frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(x, h(x,t), t, \varepsilon) = \frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(x, h(x,t), t, \varepsilon). \tag{18}$$

2.1. Регулярная часть асимптотики

Представляя разложения (14) в равенства

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^{(\mp)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}^{(\mp)}}{\partial y^2} \right) = f(\bar{u}^{(\mp)}, x, y, \varepsilon),$$

раскладывая функции в правой части по формуле Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, будем получать уравнения для функций $\bar{u}_i^{(\mp)}(x, y), i = 0, 1 \ldots$.

В порядке ε^0 получим вырожденное уравнение

$$f(\bar{u}_0^{(\mp)}, x, y, 0) = 0.$$

Согласно условию C1 это уравнение разрешимо, и функции $\varphi^{(-)}(x, y)$ и $\varphi^{(+)}(x, y)$ являются L-периодическими по переменной x решениями этого уравнения.

Положим

$$\bar{u}_0^{(-)}(x, y) = \varphi^{(-)}(x, y), \ (x, y) \in \bar{D}^{(-)}, \quad \bar{u}_0^{(+)}(x, y) = \varphi^{(+)}(x, y), \ (x, y) \in \bar{D}^{(+)}.$$

Далее для сокращения записей введем обозначение

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x, y) := f_u(\varphi^{(\mp)}(x, y), x, y, 0), \tag{19}$$

а также обозначение $\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x, y)$, имеющее аналогичный смысл. Функции $\bar{u}_i^{(\mp)}, i = 1, 2 \ldots$ определяются как решения уравнений

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x, y) \bar{u}_i^{(\mp)} = \bar{f}_i^{(\mp)}(x, y),$$

где $\bar{f}_i^{(\mp)}(x, y)$ – известные функции. В частности, $\bar{f}_1^{(\mp)}(x, y) = -\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x, y)$.

2.2. Функции переходного слоя

Уравнения для функций переходного слоя $Q^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t, \varepsilon)$ определяются из равенств

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial\xi} - \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial l}\right) + \sum_{i=2}\varepsilon^i L_i\right) Q^{(\mp)} = \\
= f\left(\bar{u}(l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha) + Q^{(\mp)}, l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha, \varepsilon\right) - \\
- f\left(\bar{u}(l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha), l-\varepsilon\xi\sin\alpha, h(l,t)+\varepsilon\xi\cos\alpha, \varepsilon\right).
\end{gathered} \tag{20}$$

Подставляя в эти равенства суммы (14) и (15), раскладывая входящие в эти равенства функции по формуле Тейлора по степеням малого параметра и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, будем получать уравнения для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$, $\quad i = 0, 1, \ldots$ В качестве дополнительных условий потребуем убывания на бесконечности

$$Q_i^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l,t), t) = 0, \tag{21}$$

а также выполнение условий при $\xi = 0$, которые следуют из равенства (17). Заметим, что в силу достаточной удаленности кривой $h(x,t)$ от границ $y = 0$ и $y = a$, пограничные функции в окрестности этой кривой и, в частности, при $\xi = 0$ экспоненциально малы и не влияют на условия непрерывного сшивания. Подставим в равенство (17) суммы (14) и (15), перепишем их в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\bar{u}_0^{(-)}(l, h(l,t)) + \varepsilon\bar{u}_1^{(-)}(l, h(l,t)) + \ldots + Q_0^{(-)}(0, l, h(l,t), t) + \varepsilon Q_1^{(-)}(0, l, h(l,t), t) + \ldots = \\
= \bar{u}_0^{(+)}(l, h(l,t)) + \varepsilon\bar{u}_1^{(+)}(l, h(l,t)) + \ldots + Q_0^{(+)}(0, l, h(l,t), t) + \varepsilon Q_1^{(+)}(0, l, h(l,t), t) + \ldots = \\
= \varphi^0(l, h(l,t)).
\end{gathered} \tag{22}$$

2.2.1. Функции переходного слоя нулевого порядка

Приравнивая коэффициенты при ε^0 в равенствах (20) и (22) с учетом условия (21), получим следующие задачи для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 Q_0^{(\mp)}}{\partial\xi^2} - W\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial\xi} = f\left(\varphi^{(\mp)}(l, h(l,t)) + Q_0^{(\mp)}, l, h(l,t), 0\right), \\
&\varphi^{(\mp)}(l, h(l,t)) + Q_0^{(\mp)}(0, l, h(l,t), t) = \varphi^0(l, h(l,t)), \\
&Q_0^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l,t), t) = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

где использовано обозначение (9).

Задачу для функции $Q_0^{(-)}$ будем рассматривать при $\xi \leqslant 0$, а для функции $Q_0^{(+)}$ – при $\xi \geqslant 0$.

Введем обозначение

$$\tilde{u}(\xi, h(l,t)) := \begin{cases} \varphi^{(-)}(l, h(l,t)) + Q_0^{(-)}(\xi, l, h(l,t), t), & \xi \leqslant 0, \\ \varphi^{(+)}(l, h(l,t)) + Q_0^{(+)}(\xi, l, h(l,t), t), & \xi \geqslant 0. \end{cases} \tag{24}$$

Перепишем уравнения и условия при $\xi = 0$ задач (23), используя это обозначение:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - W\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = f(\tilde{u}, l, h(l,t), 0), \quad \tilde{u}(0, h(l,t)) = \varphi^0(l, h(l,t)). \tag{25}$$

Уравнение (25) будем решать отдельно на полупрямой $\xi < 0$ с условием

$$\tilde{u}(-\infty, h(l,t)) = \varphi^{(-)}(l, h(l,t)) \tag{26}$$

и на полупрямой $\xi > 0$ с условием

$$\tilde{u}(+\infty, h(l,t)) = \varphi^{(+)}(l, h(l,t)). \tag{27}$$

От дифференциальных уравнений второго порядка в задачах (25), (26) и (25), (27) перейдем к эквивалентным системам уравнений первого порядка, совпадающим с системами (8), а от них тем же способом, что и в пункте 1.1., придем к дифференциальным уравнениям первого порядка относительно функций $\Phi^{(-)}$ и $\Phi^{(+)}$. Эти функции мы определим как

$$\begin{aligned} \Phi^{(-)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W) &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \xi \leqslant 0, \\ \Phi^{(+)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W) &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \xi \geqslant 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Уравнения для функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W)$ совпадают с уравнениями из задач Коши (10) и (11) соответственно. Определим эти функции как решения указанных задач Коши.

