*Модел. и анализ информ. систем.* Т.**19**, №**3** (2012) 142–150

УДК 517.9

# О работе семинара «Нелинейная динамика»

В 2011—2012 годах в рамках научно-образовательного центра «Нелинейная динамика» продолжил работу научный семинар, посвященный исследованиям поведения и методам анализа динамических систем. За прошедший учебный год на нем было заслушано более тридцати сообщений по тематике исследований научно-образовательного центра. Ниже представлены тезисы наиболее интересных докладов, прозвучавших на семинаре.

**Нестеров П.Н. Асимптотическое интегрирование систем функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами.** В докладе исследуется вопрос о построении асимптотики при $t \to \infty$ решений следующей системы функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)B_i(t, x_t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)B_{i_1 i_2}(t, x_t) + \\ + \dots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdots v_{i_k}(t)B_{i_1\ldots i_k}(t, x_t) + R(t, x_t). \quad (1)$$

Здесь $B_{i_1\ldots i_l}(t,\cdot)$ — ограниченные линейные операторы, действующие из пространства $C_h \equiv C\big([-h,0],\mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h,0]$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ в пространство $\mathbb{C}^m$. Считаем, что в пространстве $C_h$ введена стандартная норма

$$||\varphi|| = \sup_{-h\le\theta\le 0} |\varphi(\theta)|.$$

Далее, $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_h$. Мы предполагаем, что операторы $B_{i_1\ldots i_l}(t,\cdot)$ являются или периодическими по переменной $t$ с периодом $\omega > 0$, т.е.

$$B_{i_1\ldots i_l}(t+\omega,\varphi) \equiv B_{i_1\ldots i_l}(t,\varphi), \qquad \varphi \in C_h, \quad (2)$$

или допускают представление в виде

$$B_{i_1\ldots i_l}(t,\varphi) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t)\ell_j^{(i_1\ldots i_l)}(\varphi), \qquad \varphi \in C_h. \quad (3)$$

В формуле (3), $\ell_j^{(i_1\ldots i_l)}(\varphi)$ — ограниченные линейные операторы, действующие из $C_h$ в $\mathbb{C}^m$ и не зависящие от $t$, и $\Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t)$ — некоторые матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е.

$$\Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t) = \sum_{s=1}^{M} \beta_{sj}^{(i_1\ldots i_l)} e^{i\lambda_s t}. \quad (4)$$

Здесь $\beta_{sj}^{(i_1 \ldots i_l)}$ — постоянные квадратные матрицы и $\lambda_s$ — действительные числа. Если выполнено тождество (2), то мы будем предполагать, что для каждого $\varphi \in C_h$ функции $B_{i_1 \ldots i_l}(\cdot, \varphi)$ измеримы по Лебегу и для всех $\varphi \in C_h$ и $t \in \mathbb{R}$

$$|B_{i_1 \ldots i_l}(t, \varphi)| \leq K ||\varphi||, \tag{5}$$

где $K$ — некоторая постоянная. Очевидно, что неравенство (5) оказывается выполненным и в том случае, когда операторы $B_{i_1 \ldots i_l}(t, \varphi)$ имеют вид (3), (4).

Наконец, $R(t, \cdot)$ $(t \geq t_0)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из $C_h$ в $\mathbb{C}^m$, относительно которого предполагается следующее. Для любого $\varphi \in C_h$, вектор-функция $R(\cdot, \varphi)$ измерима по Лебегу при $t \geq t_0$, и, кроме того, существует скалярная функция $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, такая что

$$|R(t, \varphi)| \leq \gamma(t) ||\varphi||, \qquad \varphi \in C_h, \quad t \geq t_0. \tag{6}$$

Осталось заметить, что $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — абсолютно непрерывные комплекснозначные скалярные функции, заданные на интервале $[t_0, \infty)$, относительно которых предполагается, что

$1^0$. $v_1(t) \to 0, v_2(t) \to 0, \ldots, v_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$;
$2^0$. $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \ldots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$;
$3^0$. $v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) \cdots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для любых $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{k+1} \leq n$.

Известно, что при сформулированных условиях для любой функции $\varphi \in C_h$ и любого $T \geq t_0$ существует единственная функция $x(t)$, которая удовлетворяет (1) при $t \geq T$ с начальным условием $x_T = \varphi$ (см., например, [1]).

