
Динамические системы

©Агаларов А. М., Потапов А. А., Рассадин А. Э., Степанов А. В., 2017

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-7-17

УДК 537.862, 517.9

О переносе ряда понятий статистической радиофизики в теорию одномерных точечных отображений

Агаларов А. М., Потапов А. А., Рассадин А. Э., Степанов А. В.

получена 15 ноября 2017

Аннотация. В статье обсуждается возможность использования биспектра при исследовании регулярного и хаотического поведения одномерных точечных отображений. Эффективность трансфера этого понятия в нелинейную динамику продемонстрирована на примере отображения Фейгенбаума. Также в работе рассмотрено применение энтропии Кульбака–Лейблера в теории точечных отображений. Показано, что эта величина информационного характера пригодна для описания поведения статистических ансамблей одномерных отображений. В рамках этой теории выявлены некоторые общие свойства её поведения. Конструктивизм энтропии Кульбака–Лейблера в теории точечных отображений показан также прямым её вычислением для отображения «зуб пилы» с линейным начальным распределением вероятностей. Кроме того, для этого отображения указано счётное множество начальных распределений вероятностей, попадающих в его стационарное распределение вероятностей за конечное число шагов.

Ключевые слова: бифуркация удвоения периода, дискретное преобразование Фурье, уравнение Фробениуса–Перрона, В-сплайн, разбиение единицы

Для цитирования: Агаларов А. М., Потапов А. А., Рассадин А. Э., Степанов А. В., "О переносе ряда понятий статистической радиофизики в теорию одномерных точечных отображений", *Моделирование и анализ информационных систем*, **25:1** (2018), 7–17.

Об авторах: Агаларов Агалар Магомед-Закиевич, orcid.org/0000-0003-1083-4124, канд. физ.-мат. наук, зав. сектором Теоретической физики, Институт физики им. Х.И. Амирханова Дагестанского научного центра РАН, ул. М. Ярагского, 94, г. Махачкала, 367015, Россия, e-mail: aglarow@mail.ru

Потапов Александр Алексеевич, orcid.org/0000-0001-9864-3546, д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр., Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ул. Моховая, 11, корп. 7, г. Москва, 125009, Россия
Президент совместной китайско-российской лаборатории информационных технологий и фрактальной обработки сигналов, просп. Хуанг Пу, 601, Университет ДжиНан, Гуанджоу, Китай, 510632, e-mail: potapov@cpilire.ru

Рассадин Александр Эдуардович, orcid.org/0000-0002-7396-0112, член Правления, Нижегородское математическое общество, пр. Гагарина, 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия, e-mail: brat_ras@list.ru

Степанов Антон Викторович, orcid.org/0000-0003-4306-1199, канд. физ.-мат. наук, ст. преп.,
Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, ул. К. Маркса, 29, г. Чебоксары, 428000, Россия,
e-mail: for.antonstep@gmail.com

Благодарности:

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-08-01356-а.

Введение

В настоящее время нелинейная динамика продолжает своё интенсивное развитие. В ней как появляются новые направления, так и формируется более глубокое понимание уже известных, неуклонно расширяется область её приложений в различных разделах науки и техники. Так, за последние годы открыт принципиально новый вид динамического хаоса – смешанная динамика [1], характерная для таких неголономных механических систем, как кельтский камень или волчок Суслова. Этот тип хаоса кардинально отличается от консервативного хаоса в гамильтоновых неинтегрируемых системах и странных аттракторов диссипативных систем. Большой интерес во всём мире в последнее время вызывает анализ типичных для радиофизической проблематики так называемых «химерных состояний» (или химер) в ансамблях связанных идентичных осцилляторов (см. [2] и ссылки там). Химерами называют кластеры осцилляторов с несинхронной динамикой в локализованных областях пространства, в то время как все другие осцилляторы демонстрируют синхронную динамику. Далее, потенциальные возможности, присущие широкополосным системам связи на основе динамического хаоса, привлекают всё большее число исследователей и ученых во всём мире. Свойство самосинхронизации приемника с передатчиком, возможность реализации множества хаотических последовательностей на одном генераторе хаоса, сплошной спектр плотности мощности — все это позволяет надеяться на широкое использование хаотических сигналов в системах обработки и передачи информации в самом ближайшем будущем [3]. Особо отметим имеющие большие перспективы применения нелинейной динамики в радиолокации [4] и в анализе нелинейных радиотехнических систем с запаздывающей обратной связью [5]. Очевидно, что возможен и обратный процесс, а именно перенос методов статистической радиофизики в нелинейную динамику. В частности, к теории динамического хаоса могут быть адаптированы тройная автокорреляционная функция стохастической величины $\xi(t)$ [6]

