Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **3** (2011) 5–11

УДК 514.17+517.51

О гипотезе Лассака для выпуклого тела

Невский М.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

получена 23 мая 2011

Ключевые слова: выпуклое тело, ширина, осевой диаметр, гомотетия, симплекс, интерполяция, проектор

В 1993 г. М. Лассак сформулировал (в эквивалентном виде) следующую гипотезу. *Если в выпуклое тело* $C \subset \mathbb{R}^n$ *можно вписать транслят куба* $[0,1]^n$, *то* $\sum_{i=1}^n 1/w_i \geq 1$. Здесь w_i — ширина C в направлении i-й координатной оси. В статье даётся новое доказательство этого утверждения для $n = 2$. Также мы показываем, что для n-мерного симплекса, в который можно вписать транслят $[0,1]^n$, справедливо $\sum_{i=1}^n 1/w_i = 1$.

1. Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Положим $Q_n := [0,1]^n$. Под *транслятом* будем понимать результат параллельного переноса.

В этой статье C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т. е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Через σC обозначим результат гомотетии C относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Ниже $w_i(C)$ есть *i-я ширина* C, т. е. ширина C в направлении i-й координатной оси. Символом $d_i(C)$ обозначим *i-й осевой диаметр* C, представляющий собой максимальную длину отрезка, содержащегося в C и параллельного оси x_i. Очевидно, $w_i(C) \geq d_i(C)$. Здесь $1 \leq i \leq n$.

В 1993 г. М. Лассак [4] сформулировал следующую интересную гипотезу (мы приводим её в эквивалентном виде).

(H1) *Пусть в выпуклое тело C можно вписать транслят Q_n. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(C)} \geq 1. \tag{1}$$

Если $n = 1$, то C — отрезок единичной длины и (1) является равенством. В двумерной ситуации (1) доказано в [4]. Некоторые вычисления названы в том доказательстве простыми, но скучными (easy but tedious), и опущены. К настоящему времени установлен ряд близких к (H1) утверждений, но не эквивалентных (H1). Из результата П. Скотта [5; теорема 1] следует, что если в C можно вписать транслят Q_n, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \tag{2}$$

Так как $w_i(C) \geq d_i(C)$, то это неравенство слабее, чем (1). Как доказал автор, оно остаётся справедливым и в следующей более общей ситуации (см. [2; следствие 4]).

Лемма 1. *Пусть C содержит некоторый транслят Q_n и не содержит никакого транслята σQ_n при $\sigma > 1$. Тогда имеет место (2).*

Нетрудно показать, что если в условии леммы 1 заменить (2) на (1), то получившееся утверждение станет неверным. В предположениях (H1) в [3] получено соотношение

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(C)} + \frac{n-2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \tag{3}$$

Очевидно, что (3) сильнее, чем (2), но слабее, чем (1). Мы воспользуемся оценкой (3) при доказательстве теоремы 2.

Опишем содержание статьи. В пункте 2 даётся иное, нежели в [4], доказательство двумерного варианта (1). Для некоторых плоских C прямым способом доказывается более сильное неравенство. Для других $C \subset \mathbb{R}^2$ соотношение (1) получается с помощью леммы 1. В пункте 3 доказывается, что если $n \in \mathbb{N}$ и S — n-мерный симплекс, в который можно вписать транслят Q_n, то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(S)} = 1.$$

Таким образом, в частном случае, когда C — симплекс, верно утверждение, более сильное, чем (H1). В пункте 4 формулируется гипотеза, эквивалентная (H1). Там же приводится оценка для нормы интерполяционного проектора по вершинам симплекса $S \subset Q_n$ через величины $w_i(S)$.

