

©Прохорова Т. В., 2016

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-2-164-172

УДК 512.71

О группе Брауэра арифметической модели многообразия над глобальным полем положительной характеристики

Прохорова Т. В.

получена 13 февраля 2016

Аннотация. Пусть V – гладкое проективное многообразие над глобальным полем $k = \kappa(C)$ рациональных функций на гладкой проективной кривой C над конечным полем \mathbb{F}_q характеристики p . Предположим, что существует проективный плоский \mathbb{F}_q -морфизм $\pi : X \rightarrow C$, где X – гладкое проективное многообразие, общий схемный слой морфизма π изоморфен многообразию V (мы называем морфизм $\pi : X \rightarrow C$ арифметической моделью многообразия V).

М. Артин высказал гипотезу о конечности группы Брауэра $\text{Br}(X)$, классифицирующей пучки алгебр Адзумаи на X по модулю подобия. Хорошо известно, что группа $\text{Br}(X)$ содержится в когомологической группе Брауэра

$$\text{Br}'(X) = H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m).$$

По определению, $\text{non } -p$ – компонента когомологической группы Брауэра $\text{Br}'(X)$ совпадает с прямой суммой l -примарных компонент группы $\text{Br}'(X)$ по всем простым числам l , отличным от характеристики p .

Известно, что структура k -многообразия на V задает канонический морфизм групп $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)$.

В работе доказана конечность $\text{non } -p$ – компоненты когомологической группы Брауэра $\text{Br}'(X)$ многообразия X при условии, что факторгруппа

$$[\text{Br}'(V) / \text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]](\text{non } -p)$$

конечная.

В частности, если V – поверхность типа КЗ (другими словами, V – гладкая проективная односвязная поверхность над полем k и канонический класс поверхности V тривиален: $\Omega_V^2 = \mathcal{O}_V$), причем характеристика основного поля $p > 2$, то по теореме Скоробогатова – Зархина факторгруппа $[\text{Br}'(V) / \text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)](\text{non } -p)$ конечна, так что в этом случае группы $\text{Br}'(X)(\text{non } -p)$ и $\text{Br}(X)(\text{non } -p)$ конечные.

Ключевые слова: группа Брауэра, арифметическая модель, КЗ-поверхность

Для цитирования: Прохорова Т. В., "О группе Брауэра арифметической модели многообразия над глобальным полем положительной характеристики", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:2 (2016), 164–172.

Об авторах: Прохорова Татьяна Вячеславовна, orcid.org/0000-0002-6883-2087, канд. физ.-мат. наук, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, ул. Горького, 87, г. Владимир, 600000, Россия, e-mail: tvprokhorova@mail.ru

Введение

Пусть V – гладкое проективное многообразие над глобальным полем $k = \kappa(C)$ рациональных функций на гладкой проективной кривой C над конечным полем \mathbb{F}_q характеристики p . Предположим, что существует проективный плоский \mathbb{F}_q -морфизм $\pi : X \rightarrow C$, где X – гладкое проективное многообразие, общий схемный слой морфизма π изоморфен многообразию V (мы называем морфизм $\pi : X \rightarrow C$ *арифметической моделью многообразия V*).

М. Артин высказал гипотезу о конечности группы Брауэра $\text{Br}(X)$, классифицирующей пучки алгебр Адзумаи на X по модулю подобия. Известно, что группа $\text{Br}(X)$ содержится в когомологической группе Брауэра

$$\text{Br}'(X) = H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m).$$

По определению, $\text{pop } -p$ – компонента когомологической группы Брауэра $\text{Br}'(X)$ совпадает с прямой суммой l -примарных компонент группы $\text{Br}'(X)$ по всем простым числам l , отличным от характеристики p .

Известно, что структура k -многообразия на V задает канонический морфизм групп $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)$.

В работе доказана конечность $\text{pop } -p$ – компоненты когомологической группы Брауэра $\text{Br}'(X)$ многообразия X при условии, что факторгруппа

$$[\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]](\text{pop } -p)$$

конечная.

В частности, если V – поверхность типа К 3 (другими словами, V – гладкая проективная односвязная поверхность над полем k и канонический класс поверхности V тривиален: $\Omega_V^2 = \mathcal{O}_V$), причем характеристика основного поля $p > 2$, то по теореме Скоробогатова – Зархина [1, теорема 1.3] факторгруппа $[\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]](\text{pop } -p)$ конечна, так что в этом случае группы $\text{Br}'(X)(\text{pop } -p)$ и $\text{Br}(X)(\text{pop } -p)$ конечные.

