

Модел. и анализ информ. систем. Т. 22, № 1 (2015) 38–64  
© Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х., 2014

УДК 517.926

## Катастрофа голубого неба в системах с неклассическими релаксационными колебаниями<sup>1</sup>

Глызин С. Д.<sup>\*,\*\*</sup>, Колесов А. Ю.<sup>\*</sup>, Розов Н. Х.<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

<sup>\*\*</sup> НЦЧ РАН, 142432 Россия, Московская область, г. Черноголовка, ул. Лесная, д. 9

<sup>\*\*\*</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991 Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1

e-mail: [glyzin@uniyar.ac.ru](mailto:glyzin@uniyar.ac.ru), [kolesov@uniyar.ac.ru](mailto:kolesov@uniyar.ac.ru), [fpo.tgu@mail.ru](mailto:fpo.tgu@mail.ru)

получена 20 декабря 2014

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенная система, релаксационный цикл, асимптотика, устойчивость, катастрофа голубого неба, неклассические релаксационные колебания

Исследуется вопрос о реализуемости известной бифуркации типа катастрофы голубого неба в некотором классе трехмерных сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с одной быстрой и двумя медленными переменными. Характерная особенность рассматриваемых систем состоит в том, что в них происходят так называемые неклассические релаксационные колебания. Таковыми принято называть колебания, у которых медленные компоненты асимптотически близки к некоторым разрывным по времени функциям, а быстрая компонента  $\delta$ -образна. Разбираются случаи, когда в результате катастрофы голубого неба возникает устойчивый релаксационный цикл или устойчивый двумерный инвариантный тор. Рассматривается также вопрос о появлении гомоклинических структур.

### 1. Постановка задачи

Прежде всего скажем несколько слов о сути катастрофы голубого неба. Этим термином принято называть нелокальную бифуркацию коразмерности один, которая в простейшем случае состоит в следующем.

Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство векторных полей  $X_\mu$  в  $\mathbb{R}^3$  и предположим, что при  $\mu = 0$  поток  $X_\mu$  имеет периодическую траекторию  $L_0$  типа простой седло-узел. Рассмотрим, далее, некоторую достаточно малую окрестность  $\mathcal{U}$  траектории  $L_0$ , разделяемую двумерным сильно устойчивым многообразием  $W^{ss}(L_0)$  на две области: узловую  $\mathcal{U}^+$ , все траектории из которой стремятся к  $L_0$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158) и РФФИ (грант № 15-01-04066а).

при  $t \rightarrow +\infty$ , и седловую  $\mathcal{U}^-$ , в которой лежит двумерное неустойчивое многообразие  $W_{loc}^u(L_0)$  с краем  $L_0$ . Следующее ограничение носит существенно нелокальный характер и состоит в том, что все траектории системы  $X_0$  с начальными условиями из  $W_{loc}^u(L_0)$  при увеличении  $t$  сначала покидают окрестность  $\mathcal{U}$ , а затем снова возвращаются в нее, попадая в узловую область  $\mathcal{U}^+$ . Тогда, очевидно, каждая из упомянутых траекторий оказывается двоякоасимптотической к  $L_0$ . И наконец, будем считать, что множество  $W^u(L_0)$ , получающееся из  $W_{loc}^u(L_0)$  после продолжения по траекториям потока  $X_0$ , не является топологическим многообразием (в трехмерном случае это означает, что его замыкание не гомеоморфно двумерному тору).

Как показано в [1], при сформулированных ограничениях и при некоторых дополнительных условиях технического характера исчезновение в системе  $X_\mu$ ,  $0 < \mu \ll 1$  седло-узловой цикла  $L_0$  приводит к появлению устойчивой замкнутой траектории  $L(\mu)$ , период и длина которой стремятся к бесконечности при  $\mu \rightarrow 0$ . Сама же траектория  $L(\mu)$  имеет своим верхним топологическим пределом при  $\mu \rightarrow 0$  множество  $W^u(L_0) \cup L_0$ . Описанная бифуркация получила название "катастрофа голубого неба".

В работах [2, 3] проиллюстрирована реализуемость упомянутой выше бифуркации в сингулярно возмущенных системах с одной медленной и  $m$ ,  $m \geq 2$  быстрыми переменными. Далее, в статье [4] катастрофа голубого неба изучалась в системе

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y), \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $|\mu| \ll 1$ , а на функции  $f, g \in C^\infty$  были наложены стандартные ограничения (см. [5]), обеспечивающие существование так называемых классических релаксационных колебаний. Напомним, что классическими называются колебания, у которых при  $\varepsilon \rightarrow 0$  медленные компоненты  $x_1, x_2$  стремятся к некоторым непрерывным по  $t$  функциям, а быстрая компонента  $y$  близка к разрывной функции.

В настоящей статье результаты из [4] распространяются на систему вида (1), где, как и выше,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $|\mu| \leq \mu_0$ , а  $\mu_0 > 0$  – некоторая достаточно малая константа. Что же касается функций

$$f(x, y, \mu) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times [-\mu_0, \mu_0]; \mathbb{R}^2), \\ g(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}),$$

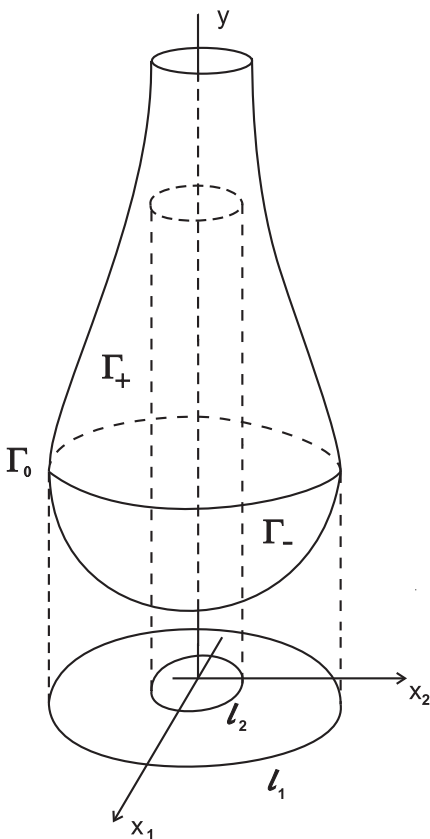


Рис. 1

то они будут удовлетворять специальным условиям, гарантирующим реализуемость неклассических релаксационных колебаний.

Приступим к детальному описанию ограничений на правые части системы (1). Как обычно [5], считаем, что уравнение  $g(x, y) = 0$  определяет гладкую двумерную поверхность  $\Gamma$ , распадающуюся на непересекающиеся части: устойчивую  $\Gamma_-$ ,

неустойчивую  $\Gamma_+$  и линию срыва  $\Gamma_0$ . По определению  $(x, y) \in \Gamma_-$ , если  $g'_y < 0$ ;  $(x, y) \in \Gamma_+$ , если  $g'_y > 0$ ;  $(x, y) \in \Gamma_0$  при  $g'_y = 0$ . Но в отличие от [5] здесь будем предполагать, что  $\Gamma$  имеет не форму "полотенца", а форму "кувшина" с бесконечно длинным горлом (см. рис. 1). Последнее означает, что поверхность  $\Gamma_-$  задается уравнением  $y = \Phi_-(x)$ ,  $\Phi_- \in C^\infty(\Omega_1)$ , где  $\Omega_1$  – внутренняя область, ограниченная простой замкнутой кривой  $l_1 \in C^\infty$ ; поверхность  $\Gamma_+$  определяется равенством  $y = \Phi_+(x)$ ,  $\Phi_+ \in C^\infty(\Omega_2)$ , где  $\Omega_2$  – кольцевая область, ограниченная кривой  $l_1$  и простой замкнутой кривой  $l_2 \subset \Omega_1$  класса  $C^\infty$ ;  $\Gamma_0 = \{(x, y) : y = \Phi_-(x) = \Phi_+(x), x \in l_1\}$ . Предполагаем еще, что  $\lim \Phi_+(x) = +\infty$  при  $x \rightarrow l_2, x \in \Omega_2$ .

**Условие 1.** Считаем, что при  $(x, y) \in \Gamma_0$

$$g''_{yy}(x, y) \neq 0, \quad (\text{grad}_x g(x, y), f(x, y, 0)) \neq 0, \quad (2)$$

где  $(*, *)$  – евклидово скалярное произведение.

Отметим, что неравенства (2) – это обычно предполагаемая общность положения на линии срыва  $\Gamma_0$  (см. [5]). Следующее же условие типично для теории неклассических релаксационных колебаний (см. [6]).

**Условие 2.** При  $y \rightarrow +\infty$  равномерно по любому ограниченному подмножеству изменения  $x$  и по  $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$  справедливы асимптотические представления

$$f(x, y, \mu) = y^{n_1} \left( f_0(x, \mu) + \frac{f_1(x, \mu)}{y} + \frac{f_2(x, \mu)}{y^2} + \dots \right), \quad (3)$$

$$g(x, y) = y^{n_2} \left( g_0(x) + \frac{g_1(x)}{y} + \frac{g_2(x)}{y^2} + \dots \right), \quad (4)$$

где  $n_1 \geq 1, n_2 \geq 0$  – целые числа, причем  $p = n_1 - n_2 \geq 0$ . Будем считать, что асимптотические равенства (3), (4) сохраняют силу при дифференцировании по  $x, y, \mu$  в любом порядке и любое число раз.

**Условие 3.** Введенная выше кривая  $l_2 \subset \Omega_1$  задается равенством  $l_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_0(x) = 0\}$ , причем  $g_0(x) < 0 (> 0)$  во внутренней (внешней) области, ограничиваемой данной кривой.

Обращаем внимание, что условие 3 согласуется с топологией поверхности медленных движений  $\Gamma$  (см. рис. 1). Действительно, при любом фиксированном  $x$ , принадлежащем внешней (внутренней) области, ограничиваемой кривой  $l_2$ , и при всех  $y \gg 1$  должно выполняться неравенство  $g(x, y) > 0 (< 0)$ . Именно это и гарантируют приведенные выше свойства функции  $g_0(x)$  из (4).

Для формулировки очередного ограничения введем в рассмотрение систему

$$\dot{x} = f_0(x, \mu), \quad (5)$$

где  $f_0(x, \mu)$  – вектор-функция из (3).

**Условие 4.** Предполагаем, что при  $\mu = 0$  все траектории системы (5) с начальными условиями, принадлежащими кривой  $l_1$ , за конечное время попадают на  $l_2$  (см. рис. 2). Считаем еще, что упомянутые траектории не имеют контактов с кривой  $l_2$ , т.е.

$$(\text{grad } g_0(x), f_0(x, 0)) < 0 \text{ при } x \in l_2. \quad (6)$$

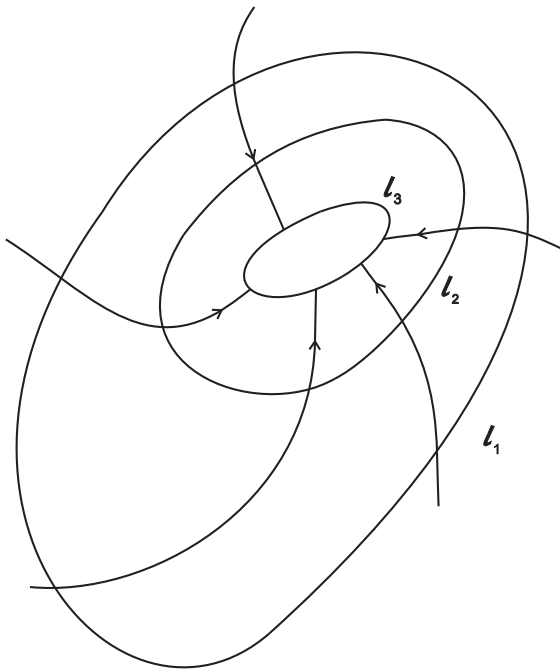


Рис. 2

Фиксируем произвольно точку  $x = x_0$ , лежащую в некоторой достаточно малой окрестности кривой  $l_1$ , и обозначим через  $x(t, x_0)$ ,  $x(0, x_0) = x_0$  решение задачи Коши  $\dot{x} = f_0(x, 0)$ ,  $x|_{t=0} = x_0$ . Далее, введем в рассмотрение функцию

$$a(t, x_0) = \int_0^t g_0(x(\theta, x_0)) d\theta \quad (9)$$

и заметим, что она обладает свойствами:

$$\begin{aligned} a(0, x_0) = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial t}(t, x_0) = g_0(x(t, x_0)) > 0 \text{ при } 0 \leq t < t_*, \\ \frac{\partial a}{\partial t}(t, x_0) < 0 \text{ при } t > t_*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t, x_0) = -\infty, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $t_* = t_*(x_0)$  – корень уравнения

$$g_0(x(t, x_0)) = 0. \quad (11)$$

Действительно, будем считать точку  $x_0$  настолько близкой к кривой  $l_1$ , что  $g_0(x_0) > 0$ , а для траектории  $x = x(t, x_0)$  системы (5) при  $\mu = 0$  сохраняется условие 4. Тогда эта траектория с течением времени ровно один раз пересечет кривую  $l_2$  и согласно неравенству (6) при последующем увеличении  $t$  останется в области  $\{x \in \mathbb{R}^2 : g_0(x) < 0\}$ , не приближаясь к ее границе. А отсюда, в свою очередь, заключаем, что, во-первых, уравнение (11) имеет единственный корень  $t = t_*(x_0) > 0$  с требуемыми свойствами (см. (10)); во-вторых, при всех достаточно больших  $t$  подынтегральное выражение в (9) отрицательно и отделено от нуля. Следовательно, при  $t \rightarrow +\infty$  заведомо выполняется и фигурирующее в (10) предельное равенство.