$$Q(\tau_1, \tau_2) = \langle \xi(t) \cdot \xi(t + \tau_1) \cdot \xi(t + \tau_2) \rangle, \quad (1)$$

имеющая в статистической радиофизике смысл меры негауссовости случайного процесса [6], и её биспектр [6], т.е. двойное преобразование Фурье от функции (1)

$$B(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\tau_1, \tau_2) \cdot \exp(-i \cdot \omega_1 \cdot \tau_1 - i \cdot \omega_2 \cdot \tau_2) \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2. \quad (2)$$

Энтропия Кульбака–Лейблера, введенная в [7] для двух распределений вероятностей $p_1(x)$ и $p_2(x)$ как

$$K_{12} = \int p_2(x) \cdot \ln \frac{p_2(x)}{p_1(x)} \cdot dx, \quad (3)$$

в течение последних десятилетий также активно используется в задачах обработки сигналов и изображений [8, 9].

В докладе [10] величина (2) была применена к рассмотрению поведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих детерминированным хаосом, а в докладе [11] функционал (3) обсуждался применительно к стохастическим динамическим системам.

Данная статья продолжает линию на трансфер понятий статистической радиофизики в теорию динамических систем, начатую в [10, 11], в части другого важного объекта исследования нелинейной динамики — отображений отрезка $I = [a, b]$ в себя:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f : I \rightarrow I. \quad (4)$$

Далее в статье рассмотрены примеры, иллюстрирующие конструктивизм применения биспектра (2) и энтропии Кульбака–Лейблера (3) при исследовании поведения отображений вида (4). В заключении суммированы полученные результаты и обсуждены перспективы дальнейших исследований.

1. Биспектры отображения Фейгенбаума

При числе итераций $N \gg 1$ отображения (4) тройная автокорреляционная функция динамической переменной x_n может быть вычислена как

$$Q_{jk} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N x_n \cdot x_{n+j} \cdot x_{n+k}. \quad (5)$$

Формула (5) означает, что в выражении (1) при переходе к анализу точечных отображений статистическое усреднение заменено усреднением по дискретному времени. Соответственно для оценки биспектра в рамках теории точечных отображений вместо двойного интегрирования в выражении (2) достаточно применить к матрице (5) двойное дискретное преобразование Фурье [12]

$$B_{jk} = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N U_{jl} \cdot U_{km} \cdot Q_{lm}, \quad (6)$$

где $U_{jk} = \exp \left[-i \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot j \cdot k}{N} \right]$ — унитарная матрица дискретного преобразования Фурье [12].

Результаты применения формул (5) и (6) к отображению Фейгенбаума

$$f(x, \lambda) = 1 - \lambda \cdot x^2, \quad I = [-1, 1], \quad (7)$$

ставшему всемирно известным после выхода работы [13], в которой на основе анализа поведения числовой последовательности (4) с функцией (7) при различных значениях параметра $\lambda \in [0, 2]$ было показано, что сценарий перехода к хаосу через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода универсален для широкого класса динамических систем [13], приведены на рис. 1–4.

Из рис. 1 и 2 видно, что при значениях параметра $\lambda < \lambda_c (= 1.4011\dots)$ модуль биспектра отображения Фейгенбаума имеет регулярный характер, соответствующий выходу изображающей точки отображения (7) на периодический режим после первой (рис. 1) и третьей (рис. 2) бифуркации удвоения периода соответственно. Из рис. 3 видно, что квазирегулярное движение системы происходит вблизи цикла периода 3. В непосредственной близости к области развитого хаоса (рис. 4) модуль биспектра имеет крайне нерегулярный характер.