Из существования функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W)$ вытекает существование решений начальных задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} &= \Phi^{(-)}(\tilde{u}, h(l,t), W), \ \ \xi < 0, \quad \tilde{u}(0, h(l,t)) = \varphi^0(l, h(l,t)), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} &= \Phi^{(+)}(\tilde{u}, h(l,t), W), \ \ \xi > 0, \quad \tilde{u}(0, h(l,t)) = \varphi^0(l, h(l,t)), \end{aligned}$$

для которых справедливы предельные равенства

$$\lim_{\xi \to \mp\infty} \left| \tilde{u}(\xi, h(l,t)) - \varphi^{(\mp)}(l, h(l,t)) \right| = 0.$$

Кроме того, можно доказать справедливость следующих оценок:

$$\left| \tilde{u}(\xi, h(l,t)) - \varphi^{(\mp)}(l, h(l,t)) \right| < Ce^{-\varkappa_0 \xi},$$

где C, $\varkappa_0$ – положительные константы.

Для функций $Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$ (см. (24)) справедливы оценки

$$Q_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t) < Ce^{-\varkappa_0 \xi} \tag{29}$$

и аналогичные оценки имеют место для функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W)$.

Далее для краткости будем использовать обозначение

$$\Phi^{(\mp)}(\xi, h(l,t), W) := \Phi^{(\mp)}(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), h(l,t), W).$$

2.2.2. Функции переходного слоя первого порядка

Приравнивая слагаемые при ε^1 в равенствах (20), получим следующие уравнения для функций $Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t)$:

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - W\frac{\partial Q_1^{(\mp)}}{\partial \xi} - \tilde{f}_u(\xi, l, t) Q_1^{(\mp)} = \tilde{f}_1^{(\mp)}(\xi, l, t), \tag{30}$$

где введены обозначения

$$\tilde{f}_u(\xi, l, t) = f_u(\tilde{u}(\xi, h(l,t)), l, h(l,t), 0) \tag{31}$$

и

$$\tilde{f}_1^{(\mp)}(\xi, l, t) = \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2}\frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial l} + \tilde{f}_u(\xi, l, t)\bar{u}_1^{(\mp)}(l, h(l,t)) +$$
$$+ \left(\tilde{f}_u(\xi, l, t) - \bar{f}_u^{(\mp)}(l, h(l,t))\right)\left(-\varphi_x^{(\mp)}(l, h(l,t))\xi \sin\alpha + \varphi_y^{(\mp)}(l, h(l,t))\xi\cos\alpha\right) -$$
$$- \left(\tilde{f}_x(\xi, l, t) - \bar{f}_x^{(\mp)}(l, h(l,t))\right)\xi\sin\alpha + \left(\tilde{f}_y(\xi, l, t) - \bar{f}_y^{(\mp)}(l, h(l,t))\right)\xi\cos\alpha + \tilde{f}_\varepsilon(\xi, l, t).$$

Здесь обозначения $\tilde{f}_x(\xi, l, t)$, $\tilde{f}_y(\xi, l, t)$, $\tilde{f}_\varepsilon(\xi, l, t)$ имеют смысл, аналогичный (31), а $\bar{f}_x(l, h(l,t))$, $\bar{f}_y(l, h(l,t))$ – смысл, аналогичный (19).

Из равенства (22) в порядке ε^1 следуют краевые условия

$$Q_1^{(\mp)}(0, l, h(l,t), t) + \bar{u}_1^{(\mp)}(l, h(l,t)) = 0. \tag{32}$$

Добавим также условия на бесконечности

$$Q_1^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l,t), t) = 0. \tag{33}$$

Решения задач (30), (32), (33) можно выписать в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l,t), t) = -\bar{u}_1^{(\mp)}(l, h)\frac{\Phi^{(\mp)}(\xi, h(l,t), W)}{\Phi^{(\mp)}(0, h(l,t), W)} +$$
$$+ \Phi^{(\mp)}(\xi, h(l,t), W)\int\limits_0^{\xi}\frac{\mathrm{e}^{Ws}ds}{(\Phi^{(\mp)}(s, h(l,t), W))^2}\int\limits_{\mp\infty}^{s}\mathrm{e}^{-W\eta}\Phi(\eta, h(l,t), W)\tilde{f}_1^{(\mp)}(\eta, l, t)d\eta. \tag{34}$$

2.2.3. Функции переходного слоя произвольного порядка

Функции переходного слоя произвольного порядка $k = 2, 3, \ldots$ определяются как решения задач

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q_k^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - W\frac{\partial Q_k^{(\mp)}}{\partial \xi} - \tilde{f}_u(\xi, l, t) Q_k^{(\mp)} = \tilde{f}_k^{(\mp)}(\xi, l, t),\\ Q_k^{(\mp)}(0, l, h(l,t), t) + \bar{u}_k^{(\mp)}(l, h(l,t)) = 0, \quad Q_k^{(\mp)}(\mp\infty, l, h(l,t), t) = 0,\end{gathered} \tag{35}$$

где $\tilde{f}_k^{(\mp)}(\xi, l, t)$ – известные функции. Решая задачи для функций с верхним индексом «$(-)$» на полупрямой $\xi \leqslant 0$, и задачи с верхним индексом «$(+)$» на полупрямой $\xi \geqslant 0$, можно получить явные выражения для функций $Q_k^{(\mp)}$, аналогичные (34).

2.3. Асимптотическое приближение положения фронта

Неизвестные коэффициенты $h_i(l,t)\quad i=1,2,\dots$ разложения (16) будем определять из условий сшивания (18) производных по направлению нормали к кривой $h(x,t)$. Оператор дифференцирования по направлению нормали имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial n}=(\mathbf{n},\nabla)=-\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y},$$

где $\mathbf{n}=\{-\sin\alpha,\ \ \cos\alpha\}$, (см. (3)).

Запишем этот оператор в переменных $r,\ l,\ t$ и $\xi,\ l,\ t$, учитывая выражение (4) для оператора ∇ в этих координатах:

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

С учетом последнего выражения и разложений (14), (15) перепишем условия сшивания производных (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial y}(l,h(l,t))-\varepsilon\sin\alpha\frac{\partial\bar u_1^{(-)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\\
&+\varepsilon\cos\alpha\frac{\partial\bar u_1^{(-)}}{\partial y}(l,h(l,t))+\ldots+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)+\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)+\ldots=\\
&-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial y}(l,h(l,t))-\varepsilon\sin\alpha\frac{\partial\bar u_1^{(+)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\\
&+\varepsilon\cos\alpha\frac{\partial\bar u_1^{(+)}}{\partial y}(l,h(l,t))+\ldots+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)+\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)+\ldots\,.
\end{aligned}\tag{36}$$

Введем функцию $H(l,h(l,t),t,\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
H(l,h(l,t),t,\varepsilon)&:=\varepsilon\frac{\partial U^{(-)}}{\partial n}(l,h(l,t),t,\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial U^{(+)}}{\partial n}(l,h(l,t),t,\varepsilon)=\\
&=H_0(l,h(l,t),t)+\varepsilon H_1(l,h(l,t),t)+\varepsilon^2H_2(l,h(l,t),t)+\ldots
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&H_0(l,h(l,t),t)=\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)-\frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t),\\
&H_1(l,h(l,t),t)=-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial y}(l,h(l,t))+\frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)-\\
&-\left(-\sin\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial x}(l,h(l,t))+\cos\alpha\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial y}(l,h(l,t))+\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial\xi}(0,l,h(l,t),t)\right)
\end{aligned}\tag{37}$$

и т.д.