Аналогичный результат доказан С. Г. Танкеевым для арифметической модели К 3-поверхности над числовым полем [2].

Автор благодарит С. Г. Танкеева за ценные советы.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть $\pi : X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над конечным полем \mathbb{F}_q характеристики p , C – кривая, общий схемный слой морфизма π является гладким многообразием V над полем $k = \kappa(C)$. Если группа

$$[\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]](\text{pop } -p)$$

конечная, то группа $\text{Br}'(X)(\text{pop } -p)$ конечная.

Доказательство. Будем обозначать через $\kappa(y)$ поле вычетов точки $y \in X$.

Пусть $i_y : \text{Spec } \kappa(y) \rightarrow X$ – каноническое вложение $y \in X$ и

$$\text{Div}_X^{\text{vert}} = \bigoplus_{\substack{y \in X \setminus V \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z}$$

– пучок вертикальных дивизоров Картье. Существует точная последовательность пучков (в этальной топологии схемы X)

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_{m,X} \rightarrow h_* \mathbb{G}_{m,V} \rightarrow \text{Div}_X^{\text{vert}} \rightarrow 0, \quad (1)$$

где $h : V \hookrightarrow X$ – вложение общего схемного слоя морфизма π [3, последняя формула на с. 637].

Мы имеем

$$\text{Div}_X = \bigoplus_{\substack{y \in X \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{\substack{y \in V \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z} \right) \bigoplus \text{Div}_X^{\text{vert}}.$$

Хорошо известно, что $H^1(X, \text{Div}_X) = 0$ [4, гл. 3, § 2, пример 2.22]. Следовательно, $H^1(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) = 0$. Значит, (1) даёт точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^2(X, h_* \mathbb{G}_{m,V}) \rightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) \\ \rightarrow H^3(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^3(X, h_* \mathbb{G}_{m,V}) \rightarrow H^3(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}). \end{aligned} \quad (2)$$

Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q h_* \mathbb{G}_{m,V}) \Rightarrow H^{p+q}(V, \mathbb{G}_{m,V})$$

даёт точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0},$$

где $E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ [4, приложение В]. Следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, h_* \mathbb{G}_{m,V}) \rightarrow H^1(V, \mathbb{G}_{m,V}) \\ \rightarrow H^0(X, R^1 h_* \mathbb{G}_{m,V}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(X, h_* \mathbb{G}_{m,V}) \\ \rightarrow \text{Ker}[H^2(V, \mathbb{G}_{m,V}) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* \mathbb{G}_{m,V})] \\ \rightarrow H^1(X, R^1 h_* \mathbb{G}_{m,V}). \end{aligned} \quad (3)$$

С другой стороны, $R^1 h_* \mathbb{G}_{m,V} = 0$ в силу аргументов п. (b) доказательства леммы 4.4.1 в [3]. Поэтому (3) даёт изоморфизм

$$H^2(X, h_* \mathbb{G}_{m,V}) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* \mathbb{G}_{m,V})]$$

и (2) даёт точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Br}'(X) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* \mathbb{G}_{m,V})] \rightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}). \quad (4)$$

В дальнейшем мы обозначаем через η общую схемную точку кривой C и через $\kappa(y)^s$ сепарабельное замыкание поля вычетов $\kappa(y)$ в алгебраическом замыкании $\overline{\kappa(y)}$. Существует каноническое отображение $\mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Br}'(V)$, индуцированное структурным морфизмом $V \rightarrow \mathrm{Spec} k$. С другой стороны, существует каноническая точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(C) \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^s/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \rightarrow H^3(C, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^3(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{G}_m) \end{aligned}$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22(a)], где $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}$ обозначает группу непрерывных гомоморфизмов. В нашем случае C – полная гладкая алгебраическая кривая над конечным полем F_q , поэтому $\mathrm{Br}(C) = 0$ и $H^3(C, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [4, гл. III, § 2, пример 2.22(g)]. Мы приходим к хорошо известной точной последовательности глобальной теории полей классов

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(v)^s/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad (5)$$

Эта точная последовательность имеет вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22(e)].