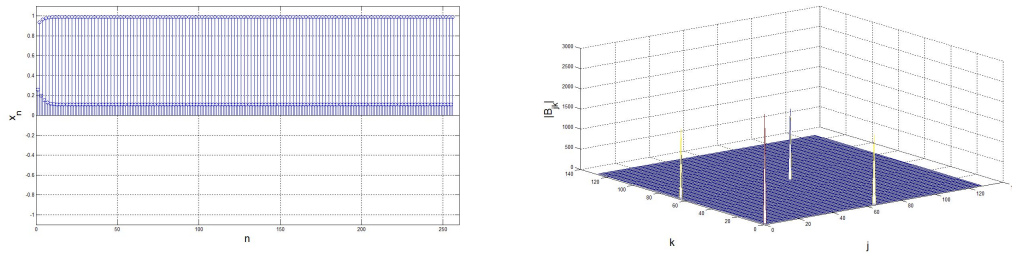


Рис. 1. Фазовая траектория отображения Фейгенбаума и модуль её биспектра при $\lambda = 0.91$

Fig. 1. Phase trajectory of the Feigenbaum mapping and absolute value of its bispectrum under $\lambda = 0.91$

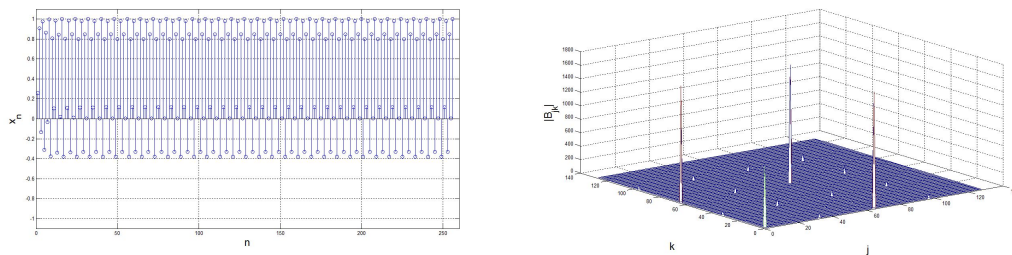


Рис. 2. Фазовая траектория отображения Фейгенбаума и модуль её биспектра при $\lambda = 1.38$

Fig. 2. Phase trajectory of the Feigenbaum mapping and absolute value of its bispectrum under $\lambda = 1.38$

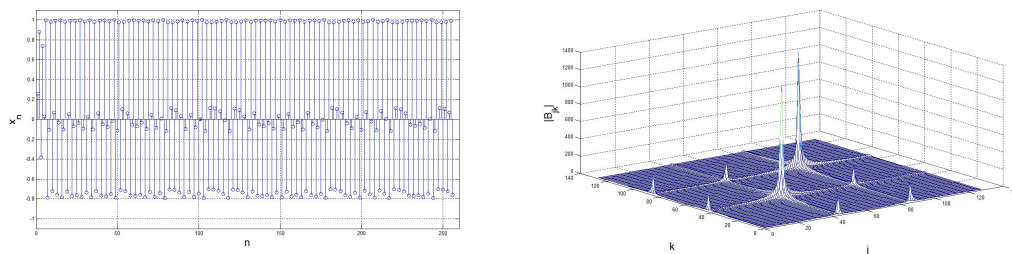


Рис. 3. Фазовая траектория отображения Фейгенбаума и модуль её биспектра при $\lambda = 1.79$

Fig. 3. Phase trajectory of the Feigenbaum mapping and absolute value of its bispectrum under $\lambda = 1.79$

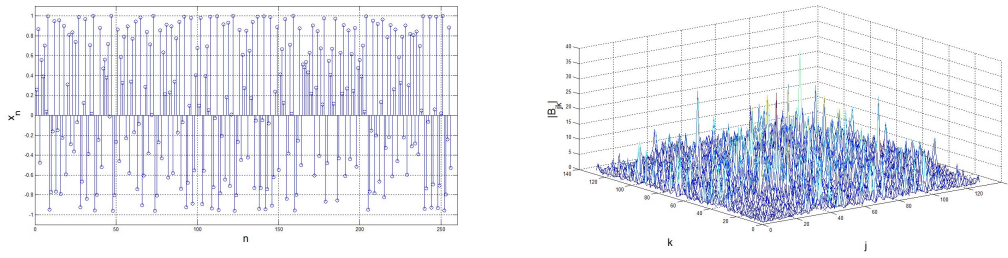


Рис. 4. Фазовая траектория отображения Фейгенбаума и модуль её биспектра при $\lambda = 1.96$