Заключительная серия ограничений касается поведения траекторий вырожденной системы

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \quad g(x, y) = 0 \quad (7)$$

на поверхности медленных движений  $\Gamma_-$ , которая, напомним, определяется равенством  $y = \Phi_-(x)$  при  $x \in \Omega_1$ . Поэтому в данном случае исследование системы (7) сводится к рассмотрению двумерной системы

$$\dot{x} = f(x, \Phi_-(x), \mu), \quad x \in \Omega_1 \cup l_1. \quad (8)$$

Однако прежде чем сформулировать условия, накладываемые на систему (8), введем в рассмотрение новую кривую  $l_3$ , расположенную в области  $\{x \in \mathbb{R}^2 : g_0(x) < 0\}$  (см. рис. 2). Способ построения этой кривой описывается ниже.

Опираясь на свойства (10), нетрудно увидеть, что уравнение  $a(t, x_0) = 0$  имеет на полуоси  $t > 0$  единственное решение  $t = t_{**}(x_0)$ . Учитывая это обстоятельство, введем в рассмотрение двумерное отображение

$$\Pi_0 : x_0 \rightarrow x(t, x_0)|_{t=t_{**}(x_0)} \quad (12)$$

и убедимся, что оно диффеоморфно отображает некоторую достаточно малую окрестность кривой  $l_1$  на окрестность кривой  $l_3 = \Pi_0(l_1)$  (см. рис. 2).

Покажем сначала, что оператор (12) является обратимым. Для этого нам потребуются вытекающие из (9), (10) свойства:

$$a(t, x_0) > 0 \text{ при } 0 < t < t_{**}(x_0), \quad a(t, x_0)|_{t=t_{**}(x_0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial a}{\partial t} \right|_{t=t_{**}(x_0)} < 0, \quad (13)$$

$$a(t_1 + t_2, x_0) = a(t_1, x_0) + a(t_2, x(t_1, x_0)). \quad (14)$$

Рассмотрим две произвольные точки  $x_0$  и  $x_1$ ,  $x_0 \neq x_1$ , достаточно близкие к кривой  $l_1$ , и проверим выполнение неравенства

$$\Pi_0(x_0) \neq \Pi_0(x_1).$$

Отметим сразу, что требуемое свойство автоматически справедливо в случае, когда точки  $x_0$ ,  $x_1$  принадлежат различным фазовым кривым системы (5) при  $\mu = 0$ . Поэтому разберем оставшийся вариант, когда существует простая дуга

$$D_{x_0, x_1} = \{x = x(t, x_0) : 0 \leq t \leq t_0, x(0, x_0) = x_0, x(t_0, x_0) = x_1\},$$

соединяющая  $x_0$  и  $x_1$ . Предположим также противное, т.е. будем считать, что имеет место равенство  $\Pi_0(x_0) = \Pi_0(x_1)$ .

Введем в рассмотрение точку  $x_2 = \Pi_0(x_0) = \Pi_0(x_1)$  и заметим, что она заведомо отлична от  $x_0$ ,  $x_1$ , так как в силу (13) выполняется неравенство

$$g_0(x_2) = \partial a / \partial t|_{t=t_{**}(x_0)} < 0.$$

В случае же  $x_0, x_1$  имеем  $g_0(x_j) > 0$ ,  $j = 0, 1$ , поскольку эти точки близки к кривой  $l_1$ .

Предположим сначала, что  $x_2 \notin D_{x_0, x_1}$ . Тогда при движении по траектории  $x = x(t, x_0)$  точки  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  проходятся в порядке  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$ . Следовательно, существует простая дуга  $D_{x_1, x_2}$ , соединяющая  $x_1$  и  $x_2$ . Далее, рассмотрим дугу  $D_{x_0, x_2} = D_{x_0, x_1} \cup D_{x_1, x_2}$  и обозначим через  $\tilde{t}(x_0)$  время движения по ней. Из очевидных геометрических соображений следует, что  $\tilde{t}(x_0) = t_0 + \tilde{t}(x_1)$ , где  $\tilde{t}(x_1)$  – время движения по  $D_{x_1, x_2}$ . Ясно также, что в простейшем случае моменты времени  $t_{**}(x_0)$  и  $t_{**}(x_1)$  совпадают с  $\tilde{t}(x_0)$  и  $\tilde{t}(x_1)$  соответственно. Однако возможна и более сложная ситуация, когда траектория  $x = x(t, x_0)$  периодична с некоторым периодом  $T > 0$  и

$$t_{**}(x_0) = t_0 + \tilde{t}(x_1) + k_1 T, \quad t_{**}(x_1) = \tilde{t}(x_1) + k_2 T, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Принимая во внимание эти формулы и опираясь на свойство (14), приходим к серии соотношений

$$\begin{aligned} 0 &= a(t_{**}(x_0), x_0) = a(t_0 + \tilde{t}(x_1) + k_1 T, x_0) = k_1 a(T, x_0) + a(t_0 + \tilde{t}(x_1), x_0) = \\ &= k_1 a(T, x_0) + a(t_0, x_0) + a(\tilde{t}(x_1), x_1). \end{aligned}$$

А так как в силу (13) имеем  $k_1 a(T, x_0) \geq 0$ ,  $a(t_0, x_0) > 0$ ,  $a(\tilde{t}(x_1), x_1) \geq 0$ , то получаем противоречие с исходным допущением  $\Pi_0(x_0) = \Pi_0(x_1)$ .

Предположим теперь, что  $x_2 \in D_{x_0, x_1}$ . В этом случае точки  $x_0, x_1, x_2$  проходятся в порядке  $x_0 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ . Но из  $x_1$  мы снова попадаем в  $x_2$ , а значит, все три точки лежат на замкнутой фазовой кривой. Тем самым, здесь существует простая дуга  $D_{x_1, x_0}$  с начальной точкой  $x_1$  и концом  $x_0$ , не содержащая точку  $x_2$ . Последующие же рассуждения, приводящие к противоречию, идентичны описанным выше (с естественными заменами  $x_0 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_0, k_1 \rightarrow k_2, t_0 \rightarrow t_1$ , где  $t_1$  – время движения по  $D_{x_1, x_0}$ ).

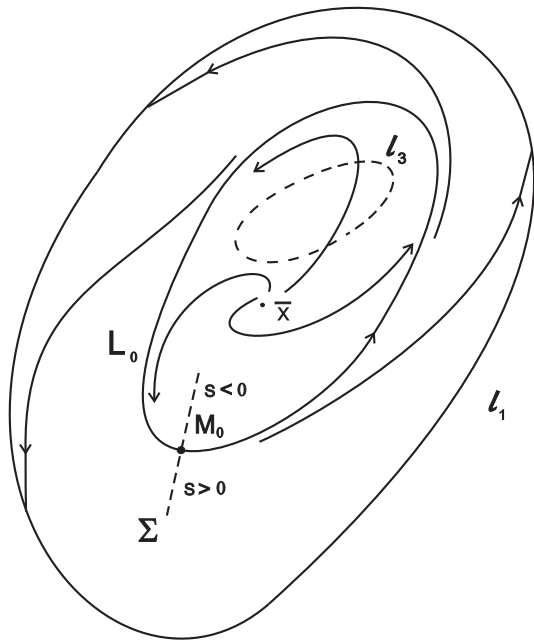


Рис. 3

обладающий аналогичными (13) свойствами. Более того, из равенств (15), (16) вытекает, что оператор  $\Pi_0^{-1}(x_0)$ , как и исходный оператор  $\Pi_0(x_0)$ , принадлежит классу  $C^\infty$ .

Из проделанных построений следует, что  $l_3 = \Pi_0(l_1)$  представляет собой простую замкнутую кривую класса  $C^\infty$ , принадлежащую области  $\{x \in \mathbb{R}^2 : g_0(x) < 0\}$ . Данная кривая и является искомой.

Возвращаясь к системе (8), предположим, что выполнен следующий блок ограничений.

**Условие 5.** Фазовый портрет системы (8) при  $\mu = 0$  имеет вид, показанный на рис. 3: в области  $\Omega_1$  существуют единственное состояние равновесия  $x = \bar{x}$ , являющееся экспоненциально неустойчивым узлом или фокусом, и единственный окружающий его полустойчивый цикл

$$L_0 : x = x_0(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0, \quad x_0(\varphi + 2\pi) \equiv x_0(\varphi), \quad \omega_0 > 0 \quad (17)$$

типа простой седло-узла. Предполагаем также, что все траектории из кольцевой области, ограничиваемой кривыми  $l_1$  и  $L_0$ , за конечное время попадают на кривую  $l_1$ . И наконец, считаем, что кривая  $l_3$  лежит в области, ограничиваемой циклом  $L_0$ , но не содержит и не окружает точку  $x = \bar{x}$  (см. рис. 3).

Итак, мы показали, что отображение (12), принадлежащее, очевидно, классу  $C^\infty$ , обратимо. Что же касается обратного отображения, то оно задается аналогичным (12) равенством

$$\Pi_0^{-1}(x_0) : x_0 \rightarrow x(-t, x_0)|_{t=\tilde{t}(x_0)}, \quad (15)$$

где теперь точка  $x_0$  близка к кривой  $l_3$ , а  $t = \tilde{t}(x_0) > 0$  – корень уравнения

$$\bar{a}(t, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_0^t g_0(x(-\theta, x_0)) d\theta = 0. \quad (16)$$

Нетрудно увидеть, что новая функция  $\bar{a}(t, x_0)$  связана с  $a(t, x_0)$  соотношением

$$\bar{a}(t, \Pi_0(x_0)) = a(t_{**}(x_0) - t, x_0)$$

и в силу этого имеет простой положительный корень  $t = \tilde{t}(x_0)$ ,  $t_{**}(x_0) = \tilde{t}(\Pi_0(x_0))$ ,

Для пояснения фигурирующего в условии 5 требования простоты седло-узлового цикла (17) фиксируем произвольно точку  $M_0 \in L_0$  и обозначим через  $\Sigma$  достаточно малый отрезок нормали к кривой  $L_0$  в этой точке (см. рис. 3). Параметром  $s$  на секущей  $\Sigma$  будем считать расстояние от произвольной точки  $M \in \Sigma$  до  $M_0$ , взятое со знаком "+", если  $M$  лежит на внешней части нормали, и со знаком "-" в противном случае. Тогда, очевидно, на множестве  $\{(s, \mu) : |s| \leq s_0, |\mu| \leq \mu_0\}$ , где  $s_0, \mu_0 > 0$  подходящим образом малы, определено отображение последования Пуанкаре

$$s \rightarrow R(s, \mu), \quad R \in C^\infty([-s_0, s_0] \times [-\mu_0, \mu_0]) \quad (18)$$

по траекториям системы (8), причем для  $R(s, 0)$  в точке  $s = 0$  справедливо тейлоровское разложение вида

$$R(s, 0) = s + d_0 s^2 + O(s^3). \quad (19)$$

Простота седло-узлового цикла  $L_0$  означает, что  $d_0 > 0$ .

**Условие 6.** *Считаем, что*

$$\alpha_0 = R'_\mu(0, 0) > 0, \quad (20)$$

где  $R(s, \mu)$  – функция из (18).

Из свойств (19), (20) и неравенства  $d_0 > 0$  следует, что при  $\mu \in [-\mu_0, 0)$  отображение (18) имеет две неподвижные точки  $s_\pm(\mu) = \pm\sqrt{-\alpha_0\mu/d_0} + O(\mu)$ , которым в системе (8) соответствуют два цикла – устойчивый  $L_-(\mu)$  и неустойчивый  $L_+(\mu)$ ,  $L_\pm(0) = L_0$ . Таким образом, в этом случае все траектории рассматриваемой системы с начальными условиями, лежащими на кривой  $l_3$ , при  $t \rightarrow +\infty$  стремятся к циклу  $L_-(\mu)$ . Если же  $\mu \in (0, \mu_0]$ , то циклы в системе (8) отсутствуют и любая ее траектория с начальным условием из  $l_3$  сначала асимптотически долгое время (порядка  $1/\sqrt{\mu}$ ) вращается в окрестности исчезнувшего цикла  $L_0$ , а затем попадает на кривую  $l_1$ .

При сформулированных ограничениях согласно результатам монографии [6] любая траектория

$$(x(t, \varepsilon, \mu), y(t, \varepsilon, \mu)) : \quad t \geq 0, \quad x(0, \varepsilon, \mu) = x_0, \quad y(0, \varepsilon, \mu) = y_0 \quad (21)$$

системы (1) с не зависящими от  $\varepsilon, \mu$  начальными условиями  $x_0, y_0$  на качественном уровне ведет себя следующим образом.