Для замкнутой точки $v \in C$ рассмотрим каноническое вложение $i_v : \mathrm{Spec} \kappa(v) \hookrightarrow C$. Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q i_{v*} \mathbb{Z}) \rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z})$$

даёт точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1},$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ [4, приложение В]; следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(C, i_{v*} \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \\ \rightarrow H^0(C, R^1 i_{v*} \mathbb{Z}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(C, i_{v*} \mathbb{Z}) \\ \rightarrow \mathrm{Ker}[H^2(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(C, R^2 i_{v*} \mathbb{Z})] \\ \rightarrow H^1(C, R^1 i_{v*} \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (6)$$

Хорошо известно, что $R^q i_{v*} \mathbb{Z} = 0$ для всех $q > 0$ [4, гл. III, § 2, пример 2.22(a)]; поэтому (6) даёт изоморфизм

$$H^2(C, i_{v*} \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}).$$

С другой стороны,

$$H^2(\text{Spec } \kappa(v), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\kappa(v)^s/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22]. Следовательно,

$$\begin{aligned} H^2(C, \text{Div}_C) &\stackrel{\text{def}}{=} H^2\left(C, \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} i_{v*} \mathbb{Z}\right) \\ &= \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} H^2(C, i_{v*} \mathbb{Z}) \\ &= \bigoplus_{\substack{v \in C \\ v \neq \eta}} \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\kappa(v)^s/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

[4, гл. III, § 2, пример 2.22(a)]. Поэтому (5) даёт точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow H^2(C, \text{Div}_C). \quad (7)$$

С другой стороны, можно определить канонический морфизм

$$\pi^* : H^*(C, \text{Div}_C) \rightarrow H^*(X, \pi^*(\text{Div}_C)),$$

используя резольвенту Годемана [4, гл. III, § 1, замечание 1.20, (c)]

$$0 \rightarrow \text{Div}_C \rightarrow \mathcal{C}^0(C, \text{Div}_C) \rightarrow \mathcal{C}^1(C, \text{Div}_C) \rightarrow \dots,$$

точность функтора π^* на категории пучков для этальной топологии [4, гл. II, § 2, предложение 2.6; начало § 3] и общую конструкцию отображения

$$\pi^* : H^*(C, \text{Div}_C) \rightarrow H^*(X, \pi^*(\text{Div}_C))$$

по Годеману [5, гл. II, § 4.16] (для построения этого морфизма не обязательно прибегать к резольвенте Годемана; для любого пучка \mathcal{F} имеется канонический морфизм $\mathcal{F} \rightarrow R\pi_*\pi^*(\mathcal{F})$ в производной категории этальных пучков на C , который даёт отображение $H^*(C, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(C, R\pi_*\pi^*(\mathcal{F})) = H^*(X, \pi^*(\mathcal{F}))$).

Каноническое вложение $\pi^*(\text{Div}_C) \hookrightarrow \text{Div}_X^{\text{vert}}$ даёт каноническое отображение

$$H^2(X, \pi^*(\text{Div}_C)) \rightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}).$$

Следовательно, имеются канонические морфизмы

$$\varphi : \text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V), \quad (8)$$

$$H^2(C, \text{Div}_C) \rightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) \quad (9)$$

Пусть $B = \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2h_*\mathbb{G}_{m,V})]$. Очевидно, что (4), (7) – (9) дают коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Br}'(X) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) \\ & & \uparrow & & \varphi \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Br}(k) \cap \varphi^{-1}(B) & \longrightarrow & H^2(C, \text{Div}_C) & & \end{array} \quad (10)$$

Поскольку группа $[\mathrm{Br}'(V)/\varphi(\mathrm{Br}(k))](\mathrm{non} - p)$ конечная по условию теоремы, то мы видим, что группа

$$B/[\varphi(\mathrm{Br}(k)) \cap B](\mathrm{non} - p) = \mathrm{Coker}[\mathrm{Br}(k) \cap \varphi^{-1}(B) \xrightarrow{\varphi} B](\mathrm{non} - p)$$

конечная. Поэтому достаточно показать, что пересечение группы $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non} - p)$ с образом морфизма групп

$$[\mathrm{Br}(k) \cap \varphi^{-1}(B)](\mathrm{non} - p) \xrightarrow{\varphi} B(\mathrm{non} - p)$$

конечно. В силу коммутативности диаграммы (10) достаточно доказать конечность ядра канонического отображения $H^2(C, \mathrm{Div}_C) \rightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$.