Fig. 4. Phase trajectory of the Feigenbaum mapping and absolute value of its bispectrum under $\lambda = 1.96$

2. Общие свойства энтропии Кульбака–Лейблера для одномерных отображений

Рассмотрим ансамбль одномерных отображений (4) с начальной плотностью распределения вероятностей $p_0(x)$. Пусть для определённости $I = [0, 1]$, тогда должно быть

$$\int_0^1 p_0(x) \cdot dx = 1. \quad (8)$$

Под действием отображения f плотность распределения вероятностей ансамбля начинает эволюционировать в дискретном времени согласно уравнению Фробениуса–Перрона [14]:

$$p_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^r |f'(\xi_k(x))|^{-1} \cdot p_n(\xi_k(x)), \quad (9)$$

где $p_n(x)$ — плотность распределения на n -м шаге, а суммирование в (9) идёт по всем прообразам точки $x \in I$ при отображении f .

Мы можем обобщить определение (3) энтропии Кульбака–Лейблера для случая одномерных точечных отображений следующим образом:

$$K_n[p_0] = \int_0^1 p_n(x) \cdot \ln \frac{p_n(x)}{p_0(x)} \cdot dx. \quad (10)$$

Последовательность функционалов (10) зависит от конкретного вида начального распределения вероятностей $p_0(x)$ и обладает рядом очевидных свойств:

А. $K_0[p_0] = 0$ для любого начального распределения вероятностей $p_0(x)$.

Б. Если оператор Фробениуса–Перрона имеет неподвижную точку $p(x)$, т.е. если в некоторой норме $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = p(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n[p_0] \equiv K_\infty[p_0] = \int_0^1 p(x) \cdot \ln \frac{p(x)}{p_0(x)} \cdot dx. \quad (11)$$

3. Энтропия Кульбака–Лейблера для отображения «зуб пилы»

Покажем, как работает введённое в предыдущем разделе определение величины (10) на примере отображения «зуб пилы» [14]

$$f(x) = \{2 \cdot x\}, \quad (12)$$

где фигурные скобки обозначают взятие дробной части числа. График отображения (12) приведён на рис. 5.

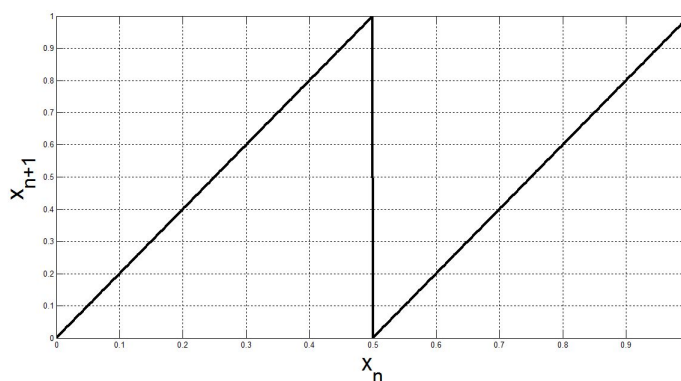


Рис. 5. График отображения «зуб пилы»
 Fig. 5. Graph of the "saw tooth" mapping

Уравнение Фробениуса–Перрона (9) для отображения (12) есть [14]

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot p_n\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot p_n\left(\frac{x+1}{2}\right). \quad (13)$$

Это уравнение имеет следующее инвариантное распределение [14]:

$$p(x) = 1, \quad x \in [0, 1]. \quad (14)$$

Выберем начальное распределение вероятностей для отображения (12) в виде

$$p_0(x) = 2 \cdot x, \quad (15)$$

тогда с помощью уравнения (13) найдём, что

$$p_n(x) = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{x}{2^{n-1}}. \quad (16)$$