Условие (36) C^1-сшивания выражается равенством

$$H(l,h(l,t),t,\varepsilon)=0.$$

В порядке ε^0 с учетом обозначений (24) и (28) это условие дает равенство

$$H_0(l,h(l,t),t) = \Phi^{(-)}\left(\varphi^0(l,h(l,t)),h(l,t),W\right) - \Phi^{(+)}\left(\varphi^0(l,h(l,t)),h(l,t),W\right) = 0. \quad (38)$$

Согласно условию C3 существует функция $h_0(l,t)$ – решение этого уравнения. Будем считать, что эта функция является первым слагаемым в разложении (16).

Запишем условия сшивания (37) в порядке ε^1 с учетом разложения (16):

$$h_{1t}(l,t)\frac{\partial H_0}{\partial h_t}(l,h_0(l,t),t) + h_{1x}(l,t)\frac{\partial H_0}{\partial h_x}(l,h_0(l,t),t) + h_1(l,t)\frac{\partial H_0}{\partial h}(l,h_0(l,t),t) + \\ + H_1(l,h_0(l,t),t) = 0.$$

Здесь была учтена зависимость функции H_0 от параметров h_t и h_x, входящих в выражение для W, (см. (9)).

Определим функцию $h_1(x,t)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}\frac{\partial H_0}{\partial h_t}(x,h_0(x,t),t) + \frac{\partial h_1}{\partial x}\frac{\partial H_0}{\partial h_x}(x,h_0(x,t),t) + h_1\frac{\partial H_0}{\partial h}(x,h_0(x,t),t) + \\ + H_1(x,h_0(x,t),t) = 0. \quad (39)$$

с дополнительными условиями

$$h_1(x,t) = h_1(x+L,t); \quad h_1(x,0) = 0. \quad (40)$$

Условие C4. Пусть при $(x,t) \in D$ существует решение уравнения (39) с условиями (40) и пусть при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\dfrac{\partial H_0}{\partial h_t}(x,h_0(x,t),t) > 0.$

Уравнения для коэффициентов $h_k(x,t)$ разложения (16) получаются из условий гладкого сшивания (36). Функции $h_k(x,t)$ определяются как решения задач

$$\frac{\partial h_k}{\partial t}\frac{\partial H_0}{\partial h_t}(x,h_0(x,t),t) + \frac{\partial h_k}{\partial x}\frac{\partial H_0}{\partial h_x}(x,h_0(x,t),t) + h_k\frac{\partial H_0}{\partial h}(x,h_0(x,t),t) + \\ + G_k(x,h_0(x,t),t) = 0, \quad h_k(x,t) = h_k(x+L,t); \quad h_k(x,0) = 0,$$

где $G_k(x,h_0(x,t),t)$ – известные функции.

2.4. Функции пограничных слоев

Функции $\Pi^{(-)}(x,\eta^{(-)},\varepsilon)$ пограничного слоя в окрестности прямой $y = 0$ и $\Pi^{(+)}(x,\eta^{(+)},\varepsilon)$ пограничного слоя в окрестности прямой $y = a$ строятся стандартным образом [1] в виде разложения по степеням ε. Эти разложения не содержат членов нулевого порядка, что характерно для задачи Неймана. Функции $\Pi_i^{(-)}(x,\eta^{(-)})$, $i = 1,2,\ldots$ экспоненциально убывают при $\eta^{(-)} \to +\infty$, а функции $\Pi_i^{(+)}(x,\eta^{(+)})$, $i = 1,2,\ldots$ экспоненциально убывают при $\eta^{(+)} \to -\infty$.

2.5. Асимптотическое представление решения

Определим члены рядов (14) – (15), а также функции $\Pi_i^{(\mp)}$ до номера k включительно и положим

$$\hat{h}_k(x,t) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i h_i(x,t). \tag{41}$$

В окрестности кривой $\hat{h}_k(x,t)$ перейдем к локальным координатам $(l,\hat{r})$ с помощью соотношений, аналогичных (2), и введем растянутую переменную $\hat{\xi} = \dfrac{\hat{r}}{\varepsilon}$. Кривая $\hat{h}_k(x,t)$ разделяет область $\bar{D}$ на подобласти $\bar{D}_k^{(-)} : \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R} \times [0;\hat{h}_k(x,t)] \times [0;T]\right\}$ и $\bar{D}_k^{(+)} : \left\{(x,y,t) \in \mathbb{R} \times [\hat{h}_k(x,t),a] \times [0;T]\right\}$.

Составим суммы

$$U_k^{(-)}(x,y,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)}(x,y) + Q_i^{(-)}\left(\hat{\xi}, l, \hat{h}_k(l,t), t\right) + \Pi_i^{(-)}\left(x, \eta^{(-)}\right)\right),$$
$$(x,y,t) \in \bar{D}_k^{(-)} \times [0,T],$$

$$U_k^{(+)}(x,y,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)}(x,y) + Q_i^{(+)}\left(\hat{\xi}, l, \hat{h}_k(l,t), t\right) + \Pi_i^{(+)}\left(x, \eta^{(+)}\right)\right),$$
$$(x,y,t) \in \bar{D}_k^{(+)} \times [0,T]. \tag{42}$$

Положим

$$U_k = \begin{cases} U_k^{(-)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}_k^{(-)} \times [0,T], \\ U_k^{(+)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t) \in \bar{D}_k^{(+)} \times [0,T]. \end{cases}$$

Функция $U_k(x,y,t,\varepsilon)$ по своему построению удовлетворяет уравнению и граничным условиям задачи (1) с точностью $O(\varepsilon^{k+1})$ всюду в области $\bar{D}$, за исключением кривой $h(x,t)$, на которой она и её производная претерпевают разрывы – скачки порядков $O\left(\varepsilon^{k+1}\right)$ и $O\left(\varepsilon^{k}\right)$ соответственно.

3. Обоснование асимптотики

Для доказательства существования решения задачи (1) и оценки точности его асимптотического приближения используется асимптотический метод дифференциальных неравенств (см. [2–7]). Согласно этому методу решение задачи (1) существует, если существуют непрерывные функции $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,y,t,\varepsilon)$, называемые соответственно нижним и верхним решениями задачи (1), для которых выполняется следующая система неравенств [13, 14]:

(У1) Условие упорядоченности нижнего и верхнего решений:

$$\alpha(x,y,t,\varepsilon) \leqslant \beta(x,y,t,\varepsilon), \quad (x,y,t) \in \bar{D} \times [0,T],\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0].$$

(У2) Действие дифференциального оператора уравнения (1) на нижнее и верхнее решения:

$$L[\beta] := \varepsilon^2\Delta\beta - \varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial t} + f(\beta, x, y, \varepsilon) \leqslant 0 \leqslant L[\alpha]$$

для почти всех точек $(x, y, t) \in \bar{D} \times [0, T]$, за исключением тех подмножеств нулевой меры, на которых функции $\alpha(x, y, t, \varepsilon)$ и $\beta(x, y, t, \varepsilon)$ не являются гладкими.