Очевидно, что ядро отображения $H^2(C, \mathrm{Div}_C) \rightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$ является прямой суммой по всем замкнутым точкам v кривой C ядер отображений

$$\pi^* : H^2(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_D H^2(\mathrm{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}), \quad (11)$$

которые также можно записать в виде

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_D \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\kappa(D)^s/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Здесь D пробегает неприводимые компоненты слоя морфизма $X \rightarrow C$ над точкой v , поле $\kappa(D)^s$ является сепарабельным замыканием поля $\kappa(D)$ рациональных функций на D .

Пусть κ_D – целое замыкание $\kappa(v)$ в поле $\kappa(D)$. Тогда $\kappa(v) \subset \kappa(D)$ – такое расширение полей, что многообразие D является геометрически целым над κ_D . Мы имеем композицию канонических морфизмов полей

$$\kappa(D) = \kappa_D(D) \leftarrow \kappa_D \leftarrow \kappa(v),$$

индицирующую композицию отображений

$$H^2(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathrm{Spec} \kappa_D, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathrm{Spec} \kappa_D(D), \mathbb{Z}) = H^2(\mathrm{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}).$$

Очевидно, что композиция

$$H^2(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} \bigoplus_D H^2(\mathrm{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathrm{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}) \quad (12)$$

отображения π^* в (11) и канонической проекции

$$\bigoplus_D H^2(\mathrm{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathrm{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z})$$

является композицией канонических отображений

$$H^2(\mathrm{Spec} \kappa(v), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathrm{Spec} \kappa_D, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathrm{Spec} \kappa_D(D), \mathbb{Z}) = H^2(\mathrm{Spec} \kappa(D), \mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{x \mapsto \text{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D) \cdot x} H^2(\text{Спец } \kappa(D), \mathbb{Z}), \quad (13)$$

где $\text{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D)$ – кратность подмногообразия D в слое $X_v = \pi^{-1}(v)$.

Пусть \mathbb{F}_q – конечное поле порядка q и пусть $W \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^n$ – геометрически неприводимое проективное подмногообразие размерности r и степени d . Хорошо известный результат Ленга и Вейля [6, теорема 1] показывает, что

$$|\text{Card}(W(\mathbb{F}_q)) - q^r| \leq (d-1)(d-2)q^{r-1/2} + c(n, d, r)q^{r-1}$$

для константы $c(n, d, r) > 0$, зависящей только от n, d и r .

В силу оценки Ленга–Вейля и леммы Гензеля многообразие V имеет точки почти во всех пополнениях глобального поля k . Другими словами, имеется такое конечное множество S замкнутых точек кривой C , что для всех $v \notin S$ морфизм $X \rightarrow C$, ограниченный на спектр локального кольца \mathcal{O}_v , имеет сечение $\theta : \text{Спец } \mathcal{O}_v \rightarrow X \times_C \text{Спец } \mathcal{O}_v$. В силу следствия 2.2 в [7], точка $\theta(v)$ является регулярной точкой схемного слоя $\pi^{-1}(v)$. Поэтому $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(v), \theta(v)}$ – регулярное локальное кольцо и слой $\pi^{-1}(v)$ аналитически неприводим в точке $\theta(v)$ [8, гл. 11, замечание 1 к предложению 11.24]; в частности, $\theta(\text{Спец } \mathcal{O}_v)$ пересекает одну неприводимую компоненту схемного слоя $\pi^{-1}(v)$ (то, что сечение на регулярной модели пересекает в точности одну неприводимую компоненту кратности 1 слоя, доказано также в [9, лемма 1.1, b]). Поэтому любой вертикальный дивизор Картье D с носителем в слое $\pi^{-1}(v)$ может быть единственным образом записан в виде

$$D = n_0 \cdot \pi^{-1}(v) + \sum_i n_i \cdot D_i,$$

где $n_j \in \mathbb{Z}$ и D_i – такие неприводимые компоненты слоя $\pi^{-1}(v)$, что выполнено равенство $D_i \cap \theta(\text{Спец } \mathcal{O}_v) = \emptyset$. Следовательно, получаем разложение пучков

$$\text{Div}_{X \times_C \text{Спец } \mathcal{O}_v}^{\text{vert}} = \pi^*(\text{Div}_{\text{Спец } \mathcal{O}_v}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{y \in X \times_C \text{Спец } \mathcal{O}_v \setminus V, \text{codim}_{X \times_C \text{Спец } \mathcal{O}_v}(y)=1, \\ \{y\} \cap \theta(\text{Спец } \mathcal{O}_v) = \emptyset}} i_{y*} \mathbb{Z} \right) \quad (14)$$