Подставив эту плотность распределения вероятностей на n -м шаге в выражение (10), вычислим энтропию Кульбака–Лейблера для отображения (12) с начальным распределением (15):

$$K_n[2 \cdot x] = \frac{1 - 2^{-n}}{2} + \frac{(1 - 2^{-n})^2}{4 \cdot 2^{-n}} \cdot \ln \frac{1 + 2^{-n}}{1 - 2^{-n}} + \ln \frac{1 + 2^{-n}}{2}. \quad (17)$$

Графики выражений (16) и (17) приведены на рис. 6. Легко видеть, что $\|p_n - p\|_{C[0,1]} = 2^{-n}$, т.е. с ростом n последовательность функций (16) стремится к инвариантному распределению (14), что мы и наблюдаем на рис. 6. Далее, в полном согласии с формулой (11) предельное выражение для энтропии Кульбака–Лейблера (17) равно

$$K_\infty[2 \cdot x] = 1 - \ln 2. \quad (18)$$

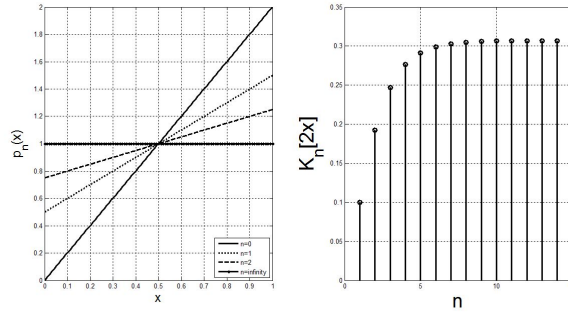


Рис. 6. Временная эволюция плотности вероятностей (слева) и энтропии Кульбака–Лейблера (справа)
 Fig. 6. Temporal evolution of probability density (on the left) and the Kullback–Leibler entropy (on the right)

Хорошо известно, что отображение (12) получается из отображения (7) при $\lambda = 2$ заменой Улама–фон Неймана $x \rightarrow -\cos(2 \cdot \pi \cdot x)$ [14]. Вследствие этого динамика отображения «зуб пилы» чисто хаотична, однако из рис. 6 видно, что эволюция энтропии Кульбака–Лейблера (17) носит явно выраженный регулярный характер. Далее, рассмотрим функцию $\varphi(x)$ с компактным носителем $\text{supp } \varphi(x) = [0, 2]$, нормированную на нём на единицу $\int_0^2 \varphi(x) \cdot dx = 1$ и осуществляющую разбиение единицы [15]:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - k) = 1, \quad (19)$$

тогда если начальное распределение вероятностей $p_0(x) = 2 \cdot \varphi(2 \cdot x)$, то в силу уравнений (13) и (19) $p_0(x) = 2 \cdot \varphi(2 \cdot x)$, т.е. мы сразу же попадаем в инвариантное распределение (14). В качестве примера такой функции можно взять В-сплайн степени 1 [16] (см. рис. 7):

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1]; \\ 2 - x, & x \in [1, 2]; \\ 0 & x \notin [0, 2]. \end{cases} \quad (20)$$

Этот результат может быть обобщен, а именно, рассмотрим В-сплайн степени l [16]:

$$\varphi_l(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin k/2}{k/2} \right)^{l+1} \cdot \exp \left[i \cdot k \cdot \left(x - \frac{l+1}{2} \right) \right] \cdot \frac{dk}{2 \cdot \pi}. \quad (21)$$

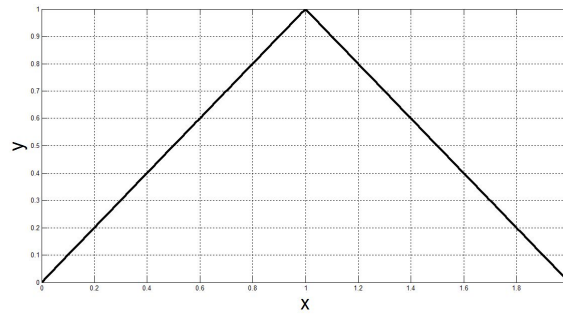


Рис. 7. График В-сплайна степени 1
 Fig. 7. Graph of B-spline of the first degree

Каждая из функций (21) имеет компактный носитель $\text{supp } \varphi_l(x) = [0, l + 1]$, нормирована на нём на единицу $\int_0^{l+1} \varphi_l(x) \cdot dx = 1$ и даёт разбиение единицы (19).