Пусть точка  $(x_0, y_0)$  расположена в некоторой достаточно малой окрестности устойчивого многообразия медленных движений  $\Gamma_-$  и  $x_0$  принадлежит кольцевой области, ограничиваемой кривыми  $L_0$  и  $l_1$ . Тогда сначала за асимптотически малое время (порядка  $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ ) происходит "падение" фазовой точки (21) на поверхность  $\Gamma_-$  примерно по прямой  $x = x_0$ , а затем движение продолжается в асимптотически малой по  $\varepsilon$  окрестности кривой  $(x_1(t, \mu), y_1(t, \mu))$ , где  $y_1(t, \mu) = \Phi_-(x_1(t, \mu))$ ,  $\Phi_-(x)$  – функция, задающая  $\Gamma_-$ ,  $x_1(t, \mu)$  – решение системы (8) с начальным условием  $x_1(0, \mu) = x_0$ . Далее, в силу условия 5 найдется такой первый момент времени  $t_1 = t_1(\mu) > 0$ , что  $x_1(t_1, \mu) \in l_1$ . А отсюда вытекает [6], что при значениях  $t$ , асимптотически близких к  $t_1$ , происходит "срыв" с многообразия  $\Gamma_-$  и начинается так называемый промежуток быстрого движения. Упомянутый промежуток, в

свою очередь, можно разбить на три фрагмента: участок взлета, участок поворота и участок падения.

Для того чтобы проанализировать участок взлета, обратимся к неравенству

$$g(x, y) > 0 \quad \forall x \in l_1, \quad \forall y > \Phi_-(x),$$

справедливому в силу условий, наложенных выше на функцию  $g(x, y)$ . Из этого неравенства следует, что на участке взлета переменная  $y$  возрастает до асимптотически больших значений. Точнее говоря, в нашем случае фазовая точка (21) асимптотически быстро движется в асимптотически малой окрестности отрезка

$$\{(x, y) : x = x_1(\mu), \quad \Phi_-(x_1(\mu)) \leq y \leq \varepsilon^{-1/(2(p+1))}\}, \quad (22)$$

где  $x_1(\mu) = x_1(t_1(\mu), \mu) \in l_1$ . Характерная особенность этого движения состоит в том, что любая часть отрезка (22), отвечающая промежутку  $\bar{y} \leq y \leq \bar{\bar{y}}$ , где  $\Phi_-(x_1(\mu))|_{\mu=0} < \bar{y} < \bar{\bar{y}}$ , проходится за время порядка  $\varepsilon$ . Величины же  $y = \varepsilon^{-1/(2(p+1))}$  компонента  $y(t, \varepsilon, \mu)$  достигает за время порядка  $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$  (при  $n_2 = 1$ ) или  $\varepsilon^\beta$ ,  $\beta = \min[1, (2p + n_2 + 1)/(2(p + 1))]$  (при  $n_2 \neq 1$ ).

Участок поворота соответствует значениям  $t$ , при которых фазовая точка (21) находится в полупространстве  $\{(x, y) : y \geq \varepsilon^{-1/(2(p+1))}\}$ . Для качественного описания этого участка выполним в системе (1) замены  $y = u\varepsilon^{-1/(p+1)}$ ,  $t - t_1(\mu) = \theta\varepsilon^{n_1/(p+1)}$  и воспользуемся разложениями (3), (4). В итоге после отбрасывания асимптотически малых по  $\varepsilon$  слагаемых приходим к задаче Коши

$$\frac{dx}{d\theta} = u^{n_1} f_0(x, \mu), \quad \frac{du}{d\theta} = u^{n_2} g_0(x), \quad x|_{\theta=0} = x_1(\mu), \quad u|_{\theta=0} = 0. \quad (23)$$

Полагая затем в (23)  $d\tau = u^{n_1} d\theta$ , убеждаемся, что на участке поворота движение фазовой точки  $(x(\tau, \varepsilon, \mu), u(\tau, \varepsilon, \mu))$ , получающейся из (21) после сделанных замен, происходит в асимптотически малой окрестности кривой

$$\{(x, u) : x = x(\tau, \mu), \quad u = u(\tau, \mu), \quad \tau \geq 0\} \cap \{(x, u) : u \geq 0\}. \quad (24)$$

Здесь

$$x(\tau, \mu) = x(t, x_0, \mu)|_{t=\tau, x_0=x_1(\mu)}, \quad u(\tau, \mu) = ((p+1)a(t, x_0, \mu))^{1/(p+1)}|_{t=\tau, x_0=x_1(\mu)}, \quad (25)$$

через  $x(t, x_0, \mu)$  обозначено решение задачи Коши  $\dot{x} = f_0(x, \mu)$ ,  $x|_{t=0} = x_0$ , а функция  $a(t, x_0, \mu)$  задана аналогичным (9) равенством

$$a(t, x_0, \mu) = \int_0^t g_0(x(\theta, x_0, \mu)) d\theta. \quad (26)$$

Следует отметить, что в силу малости  $\mu$  функция (26) обладает аналогичными (10) свойствами. Тем самым, она допускает такой корень  $t = t_{**}(x_0, \mu) > 0$ , что

$$a(t, x_0, \mu) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < t_{**}, \quad a(t, x_0, \mu) < 0 \quad \text{при} \quad t > t_{**},$$

$$\left. \frac{\partial a}{\partial t}(t, x_0, \mu) \right|_{t=t_{**}} < 0. \quad (27)$$



Обратим внимание, что согласно равенствам (25), (26) и свойствам (27) фигурирующее в (24) априорное условие  $u \geq 0$  выполняется только на отрезке  $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}(\mu)$ , где  $\bar{\tau}(\mu) = t_{**}(x_0, \mu)|_{x_0=x_1(\mu)}$ . Точнее говоря, компонента  $u(\tau, \mu)$  обладает свойствами

$$u(\tau, \mu) > 0 \text{ при } 0 < \tau < \bar{\tau}(\mu), \quad u(0, \mu) = u(\bar{\tau}(\mu), \mu) = 0. \quad (28)$$

Такое поведение  $u(\tau, \mu)$  означает, что на участке поворота компонента  $y(t, \varepsilon, \mu)$  сначала возрастает от  $\varepsilon^{-1/(2(p+1))}$  до значений порядка  $\varepsilon^{-1/(p+1)}$ , а затем снова падает до прежнего уровня  $y = \varepsilon^{-1/(2(p+1))}$ . Добавим еще, что время  $\Delta t$  прохождения данного участка равномерно по  $\mu$  асимптотически мало, а точнее говоря,

$$\Delta t = O \left( \varepsilon \int_{\varepsilon^{-1/(2(p+1))}}^{\varepsilon^{-1/(p+1)}} dy/y^{n_2} + \varepsilon^{n_1/(p+1)} \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

После поворота наступает так называемый участок падения, который вполне аналогичен описанному ранее участку взлета. На этом участке траектория (21) асимптотически близка к отрезку

$$\{(x, y) : x = x_2(\mu), \quad \Phi_-(x_2(\mu)) \leq y \leq \varepsilon^{-1/(2(p+1))}\}, \quad (29)$$

где  $x_2(\mu) = x(\tau, \mu)|_{\tau=\bar{\tau}(\mu)}$ . Заметим, далее, что в силу определения функций  $x(\tau, \mu)$ ,  $\bar{\tau}(\mu)$  из (25), (28) имеем  $x_2(\mu) = \Pi_\mu(x_1(\mu))$ , где оператор  $\Pi_\mu$  задается равенством

$$\Pi_\mu : x_0 \rightarrow x(t, x_0, \mu)|_{t=t_{**}(x_0, \mu)}$$

и является гладким продолжением по  $\mu$  оператора (12). Тем самым, автоматически  $x_2(\mu) \in l_3(\mu)$ , где  $l_3(\mu) = \Pi_\mu(l_1)$ ,  $l_3(0) = l_3$ . А так как

$$g(x, y) < 0 \quad \forall x \in l_3, \quad \forall y > \Phi_-(x),$$

то при движении вдоль отрезка (29) компонента  $y(t, \varepsilon, \mu)$  убывает (отсюда и название – участок падения). Длительность участка падения асимптотически мала. Точнее говоря, время взлета от  $y = \Phi_-(x_1(\mu)) + 1$  до  $y = \varepsilon^{-1/(2(p+1))}$  и время падения от  $y = \varepsilon^{-1/(2(p+1))}$  до  $y = \Phi_-(x_2(\mu)) + 1$  имеют один и тот же порядок малости по  $\varepsilon$ .

За падением следует очередной участок медленного движения. На указанном участке фазовая точка (21) находится в асимптотически малой окрестности кривой  $(x_2(t, \mu), y_2(t, \mu))$ , где  $y_2(t, \mu) = \Phi_-(x_2(t, \mu))$ , а  $x_2(t, \mu)$  – решение задачи Коши для системы (8) с начальным условием  $x_2(t, \mu)|_{t=t_1(\mu)} = x_2(\mu)$ . В зависимости от знака  $\mu$  здесь возможны следующие два сценария.

Предположим сначала, что параметр  $\mu$  фиксирован и положителен. Тогда, как уже было сказано выше, система (8) не имеет циклов, а любое ее решение с начальным условием на кривой  $l_3(\mu)$  за конечное, хотя и достаточно большое (порядка  $1/\sqrt{\mu}$ ), время попадает на  $l_1$ . Последнее означает существование такого момента  $t = t_2 > t_1$ , что при  $t \simeq t_2$  траектория (21) срывается с  $\Gamma_-$ . Затем идет очередной участок быстрого движения и т.д. Ясно также, что в рассматриваемом случае описанный процесс смены участков быстрых и медленных движений продолжается до бесконечности, т.е. в системе (1) реализуются незатухающие неклассические релаксационные колебания.

Пусть теперь параметр  $\mu$  фиксирован и отрицателен. Тогда, как следует из результатов статьи [7], циклам  $L_{\pm}(\mu)$  системы (8) в исходной системе (1) при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  соответствуют устойчивый и неустойчивый циклы  $\tilde{L}_-(\varepsilon, \mu)$  и  $\tilde{L}_+(\varepsilon, \mu)$ , причем  $\tilde{L}_{\pm}(0, \mu) = \{(x, y) : y = \Phi_{\pm}(x), x \in L_{\pm}(\mu)\}$ . Отметим, далее, что в силу условия 5 интересующая нас траектория (21) при  $t > t_1(\mu)$  заведомо попадает в область притяжения цикла  $\tilde{L}_-(\varepsilon, \mu)$ . Таким образом, в данном случае релаксационные автоколебания в системе (1) отсутствуют.

Из приведенных качественных соображений вытекает существование критического значения  $\mu_*(\varepsilon)$ ,  $\mu_*(0) = 0$  параметра  $\mu$ , при котором в системе (1) происходит переход от гладких автоколебаний – устойчивого цикла  $\tilde{L}_-(\varepsilon, \mu)$ , к релаксационным. Точнее говоря, случай  $\mu = \mu_*(\varepsilon)$  соответствует седло-узловой бифуркации, приводящей к слиянию и исчезновению циклов  $\tilde{L}_{\pm}(\varepsilon, \mu)$ . Что же касается интересующей нас катастрофы голубого неба, то она наблюдается в системе (1) при

$$\mu = \mu_*(\varepsilon) + \nu, \quad 0 < \nu \ll 1 \quad (30)$$

и при некотором дополнительном условии, о котором будет сказано ниже.

## 2. Основные конструкции

Убедимся сначала, что фигурирующее в (30) критическое значение  $\mu_*(\varepsilon)$  параметра  $\mu$  действительно существует.

**Лемма 1.** *По любому натуральному  $k$  можно указать такое достаточно малое  $\varepsilon_k > 0$ , что на отрезке  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k$  существует единственная  $C^k$ -гладкая по  $\varepsilon$  функция  $\mu_*(\varepsilon)$ ,  $\mu_*(0) = 0$ , обладающая следующим свойством: при  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  и при  $\mu = \mu_*(\varepsilon)$  система (1) имеет полуустойчивый цикл*

$$\tilde{L}_*(\varepsilon) : x = x_*(\varphi, \varepsilon), \quad y = y_*(\varphi, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_*(\varepsilon) \quad (31)$$

типа простой седло-узла. Здесь  $C^k$ -гладкие по  $(\varphi, \varepsilon)$  функции  $x_*(\varphi, \varepsilon)$ ,  $y_*(\varphi, \varepsilon)$  и  $C^k$ -гладко зависящая от  $\varepsilon$  частота  $\omega_*(\varepsilon)$  удовлетворяют равенствам:

$$\begin{aligned} x_*(\varphi + 2\pi, \varepsilon) &\equiv x_*(\varphi, \varepsilon), & y_*(\varphi + 2\pi, \varepsilon) &\equiv y_*(\varphi, \varepsilon), \\ x_*(\varphi, 0) &= x_0(\varphi), & y_*(\varphi, 0) &= \Phi_-(x_0(\varphi)), & \omega_*(0) &= \omega_0, \end{aligned}$$

где вектор-функция  $x_0(\varphi)$  и частота  $\omega_0$  заимствованы из (17).