(У3) Условия на границах области D :

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}(x, 0, t, \varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \frac{\partial\alpha}{\partial y}(x, 0, t, \varepsilon), \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y}(x, a, t, \varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \frac{\partial\beta}{\partial y}(x, a, t, \varepsilon),$$
$$x \in \mathbb{R},\ t \in [0, T],\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

$$\alpha(x, y, t, \varepsilon) = \alpha(x + L, y, t, \varepsilon), \quad \beta(x, y, t, \varepsilon) = \beta(x + L, y, t, \varepsilon),$$
$$(x, y, t) \in \bar{D} \times [0, T],\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

(У4) Условия в начальный момент времени:

Пусть функция $u_{init}(x, y, \varepsilon)$ в начальном условии задачи (1) такова, что выполнены следующие неравенства:

$$\alpha(x, y, 0, \varepsilon) \leqslant u_{init}(x, y, \varepsilon) \leqslant \beta(x, y, 0, \varepsilon),\ (x, y) \in \bar{D},\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

(У5) Условия скачка производных нижнего и верхнего решений по направлению нормали к кривым, на которых эти решения не являются гладкими:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial n}\,(x, h_\alpha(x, t) + 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial\alpha}{\partial n}\,(x, h_\alpha(x, t) - 0, t, \varepsilon) \geqslant 0,$$

где $h_\alpha(x, t)$ – кривая, на которой нижнее решение не является гладким,

$$\frac{\partial\beta}{\partial n}\,(x, h_\beta(x, t) - 0, t, \varepsilon) - \frac{\partial\beta}{\partial n}\,(x, h_\beta(x, t) + 0, t, \varepsilon) \geqslant 0,$$

где $h_\beta(x, t)$ – кривая, на которой верхнее решение не является гладким.

Известно [13, 14], что при выполнении условий (У1) – (У5) существует функция $u(x, y, t, \varepsilon)$ – решение задачи (1), для которой выполняются неравенства

$$\alpha(x, y, t, \varepsilon) \leqslant u(x, y, t, \varepsilon) \leqslant \beta(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in \bar{D} \times [0, T],\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *При выполнении условий (С1) – (С4) для любой достаточно гладкой начальной функции $u_{init}(x, y, \varepsilon)$, лежащей между верхним и нижним решениями*

$$\alpha(x, y, 0, \varepsilon) \leqslant u_{init}(x, y, \varepsilon) \leqslant \beta(x, y, 0, \varepsilon),$$

существует решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (1), которое при любом $t \in [0; T]$ заключено между этими верхним и нижним решениями и для которого функция $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ является равномерным в области $\bar{D}$ асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

3.1. Построение верхнего и нижнего решений

Верхнее и нижнее решения будем строить как модификацию асимптотических представлений (42). Будем считать, что кривая $h_\beta(x,t)$, определяющая положение внутреннего переходного слоя для верхнего решения, задается следующим образом:

$$h_\beta(x,t) = \hat{h}_{n+1}(x,t) - \varepsilon^{n+1}\delta(x,t), \tag{43}$$

где $\hat{h}_{n+1}(x,t)$ – сумма (41) при $k = n+1$, $\delta(x,t)$ – положительная функция, которая выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие (У5) для верхнего решения.

В окрестности кривой $h_\beta(x,t)$ перейдем к локальным координатам (l, r_β) согласно следующим равенствам:

$$x = l - r_\beta \sin\alpha_\beta, \quad y = h_\beta(l,t) + r_\beta\cos\alpha_\beta = \hat{h}_{n+1}(l,t) + r_\beta\cos\alpha_\beta - \varepsilon^{n+1}\delta(l,t),$$

где r_β – расстояние от кривой $h_\beta(x,t)$ вдоль нормали к ней, l – координата точки на оси x, из которой эта нормаль проводится, $\cos\alpha_\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+(h_\beta)_x^2}}$, $\sin\alpha_\beta = \dfrac{(h_\beta)_x}{\sqrt{1+(h_\beta)_x^2}}$, а производные функции h_β в каждый момент времени t берутся при $x = l$.

Верхнее решение задачи (1) будем строить отдельно в каждой из областей $\bar{D}_\beta^{(-)}$: $\Big\{(x,y,t) \in \mathbb{R}\times[0;\hat{h}_\beta(x,t)]\times[0;T]\Big\}$ и $\bar{D}_\beta^{(+)}$: $\Big\{(x,y,t)\in\mathbb{R}\times[\hat{h}_\beta(x,t),a]\times[0;T]\Big\}$, на которые кривая $h_\beta(x,t)$ делит область $\bar{D}$:

$$\beta(x,y,t,\varepsilon) = \begin{cases} \beta^{(-)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t)\in\bar{D}_\beta^{(-)}\times[0,T], \\ \beta^{(+)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t)\in\bar{D}_\beta^{(+)}\times[0,T]. \end{cases}$$

Функции $\beta^{(-)}(x,y,t,\varepsilon)$ и $\beta^{(+)}(x,y,t,\varepsilon)$ будем сшивать на кривой $h_\beta(x,t)$, так чтобы функция $\beta(x,y,t,\varepsilon)$ была непрерывна на этой кривой и принимала значение, равное $\varphi^0(l,h_\beta(l,t))$:

$$\beta^{(-)}(l,h_\beta(l,t),t,\varepsilon) = \beta^{(+)}(l,h_\beta(l,t),t,\varepsilon) = \varphi^0(l,h_\beta(l,t)). \tag{44}$$

В окрестности кривой $h_\beta(x,t)$ введем растянутую переменную $\xi_\beta = \dfrac{r_\beta}{\varepsilon}$.

Функции $\beta^{(-)}$ и $\beta^{(+)}$ будем строить как модификации асимптотических представлений (42).

$$\begin{aligned} \beta^{(-)} = U_{n+1}^{(-)}\Big|_{\xi_\beta} + \varepsilon^{n+1}\left(\mu^{(-)} + q^{(-)}(\xi_\beta,t)\right) + \varepsilon^{n+2}\Pi_\beta^{(-)}\left(x,\eta^{(-)}\right), \\ (x,y,t)\in\bar{D}_\beta^{(-)}\times[0,T],\ \xi_\beta\leqslant 0,\ \eta^{(-)}\geqslant 0; \\ \beta^{(+)} = U_{n+1}^{(+)}\Big|_{\xi_\beta} + \varepsilon^{n+1}\left(\mu^{(+)} + q^{(+)}(\xi_\beta,t)\right) + \varepsilon^{n+2}\Pi_\beta^{(+)}\left(x,\eta^{(+)}\right), \\ (x,y,t)\in\bar{D}_\beta^{(+)}\times[0,T],\ \xi_\beta\geqslant 0,\ \eta^{(+)}\leqslant 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Здесь через $U_{n+1}^{(\mp)}$ обозначены функции (42) при $k = n+1$, в которых аргумент ξ Q-функций заменен на ξ_β, а функция $\hat{h}_{n+1}(x,t)$ – на $h_\beta(x,t)$.