Тогда, выписывая с помощью (13) уравнение Фробениуса–Перрона для отображения f^m

$$p_{n+m}(x) = \frac{1}{2^m} \cdot \sum_{k=0}^{2^m-1} p_n \left(\frac{x+k}{2^m} \right) \quad (22)$$

и подставляя в него в качестве начального распределения

$$p_0(x) = 2^m \cdot \varphi_{2^m-1}(2^m \cdot x), \quad (23)$$

в силу разбиения единицы (19) получаем $p_m(x) = 1$, т.е., стартуя с начального распределения (23), за m шагов мы попадаем в инвариантное распределение (14) и соответственно в стационарное значение энтропии Кульбака–Лейблера (11), равное $K_\infty[p_0] = -\int_0^1 \ln p_0(x) \cdot dx$.

4. Заключение

При появлении новых сценариев перехода к хаосу, а также для более глубокого понимания уже имеющихся сценариев (Ландау (1944 г.), Рюэля–Такенса (1971 г.), Помо–Манневиля (1979 г.), Фейгенбаума (1980 г.)) могут потребоваться более тонкие критерии наличия хаоса в динамической системе. В целях подбора таких критериев в данной статье было произведено пилотное исследование применения понятия «биспектр» (2) к отображению Фейгенбаума (7). Оно продемонстрировало хорошую различаемость регулярного и хаотического поведения этого отображения с помощью этой величины. Для расширения нашего осознания возможностей биспектра теперь необходимо детальное исследование эффектов скейлинга на структуре «бифуркационного дерева» отображения (7) совместно с графиком зависимости ляпуновского характеристического показателя от параметра, особенно в окрестности критического аттрактора Фейгенбаума [14]. Также весьма существенно расширять перечень отображений с уже исследованным поведением, на траекториях которых вычисляются биспектры. Очевидно, что открываться список этих тестовых отображений будет отображением окружности [14], причём особое внимание должно быть уделено поведению биспектра на границах языков Арнольда.

Величины энтропийного вида в теории динамических систем вводились уже неоднократно – см. [17] и ссылки там, однако все эти введённые параметры носят статический характер. Между тем рассмотрение нами простейшего примера – отображения «зуб пилы» (12) — сразу же продемонстрировало динамическое поведение энтропии Кульбака–Лейблера (10). Следующими после отображения (12) естественными кандидатами для исследования поведения на них энтропии Кульбака–Лейблера являются отображения «тент» и «косой тент» [14], уравнения Фробениуса–Перрона (9) для которых выглядят особенно просто. Результаты работы были доложены на Международной научной конференции «Новые тенденции в нелинейной динамике» (Россия, г. Ярославль, 5 – 7 октября 2017 г.) [18] и на семинаре «Нелинейная динамика: теория и приложения» им. Л.П. Шильникова (Россия, г. Нижний Новгород, 8 октября 2017 г.).