**Доказательство.** Фиксируем произвольно некоторое достаточно малое  $\delta_0 > 0$  и на плоскости  $(x_1, x_2)$  рассмотрим окрестность цикла (17) вида

$$\mathcal{U} = \bigcup_{\tilde{x} \in L_0} \mathcal{O}(\tilde{x}, \delta_0), \quad (32)$$

где  $\mathcal{O}(\tilde{x}, \delta_0)$  – открытый шар радиуса  $\delta_0$  с центром в точке  $\tilde{x}$ . Как известно (см., например, [8]), по любому натуральному  $k$  найдутся такие достаточно малые  $\varepsilon_k > 0$ ,

$\mu_k > 0$ , что при всех  $(\varepsilon, \mu) \in [0, \varepsilon_k] \times [-\mu_k, \mu_k]$  система (1) имеет экспоненциально орбитально устойчивое (с показателем экспоненты порядка  $\varepsilon^{-1}$ ) инвариантное многообразие медленных движений

$$\{(x, y) : y = H(x, \varepsilon, \mu), x \in \mathcal{U}\}, \quad (33)$$

где функция  $H(x, \varepsilon, \mu)$ ,  $H(x, 0, \mu) = \Phi_-(x)$  является  $C^k$ -гладкой по совокупности переменных  $(x, \varepsilon, \mu)$ . А это значит, что проблема обоснования леммы сводится к анализу двумерной системы на многообразии (33), имеющей вид

$$\dot{x} = f(x, H(x, \varepsilon, \mu), \mu), \quad x \in \mathcal{U}. \quad (34)$$

Введем в рассмотрение отображение последования

$$s \rightarrow R(s, \varepsilon, \mu) \quad (35)$$

по траекториям системы (34), определенное на введенной выше секущей  $\Sigma$  (см. рис. 3) и являющееся  $C^k$ -гладким продолжением по  $\varepsilon$  отображения (18). Рассмотрим, далее, систему уравнений

$$R(s, \varepsilon, \mu) = s, \quad R'_s(s, \varepsilon, \mu) = 1 \quad (36)$$

для нахождения  $s, \mu$  как функций параметра  $\varepsilon$ . Нетрудно увидеть, что при  $\varepsilon = 0$  эта система имеет решение  $(s, \mu) = (0, 0)$ , а ее якобиан по переменным  $s, \mu$  в точке  $(s, \varepsilon, \mu) = (0, 0, 0)$  отличен от нуля и равен  $-2\alpha_0 d_0$ , где  $\alpha_0, d_0$  – постоянные из (19), (20). Тем самым, в силу теоремы о неявной функции система (36) допускает единственное  $C^k$ -гладкое по  $\varepsilon$  решение  $(s_*(\varepsilon), \mu_*(\varepsilon))$ ,  $s_*(0) = \mu_*(0) = 0$ .

Смысл проделанных построений ясен: при  $\mu = \mu_*(\varepsilon)$  отображение (35) имеет неподвижную точку  $s = s_*(\varepsilon)$  типа простой седло-узла, которой в системе (34) соответствует полустойчивый цикл

$$L_*(\varepsilon) : x = x_*(\varphi, \varepsilon), \quad x_*(\varphi + 2\pi, \varepsilon) \equiv x_*(\varphi, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_*(\varepsilon), \quad (37)$$

являющийся  $C^k$ -гладким продолжением по  $\varepsilon$  седло-узловой цикла (17). Что же касается интересующего нас цикла (31), то он получается из (37) в результате добавления компоненты  $y = y_*(\varphi, \varepsilon)$ , где  $y_*(\varphi, \varepsilon) = H(x_*(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \mu_*(\varepsilon))$ . Лемма 1 доказана.

В дополнение к установленной лемме отметим, что в силу условий 1 – 6 каждая траектория системы (1) при  $\mu = \mu_*(\varepsilon)$ , принадлежащая неустойчивому многообразию  $W_{loc}^u(\tilde{L}_*(\varepsilon))$  цикла (31), при  $t \rightarrow +\infty$  снова стремится к  $\tilde{L}_*(\varepsilon)$ , попадая в узловую область этого цикла. Таким образом,  $\mu_*(\varepsilon)$  является искомым критическим значением, соответствующим катастрофе голубого неба.

На следующем этапе обратимся к системе

$$\dot{x} = F_*(x, \varepsilon, \nu), \quad (38)$$

получающейся из (34) при учете равенства (30), и преобразуем ее по возможности к наиболее простому виду. Для этого сначала введем в области (32) радиальную и циклическую координаты  $(s, \varphi) : |s| \leq s_0, s_0 = \text{const} > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

(mod  $2\pi$ ), связанные с циклом (37). Точнее говоря, в качестве  $\varphi$  возьмем угловую координату из (37), а через  $s$  обозначим параметр на отрезке нормали  $\Sigma(\varphi, \varepsilon)$  к кривой  $L_*(\varepsilon)$ , проведенном через точку  $x_*(\varphi, \varepsilon)$  (способ определения этого параметра описан в разделе 1). Далее, из результатов статьи [9] вытекает существование такого достаточно малого  $\rho_0 > 0$  и таких  $C^k$ -гладких по совокупности переменных  $(\rho, \theta, \varepsilon) \in [-\rho_0, \rho_0] \times [0, 2\pi] \times [0, \varepsilon_k]$  функций  $h_j(\rho, \theta, \varepsilon)$ ,  $h_j(\rho, \theta + 2\pi, \varepsilon) \equiv h_j(\rho, \theta, \varepsilon)$ ,  $j = 1, 2$ , что после перехода в системе (38) при  $\nu = 0$  к координатам  $(s, \varphi)$  и замене  $s = \rho + \rho^2 h_1(\rho, \theta, \varepsilon)$ ,  $\varphi = \theta + \rho h_2(\rho, \theta, \varepsilon)$  она принимает вид

$$\dot{\rho} = d_1(\varepsilon)\rho^2 + d_2(\varepsilon)\rho^3, \quad \dot{\theta} = \omega_*(\varepsilon). \quad (39)$$

Здесь  $\omega_*(\varepsilon)$  – частота из (37),  $d_j(\varepsilon)$ ,  $j = 1, 2$  – некоторые функции класса  $C^k$  по  $\varepsilon$ , причем  $d_1(0) = d_0/2\pi > 0$ , где  $d_0$  – постоянная из (19).

Предположим теперь, что в системе (38)  $\nu > 0$ . Тогда указанные выше замены преобразуют ее к аналогичному (39) виду

$$\dot{\rho} = d_1(\varepsilon)\rho^2 + d_2(\varepsilon)\rho^3 + \nu\Delta_1(\rho, \theta, \varepsilon, \nu), \quad \dot{\theta} = \omega_*(\varepsilon) + \nu\Delta_2(\rho, \theta, \varepsilon, \nu), \quad (40)$$

где  $\Delta_j(\rho, \theta, \varepsilon, \nu)$ ,  $j = 1, 2$  – некоторые  $C^k$ -гладкие по  $(\rho, \theta, \varepsilon, \nu)$  и  $2\pi$ -периодические по  $\theta$  функции. Последующее упрощение системы (40) связано с полиномиальными по  $\rho, \nu$  заменами переменных, за счет которых можно ослабить зависимость от  $\theta$  в остатках  $\Delta_j$ , а точнее говоря, добиться, чтобы функции  $\partial\Delta_j/\partial\theta$ ,  $j = 1, 2$  обращались в нуль при  $\rho = 0$ ,  $\nu = 0$  вместе с любым наперед заданным количеством своих производных по  $\rho, \nu$ . В частности, существует замена переменных

$$\rho = r + \nu h_{1,1}(\psi, \varepsilon) + \nu r h_{1,2}(\psi, \varepsilon), \quad \theta = \psi + \nu h_{2,1}(\psi, \varepsilon) + \nu r h_{2,2}(\psi, \varepsilon),$$

где  $h_{j,s}(\psi, \varepsilon)$ ,  $h_{j,s}(\psi + 2\pi, \varepsilon) \equiv h_{j,s}(\psi, \varepsilon)$ ,  $j, s = 1, 2$  – некоторые  $C^k$ -гладкие по  $\psi, \varepsilon$  функции (способ их построения описан, например, в [10]), приводящая систему (40) к виду

$$\begin{aligned} \dot{r} &= d_1(\varepsilon)r^2 + d_2(\varepsilon)r^3 + \alpha_1(\varepsilon)\nu + \alpha_2(\varepsilon)\nu r + \nu\Delta_1(r, \psi, \varepsilon, \nu), \\ \dot{\psi} &= \omega_*(\varepsilon) + \beta_1(\varepsilon)\nu + \beta_2(\varepsilon)\nu r + \nu\Delta_2(r, \psi, \varepsilon, \nu). \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь  $\alpha_j(\varepsilon)$ ,  $\beta_j(\varepsilon)$ ,  $j = 1, 2$  – скалярные функции,  $C^k$ -гладко зависящие от  $\varepsilon$ , а остатки  $\Delta_j$ ,  $j = 1, 2$  в (41) удовлетворяют тем же общим требованиям периодичности и гладкости, что и аналогичные им остатки из (40). Однако теперь для них справедливы равенства

$$\Delta_j(0, \psi, \varepsilon, 0) \equiv \frac{\partial\Delta_j}{\partial r}(0, \psi, \varepsilon, 0) \equiv 0, \quad j = 1, 2. \quad (42)$$

Отметим еще необходимое для дальнейшего свойство  $\alpha_1(0) = \alpha_0/2\pi > 0$ , где  $\alpha_0$  – постоянная (20).

Последующий анализ базируется на некоторых дополнительных геометрических построениях. А именно, введем в рассмотрение две двумерные цилиндрические поверхности  $S_{\pm}$ , задающиеся в переменных  $(r, \psi, v)$ ,  $v = y - H(x, \varepsilon, \mu)$  равенствами

$$S_{\pm} = \{(r, \psi, v) : r = \pm r_0, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \pmod{2\pi}, \quad |v| \leq v_0\}, \quad (43)$$

где постоянные  $r_0, v_0 > 0$  фиксированы и достаточно малы. Отметим, далее, что при условии (30) поверхности (43) не имеют контактов с траекториями системы (1), поскольку положительны производные  $\dot{r}|_{r=\pm r_0}$  в силу этой системы (данный факт – следствие положительности коэффициентов  $d_1(\varepsilon), \alpha_1(\varepsilon)$  нормальной формы (41)). Кроме того, из описанного в разделе 1 качественного характера поведения решений (21) вытекает, что, во-первых, в данном случае корректно определен оператор соответствия  $\Pi_{+,-}(\varepsilon, \nu) : S_+ \rightarrow S_-$  по траекториям системы (1); во-вторых, при  $\varepsilon \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0$  этот оператор допускает конечный предел

$$\Pi_{+,-}(0, 0) : (\psi, v) \rightarrow (\gamma(\psi), 0), \quad (44)$$

где  $\gamma(\psi) \in C^\infty$  – некоторая периодическая с периодом  $2\pi$  функция.

Остановимся чуть более подробно на способе определения фигурирующей в (44) функции  $\gamma(\psi)$ . В связи с этим на плоскости  $(x_1, x_2)$  рассмотрим две замкнутые кривые  $L_{(\pm)}$ , которые в переменных  $(r, \psi)$  имеют вид

$$L_{(\pm)} = \{(r, \psi) : r = \pm r_0, \\ 0 \leq \psi \leq 2\pi \pmod{2\pi}\}$$

(см. рис. 4, где пунктиром изображен цикл  $L_0$ , располагающийся между  $L_{(-)}$  и  $L_{(+)}$ ). Фиксируем, далее, произвольную точку на  $L_{(+)}$ , которой соответствует угол  $\psi$ , и выпустим из нее решение системы (8) при  $\mu = 0$ . В силу второго неравенства из (2) траектории этой системы не имеют контактов с  $l_1$ , а значит, по ним осуществляется взаимно однозначное соответствие между кривыми  $L_{(+)}$  и  $l_1$ . Поэтому будем считать, что кривая  $l_1$  параметризована с помощью той же самой координаты  $\psi$ , что и  $L_{(+)}$ .

Точнее говоря, считаем, что точкам из  $L_{(+)}$  и  $l_1$ , лежащим на одной и той же траектории, отвечают одинаковые значения  $\psi$  (см. рис. 4).

Обратимся теперь к точке на кривой  $l_1$  с координатой  $\psi$  (которую обозначим через  $x_0$ ) и выпустим из нее отрезок траектории системы (5) при  $\mu = 0$ , отвечающий значениям  $0 \leq t \leq t_{**}(x_0)$ , где  $t_{**}(x_0)$  – момент времени из (12). В результате приходим в точку  $x_1 = \Pi_0(x_0)$ , лежащую на кривой  $l_3$ . А так как  $l_3$  получается из  $l_1$  под действием диффеоморфизма (12), то и здесь будем считать, что точки  $x_0$  и  $x_1$  имеют одну и ту же координату  $\psi$  (см. рис. 4).

Для завершения построения функции  $\gamma(\psi)$  возьмем полученную на предыдущем шаге точку  $x_1 \in l_3$  и рассмотрим траекторию системы (8) при  $\mu = 0$  с начальным условием в этой точке (см. рис. 4). Привлекая условие 5, убеждаемся, что при увеличении  $t$  упомянутая траектория с необходимостью пересечет общим образом кривую  $L_{(-)}$  в некоторой точке с координатой  $\psi_1 = \gamma(\psi)$ , где  $\gamma(\psi) \in C^\infty$ . А поскольку кривая  $l_3$  не окружает особую точку  $x = \bar{x}$  (см. рис. 4), то  $\gamma(\psi)$  обладает свойством периодичности первого рода, т.е.  $\gamma(\psi + 2\pi) \equiv \gamma(\psi)$ .