2. Случай $n = 2$

Ясно, что в формулировке (H1) слово *транслят* можно опустить, что приводит к эквивалентному утверждению. Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^2$, в которое вписан квадрат Q_2. Положим $w_i := w_i(C)$. Существуют такие точки $a, b, g, h \in C$, что $b_1 - h_1 = w_1$, $g_2 - a_2 = w_2$ и, кроме того, $a_1, b_2, g_1, h_2 \in [0, 1]$. Обозначим через R прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям, имеют длины w_1 и w_2 и содержат a, b, g, h. Пусть u, v, s, t — точки, расположенные симметрично поочерёдно g, h, a, b на противоположных сторонах R. Это означает, что $u_1 = g_1$, $v_2 = h_2$, $s_1 = a_1$, $t_2 = b_2$ и $v_1 - h_1 = b_1 - t_1 = w_1$, $s_2 - a_2 = g_2 - u_2 = w_1$. Точки $a, \ldots, t$ будем называть *отмеченными*. Некоторые из них могут совпадать. Положим $\Delta := |(a_1 - u_1)(b_2 - v_2)|$. Если $\Delta = 0$, то $w_1 = d_1(C)$ или $w_2 = d_2(C)$.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}\geq 1. \tag{4}$$

Если при обходе границы R отмеченные точки встречаются в порядке a, v, b, s, g, t, h, u или в порядке a, u, b, v, g, s, h, t, то

$$\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}\geq 1+\frac{\Delta}{w_1w_2}. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим через Z выпуклую оболочку Q_2 и точек a, b, g, h. Так как $Q_2\subset Z\subset C$ и Q_2 вписан в C, то Q_2 вписан в Z. Проведём через a, b, g, h и вершины квадрата прямые, параллельные координатным осям. Эти прямые делят R на ≤ 25 прямоугольников, 9 из которых разбивают Q_2. Площадь центрального прямоугольника S из последних девяти равна Δ. Заметим, что сумма площадей прямоугольников D_1, D_2, D_3, D_4, расположенных в углах R, равна $(w_1-1)(w_2-1)$. Далее $|Y|$ обозначает площадь Y.

Пусть при обходе контура R отмеченные точки следуют в порядке a, v, b, s, g, t, h, u или в порядке a, u, b, v, g, s, h, t. Из выпуклости Z вытекает, что площадь каждого D_i не превосходит суммы площадей двух смежных прямоугольников, принадлежащих Q_2 и примыкающих к границе этого квадрата. Взятые вместе с S, эти четыре пары внешних для Q_2 прямоугольников покрывают Q_2 (без внутренних пересечений). Сравнивая площади, получаем

$$(w_1-1)(w_2-1)=|D_1|+|D_2|+|D_3|+|D_4|\leq 1-|S|=1-\Delta,$$

откуда следует (5) и тем более (4).

Рассмотрим другие возможные варианты следования отмеченных точек на границе R, а именно a, u, v, b, g, s, t, h или a, b, v, s, g, h, t, u. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят в указанных случаях к соотношениям

$$(w_1-1)(w_2-1)=|D_1|+|D_2|+|D_3|+|D_4|\leq 1+|S|=1+\Delta.$$

Этот подход даёт лишь

$$\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}\geq 1-\frac{\Delta}{w_1w_2} \tag{6}$$

— неравенство, более слабое, чем (4). Тем не менее, и в рассматриваемой ситуации (4) имеет место. Докажем это. Пусть x и y — вершины Q_2, расположенные на границе Z между a, h и b, g соответственно; l_1, l_2 — граничные отрезки Z, примыкающие к x; l_3, l_4 — граничные отрезки Z, примыкающие к y. Считаем, что l_1 и l_3 направлены от x и y в одну и ту же полуплоскость относительно прямой (xy). Обозначим через p и q вершины R, расположенные между точками u, v и s, t соответственно. Положим $F:=\operatorname{conv}(p, Z)$, $G:=\operatorname{conv}(q, Z)$. Каждый из внутренних углов выпуклого многоугольника Z при вершинах x и y не превосходит π. Это означает, что хотя бы одно из множеств F и G не содержит транслята σQ_2 при $\sigma>1$. Допустим, этим свойством обладает F. Так как $Q_2 \subset F$, то к выпуклому телу $F \subset \mathbb{R}^2$ применима лемма 1. Из неё следует, что

$$\frac{1}{d_1(F)} + \frac{1}{d_2(F)} \geq 1.$$

Для получения (4) осталось учесть равенства $d_i(F) = w_i(F) = w_i$.

В случае, когда какие-то из отмеченных точек совпадают, теорема доказывается по той же схеме с очевидными модификациями. $\square$

Неравенства $|D_1| + |D_2| + |D_3| + |D_4| \leq 1 \pm |S|$, приводящие к оценкам (5) – (6), можно наглядно проиллюстрировать с помощью рисунков. Этот путь не лишён занимательности.