Список литературы / References

- [1] Гонченко С.В., Тураев Д.В., “О трёх типах динамики и понятии аттрактора”, *Труды Математического института имени В.А. Стеклова*, **297**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2017, 133–157; English transl.: Gonchenko S. V., Turaev D. V., “On three types of dynamics and the notion of attractor”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **297**:1 (2017), 116–137.
- [2] Богомолов С. А., Стрелкова Г. И., Scholl E., Анищенко В. С., “Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов”, *Письма в ЖТФ*, **42**:14 (2016), 103–110; English transl.: Bogomolov S. A., Strelkova G. I., Scholl E., Anishchenko V. S., “Amplitude and phase chimeras in an ensemble of chaotic oscillators”, *Technical Physics Letters*, **42**:7 (2016), 765–768.
- [3] Дмитриев А. С., Ефремова Е. В., Максимов Н. А., Панас А. И., *Генерация хаоса*, ред. Дмитриев А. С., Техносфера, Москва, 2012, 424 с.; [Dmitriev A. S., Efremova E. V., Maksimov N. A., Panas A. I., *Generacija haosa*, ed. Dmitriev A. S., Tehnosfera, Moskva, 2012, 424 pp., (in Russian).]
- [4] Potapov A. A., *The Foundations of Chaos Revisited: From Poincare to Recent Advancements*, ed. Skiadas C., Springer Int. Publ., Switzerland, Basel, 2016, ISBN: 978-3-319-29701-9.
- [5] Кащенко И. С., “Локальная динамика дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием у первой производной”, *Математические заметки*, **101**:2 (2017), 318–320; English transl.: Kashchenko I. S., “Local dynamics of a second-order differential-difference equation with large delay at the first derivative”, *Mathematical Notes*, **101**:1–2 (2017), 379–381.
- [6] Малахов А. Н., *Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований*, Сов. радио, Москва, 1978, 376 с.; [Malahov A. N., *Kumuljantnyj analiz sluchajnyh negaussovyh processov i ih preobrazovanij*, Sov. radio, Moskva, 1978, 376 pp., (in Russian).]
- [7] Кульбак С., *Теория вероятности и статистика*, Наука, Москва, 1967, 408 с.; [Kul’bak S., *Teorija verojatnosti i statistika*, Nauka, Moskva, 1967, 408 pp., (in Russian).]
- [8] Савченко В. В., “Различение случайных сигналов в частотной области”, *Радиотехника и электроника*, **42**:4 (1997), 426–429; [Savchenko V. V., “Razlichenie sluchajnyh signalov v chastotnoj oblasti”, *Radiotekhnika i jelektronika*, **42**:4 (1997), 426–429, (in Russian).]
- [9] Горячкин О. В., *Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи*, Радио и связь, Москва, 2003, 230 с.; [Gorjachkin O. V., *Metody slepoj obrabotki signalov i ih prilozhenija v sistemah radiotekhniki i svjazi*, Radio i svjaz, Moskva, 2003, 230 pp., (in Russian).]

- [10] Абдуллаев Г. О., Потапов А. А., Рабазанов А. К., Рассадин А. Э., “Новый критерий различения периодических и хаотических режимов в динамических системах (на примере модели Рикитаке)”, *Материалы XII Международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченной к 85-летию профессора М.Г. Алишаева* (Россия, Махачкала, 19–22 сентября 2017 г.), Махачкала, 2017, 8–10; [Abdullaev G. O., Potapov A. A., Rabazanov A. K., Rassadin A. Je., “Novyj kriterij razlichenija periodicheskih i haoticheskih rezhimov v dinamicheskix sistemah (na primere modeli Rikitake)”, *Materialy XII Mezhdunarodnoj konferencii «Fundamentalnye i prikladnye problemy matematiki i informatiki», priurochennoj k 85-letiju professora M.G. Alishaeva* (Rossija, Mahachkala, 19–22 sentjabrja 2017 g.), Mahachkala, 2017, 8–10, (in Russian).]
- [11] Агаларов А. М., Гаджимурадов Т. А., Потапов А. А., Рассадин А. Э., “Об эволюции энтропии Кульбака–Лейблера в стохастических динамических системах”, *Актуальные проблемы физической и функциональной электроники: материалы 20-й Всероссийской молодежной научной школы-семинара* (Россия, Ульяновск, 19–22 сентября 2017 г.), УлГТУ, Ульяновск, 2017, 84–85; [Agalarov A. M., Gadzhimuradov T. A., Potapov A. A., Rassadin A. Je., “Ob evoljucii entropii Kulbaka–Lejblera v stohasticheskix dinamicheskix sistemah”, *Aktualnye problemy fizicheskoj i funkcionalnoj elektroniki: materialy 20-j Vserossijskoj molodezhnoj nauchnoj shkoly-seminara* (Rossija, Uljanovsk, 19–22 sentjabrja 2017 g.), UIGTU, Uljanovsk, 2017, 84–85, (in Russian).]
- [12] Юнаковский А. Д., *Начала вычислительных методов для физиков*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2007, 219 с.; [Junakovskij A. D., *Nachala vychislitelnyh metodov dlja fizikov*, IPF RAN, Nizhny Novgorod, 2007, 219 pp., (in Russian).]
- [13] Feigenbaum M. J., “Universal Behaviour in Nonlinear Systems”, *Los Alamos Science*, **1:1** (1980), 4–27.
- [14] Кузнецов С. П., *Динамический хаос*, Физматлит, 2001, 760 с.; [Kuznetcov S. P., *Dinamicheskij haos*, Fizmatlit, 2001, 760 pp., (in Russian).]
- [15] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, Москва, 1979, 760 с.; [Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T., *Sovremennaja geometrija. Metody i prilozhenija*, Nauka, Moskva, 1979, 760 pp., (in Russian).]
- [16] Смоленцев Н. К., *Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB*, ДМК Пресс, Москва, 2008, 356 с.; [Smolencev N. K., *Osnovy teorii vejvletov. Vejvlety v MATLAB*, DMK Press, Moskva, 2008, 356 pp., (in Russian).]
- [17] Заславский Г. М., *Стохастичность динамических систем*, Наука, Москва, 1984, 272 с.; [Zaslavskij G. M., *Stohastichnost dinamicheskix sistem*, Nauka, Moskva, 1984, 272 pp., (in Russian).]
- [18] Агаларов А. М., Потапов А. А., Рассадин А. Э., Степанов А. В., “Сценарий перехода к нерегулярной динамике в генераторах хаоса через удвоение периода и биспектры отображения Фейгенбаума”, *Тезисы докладов Международной научной конференции «Новые тенденции в нелинейной динамике»* (Россия, Ярославль, 5–7 октября 2017 г.), ЯрГУ, Ярославль, 2017, 11–12; [Agalarov A. M., Potapov A. A., Rassadin A. Je., Stepanov A. V., “Scenarij perehoda k nereguljarnoj dinamike v generatorah haosa cherez udvoenie perioda i bispektry otobrazhenija Fejgenbauma”, *Tezisy dokladov Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Novye tendencii v nelinejnoj dinamike»* (Rossija, Jaroslavl, 5–7 oktjabrja 2017), JarGU, Jaroslavl, 2017, 11–12, (in Russian).]
-