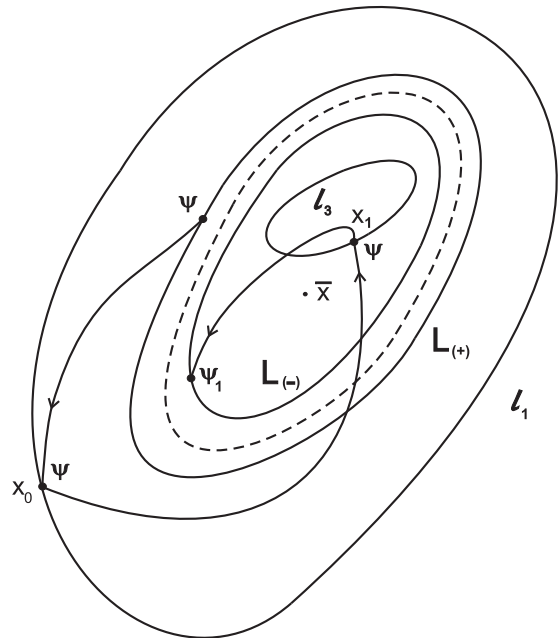


Рис. 4

Применяя к системе (1) общие результаты монографии [6], касающиеся классических и неклассических релаксационных колебаний, приходим к следующему утверждению.

**Лемма 2.** При выполнении условий 1 – 6 и соотношения (30) имеет место предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0} \Pi_{+,-}(\varepsilon, \nu) = \Pi_{+,-}(0, 0) \quad (45)$$

в метрике  $C^k$  по переменным  $(\psi, v) \in [0, 2\pi] \times [-v_0, v_0]$  при любом фиксированном  $k$ .

Заключительный этап исследования поведения решений системы (1) при условии (30) связан с рассмотрением оператора соответствия  $\Pi_{-,+}(\varepsilon, \nu)$  по ее траекториям, действующего из  $S_-$  в  $S_+$ . Убедимся сначала, что при любом  $0 < \nu \ll 1$  данный оператор действительно существует. Для этого выполним в (1) замену  $y - H(x, \varepsilon, \mu) = v$  и учтем равенство (30). В результате приходим к системе вида

$$\dot{x} = F(x, v, \varepsilon, \nu), \quad \varepsilon \dot{v} = G(x, v, \varepsilon, \nu)v, \quad (x, v) \in \mathcal{U} \times [-v_0, v_0]. \quad (46)$$

Здесь  $C^k$ -гладкие по совокупности переменных  $(x, v, \varepsilon, \nu)$  функции  $G, F$  таковы, что

$$F(x, 0, \varepsilon, \nu) = F_*(x, \varepsilon, \nu), \quad G(x, 0, 0, 0) = g'_y(x, \Phi_-(x)) < 0, \quad (47)$$

где  $F_*$  – правая часть системы (38).

Из свойства (47) функции  $G$  следует, что компонента  $v$  любого решения системы (46) с начальным условием, заданным при  $t = 0$  и принадлежащим поверхности  $S_-$ , за любое конечное время  $t_0 = \text{const} > 0$  становится по модулю величиной порядка  $\exp(-c_0/\varepsilon)$ ,  $c_0 = \text{const} > 0$ . Таким образом, проблема существования оператора  $\Pi_{-,+}(\varepsilon, \nu)$  сводится к аналогичному вопросу для оператора соответствия  $\Pi_{-,+}^*(\varepsilon, \nu) : L_{(-)} \rightarrow L_{(+)}$  по траекториям системы (41), получающейся из (46) при  $v = 0$  и при переходе к координатам  $r, \psi$ . Последний же корректно определен, так как в случае  $\nu > 0$ ,  $r \in [-r_0, r_0]$  правая часть уравнения для  $r$  из (41) строго положительна. Более того, для  $\Pi_{-,+}^*(\varepsilon, \nu)$  справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3.** По любому натуральному  $k$  можно указать такие достаточно малые постоянные  $\varepsilon_k > 0$ ,  $\nu_k > 0$ , что при всех  $0 < \nu \leq \nu_k$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k$  оператор  $\Pi_{-,+}^*(\varepsilon, \nu)$  допускает представление

$$\Pi_{-,+}^*(\varepsilon, \nu) : \psi \rightarrow \psi + c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu} + \sqrt{\nu} \Psi(\psi, \varepsilon, \nu) \pmod{2\pi}, \quad (48)$$

где функция  $c_*(\varepsilon, \nu)$ ,  $c_*(0, 0) > 0$  непрерывна по совокупности переменных (вплоть до значения  $\nu = 0$ ). Что же касается  $2\pi$ -периодической по  $\psi$  функции  $\Psi(\psi, \varepsilon, \nu)$ , то она непрерывна и ограничена на множестве  $(\psi, \varepsilon, \nu) \in [0, 2\pi] \times [0, \varepsilon_k] \times (0, \nu_k]$  вместе со своими производными  $\partial^m \Psi / \partial \psi^m$ ,  $t \leq k$ .

**Доказательство.** Фиксируем произвольно натуральное  $k$  и подберем постоянные  $r_0, \varepsilon_k, \nu_k > 0$  таким образом, чтобы правые части системы (41) имели по переменным

$$(r, \psi, \varepsilon, \nu) \in S = [-r_0, r_0] \times [0, 2\pi] \times [0, \varepsilon_k] \times [0, \nu_k] \quad (49)$$

гладкость  $C^k$ . Далее, примем в этой системе  $r$  за новое время (что возможно в силу положительности  $\dot{r}$ ). В результате после некоторых преобразований приходим

к скалярному неавтоному уравнению с  $2\pi$ -периодической по  $\psi$  правой частью, имеющему вид:

$$\frac{d\psi}{dr} = \omega_*(\varepsilon) / [\delta(r, \varepsilon, \nu) + \nu \Delta(r, \psi, \varepsilon, \nu)], \quad (50)$$

где  $\delta(r, \varepsilon, \nu) = d_1(\varepsilon)r^2 + d_2(\varepsilon)r^3 + \alpha_1(\varepsilon)\nu + \alpha_2(\varepsilon)\nu r$ , а остаток  $\Delta \in C^k(S)$  удовлетворяет вытекающим из (42) равенствам

$$\frac{\partial^m \Delta}{\partial \psi^m}(0, \psi, \varepsilon, 0) \equiv \frac{\partial^{m+1} \Delta}{\partial r \partial \psi^m}(0, \psi, \varepsilon, 0) \equiv 0, \quad m = 0, 1, \dots, k. \quad (51)$$

Для анализа уравнения (50) нам потребуется функция

$$V(r, \psi, \varepsilon, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \nu^{n-1} (\Delta(r, \psi, \varepsilon, \nu) / \delta(r, \varepsilon, \nu))^n, \quad (52)$$

являющаяся непрерывной на множестве (49) вместе со своими производными по  $\psi$  до порядка  $k$  включительно. Действительно, равномерную сходимость ряда (52), а также рядов, получающихся из данного после  $m$ -кратного дифференцирования по  $\psi$  ( $m \leq k$ ), гарантируют оценки

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial \psi^m} \Delta(r, \psi, \varepsilon, \nu) \right| \leq N_1(r^2 + \nu), \quad m \leq k; \quad \delta(r, \varepsilon, \nu) \geq N_2(r^2 + \nu), \quad (53)$$

справедливые в силу свойств (51) и неравенств  $d_1(0) > 0$ ,  $\alpha_1(0) > 0$ . Здесь и ниже буквами  $N$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  и т.д. обозначаем различные универсальные (не зависящие от  $r$ ,  $\psi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\nu$ ) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Используя функцию (52), перейдем от (50) к более удобному для дальнейшего исследования уравнению

$$\frac{d\psi}{dr} = \omega_*(\varepsilon) [1 + \nu V(r, \psi, \varepsilon, \nu)] / \delta(r, \varepsilon, \nu) \quad (54)$$

и дополним его начальным условием  $\psi|_{r=-r_0} = \psi_0$ , где  $\psi_0 \in [0, 2\pi]$  произвольно фиксировано. Решение получившейся задачи Коши будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_*(r, \varepsilon, \nu) + \sqrt{\nu} h, \quad \psi_*(r, \varepsilon, \nu) = \omega_*(\varepsilon) \int_{-r_0}^r \frac{ds}{\delta(s, \varepsilon, \nu)}, \quad h|_{r=-r_0} = 0. \quad (55)$$

В результате после подстановки равенств (55) в (54) для определения функции  $h = h(r, \psi_0, \varepsilon, \nu)$  приходим к интегральному уравнению

$$h = \sqrt{\nu} \omega_*(\varepsilon) \int_{-r_0}^r \frac{V(s, \psi_0 + \psi_*(s, \varepsilon, \nu) + \sqrt{\nu} h, \varepsilon, \nu)}{\delta(s, \varepsilon, \nu)} ds. \quad (56)$$

Обозначим через  $E$  – банахово пространство функций  $h(r, \psi_0)$ ,  $2\pi$ -периодических по  $\psi_0$  и непрерывных по  $(r, \psi_0) \in [-r_0, r_0] \times [0, 2\pi]$  вместе с производными  $\partial^m h / \partial \psi_0^m$ ,  $m \leq k$ . Норму в  $E$  определим формулой

$$\|h\|_E = \sum_{m=0}^k \max_{(r, \psi_0) \in [-r_0, r_0] \times [0, 2\pi]} \left| \frac{\partial^m h}{\partial \psi_0^m} \right|.$$

Привлекая, далее, отмеченные выше свойства гладкости по  $\psi$  функции (52) и вытекающую из (53) оценку

$$\left\| \sqrt{\nu} \omega_*(\varepsilon) \int_{-r_0}^r \frac{f(s, \psi_0)}{\delta(s, \varepsilon, \nu)} ds \right\|_E \leq N_3 \|f\|_E \quad \forall f(r, \psi_0) \in E,$$

приходим к выводу, что нелинейный оператор, порождаемый правой частью уравнения (56) в пространстве  $E$ , преобразует в себя некоторый замкнутый шар вида  $\{h \in E : \|h\|_E \leq N\}$  и является в этом шаре сжимающим (с константой сжатия порядка  $\sqrt{\nu}$ ). А отсюда и из принципа сжимающих отображений заключаем, что уравнение (56) имеет единственное решение  $h = h_*(r, \psi_0, \varepsilon, \nu)$ , непрерывное и ограниченное на множестве

$$(r, \psi_0, \varepsilon, \nu) \in [-r_0, r_0] \times [0, 2\pi] \times [0, \varepsilon_k] \times (0, \nu_k] \quad (57)$$

вместе со своими производными  $\partial^m h_*/\partial \psi_0^m$ ,  $m \leq k$ . Подчеркнем, что в отличие от (49) в (57) исключен случай  $\nu = 0$ . Связано это с тем, что фигурирующая в (55), (56) функция  $\psi_*(r, \varepsilon, \nu)$  при  $\nu \rightarrow 0$  стремится к бесконечности как  $1/\sqrt{\nu}$ .

Из проделанных построений следует, что интересующий нас оператор  $\Pi_{-,+}^*(\varepsilon, \nu)$  записывается в виде

$$\Pi_{-,+}^*(\varepsilon, \nu) : \psi_0 \rightarrow \psi_0 + \psi_*(r_0, \varepsilon, \nu) + \sqrt{\nu} h_*(r_0, \psi_0, \varepsilon, \nu).$$

Таким образом, функция  $\Psi(\psi, \varepsilon, \nu)$  из (48) задается равенством  $\Psi = h_*(r_0, \psi, \varepsilon, \nu)$  и в силу этого обладает всеми требуемыми в лемме свойствами. Что же касается аддитивной добавки  $\psi_*(r_0, \varepsilon, \nu)$ , то из явного выражения для  $\psi_*(r, \varepsilon, \nu)$  (см. (55)) для нее вытекает представление  $\psi_*(r_0, \varepsilon, \nu) = c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu}$ , где  $c_*(\varepsilon, \nu)$  – непрерывная по  $(\varepsilon, \nu) \in [0, \varepsilon_0] \times [0, \nu_0]$  функция и  $c_*(0, 0) = \pi \omega_0 / \sqrt{\alpha_0 d_0} > 0$ . Лемма 3 доказана.