Заметим, что гарантировать для всех C выполнение (5) нельзя. Точнее, если отмеченные точки следуют при прохождении границы R в порядке a, u, v, b, g, s, t, h или a, b, v, s, g, h, t, u (см. вторую часть доказательства теоремы 1), то (5) может не выполняться. Приведём пример. Пусть C — треугольник с вершинами $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$. Очевидно, квадрат Q_2 вписан в C. Так как $w_1 = w_2 = 2$, то (4) является равенством. В данном случае $R = [0,2]^2$. Возьмём $a = (1,0)$, $b = (2,0)$, $g = (0,2)$, $h = (0,1)$. Тогда $u = (0,0)$, $v = (2,1)$, $s = (1,2)$, $t = u = (0,0)$, $\Delta = |(a_1 - u_1)(b_2 - v_2)| = 1$. Значит, правая часть (5) равна 5/4, что превышает левую часть (равную 1).

3. Случай, когда C — симплекс

В этом пункте $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ситуацию, когда выпуклое тело C представляет собой невырожденный n-мерный симплекс, т. е. выпуклую оболочку $n+1$ точек (вершин симплекса) с непустой внутренностью. В статье [2; теорема 3] было доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leq 1 \tag{7}$$

эквивалентно тому, что S содержит транслят Q_n. Равенство в (7) имеет место тогда и только тогда, когда S содержит транслят Q_n и каждая $(n-1)$-мерная грань S содержит вершину этого транслята.

С помощью этого утверждения, а также неравенства (3) нетрудно установить справедливость (H1) в случае $C = S$. Более того, в этой ситуации неравенство в (1) становится равенством.

Теорема 2. *Пусть в n-мерный симплекс S можно вписать транслят Q_n. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(S)} = 1, \tag{8}$$

$$w_1(S) = d_1(S), \quad \ldots, \quad w_n(S) = d_n(S). \tag{9}$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\sum_{i=1}^{n} 1/w_i(S) \geq 1$. Для $n=1$ это следует из равенства $w_1(S)=1$. Для $n=2$ достаточно воспользоваться (4). Пусть $n \geq 3$. Применим к выпуклому телу S неравенство (3):

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i(S)} + \frac{n-2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)} \geq 1. \tag{10}$$

Так как в S можно вписать транслят Q_n, то к S также применима вторая часть леммы 2. Тем самым, $\sum_{i=1}^{n} 1/d_i(S) = 1$. С учетом этого (10) даёт

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i(S)} + \frac{n-2}{n} \geq 1,$$

откуда и следует $\sum_{i=1}^{n} 1/w_i(S) \geq 1$. Теперь используем соотношения $w_i(S) \geq d_i(S)$, благодаря которым $1/d_i(S) \geq 1/w_i(S)$. Имеем:

$$1 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i(S)} \geq 1.$$

Ясно, что в этой цепочке оба неравенства обращаются в равенства. Первое из этих равенств даёт (9), а второе совпадает с (8). □

Из соображений подобия немедленно получаем следующий результат.

Следствие. *Пусть в симплекс $S \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят σQ_n при некотором $\sigma > 0$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$ верно $w_i(S) = d_i(S)$.*

Для $n=1$ и $n=2$ верно и утверждение, обратное к приведённому следствию. Минимальное n, для которого это обратное утверждение не верно, равно 3. Действительно, пусть S — правильный тетраэдр с длинами рёбер $\sqrt{2}$, вписанный в Q_3. Таковым является, например, тетраэдр с вершинами $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$. Каждый из трёх отрезков, соединяющих центры скрещивающихся рёбер S, параллелен одной из координатных осей и имеет длину 1. Поэтому для любого $i = 1,2,3$ верно $d_i(S) = w_i(S) = 1$. Максимальное σ, при котором S содержит транслят σQ_3, равно $1/3$. При этом куб $(1/3)Q_3$ располагается в S таким образом, что каждая грань S содержит ровно одну из его вершин. Четыре вершины куба $(1/3)Q_3$ не принадлежат границе S. Это означает, что в S нельзя вписать транслят σQ_3 ни при каком $\sigma > 0$.