Соотношение $\pi \circ \theta = \text{id}_{\text{Спец } \mathcal{O}_v}$ показывает, что композиция

$$\begin{aligned} H^*(\text{Спец } \mathcal{O}_v, \text{Div}_{\text{Спец } \mathcal{O}_v}) &\xrightarrow{\pi^*} H^*(X \times_C \text{Спец } \mathcal{O}_v, \pi^*(\text{Div}_{\text{Спец } \mathcal{O}_v})) \\ &\xrightarrow{\theta^*} H^*(\text{Спец } \mathcal{O}_v, \text{Div}_{\text{Спец } \mathcal{O}_v}) \end{aligned}$$

является тождественным отображением. Поэтому мы получаем вложение

$$H^2(\text{Спец } \mathcal{O}_v, \text{Div}_{\text{Спец } \mathcal{O}_v}) \xhookrightarrow{\pi^*} H^2(X \times_C \text{Спец } \mathcal{O}_v, \pi^*(\text{Div}_{\text{Спец } \mathcal{O}_v})).$$

С другой стороны, разложение (14) даёт вложение

$$H^2(X \times_C \text{Спец } \mathcal{O}_v, \pi^*(\text{Div}_{\text{Спец } \mathcal{O}_v})) \hookrightarrow H^2(X \times_C \text{Спец } \mathcal{O}_v, \text{Div}_{X \times_C \text{Спец } \mathcal{O}_v}^{\text{vert}}).$$

Следовательно, для $v \notin S$ ядро отображения (11) тривиально.

Остаётся доказать, что для $v \in S$ ядро композиции (12) конечно.

Для начала заметим, что отображение $H^2(\text{Спец } \kappa_D, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\text{Спец } \kappa(D), \mathbb{Z})$ в композиции (13) инъективно. Действительно, это отображение совпадает с отображением

$$H^1(\text{Gal}(\overline{\kappa}_D/\kappa_D), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\kappa(D)^s/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Оно инъективно, потому что $\kappa(D)$ и любое алгебраическое замыкание поля κ_D линейно разделены, так что имеется канонический изоморфизм [10, гл. V, § 10, п. 4, теорема 1]

$$\text{Gal}(\overline{\kappa}_D/\kappa_D) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(\overline{\kappa}_D(D)/\kappa(D));$$

остаётся использовать каноническую последовательность инфляции – ограничения [11, гл. IV, § 5, предложение 5.1]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(\overline{\kappa}_D(D)/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\xrightarrow{\text{inf}} H^1(\text{Gal}(\kappa(D)^s/\kappa(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\text{res}} H^1(\text{Gal}(\kappa(D)^s/\overline{\kappa}_D(D)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно доказать конечность ядра композиции отображений

$$H^2(\text{Спец } \kappa(v), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\text{Спец } \kappa_D, \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \rightarrow \text{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D) \cdot x} H^2(\text{Спец } \kappa_D, \mathbb{Z}). \quad (15)$$

Пусть $d = [\kappa_D : \kappa(v)]$. Поскольку композиция ограничения и коограничения является умножением на d , то мы видим, что ядро композиции (15) содержится в ядре умножения на $\text{mult}_{\pi^{-1}(v)}(D) \cdot d : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, которое, очевидно, конечно. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $\pi : X \rightarrow C$ – сюръективный морфизм гладких проективных многообразий над конечным полем \mathbb{F}_q характеристики $p > 2$, C – кривая, общий схемный слой морфизма π является К3-поверхностью V над $k = \kappa(C)$. Тогда группа

$$\text{Br}'(X)(\text{non } -p) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{l \neq p} \text{Br}'(X)(l)$$

конечная.

Это следует из теоремы 1 и теоремы Skorobogatov – Zarhin [1, теорема 1.3], согласно которой группа $[\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]](\text{non } -p)$ является конечной.