Обратимся теперь к исходному оператору  $\Pi_{-,+}(\varepsilon, \nu)$ . Из проделанных выше построений вытекает следующая

**Лемма 4.** *Для любого натурального  $k$  найдутся такие достаточно малые  $\varepsilon_k > 0$ ,  $\nu_k > 0$ , что при всех  $0 < \nu \leq \nu_k$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k$  оператор  $\Pi_{-,+}(\varepsilon, \nu)$  допускает представление*

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi + c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu} + \Psi_1(\psi, v, \varepsilon, \nu) \pmod{2\pi}, \\ \Pi_{-,+}(\varepsilon, \nu) : \quad v &\rightarrow \Psi_2(\psi, v, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon \sqrt{\nu}}\right). \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь функция  $c_*(\varepsilon, \nu)$  обладает теми же свойствами, что и аналогичная функция из (48),  $c_{**} = \text{const} > 0$ , а  $2\pi$ -периодические по  $\psi$  функции  $\Psi_j$ ,  $j = 1, 2$  и их всевозможные частные производные по  $\psi, v$  до порядка  $k$  непрерывны по  $(\psi, v, \varepsilon, \nu) \in [0, 2\pi] \times [-v_0, v_0] \times [0, \varepsilon_k] \times [0, \nu_k]$ . Кроме того, выполняется равенство  $\Psi_1(\psi, v, 0, 0) \equiv 0$ .

Доказательство сформулированного утверждения по существу сводится к применению предыдущей леммы 3. Действительно, выполним в системе (46) гладкую



замену переменных вида  $x + \varepsilon w(x, v, \varepsilon, \nu) \rightarrow x$ , распрямляющую сильно устойчивое инвариантное слоение над многообразием (33) (см. [10]). В результате получаем треугольную систему

$$\dot{x} = \tilde{F}(x, \varepsilon, \nu), \quad \varepsilon \dot{v} = \tilde{G}(x, v, \varepsilon, \nu)v, \quad (59)$$

где  $C^k$ -гладкие по  $(x, \varepsilon, \nu)$  и  $(x, v, \varepsilon, \nu)$  функции  $\tilde{G}$  и  $\tilde{F}$  отличаются от фигурирующих в (46), (47) функций  $F_*$ ,  $G$  на величины порядка  $\varepsilon$ . Далее, нормализуем первое уравнение из (59), т.е. перейдем от  $x$  к координатам  $(\tilde{r}, \tilde{\psi})$ , в которых это уравнение принимает аналогичный (41) вид. Затем рассмотрим секущие  $\tilde{S}_\pm$ , задающиеся аналогичными (43) равенствами, и определим оператор соответствия  $\tilde{\Pi}_{-,+}(\varepsilon, \nu) : \tilde{S}_- \rightarrow \tilde{S}_+$  по траекториям системы (59).

Из структуры уравнений (59) и из леммы 3 следует, что интересующий нас оператор  $\tilde{\Pi}_{-,+}(\varepsilon, \nu)$  также имеет треугольный вид, а точнее говоря, допускает представление

$$\tilde{\Pi}_{-,+}(\varepsilon, \nu) : \begin{cases} \tilde{\psi} \rightarrow \tilde{\psi} + c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu} + \sqrt{\nu} \tilde{\Psi}_1(\tilde{\psi}, \varepsilon, \nu), \\ v \rightarrow \tilde{\Psi}_2(\tilde{\psi}, v, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon \sqrt{\nu}}\right). \end{cases} \quad (60)$$

Здесь  $c_{**} = \text{const} > 0$ , функции  $c_*(\varepsilon, \nu)$ ,  $\tilde{\Psi}_1(\tilde{\psi}, \varepsilon, \nu)$  обладают свойствами, описанными в лемме 3, а  $2\pi$ -периодическая по  $\tilde{\psi}$  функция  $\tilde{\Psi}_2$  непрерывна по всем своим переменным  $(\tilde{\psi}, v, \varepsilon, \nu) \in [0, 2\pi] \times [-v_0, v_0] \times [0, \varepsilon_k] \times [0, \nu_k]$  вместе с производными по  $(\tilde{\psi}, v)$  до порядка  $k$ . Добавим еще, что указанная в (60) экспоненциальная малость компоненты  $v$  вытекает из вида второго уравнения системы (59), свойства  $\tilde{G}(x, 0, 0, 0) = G(x, 0, 0, 0) < 0$  (см. (47)) и того факта, что любая траектория этой системы проводит между секущими  $\tilde{S}_\pm$  время

$$T \sim \int_{-r_0}^{r_0} d\tilde{r} / \delta(\tilde{r}, \tilde{\psi}, \varepsilon, \nu) = O(1/\sqrt{\nu}).$$

Здесь  $\delta(\tilde{r}, \tilde{\psi}, \varepsilon, \nu) = O(\tilde{r}^2 + \nu)$  – правая часть уравнения для  $\tilde{r}$ , аналогичная правой части уравнения для  $r$  из (41).

Для завершения обоснования леммы 4 заметим, что после перехода от  $(\tilde{r}, \tilde{\psi})$  к прежним координатам  $(r, \psi)$  отображение (60) принимает требуемый вид (58).

### 3. Сводка результатов

Проделанные в предыдущем разделе построения позволяют определить оператор последования Пуанкаре

$$\Pi(\varepsilon, \nu) = \Pi_{-,+}(\varepsilon, \nu) \circ \Pi_{+,-}(\varepsilon, \nu) : S_+ \rightarrow S_+ \quad (61)$$

по траекториям системы (1) при условии (30). Из соотношений (45), (58) вытекает следующее утверждение, являющееся основным результатом данной статьи.

**Теорема 1.** Для любого натурального  $k$  найдутся такие достаточно малые  $\varepsilon_k > 0$ ,  $\nu_k > 0$ , что при  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k$ ,  $0 < \nu \leq \nu_k$  оператор (61) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu} + \gamma(\psi) + \Lambda_1(\psi, \nu, \varepsilon, \nu) \pmod{2\pi}, \\ \Pi(\varepsilon, \nu) : \\ v &\rightarrow \Lambda_2(\psi, \nu, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right). \end{aligned} \quad (62)$$

Здесь  $\gamma(\psi)$  и  $c_*(\varepsilon, \nu)$  – функции из (44) и (58) соответственно,  $c_{**} = \text{const} > 0$ , а  $2\pi$ -периодические по  $\psi$  функции  $\Lambda_j$ ,  $j = 1, 2$  и их производные по  $(\psi, \nu)$  до порядка  $k$  включительно непрерывны по  $(\psi, \nu, \varepsilon, \nu) \in [0, 2\pi] \times [-\nu_0, \nu_0] \times [0, \varepsilon_k] \times [0, \nu_k]$ . Кроме того, выполняется равенство  $\Lambda_1(\psi, \nu, 0, 0) \equiv 0$ .

Опираясь на представление (62), нетрудно увидеть, что  $\Pi(\varepsilon, \nu)S_+ \subset S_+$ . А это значит, что отображение (61) имеет максимальный аттрактор

$$A_{\max} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Pi^n(\varepsilon, \nu)S_+. \quad (63)$$

Ясно также, что в первом приближении за структуру множества (63) отвечает одномерное отображение

$$\Pi_{\varkappa} : \psi \rightarrow \bar{\psi} = \varkappa + \gamma(\psi), \quad (64)$$

где  $\varkappa = c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu}$ , получающееся из (62) после отбрасывания асимптотически малых по  $\varepsilon, \nu$  слагаемых. В дальнейшем будем рассматривать это отображение, считая  $\varkappa$  независимым параметром, пробегающим всю числовую ось  $\mathbb{R}$ .

При анализе аттрактора (63) ограничимся тремя основными случаями. Начнем с простейшего из них, а именно, предположим, что

$$|\gamma'(\psi)| < 1 \quad \forall \psi \in [0, 2\pi]. \quad (65)$$

Тогда, как нетрудно увидеть, отображение (64) имеет единственную непрерывно зависящую от  $\varkappa$  неподвижную точку

$$\psi = \psi_0(\varkappa), \quad \psi_0(\varkappa + 2\pi) \equiv \psi_0(\varkappa) + 2\pi. \quad (66)$$

Что же касается исходного отображения (62), то при условии (65) оно очевидным образом является сжимающим. Тем самым, в рассматриваемом случае приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2** (о катастрофе голубого неба). Пусть выполнено неравенство (65). Тогда аттрактор (63) состоит из единственной экспоненциально устойчивой неподвижной точки  $(\psi, \nu) = (\psi(\varepsilon, \nu), \nu(\varepsilon, \nu))$ , для компонент которой при  $\nu \rightarrow 0$  справедливы равномерные по  $\varepsilon$  асимптотические представления

$$\psi(\varepsilon, \nu) = \psi_0(\varkappa)|_{\varkappa=c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu}} + o(1), \quad \nu(\varepsilon, \nu) = O\left(\exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right)\right), \quad (67)$$

где  $c_{**} > 0$  – постоянная из (62), а  $\psi_0 = \psi_0(\varkappa)$  – функция (66).

Следует отметить, что установленная теорема гарантирует реализуемость в системе (1) при условии (30) интересующей нас катастрофы голубого неба. Действительно, неподвижной точке (67) оператора последования (61) отвечает устойчивый релаксационный цикл  $\tilde{L}(\varepsilon, \nu)$  этой системы, период и длина которого равномерно по  $\varepsilon$  стремятся к бесконечности при  $\nu \rightarrow 0$ . Кроме того, в силу первого равенства из (67) множество всех частичных пределов компоненты  $\psi(\varepsilon, \nu)$  при  $\nu \rightarrow 0$ , взятое по модулю  $2\pi$ , совпадает с отрезком  $[0, 2\pi]$ . А это значит, что верхний топологический предел кривой  $\tilde{L}(\varepsilon, \nu)$  при  $\nu \rightarrow 0$  равен  $W^u(\tilde{L}_*(\varepsilon)) \cup \tilde{L}_*(\varepsilon)$ , где  $\tilde{L}_*(\varepsilon)$  – седло-узловой цикл (31), а  $W^u$  – его неустойчивое многообразие, продолженное по траекториям системы (1) при  $\mu = \mu_*(\varepsilon)$  и состоящее, как уже говорилось в разделе 2, из двоякоасимптотических к  $\tilde{L}_*(\varepsilon)$  решений.

Предположим теперь, что на некотором отрезке  $[\varkappa_0, \varkappa_0 + 2\pi]$  изменения параметра  $\varkappa$  отображение (64) имеет непрерывную по  $\varkappa$  неустойчивую неподвижную точку  $\psi_{(0)} = \psi_{(0)}(\varkappa)$ ,  $|\gamma'(\psi_{(0)})| > 1$ , и непрерывную по  $\varkappa \in [\varkappa_0, \varkappa_0 + 2\pi]$  гомоклиническую орбиту  $\{\psi_{(-n)} = \psi_{(-n)}(\varkappa), n \in \mathbb{N}\}$ , определяющуюся равенствами (см. рис. 5, где изображен случай  $\gamma'(\psi_{(0)}) < -1$ ):

$$\begin{aligned} \Pi_{\varkappa}(\psi_{(-n)}) &= \psi_{(-n+1)}, \quad \gamma'(\psi_{(-n)}) \neq 0 \\ \text{при } \forall n \in \mathbb{N}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{(-n)} &= \psi_{(0)}. \end{aligned} \quad (68)$$

Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon, \nu > 0$  аттрактор (63) отображения (62) содержит инвариантное гиперболическое подмножество, являющееся носителем сложной динамики. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть выполнены сформулированные чуть выше ограничения. Тогда найдутся такие достаточно малые  $\varepsilon_0, \nu_0 > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, 0 < \nu \leq \nu_0$  отображение (62) имеет седловую неподвижную точку

$$\begin{aligned} O(\varepsilon, \nu) &= (\psi(\varepsilon, \nu), v(\varepsilon, \nu)) : \psi(\varepsilon, \nu) = \psi_{(0)}(\tilde{\varkappa}(\varepsilon, \nu)) + o(1), \quad \tilde{\varkappa}(\varepsilon, \nu) = \\ &= c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu} - 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2\pi} (c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu} - \varkappa_0) \right] \in [\varkappa_0, \varkappa_0 + 2\pi), \\ [*] - \text{целая часть}, \quad v(\varepsilon, \nu) &= O\left(\exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right)\right), \quad \nu \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (69)$$

с грубой гомоклинической кривой.

**Доказательство.** Без ограничения общности будем считать, что аддитивная добавка  $c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu}$  в (62) заменена на  $\tilde{\varkappa}(\varepsilon, \nu)$  (см. (69)). Тогда существование у отображения  $\Pi(\varepsilon, \nu)$  требуемой неподвижной точки  $O(\varepsilon, \nu)$  – очевидное следствие предполагаемой грубости решения  $\psi = \psi_{(0)}(\varkappa)$  уравнения  $\psi = \varkappa + \gamma(\psi)$  при  $\varkappa \in [\varkappa_0, \varkappa_0 + 2\pi]$ . Более того, нетрудно увидеть, что устойчивое и неустойчивое многообразия  $W^s(O)$

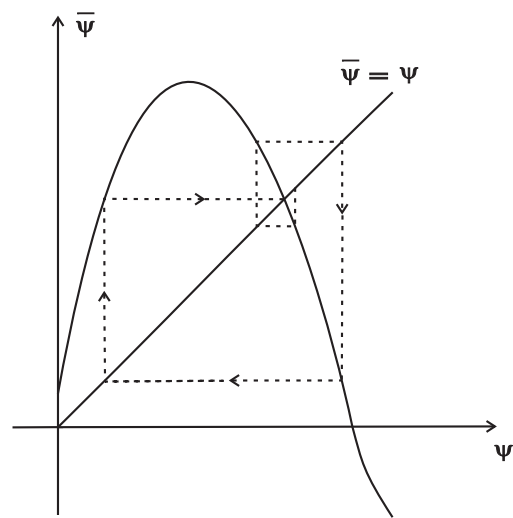


Рис. 5

и  $W^u(O)$  этой точки при  $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$  стремятся (в  $C^k$ -метрике) к соответствующим отрезкам  $\{(\psi, v) : \psi = \psi(\varepsilon, \nu), |v| \leq v_0\}$  и  $\{(\psi, v) : |\psi - \psi(\varepsilon, \nu)| \leq \delta_0, v = 0\}$  (см. рис. 6), где  $\delta_0 > 0$  – некоторая не зависящая от  $\varepsilon, \nu$  положительная постоянная.