Величины $\mu^{(\mp)}$ выбираются далее таким образом, чтобы выполнялись условия (У1) и (У2).

Функции $\Pi_\beta^{(\mp)}\left(x,\eta^{(\mp)}\right)$ определяются из тех же уравнений, что и $\Pi_i^{(\mp)}\left(x,\eta^{(\mp)}\right)$. Краевые условия при $\eta^{(\mp)}=0$ выбираются таким образом, чтобы выполнялись равенства в условиях (У3).

Функции $q^{(\mp)}(\xi_\beta,t)$ устраняют невязки порядка ε^{n+1} в выражении $L[\beta]$ и в условии непрерывного сшивания верхнего решения (44), возникшие в результате модификации регулярной части – добавок $\mu^{(\mp)}$. Определим их как решения уравнений

$$\frac{\partial^2 q^{(\mp)}}{\partial {\xi_\beta}^2}-\frac{(h_\beta)_t}{\sqrt{1+(h_\beta)_x^2}}\frac{\partial q^{(\mp)}}{\partial \xi_\beta}-\tilde{f}_u(\xi_\beta,l,t)q^{(\mp)}=\left(\tilde{f}_u(\xi_\beta,l,t)-\bar{f}_u^{(\mp)}(l,h_\beta(l,t))\right)\mu^{(\mp)},$$

где производные функции h_β в каждый момент времени t берутся при $x=l$.

Граничные условия для $q^{(\mp)}(\xi_\beta,t)$ при $\xi_\beta=0$ следуют из условия непрерывного сшивания верхнего решения (44) с учетом условий при $\xi_\beta=0$ для функций $Q_i^{(\mp)}(\xi_\beta,l,h(l,t))$, $i=0,1,...,n+1$ (см. (22)):

$$q^{(\mp)}(0,t)=-\mu^{(\mp)},\quad t\in[0;T].$$

Потребуем еще выполнения условий на бесконечности:

$$q^{(\mp)}(\xi_\beta,t)\to 0 \text{ при } \xi_\beta\to\mp\infty,\quad t\in[0;T].$$

Функции $q^{(\mp)}(\xi_\beta,t)$ имеют экспоненциальные оценки типа (29).

Нижнее решение $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ задачи (1) построим аналогично верхнему. Зададим кривую $h_\alpha(x,t)$, определяющую положение внутреннего переходного слоя для нижнего решения, следующим образом:

$$h_\alpha(x,t)=\hat{h}_{n+1}(x,t)+\varepsilon^{n+1}\delta(x,t),$$

где $\delta(x,t)$ – та же функция, что и в (43).

В окрестности кривой $h_\alpha(x,t)$ перейдем к локальным координатам (l,r_α), согласно равенствам

$$x=l-r_\alpha\sin\alpha_\alpha,\quad y=h_\alpha(l,t)+r_\alpha\cos\alpha_\alpha=\hat{h}_{n+1}(l,t)+r_\alpha\cos\alpha_\alpha+\varepsilon^{n+1}\delta(l,t),$$

где величины $\sin\alpha_\alpha$ и $\cos\alpha_\alpha$ определяются по аналогии с такими же величинами для верхнего решения.

Нижнее решение задачи (1) будем строить отдельно в областях $\bar{D}_\alpha^{(-)}$ и $\bar{D}_\alpha^{(+)}$, на которые кривая $h_\alpha(x,t)$ делит область $\bar{D}$:

$$\alpha(x,y,t,\varepsilon)=\begin{cases}\alpha^{(-)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t)\in\bar{D}_\alpha^{(-)}\times[0,T],\\ \alpha^{(+)}(x,y,t,\varepsilon), & (x,y,t)\in\bar{D}_\alpha^{(+)}\times[0,T].\end{cases}$$

Области $\bar{D}_\alpha^{(\mp)}$ определяются по аналогии $\bar{D}_\beta^{(\mp)}$.

Функции $\alpha^{(-)}(x,y,t,\varepsilon)$ и $\alpha^{(+)}(x,y,t,\varepsilon)$ будем сшивать на кривой $h_\alpha(x,t)$, так чтобы функция $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ была непрерывна на этой кривой и принимала значение, равное $\varphi^0(l,h_\alpha(l,t)$:

$$\alpha^{(-)}(l,h_\alpha(l,t),t,\varepsilon)=\alpha^{(+)}(l,h_\alpha(l,t),t,\varepsilon)=\varphi^0(l,h_\alpha(l,t)).$$

Нижнее решение будем строить таким образом, чтобы при том же самом $\delta(x,t)$, что и для верхнего решения, выполнялось условие (У5) для нижнего решения.

Функции $\alpha^{(-)}$, $\alpha^{(+)}$ будем строить как модификацию сумм из (42), при $k = (n + 1)$:

$$\begin{aligned} \alpha^{(-)} &= U_{n+1}^{(-)}\Big|_{\xi_\alpha} - \varepsilon^{n+1}\left(\mu^{(-)} + q^{(-)}(\xi_\alpha, t)\right) + \varepsilon^{n+2}\Pi_\alpha^{(-)}\left(x, \eta^{(-)}\right), \\ &\qquad\qquad (x,y,t) \in \bar{D}_\alpha^{(-)} \times [0,T],\ \xi_\alpha \leqslant 0,\ \eta^{(-)} \geqslant 0; \\ \alpha^{(+)} &= U_{n+1}^{(+)}\Big|_{\xi_\alpha} - \varepsilon^{n+1}\left(\mu^{(+)} + q^{(+)}(\xi_\alpha, t)\right) + \varepsilon^{n+2}\Pi_\alpha^{(+)}\left(x, \eta^{(+)}\right), \\ &\qquad\qquad (x,y,t) \in \bar{D}_\alpha^{(+)} \times [0,T],\ \xi_\alpha \geqslant 0,\ \eta^{(+)} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Здесь $\mu^{(\mp)}$ – те же величины, что и в выражениях для верхнего решения, а $q^{(\mp)}(\xi_\alpha, t)$ определяются из таких же задач, что и для верхнего решения, в которых переменная ξ_β заменена на переменную $\xi_\alpha = \dfrac{r_\alpha}{\varepsilon}$.

Функции $\Pi_\alpha^{(\mp)}\left(x, \eta^{(\mp)}\right)$ определяются из тех же уравнений, что и $\Pi_i^{(\mp)}\left(x, \eta^{(\mp)}\right)$. Краевые условия при $\eta^{(\mp)} = 0$ выбираются таким образом, чтобы выполнялись равенства в условиях (У3).