Agalarov A. M., Potapov A. A., Rassadin A. E., Stepanov A. V., "On the Transfer of a Number of Concepts of Statistical Radiophysics to the Theory of One-dimensional Point Mappings", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **25**:1 (2018), 7–17.

DOI: 10.18255/1818-1015-2018-1-7-17

Abstract. In the article, the possibility of using a bispectrum under the investigation of regular and chaotic behaviour of one-dimensional point mappings is discussed. The effectiveness of the transfer of this concept to nonlinear dynamics was demonstrated by an example of the Feigenbaum mapping. Also in the work, the application of the Kullback-Leibler entropy in the theory of point mappings is considered. It has been shown that this information-like value is able to describe the behaviour of statistical ensembles of one-dimensional mappings. In the framework of this theory some general properties of its behaviour were found out. Constructivity of the Kullback-Leibler entropy in the theory of point mappings was shown by means of its direct calculation for the "saw tooth" mapping with linear initial probability density. Moreover, for this mapping the denumerable set of initial probability densities hitting into its stationary probability density after a finite number of steps was pointed out.

Keywords: period doubling bifurcation, discrete Fourier transform, Frobenius–Perron equation, B-spline, partition of unity

On the authors:

Agalar M. Agalarov, orcid.org/0000-0003-1083-4124, PhD,
Institute of Physics. Kh. I. Amirkhanova of the Dagestan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
94 M. Yaragsky str., Makhachkala, 367015, Russia, e-mail: aglarow@mail.ru

Alexander A. Potapov, orcid.org/0000-0001-9864-3546, Dr. Ph.-Math. Sc.
Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics (IRE) of Russian Academy of Sciences,
11 Mokhovaya str., buil. 7, Moscow, 125009, Russia

JNU-IRE RAS Joint Laboratory of Information Technology and Fractal Processing of Signals, JiNan University,
601 Huangpu avenue, Guangzhou, 510632, China, e-mail: potapov@cplire.ru

Alexander E. Rassadin, orcid.org/0000-0002-7396-0112, Member of the Presidium Nizhny Novgorod Mathematical Society,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603950, Russia e-mail: brat_ras@list.ru

Anton V. Stepanov, orcid.org/0000-0003-4306-1199, PhD, senior tutor,
Chuvash State Agriculture Academy,
29 K. Marx str., Cheboksary, 428000, Russia, e-mail: for.antonstep@gmail.com

Acknowledgments:

This work was supported by RFBR, grant No 18-08-01356-a.