Дальнейший анализ связан со следующими геометрическими построениями. Фиксируем такие достаточно большое натуральное  $n_0$  и достаточно малое  $\delta_1 > 0$ , для которых выполняется включение

$$I_{\delta_1, n_0} = [\psi_{(-n_0)}(\tilde{\varkappa}(\varepsilon, \nu)) - \delta_1, \psi_{(-n_0)}(\tilde{\varkappa}(\varepsilon, \nu)) + \delta_1] \subset [\psi(\varepsilon, \nu) - \delta_0, \psi(\varepsilon, \nu) + \delta_0]. \quad (70)$$

Заметим, что в силу непрерывности по  $\varkappa \in [\varkappa_0, \varkappa_0 + 2\pi]$  компонент  $\psi_{(-n_0)}(\varkappa)$  и  $\psi_{(0)}(\varkappa)$  из (68) фигурирующие в (70) числа  $n_0, \delta_1$  можно выбрать не зависящими от  $\varepsilon, \nu$ . Далее, обозначим через  $\sigma$  кусок многообразия  $W^u(O)$ , координата  $\psi$  которого принадлежит отрезку  $I_{\delta_1, n_0}$ , и рассмотрим его образ  $\Pi^{n_0}(\varepsilon, \nu)\sigma$  под действием оператора  $\Pi^{n_0}(\varepsilon, \nu)$ . Покажем, что это множество расположено по отношению к точке  $O(\varepsilon, \nu)$  так, как изображено на рис. 6. Точнее говоря, на этом рисунке с некоторой долей условности представлен один из возможных случаев, когда  $\Pi^{n_0}(\varepsilon, \nu)\sigma$  лежит выше участка многообразия  $W^u(O)$  при  $|\psi - \psi(\varepsilon, \nu)| \leq \delta_0$ . Условность же состоит в том, что на самом деле расстояние от  $\Pi^{n_0}(\varepsilon, \nu)\sigma$  до  $O(\varepsilon, \nu)$  имеет порядок малости  $\exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right)$ .

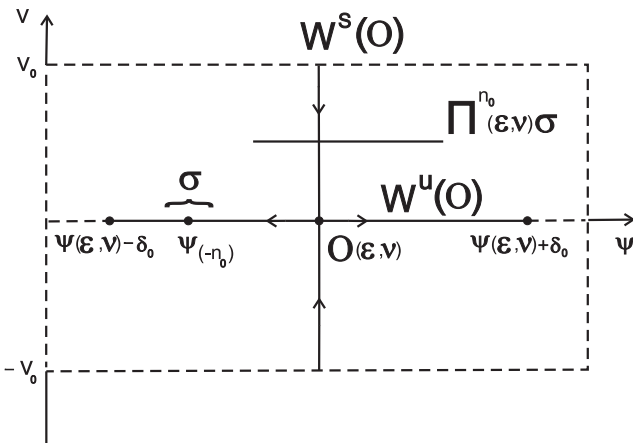


Рис. 6

Действительно, снова опираясь на свойства орбиты (68), убеждаемся, что после  $n_0$ -кратного применения отображения (64) (при  $\varkappa = \tilde{\varkappa}(\varepsilon, \nu)$ ) отрезок  $I_{\delta_1, n_0}$  переходит в некоторый отрезок  $J_{\delta_1, n_0}$ , имеющий компоненту  $\psi = \psi_{(0)}(\tilde{\varkappa}(\varepsilon, \nu))$  своей внутренней точкой. Тем самым, проекция множества  $\Pi^{n_0}(\varepsilon, \nu)\sigma$  на ось  $\psi$  параллельно оси  $v$ , которая, подчеркнем, при  $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$  асимптотически близка к отрезку  $J_{\delta_1, n_0}$ , заведомо "накрывает" координату  $\psi = \psi(\varepsilon, \nu)$  неподвижной точки  $O(\varepsilon, \nu)$  (см. рис. 6). А это означает,

что многообразие  $W^u(O)$  после продолжения по траекториям отображения (62) с необходимостью пересечет общим образом кривую  $W^s(O)$ . Теорема 3 доказана.

В дополнение к установленной теореме заметим, что, несмотря на наличие сложной динамики, существуют сколь угодно малые положительные значения параметра  $\nu$ , при которых в аттракторе (63) содержится хотя бы одна экспоненциально устойчивая неподвижная точка оператора (62). Упомянутые значения принадлежат множеству  $B_q(\varepsilon)$ , которое определяется следующим образом. Будем говорить, что  $\nu \in B_q(\varepsilon)$ , если уравнение  $\psi = \varkappa + \gamma(\psi)$  при  $\varkappa = c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu}$  допускает решение  $\psi = \tilde{\psi}$ , для которого  $|\gamma'(\tilde{\psi})| \leq q$ , где  $q \in (0, 1)$  – некоторая наперед заданная не зависящая от  $\varepsilon, \nu$  постоянная. Обращаем внимание, что поскольку

$$\{\psi : |\gamma'(\psi)| \leq q\} \neq \emptyset$$

при  $\forall q \in (0, 1)$ , то множество  $B_q(\varepsilon)$  заведомо не пусто и всегда имеет своей предельной точкой  $\nu = 0$ .

Заканчивая исследование аттрактора (63), рассмотрим ситуацию, когда в условии 5 кривая  $l_3$  по-прежнему лежит в области, ограничиваемой циклом  $L_0$ , но окружает состояние равновесия  $x = \bar{x}$  и не имеет контактов с траекториями системы (8) при  $\mu = 0$  (см. рис. 7). В этом случае фигурирующая в (44) функция  $\gamma(\psi)$  обладает свойствами

$$\begin{aligned} \gamma(\psi + 2\pi) &\equiv \gamma(\psi) + 2\pi, \\ \gamma'(\psi) &> 0 \quad \forall \psi \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (71)$$

Что же касается всех приведенных выше конструкций и итоговой теоремы 1, то они остаются в силе. Более того, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть условие 5 модифицировано описанным выше образом. Тогда аттрактор (63) отображения (62) состоит из инвариантной кривой

$$\left\{ (\psi, v) : v = \mathcal{V}(\psi, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon \sqrt{\nu}}\right) \right\}. \quad (72)$$

Здесь  $c_{**} > 0$ , а  $2\pi$ -периодическая по  $\psi$  функция  $\mathcal{V}(\psi, \varepsilon, \nu)$  обладает теми же свойствами непрерывности и гладкости, что и функция  $\Lambda_2(\psi, 0, \varepsilon, \nu)$  из (62).

Для доказательства заметим, что свойства (71) позволяют применить к отображению (62) известный принцип кольца (см. [10, 11]). Из этого принципа вытекает существование в множестве  $S_+$  единственной глобально экспоненциально устойчивой инвариантной кривой вида (72). Добавим еще, что в исходной системе (1) при условии (30) данной кривой отвечает устойчивый двумерный инвариантный тор.

## 4. Заключение

В первую очередь разберемся с вопросом о реализуемости условий 1 – 6. Точнее говоря, убедимся, что любую систему на плоскости, в которой при изменении некоторого параметра происходит седло-узловая бифуркация цикла, можно достроить до трехмерной релаксационной системы вида (1), удовлетворяющей требуемым условиям.

Действительно, возьмем произвольную систему

$$\dot{x} = f_1(x, \mu), \quad (73)$$

где  $f_1(x, \mu) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [-\mu_0, \mu_0]; \mathbb{R}^2)$ , а  $\mu_0 > 0$  достаточно мало, и предположим, что при  $\mu = 0$  у этой системы существует единственное экспоненциально неустойчивое

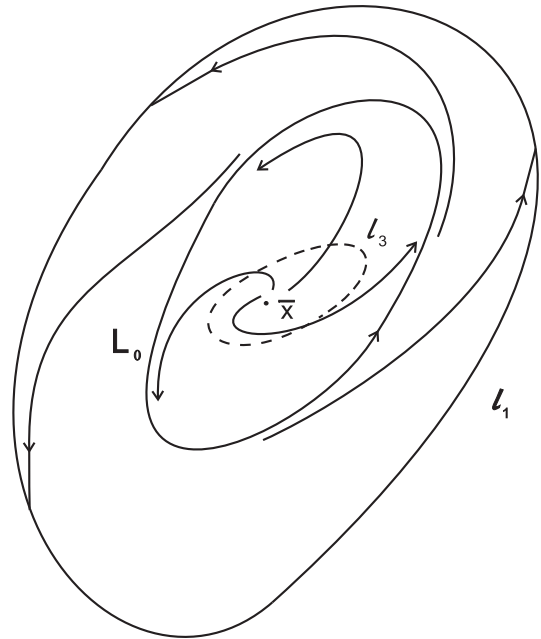


Рис. 7

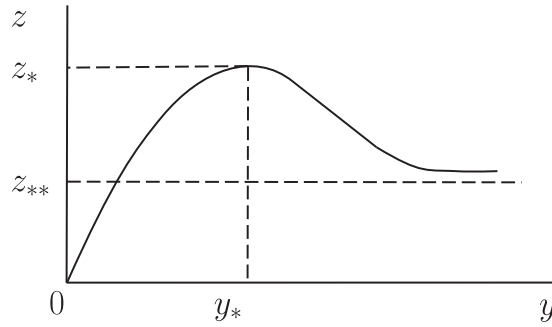


Рис. 8

состояние равновесия  $x = \bar{x}$  типа узла или фокуса и единственный окружающий его полуустойчивый цикл  $L_0$ . Считаем также, что для данной системы выполняются неравенства  $d_0 > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ , где  $d_0, \alpha_0$  – постоянные из (19), (20).

Далее, перейдем от (73) к трехмерной релаксационной системе

$$\dot{x} = f_1(x, \mu) + y\Delta(y)f_2(x), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x) - h(y), \quad (74)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ , а функции  $f_2(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ ,  $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $h(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\Delta(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$  удовлетворяют серии специальных ограничений.

Начнем с функций  $g(x)$ ,  $h(y)$ . Предположим, что, во-первых,  $g(x) > 0 \forall x \neq 0$ ,  $g(0) = 0$ ; во-вторых, при любом фиксированном  $z > 0$  уравнение  $g(x) = z$  определяет в  $\mathbb{R}^2$  замкнутую кривую класса  $C^\infty$ , гомеоморфную окружности; в-третьих, найдется такое  $y = y_* > 0$ , что  $h'(y) > 0$  при  $y < y_*$ ,  $h'(y) < 0$  при  $y > y_*$ ,  $h'(y_*) = 0$ ,  $h''(y_*) < 0$ ,  $h(y_*) = z_* > 0$ ; в-четвертых, имеет место равенство  $h(0) = 0$ , а при  $y \rightarrow +\infty$  справедливо асимптотическое разложение

$$h(y) = z_{**} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{y^k}, \quad z_{**} \in (0, z_*), \quad (75)$$

сохраняющее силу при дифференцировании по  $y$  любое число раз. Считаем еще, что кривая  $l_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = z_*\}$  окружает цикл  $L_0$  и не имеет контактов с траекториями системы (73) при  $\mu = 0$ , т.е.

$$(\text{grad } g(x), f_1(x, 0)) > 0 \quad \forall x \in l_1. \quad (76)$$

Наглядное представление о свойствах функции  $z = h(y)$  дает ее график, показанный на рис. 8. Что же касается поверхности медленных движений  $\Gamma = \{(x, y) : g(x) - h(y) = 0\}$ , то она имеет вид, представленный на рис. 1.

Действительно, обозначим через  $y = y_1(z)$  и  $y = y_2(z)$  корни уравнений  $h(y) = z$  при  $z \in (-\infty, z_*]$  и  $h(y) = z$  при  $z \in (z_{**}, z_*]$  из промежутков  $(-\infty, y_*)$  и  $[y_*, +\infty)$  соответственно (существование этих корней вытекает из условий, наложенных на функцию  $h(y)$ ). Далее, нетрудно увидеть, что в нашем случае поверхность  $\Gamma$  разбивается на части  $\Gamma_- \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_+$ , где

$$\begin{aligned} \Gamma_- &= \{(x, y) : y = \Phi_-(x), x \in \Omega_1\}, & \Gamma_+ &= \{(x, y) : y = \Phi_+(x), x \in \Omega_2\}, \\ \Gamma_0 &= \{(x, y) : y = y_*, x \in l_1\}, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\Phi_-(x) = y_1(z)|_{z=g(x)}, \quad \Phi_+(x) = y_2(z)|_{z=g(x)}. \quad (78)$$

Добавим еще, что в (77) через  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$  обозначена внутренняя область, ограниченная фигурирующей в (76) простой замкнутой кривой  $l_1$ , а  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$  представляет собой кольцевую область, ограниченную кривой  $l_1$  и простой замкнутой кривой  $l_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = z_{**}\} \subset \Omega_1$ , где  $z_{**}$  – постоянная из (75). Заметим также, что поскольку  $y_2(z) \rightarrow +\infty$  при  $z \rightarrow z_{**} + 0$ , то в силу (78) выполняется и требуемое предельное равенство  $\lim \Phi_+(x) = +\infty$  при  $x \rightarrow l_2$ ,  $x \in \Omega_2$ .