3.2. Проверка дифференциальных неравенств

Лемма. Функции $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,y,t,\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (У1) – (У5), то есть являются верхним и нижним решениями задачи (1).

Для доказательства леммы следует проверить выполнение для функций $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,y,t,\varepsilon)$ условий (У1) – (У5).

Проверим выполнение условия (У1) упорядоченности нижнего и верхнего решения.

Установим связь между параметрами, от которых зависят функции $\alpha(x,y,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,y,t,\varepsilon)$.

Из равенств

$$\begin{aligned} y &= h_\beta(l,t) + r_\beta \cos\alpha_\beta = h_\alpha(l,t) + r_\alpha \cos\alpha_\alpha = \\ &= \hat{h}_{n+1}(l,t) - \varepsilon^{n+1}\delta(l,t) + r_\beta\cos\alpha_\beta = \hat{h}_{n+1}(l,t) + \varepsilon^{n+1}\delta(l,t) + r_\alpha\cos\alpha_\alpha, \end{aligned}$$

справедливых в окрестности кривой $h(x,y)$, а также из оценок

$$\cos\alpha_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (\hat{h}_{n+1})_x^2}} + O\left(\varepsilon^{n+1}\right), \quad \cos\alpha_\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\hat{h}_{n+1})_x^2}} + O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$

которые вытекают из определения кривых $h_\alpha(x,t)$ и $h_\beta(x,t)$ и величин $\cos\alpha_\alpha$ и $\cos\alpha_\beta$, с учетом определения растянутых переменных ξ_α и ξ_β следует равенство

$$\xi_\beta - \xi_\alpha = 2\varepsilon^n\delta(l,t)\sqrt{1 + (\hat{h}_{n+1})_x^2} + O(\varepsilon^{n+1}).$$

В каждый момент времени рассмотрим три области, где разность верхнего и нижнего решений выражается различным образом:

$$\beta - \alpha = \begin{cases} \beta^{(-)} - \alpha^{(-)}, & x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant y < h_\beta(x,t),\ t \in [0,T], \\ \beta^{(+)} - \alpha^{(-)}, & x \in \mathbb{R},\ h_\beta(x,t) \leqslant y \leqslant h_\alpha(x,t),\ t \in [0,T], \\ \beta^{(+)} - \alpha^{(+)}, & x \in \mathbb{R},\ h_\alpha(x,t) < y \leqslant a,\ t \in [0,T]. \end{cases}$$

Рассмотрим область $x \in \mathbb{R},\ h_\beta(x,t) \leqslant y \leqslant h_\alpha(x,t),\ t \in [0,T]$. В этой области

$$0 \leqslant \xi_\beta \leqslant 2\varepsilon^n \delta(l,t)\sqrt{1 + (\hat{h}_{n+1})_x^2}\,; \quad -2\varepsilon^n \delta(l,t)\sqrt{1 + (\hat{h}_{n+1})_x^2} \leqslant \xi_\alpha \leqslant 0,$$

а для разности верхнего и нижнего решений можно записать выражение:

$$\begin{aligned} \beta^{(+)} - \alpha^{(-)} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)}(x,y) + Q_i^{(+)}(\xi_\beta, l, h_\beta(l,t), t)\right) - \\ - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)}(x,y) - Q_i^{(-)}(\xi_\alpha, l, h_\alpha(l,t), t)\right) + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \tag{47}$$

На рассматриваемом множестве старшие слагаемые в (47) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\varphi^{(\mp)}(x,y) + Q_0^{(\mp)}(\xi_{\alpha,\beta}, l, h_{\alpha,\beta}(l,t), t) = \\ &= \varphi^{(\mp)}(l, \hat{h}_{n+1}(l,t)) + Q_0^{(\mp)}(0, l, \hat{h}_{n+1}(l,t), t) + \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi}(0, l, \hat{h}_{n+1}(l,t), t) \cdot \xi_{\alpha,\beta} + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= \varphi^0(l, \hat{h}_{n+1}(l,t)) + \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi}(0, l, \hat{h}_{n+1}(l,t), t) \cdot \xi_{\alpha,\beta} + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned}$$

Учитывая, что в рассматриваемой области $\xi_\beta = O(\varepsilon^n)$, $\xi_\alpha = O(\varepsilon^n)$, а также условие (32) и условия при $\xi = 0$ задач (35), для остальных слагаемых из (47) можно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\bar{u}_i^{(\mp)}(x,y) + Q_i^{(\mp)}(\xi_{\alpha,\beta}, l, h_{\alpha,\beta}(l,t), t) = \\ &\qquad = \bar{u}_i^{(\mp)}(l, \hat{h}_{n+1}(l,t)) + Q_i^{(\mp)}(0, l, \hat{h}_{n+1}(l,t), t) + O(\varepsilon^n) = O(\varepsilon^n), \quad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Подставляя полученные оценки в выражение (47), для разности верхнего и нижнего решений в рассматриваемой области получим выражение:

$$\begin{aligned} &\beta^{(+)} - \alpha^{(-)} = \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, l, \hat{h}_{n+1}(l,t), t) \cdot \xi_\beta - \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, l, \hat{h}_{n+1}(l,t), t) \cdot \xi_\alpha + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= \Phi^{(+)}(0, h_0(l,t), W_0)(\xi_\beta - \xi_\alpha) + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= 2\varepsilon^n \delta(l,t)\sqrt{1 + (\hat{h}_{n+1})_x^2} \cdot \Phi^{(+)}(0, h_0(l,t), W_0) + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \tag{48}$$

Здесь использовано обозначение (28), равенство (38), а также учтено, что в рассматриваемой области $\xi_\beta = O(\varepsilon^n)$, $\xi_\alpha = O(\varepsilon^n)$.

Согласно условию С2 выполнено неравенство $\Phi^{(+)}(0, h_0(l,t), W_0) > 0$, поэтому при положительных значениях δ и для достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\beta - \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R},\ h_\beta(l,t) \leqslant y \leqslant h_\alpha(l,t),\ t \in [0,T].$$

Рассмотрим теперь разность верхнего и нижнего решений при $x \in \mathbb{R}$, $h_\alpha \leqslant y \leqslant a$, $t \in [0,T]$, где $\xi_\alpha \geqslant 0$, $\xi_\beta = \xi_\alpha + 2\varepsilon\delta(l,t)\sqrt{1 + (\hat{h}_{n+1})_x^2}$.

$$\beta - \alpha = \beta^{(+)} - \alpha^{(+)} = 2\varepsilon^{n+1}\mu^{(+)} + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(Q_i^{(+)}(\xi_\beta, l, h_\beta, t) - Q_i^{(+)}(\xi_\alpha, l, h_\alpha, t)\right) +$$
$$+ \varepsilon^{n+1}\left(q^{(+)}(\xi_\beta, t) - q^{(+)}(\xi_\alpha, t)\right) + O(\varepsilon^{n+2}) = 2\varepsilon^{n+1}\mu^{(+)} + \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(\xi_\alpha, l, h_\alpha, t)(\xi_\beta - \xi_\alpha) +$$
$$+ O(\varepsilon^{n+1})\exp(-\varkappa_1\xi_\alpha) + O(\varepsilon^{n+2}),$$

где $\varkappa_1 > 0$ – некоторое число. Здесь мы учли экспоненциальные оценки функций $Q_i^{(+)}$, $i = 1, 2, \ldots$ и $q^{(+)}$.