Заметим также, что если в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n и для него выполнены равенства (8) – (9), то C не обязательно является симплексом. Пример: $n=2$, C — квадрат с вершинами $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$.

4. Заключительные замечания

4.1. Приведём очевидное неулучшаемое неравенство, противоположное (1). Если в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n, то $w_i(C) \geq 1$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i(C)} \leq n. \tag{11}$$

Равенство в (11) эквивалентно условию $w_1(C) = \ldots = w_n(C) = 1$, которое выполняется тогда и только тогда, когда C есть транслят Q_n.

4.2. Сформулируем в дополнение к (H1) ещё одну гипотезу.

(H2) *Пусть в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n. Тогда существует выпуклое тело C', содержащее транслят Q_n, не содержащее транслята σQ_n при $\sigma > 1$, и такое, что $d_i(C') = w_i(C)$, $i = 1, \ldots, n$.*

Покажем, что (H2) эквивалентна (H1). Действительно, в предположении справедливости (H2) утверждение (H1) сразу получается с помощью леммы 1. Именно таким способом выше была доказана вторая часть теоремы 1. Допустим теперь, что справедлива гипотеза (H1). Зафиксируем выпуклое тело C, удовлетворяющее условию (H1). Для $w_i = w_i(C)$ рассмотрим набор точек

$$z^{(1)} = (w_1, 0, \ldots, 0), \quad z^{(2)} = (0, w_2, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad z^{(n)} = (0, 0, \ldots, w_n).$$

Положим $C' := \operatorname{conv}\left(z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}, Q_n\right)$. Нетрудно показать, что выпуклое тело C' удовлетворяет условию (H2). Поэтому из (H1) следует (H2). К сожалению, вопрос о справедливости (H2) при $n > 2$ является открытым.

4.3. Рассматриваемые в настоящей статье величины $w_i(C)$ в случае, когда $C = S$ — симплекс, могут быть использованы для оценивания нормы интерполяционного проектора по вершинам S. Приведём результат такого рода. Пусть $C(Q_n)$ — пространство непрерывных функций $f : Q_n \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|$; $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — пространство многочленов от n переменных степени ≤ 1. Для невырожденного n-мерного симплекса S, принадлежащего Q_n, рассмотрим интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, узлы которого совпадают с вершинами S. Обозначим через $\|P\|$ норму P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. В этих предположениях справедливы оценки

$$\|P\| \geq \frac{2}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} - 1\right) + 1 \geq \frac{2}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(S)} - 1\right) + 1. \tag{12}$$

Левое неравенство доказано в [1; следствие 4.11]; правое неравенство вытекает из соотношений $w_i(S) \geq d_i(S)$. Заметим, что если в S можно вписать транслят куба σQ_n при некотором $0 < \sigma < 1$, то правое неравенство в (12) можно заменить на равенство (см. следствие пункта 3).

Список литературы

1. Невский М. В. Об одном свойстве n-мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593.

2. Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.

3. Lassak M. Relationships between widths of a convex body and of an inscribed parallelotope // Bull. Austral. Math. Soc. 2001. V. 63. P. 133–140.

4. Lassak M. Approximation of convex bodies by rectangles // Geom. Dedic. 1993. V. 47. P. 111–117.

5. Scott P. R. Lattices and convex sets in space // Quart. J. Math. Oxford. 1985. V. 36, № 2. P. 359–362.

On the Lassak Conjecture for a Convex Body

Nevskii M.V.

Keywords: convex body, width, axial diameter, homothety, simplex, interpolation, projection

In 1993 M. Lassak formulated (in the equivalent form) the following conjecture. *If we can inscribe a translate of the cube* $[0,1]^n$ *into a convex body* $C \subset \mathbb{R}^n$*, then* $\sum_{i=1}^n 1/w_i \geq 1$. Here w_i denotes the width of C in the direction of the ith coordinate axis. The paper contains a new proof of this statement for $n = 2$. Also we show that if a translate of $[0,1]^n$ can be inscribed into the n-dimensional simplex, then for this simplex holds $\sum_{i=1}^n 1/w_i = 1$.

Сведения об авторе:
Невский Михаил Викторович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
декан математического факультета