Список литературы / References

- [1] Skorobogatov A.N., Zarhin Yu.G., “A finiteness theorem for the Brauer group of K3 surfaces in odd characteristic”, arXiv: arXiv: 1403.0849v1 [math.AG] 4 Mar 2014, 1–10.
- [2] Танкеев С.Г., “О конечности группы Брауэра арифметической схемы”, *Матем. заметки*, **95**:1 (2014), 136–149; [Tankeev S.G., “On the finiteness of the Brauer group of an arithmetic scheme”, *Math. Notes*, **95**:1 (2014), 136–149], (in Russian).
- [3] Colliot-Thélène J.-L., Skorobogatov A.N., Swinnerton-Dyer P., “Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points”, *Invent. Math.*, **134**:3 (1998), 579–650.

- [4] Милн Дж., *Эталные когомологии*, Мир, М., 1983; [Milne J.S., *Etale cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980].
- [5] Годеман Р., *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961; [Godement R., *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958].
- [6] Lang S., Weil A., “Number of points of varieties in finite fields”, *Amer. J. Math.*, **76**:4 (1954), 819–827.
- [7] Танкеев С. Г., “О группе Брауэра арифметической схемы. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:5 (2003), 155–176; [Tankeev S.G., “On the Brauer group of arithmetic scheme. II”, *Izv. Math.*, **67**:5 (2003), 1007–1029].
- [8] Атья М., Макдональд И., *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972; [Atiyah M.F., Macdonald I.G., *Introduction to commutative algebra*, Addison–Wesley Publ. Co., Massachusetts, 1969].
- [9] Skorobogatov A. N., “Descent on fibrations over the projective line”, *Amer. J. Math.*, **118**:5 (1996), 905–923.
- [10] Бурбаки Н., *Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, Элементы математики*, Наука, М., 1965; [Bourbaki N., *Éléments de Mathématique. Algèbre, livre II*, Hermann, Paris, 1963].
- [11] *Алгебраическая теория чисел*, ред. Касселс Дж., Фрелих А., Мир, М., 1969; [*Algebraic number theory*, Proc. Internat. Conf. Brighton, 1965, eds. Cassels G. W. S., Frölich A., Academic Press, London, and Thompson, Washington, DC, 1967].

Prokhorova T. V., " On the Brauer Group of an Arithmetic Model of a Variety over a Global Field of Positive Characteristic", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:2 (2016), 164–172.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-2-164-172

Abstract. Let V be a smooth projective variety over a global field $k = \kappa(C)$ of rational functions on a smooth projective curve C over a finite field \mathbb{F}_q of characteristic p . Assume that there is a projective flat \mathbb{F}_q -morphism $\pi : X \rightarrow C$, where X is a smooth projective variety and the generic scheme fiber of π is isomorphic to a variety V (we call $\pi : X \rightarrow C$ an *arithmetic model of a variety* V).

M. Artin conjectured the finiteness of the Brauer group $\text{Br}(X)$ classifying sheaves of Azumaya algebras on X modulo similitude. It is well known that the group $\text{Br}(X)$ is contained in the cohomological Brauer group

$$\text{Br}'(X) = H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m).$$

By definition, the non $-p$ component of the cohomological Brauer group $\text{Br}'(X)$ coincides with the direct sum of the l -primary components of the group $\text{Br}'(X)$ for all prime numbers l different from the characteristic p . It is known that the structure of k -variety on V yields the canonical morphism of the groups $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)$.

The finiteness of the non $-p$ component of the cohomological Brauer group $\text{Br}'(X)$ of a variety X has been proved if

$$[\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]](\text{non } -p)$$

is finite.

In particular, if V is a K3 surface (in other words, V is a smooth projective simply connected surface over a field k and the canonical class of a surface of V is trivial: $\Omega_V^2 = \mathcal{O}_V$) and the characteristic of the ground field $p > 2$, then, by the Skorobogatov – Zarhin theorem, $[\text{Br}'(V)/\text{Im}[\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}'(V)]](\text{non } -p)$ is finite, so in this case the groups $\text{Br}'(X)(\text{non } -p)$ and $\text{Br}(X)(\text{non } -p)$ are finite.

Keywords: Brauer group, arithmetic model, K3 surface

On the authors: Prokhorova Tatyana Vyacheslavovna, orcid.org/0000-0002-6883-2087, PhD,

A. G. and N. G. Stoletov Vladimir State University, Gorky str., 87, Vladimir, 600000, Russia, e-mail: tvprokhorova@mail.ru