В случае функции  $f_2(x)$  ситуация следующая. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{x} = f_2(x) \quad (79)$$

и предположим, что для нее справедлив аналог условия 4. Иными словами, будем считать, что все траектории системы (79) с начальными условиями из  $l_1$  за конечное время попадают на кривую  $l_2$  и не имеют контактов с этой кривой. Тогда, как мы уже знаем, в некоторой достаточно малой окрестности  $l_1$  определен диффеоморфизм  $\Pi_0$ . Точнее говоря, он задается формулой (12), в которой теперь  $x(t, x_0)$  – решение задачи Коши  $\dot{x} = f_2(x)$ ,  $x|_{t=0} = x_0$ , а  $t = t_{**}(x_0)$  – единственный положительный корень уравнения

$$a(t, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t [g(x(\theta, x_0)) - z_{**}] d\theta = 0.$$

Далее, рассмотрим кривую  $l_3 = \Pi_0(l_1)$  и будем считать, что она лежит в области, ограничиваемой циклом  $L_0$ , но не содержит особую точку  $x = \bar{x}$  (см. рис. 3 или рис. 7).

Заключительная часть ограничений касается функции  $\Delta(y)$ . Предполагаем, что  $\Delta(y) \equiv 0$  при  $0 \leq y \leq y_*$ ,  $\Delta(y) \equiv 1$  при  $y \geq y_* + 1$ . В этом случае система (8) совпадает с (73), а разложение (3) состоит из одного слагаемого  $y f_2(x)$ .

Суммируя вышесказанное, приходим к выводу, что система (74) заведомо удовлетворяет всем условиям 1 – 6 (в условии 5 мы объединяем два варианта взаимного расположения точки  $x = \bar{x}$  и кривой  $l_3$ ). Таким образом, установлено, что любая система на плоскости с седло-узловой бифуркацией цикла может быть достроена по описанным выше правилам до трехмерной релаксационной системы, к которой применим наш основной результат – теорема 1.

В заключение рассмотрим вопрос о перенесении полученных результатов на многомерный вариант системы (1), когда  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , а условия 1 – 6 надлежащим образом модифицированы. Точнее говоря, условия 1 – 3 здесь сохраняются практически дословно. Однако теперь в соответствующих равенствах

$$\begin{aligned} \Gamma_- &= \{(x, y) : y = \Phi_-(x), x \in \Omega_1\}, & \Gamma_+ &= \{(x, y) : y = \Phi_+(x), x \in \Omega_2\}, \\ \Gamma_0 &= \{(x, y) : y = \Phi_-(x) = \Phi_+(x), x \in l_1\} \end{aligned} \quad (80)$$

множество  $\Omega_1$  представляет собой внутреннюю область, ограниченную замкнутой  $(m - 1)$ -мерной поверхностью  $l_1$  класса  $C^\infty$ , а  $\Omega_2$  является кольцевой областью, ограниченной поверхностью  $l_1$  и замкнутой  $(m - 1)$ -мерной поверхностью  $l_2 \subset \Omega_1$  класса  $C^\infty$ . Считаем, что поверхности  $l_1$  и  $l_2$  гомеоморфны сфере, а функция  $\Phi_+(x)$  из (80) такова, что  $\lim \Phi_+(x) = +\infty$  при  $x \rightarrow l_2$ ,  $x \in \Omega_2$ .

Условия 4 и 5 в отличие от трех предыдущих нуждаются в более существенной переработке. А именно, считаем, что в области  $\Omega_1$  система (8) при  $\mu = 0$  по-прежнему имеет цикл  $L_0$  типа простой седло-узел. Далее, предполагаем, что траектории данной системы с начальными условиями, лежащими на неустойчивом двумерном многообразии  $W^u(L_0)$  указанного цикла, с течением времени попадают на поверхность  $l_1$ . А так как в силу второго неравенства из (2) эти траектории не имеют контактов с  $l_1$ , то множество  $W^u(L_0) \cap l_1$  представляет собой простую замкнутую кривую  $\mathcal{C}_1$  класса  $C^\infty$ .

Группу ограничений, касающихся системы (5), не только в многомерном случае, но даже и при  $m = 2$ , можно несколько ослабить. Пожертвовав некоторой геометрической наглядностью и отказавшись от неравенства вида (6), будем считать, для любого  $x_0 \in \mathcal{C}_1$  функция (9) имеет корень  $t = t_{**}(x_0) > 0$ , удовлетворяющий требованиям (13). Эти свойства, в свою очередь, позволяют в некоторой достаточно малой окрестности кривой  $\mathcal{C}_1$  корректно определить оператор (12).

Следующее ограничение касается поведения траекторий системы (8) при  $\mu = 0$  с начальными условиями на кривой  $\mathcal{C}_2 = \Pi_0(\mathcal{C}_1)$ , где  $\Pi_0$  – диффеоморфизм (12). Будем считать, что все эти траектории при  $t \rightarrow +\infty$  стремятся к циклу  $L_0$ , касаясь его двумерного экспоненциально устойчивого центрального многообразия  $W^c(L_0)$ .

Для того чтобы сформулировать аналог условия 6, введем в рассмотрение экспоненциально устойчивое двумерное инвариантное многообразие  $W_\mu$  системы (8), являющееся продолжением по  $\mu$  многообразия  $W^c(L_0)$ , о котором говорилось выше. Далее, рассмотрим двумерную систему, представляющую собой сужение (8) на  $W_\mu$ , и определим для нее аналогичное (18) отображение последования Пуанкаре. Как и прежде, предполагаем, что в тейлоровском разложении (19) этого отображения коэффициент  $d_0$  строго положителен и выполняется неравенство вида (20).

Из проделанных в разделах 2, 3 построений, сохраняющих силу и в многомерном случае, вытекает, что при  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$  за аттракторы системы (1), (30) отвечает аналогичное (62) отображение

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow c_*(\varepsilon, \nu)/\sqrt{\nu} + \gamma(\psi) + \Lambda_1(\psi, v_1, v_2, \varepsilon, \nu) \pmod{2\pi}, \\ \Pi(\varepsilon, \nu) : \quad v_1 &\rightarrow \Lambda_2(\psi, v_1, v_2, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{**}}{\varepsilon\sqrt{\nu}}\right), \\ v_2 &\rightarrow \Lambda_3(\psi, v_1, v_2, \varepsilon, \nu) \exp\left(-\frac{c_{***}}{\sqrt{\nu}}\right), \end{aligned} \quad (81)$$

определенное в некотором кольце

$$K = \{(\psi, v_1, v_2) : 0 \leq \psi \leq 2\pi \pmod{2\pi}, |v_1| \leq v_{0,1}, \|v_2\| \leq v_{0,2}\}. \quad (82)$$

Здесь  $v_1 \in \mathbb{R}$ ,  $v_2 \in \mathbb{R}^{m-2}$ ,  $\|\cdot\|$  – евклидова норма в  $\mathbb{R}^{m-2}$ , постоянные  $v_{0,1}, v_{0,2} > 0$  достаточно малы, функция  $c_*(\varepsilon, \nu)$  обладает теми же свойствами, что и аналогичная функция в (62),  $c_{**}, c_{***} = \text{const} > 0$ . Что же касается функций  $\Lambda_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , то они непрерывны по совокупности переменных (вплоть до значений  $\varepsilon = 0$ ,  $\nu = 0$ ) вместе со своими частными производными по  $(\psi, v_1, v_2)$  до порядка  $k$  включительно ( $k$  – любое наперед заданное натуральное число). И наконец, следует добавить, что  $\Lambda_1(\psi, v_1, 0, 0, 0) \equiv 0$ .



Как и в случае  $m = 2$ , за аттракторы отображения (81) в кольце (82) отвечает в конечном итоге одномерное отображение окружности в себя вида (64). В свою очередь, фигурирующая в нем функция  $\gamma(\psi) \in C^\infty$  допускает представление

$$\gamma(\psi) = n_0\psi + \gamma_0(\psi), \quad \gamma_0(\psi + 2\pi) \equiv \gamma_0(\psi), \quad (83)$$

где  $n_0 \in \mathbb{Z}$  – некоторый топологический инвариант.

При  $m = 2$  в формуле (83) возможны лишь случаи  $n_0 = 0$  и  $n_0 = 1$ . В первом из них кривая  $l_3$  не окружает особую точку  $x = \bar{x}$  (см. рис. 3), а во втором окружает (см. рис. 7). Выше для каждого из этих случаев были получены свои результаты (см. теоремы 2 – 4). Данные результаты сохраняются, естественно, и при  $m \geq 3$ . Однако уже при  $m = 3$  возможна принципиально новая ситуация, когда

$$|n_0| \geq 2, \quad |n_0 + \gamma'_0(\psi)| > 1 \quad \forall \psi \in [0, 2\pi]. \quad (84)$$

Из содержащихся в [1] построений следует, что при условиях (84) отображение (81) имеет в кольце (82) хаотический гиперболический аттрактор типа соленоида Смейла–Вильямса.

## Список литературы

1. *Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О катастрофах голубого неба // ДАН. 1995. Т. 342. № 5. С. 596–599. [English transl.: *Turaev D. V., Shilnikov L. P.* Blue sky catastrophes // Dokl. Math. 1995. V. 51. P. 404–407.]
2. *Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D.* Blue sky catastrophe in singularly-perturbed systems. Preprint WIAS. № 841. Berlin, 2003.
3. *Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D.* Blue-sky catastrophe in singularly perturbed systems // Moscow Mathematical Journal. 2005. V. 5. № 1. P. 269–282.
4. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Катастрофа голубого неба в релаксационных системах с одной быстрой и двумя медленными переменными // Диф. уравн. 2008. Т. 44. № 2. С. 158–171. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Blue Sky Catastrophe in Relaxation Systems with One Fast and Two Slow Variables // Differential Equations. 2008. V. 44, No. 2. P. 161–175.]
5. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М: Наука, 1975. [English transl.: *Mishchenko E. F., Rozov N. Kh.* Differential equations with small parameters and relaxation oscillations. New York: Plenum Press, 1980.]
6. *Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995. [English transl.: *Mishchenko E. F., Kolesov Yu. S., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Asymptotic methods in singularly perturbed systems. New York: Consult. Bureau, Plenum Publ. Corp., 1994.]
7. *Аносов Д. В.* О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Матем. сб. 1960. Т. 50. № 3. С. 299–334. [English transl.: *Anosov D. V.* On limit cycles in systems of differential equations with a small parameter in the highest derivatives // AMS Translations. 1963. V. 33. Ser. 2. P. 233–275].

8. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. [*Strygin V. V., Sobolev V. A.* Razdeleniye dvizheniy metodom integral'nykh mnogoobraziy. M.: Nauka, 1988 (in Russian).]
9. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Разделение движений в окрестности полустойчивого цикла // Диф. уравн. 2007. Т. 43. № 5. С. 598–615. [English transl.: *Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Separation of Motions in a Neighborhood of a Semistable Cycle // Differential Equations. 2007. V. 43, No. 5. P. 613–630.]
10. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. [English transl.: *Shilnikov L., Shilnikov A., Turaev D., and Chua L.* Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I, Singapore: World Scientific, 1998.]
11. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004. [*Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.* Invariantnyye tory nelineynykh volnovykh uravneniy. M.: Fizmatlit, 2004 (in Russian).]

## Blue Sky Catastrophe in Systems with Non-classical Relaxation Oscillations

Glyzin S. D.<sup>\*\*\*</sup>, Kolesov A. Yu.<sup>\*</sup>, Rozov N. Kh.<sup>\*\*\*</sup>

*\* P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

*\*\* Scientific Center in Chernogolovka RAS  
Lesnaya str., 9, Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia*

*\*\*\* M.V. Lomonosov Moscow State University,  
Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia*

**Keywords:** singularly perturbed system, relaxation cycle, asymptotic behavior, stability, blue sky catastrophe, non-classical relaxation oscillations

The feasibility of a known blue-sky bifurcation in a class of three-dimensional singularly perturbed systems of ordinary differential equations with one fast and two slow variables is studied. A characteristic property of the considered systems is that they permit so-called nonclassic relaxation oscillations, that is, oscillations with slow components asymptotically close to time-discontinuous functions and a  $\delta$ -like fast component. Cases when blue-sky bifurcation leads to a relaxation cycle or stable two-dimensional torus are analyzed. Also the question of homoclinic structure emergence is considered.

### Сведения об авторах:

**Глызин Сергей Дмитриевич,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей;

Отдел прикладных сетевых исследований ИЦЧ РАН,  
ведущий научный сотрудник;

**Колесов Андрей Юрьевич,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений

**Розов Николай Христович,**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, декан факультета педагогического образования