Отсюда, учитывая оценку (29) и равенство $\xi_\beta - \xi_\alpha = O(\varepsilon^n)$, получаем следующую оценку для разности верхнего и нижнего решений в рассматриваемой области:

$$\beta - \alpha \leqslant 2\varepsilon^{n+1}\mu^{(+)} + \left\{C_0\varepsilon^n \exp(-\varkappa_0\xi_\alpha) - C_1\varepsilon^{n+1}\exp(-\varkappa_1\xi_\alpha)\right\} + O(\varepsilon^{n+2}), \qquad (49)$$

где $C_0 > 0$ и $C_1 > 0$ – некоторые числа.

Если $\varkappa_0 \geqslant \varkappa_1$, то выражение, стоящее в фигурных скобках в (49) положительно, так как $C_0 > C_1\varepsilon$ для достаточно малых ε. Следовательно, $\beta - \alpha > 0$.

Пусть $\varkappa_0 > \varkappa_1$. Рассмотрим область $x \in \mathbb{R}$, $h_\alpha \leqslant y \leqslant h_\alpha + N\varepsilon\cos\alpha_\alpha$, $t \in [0; T]$, где $N > 0$. В этой области величина r_α изменяется на отрезке $[0; N\varepsilon]$ и выполняется неравенство $\exp(-\varkappa_0\xi_\alpha) \geqslant \exp(-\varkappa_0 N)$, поэтому выражение в фигурных скобках в (49) положительно при достаточно малых ε за счет слагаемого $C_0\varepsilon^n\exp(-\varkappa_0\xi_\alpha)$. Следовательно, в этой области $\beta - \alpha > 0$.

Выберем теперь число N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $C_1\exp(-\varkappa_1 N) < 2\mu^{(+)}$.

При $h_\alpha + N\varepsilon\cos\alpha_\alpha \leqslant y \leqslant a$ выполняется неравенство

$$2\varepsilon^{n+1}\mu^{(+)} - C_1\varepsilon^{n+1}\exp(-\varkappa_1\xi_\alpha) \geqslant \varepsilon^{n+1}\left(2\mu^{(+)} - C_1\exp(-\varkappa_1 N)\right) > 0$$

благодаря выбору числа N. Значит, в области $h_\alpha + N\varepsilon\cos\alpha_\alpha \leqslant y \leqslant a$, $t \in [0; T]$, $x \in \mathbb{R}$, также имеет место неравенство $\beta(x,y,t,\varepsilon) - \alpha(x,y,t,\varepsilon) > 0$.

Итак, $\beta(x,y,t,\varepsilon) - \alpha(x,y,t,\varepsilon) > 0$ всюду при $h_\alpha \leqslant y \leqslant a$.

Доказательство справедливости неравенства $\beta(x,y,t,\varepsilon) - \alpha(x,y,t,\varepsilon) > 0$ при $0 \leqslant y \leqslant h_\beta$ проводится так же, как и при $h_\alpha \leqslant y \leqslant a$.

В выполнении условия (У2) можно убедиться, подставив нижнее и верхнее решения, соответственно в виде (46) и (45) в уравнение (1). Исходя из самого способа построения верхнего и нижнего решений, получим равенства

$$L\left[\alpha^{(\mp)}\right] = \varepsilon^{n+1}\bar{f}_u^{(\mp)}(l, h_\alpha(l,t))\mu^{(\mp)} + O\left(\varepsilon^{n+2}\right),$$
$$L\left[\beta^{(\mp)}\right] = -\varepsilon^{n+1}\bar{f}_u^{(\mp)}(l, h_\beta(l,t))\mu^{(\mp)} + O\left(\varepsilon^{n+2}\right).$$

Необходимый знак в дифференциальных неравенствах условия (У2) обеспечивается за счет выбора достаточно больших положительных величин $\mu^{(\mp)}$.

Условия (У3) оказываются выполненными при выбранном способе построения функций $\Pi_{\alpha,\beta}^{(\mp)}(x, \eta^{(\mp)})$.

Проверим выполнение неравенства (У5) для верхнего решения. Разложим разность

$$\frac{\partial \beta^{(-)}}{\partial n}(x, h_\beta(x,t), t, \varepsilon) - \frac{\partial \beta^{(+)}}{\partial n}(x, h_\beta(x,t), t, \varepsilon)$$

по формуле Тейлора по степеням ε с центром $(l, h_0(l,t), l, 0)$. В силу проведенного сшивания формальных асимптотик (а именно, в силу равенства (36)) коэффициенты при ε^i для $i = 0, \ldots, n-1$ равны нулю, а коэффициент при ε^n включает только те слагаемые, которые возникают в результате модификации асимптотики.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \beta^{(-)}}{\partial n}(x, h_\beta(x,t), t, \varepsilon) - \frac{\partial \beta^{(+)}}{\partial n}(x, h_\beta(x,t), t, \varepsilon) = \varepsilon^n \delta_t(l,t) \frac{\partial H_0}{\partial h_t}(l, h_0(l,t), t) + \\ &+ \varepsilon^n \delta_x(l,t) \frac{\partial H_0}{\partial h_x}(l, h_0(l,t), t) + \varepsilon^n \delta(l,t) \frac{\partial H_0}{\partial h}(l, h_0(l,t), t) + \\ &+ \varepsilon^n \left(\frac{\partial q^{(-)}}{\partial \xi_\beta}(0,t) - \frac{\partial q^{(+)}}{\partial \xi_\beta}(0,t) \right) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad t \in [0;T], \quad l \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{50}$$

Определим функцию $\delta(x,t)$ как решение начальной задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H_0}{\partial h_t}(x, h_0(x,t), t) \cdot \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial H_0}{\partial h_x}(x, h_0(x,t), t) \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial H_0}{\partial h}(x, h_0(x,t), t) \cdot \delta = \sigma - F(x,t), \\ &x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0;T], \quad \delta(x,0) = \delta^0(x), \quad \delta(x+L,t) = \delta(x,t), \end{aligned} \tag{51}$$

где σ – достаточно большая положительная величина, $\delta^0(x)$ – функция принимающая положительные значения для всех $x \in \mathbb{R}$, а

$$F(x,t) = \frac{\partial q^{(-)}}{\partial \xi_\beta}(0,t) - \frac{\partial q^{(+)}}{\partial \xi_\beta}(0,t).$$

Уравнение (51) – квазилинейное в частных производных. В силу условия C4 его решение существует и принимает положительные значения при $\delta^0(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ и достаточно большом положительном значении σ.

При указанном выборе функции $\delta(x,t)$ равенство (50) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \beta^{(-)}}{\partial n}(x, h_\beta(x,t), t, \varepsilon) - \frac{\partial \beta^{(+)}}{\partial n}(x, h_\beta(x,t), t, \varepsilon) = \varepsilon^n \sigma + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Выражение в правой части положительно при достаточно малых ε, поскольку $\sigma > 0$.

При том же выборе функции $\delta(x,t)$ выполнено неравенство условия (У5) для нижнего решения.

Построенные верхнее и нижнее решения гарантируют существование решения $u(x,y,t,\varepsilon)$ задачи (1), удовлетворяющего неравенствам (см. [13, 14]):

$$\alpha(x,y,t,\varepsilon) \leqslant u(x,y,t,\varepsilon) \leqslant \beta(x,y,t,\varepsilon), \quad (x,y,t) \in \bar{D} \times t \in [0,T], \quad \varepsilon \in (0;\varepsilon_0].$$

Поскольку $\beta(x,y,t,\varepsilon) - \alpha(x,y,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^n)$ (см. (48)), то

$$u(x,y,t,\varepsilon) = \alpha(x,y,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^n) = U_{n+1}(x,y,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^n) = U_{n-1}(x,y,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^n),$$

заменив в этом равенстве n на $n+1$, получаем результат теоремы.

Список литературы / References

[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. школа, М., 1990, 208 с.; [Vasil'eva A.B., Butuzov V.F, *Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnyh vozmushhenij*, Vysshaja shkola, Moskva, 1990 (in Russian).] 208 pp.

[2] Нефедов Н. Н., "Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость", *Дифференц. уравнения*, **36**:2 (2000), 262–269; English transl.: Nefedov N. N., "An asymptotic method of differential inequalities for the investigation of periodic contrast structures: Existence, asymptotics, and stability", *Differential Equations*, **36**:2 (2000), 298–305.

[3] Волков В. Т., Нефедов Н. Н., "Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:4 (2006), 615–623; English transl.: Volkov V. T., Nefedov N. N., "Development of the asymptotic method of differential inequalities for investigation of periodic contrast structures in reaction-diffusion equations", *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:4 (2006), 585–593.

[4] Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н., "Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:2 (2010), 276–285; English transl.: Bozhevol'nov Yu. V., Nefedov N. N., "Front motion in a parabolic reaction-diffusion problem", *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:2 (2010), 264–273.

[5] Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., "Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:10 (2014), 1594–1607; English transl.: Antipov E. A., Levashova N. T., Nefedov N.N., "Asymptotics of the front motion in the reaction-diffusion-advection problem", *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:10 (2014), 1536–1549.

[6] Nefedov N., Yagremtsev A., "On extension of asymptotic comparison principle for time periodic reaction-diffusion-advection systems with boundary and internal layers", *Lecture Notes in Computer Science*, **9045** (2015), 62–72.

[7] Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений", *Дифференциальные уравнения*, **51**:3 (2015), 339–358; English transl.: Levashova N. T., Melnikova A. A., "Step-like contrast structure in a singularly perturbed system of parabolic equations", *Differential Equations*, **51**:3 (2015), 342–361.

[8] Нефедов Н.Н., "Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сгнулярно возмущенных задач с внутренними слоями", *Дифференц. уравнения*, **31**:7 (1995), 1142–1149; English transl.: Nefedov N.N., "The method of differential inequalities for some classes of nonlinear singularly perturbed problems with internal layers", *Differential Equations*, **31**:7 (1995), 1077–1085.

[9] Нефедов Н. Н., Давыдова М. А., "Контрастные структуры в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция", *Дифференциальные уравнения*, **48**:5 (2012), 738–748; English transl.: Nefedov N. N., Davydova M. A., "Contrast structures in multidimensional singularly perturbed reaction-diffusion-advection problems", *Differential Equations*, **48**:5 (2012), 745–755.

[10] Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А., "Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:9 (2013), 9–29; English transl.: Butuzov V. F., Levashova N. T., Melnikova A.A., "A Steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Elliptic Equations", *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:9 (2013), 1239–1259.

[11] Volkov V. T., Nefedov N. N., Antipov E. A., "Asymptotic-numerical method for moving fronts in two-dimensional r-d-a problems", *Lecture Notes in Computer Science*, **9045** (2015), 408–416.

[12] Volpert A. I., Volpert V. A., Volpert V. A., *Traveling wave solutions of parabolic systems*, American Mathematical Soc., 1994.

[13] Sattinger D. H., "Monotone Methods in Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems", *Indiana Univ. Math. J.*, **21**:11 (1972), 979–1001.

[14] Pao C. V., *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York, 1992.

Antipov E. A., Volkov V. T., Levashova N. T., Nefedov N. N., "Moving Front Solution of the Reaction-Diffusion Problem", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:3 (2017), 259–279.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-3-259-279

Abstract. In this paper, we study the moving front solution of the reaction-diffusion initial-boundary value problem with a small diffusion coefficient. Problems in such statements can be used to model physical processes associated with the propagation of autowave fronts, in particular, in biophysics or in combustion. The moving front solution is a function the distinctive feature of which is the presence in the domain of its definition of a subdomain where the function has a large gradient. This subdomain is called an internal transition layer. In the nonstationary case, the position of the transition layer varies with time which, as it is well known, complicates the numerical solution of the problem as well as the justification of the correctness of numerical calculations. In this case the analytical method is an essential component of the study. In the paper, asymptotic methods are applied for analytical investigation of the solution of the problem posed. In particular, an asymptotic approximation of the solution as an expansion in powers of a small parameter is constructed by the use of the Vasil'eva algorithm and the existence theorem is carried out using the asymptotic method of differential inequalities. The methods used also make it possible to obtain an equation describing the motion of the front. For this purpose a transition to local coordinates takes place in the region of the front localization. In the present paper, in comparison with earlier publications dealing with two-dimensional problems with internal transition layers the transition to local coordinates in the vicinity of the front has been modified, that led to the simplification of the algorithm of determining the equation of the curve motion.

Keywords: reaction-diffusion problem, two-dimensional moving front, asymptotic representation, small parameter, asymptotic method of differential inequalities

On the authors:
Evgeny A. Antipov, orcid.org/0000-0001-6734-683X, Deputy Head of the Informatization Department
Lomonosov Moscow State University,
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: a.evgen.a@gmail.com

Vladimir T. Volkov, orcid.org/0000-0002-4205-4141, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: volkovvt@mail.ru

Natalia T. Levashova, orcid.org/0000-0002-1916-166X, PhD,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Nikolay N. Nefedov, orcid.org/0000-0002-3651-6434, professor, Dr. Sci.,
Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
1, bld. 2 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Acknowledgments:
This work was supported by RFBR, project No 16-01-00437.