Используя вариант метода усреднения, предложенный в работе [2], систему (1) удается привести к некоторому специальному виду. Затем для построения асимптотики решений полученной системы используется аналог асимптотической теоремы Н. Левинсона [3].

В качестве иллюстрации предложенной методики в докладе получены асимптотические формулы для решений дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\ddot{x} + x + \frac{a \sin \lambda t}{t^\rho} x(t - h) = 0,$$

где $a, \lambda \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ и $h > 0$.

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

2. *Нестеров П.Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742.

3. *Cassel J.S., Hou Z.* Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation // J. Lond. Math. Soc. 1993. V. 47. P. 473–483.

**Малозёмова Д. В. Высокомодовые аттракторы в модификации уравнения Свифта—Хоэнберга.** Уравнением Свифта—Хоэнберга принято называть нелинейное параболическое уравнение вида

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1 + \Delta)^2 w - w^3. \tag{1}$$

Ограничимся ситуацией, когда $w$ – действительная функция от $(x,t) \in [0,\pi] \times R$, а $\varepsilon$ – малый положительный параметр. Это уравнение впервые было предложено в статье [1] как простейшая феноменологическая модель конвекции Релея—Бенара. В дальнейшем оно широко использовалось в качестве модельного в различных областях естествознания.

Рассмотрим модификацию уравнения (1)

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1+\nu\partial_x^2)^2 w - w\partial_x w, \tag{2}$$

дополненную краевыми условиями типа Дирихле:

$$w|_{x=0,\pi} = \partial_x^2 w|_{x=0,\pi} = 0. \tag{3}$$

Для задачи (2), (3) можно сформулировать результат о формировании в ней высокомодовых аттракторов.

Линейный анализ системы показывает, что при $\nu \in \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\nu_-(\varepsilon)}{n^2}, \frac{\nu_+(\varepsilon)}{n^2}\right)$, $\nu_\pm(\varepsilon) = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}$ нулевое решение становится неустойчивым. В связи с этим нас будут интересовать возникающие в системах неоднородные стационарные решения, рождающиеся из нуля при $\nu = \nu_-(\varepsilon)/n^2$ и исчезающие в нем при $\nu = \nu_+(\varepsilon)/n^2$. Рассмотрим случай $n = 1$.

Для нахождения существующих состояний равновесия будем считать, что

$$0 < \varepsilon << 1, \quad \nu = 1 + \delta\sqrt{\varepsilon}, \quad \delta \in (-1,1), \tag{4}$$

где параметр $\delta$, имеющий порядок единицы, отвечает за изменение $\nu$ на требуемом интервале $(\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon))$.

**Теорема 1.** *При выполнении условий (4) краевая задача (1),(2) имеет две экспоненциально устойчивые диссипативные структуры:*

$$w_1(x,\delta,\varepsilon) = w_0(x,\delta,\varepsilon),\ w_2(x,\delta,\varepsilon) = w_0(\pi - x,\delta,\varepsilon),\ w_0(x,-1,\varepsilon) = w_0(x,1,\varepsilon) \equiv 0, \tag{5}$$

*где функция $w_0(x,\delta,\varepsilon)$ допускает равномерное по $\delta \in [\delta_1,\delta_2] \subset (-1,1)$ асимптотическое представление*

$$w = \sqrt{\varepsilon}w_1(x) + \varepsilon w_2(x) + \varepsilon^{3/2}w_3(x) + ..., \quad w_1(x) = \xi_0 \sin x, \tag{6}$$

*а $\xi_0 > 0$ однозначно определяется в ходе вычислений.*

На основании описанного в [2] принципа подобия, из найденного решения можно сконструировать и все остальные рождающиеся из нуля неоднородные стационарные решения, возникающие при $\nu \in (\nu_n^-(\varepsilon), \nu_n^+(\varepsilon))$.

**Теорема 2.** *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 \in (0,1)$, что при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и при каждом натуральном $n$ на соответствующем интервале $(\nu_n^-(\varepsilon), \nu_n^+(\varepsilon))$ изменения параметра $\nu$ каждая из краевых задач (1), (2) имеет пару диссипативных структур*

$$w_n^1(x,\nu,\varepsilon) = \frac{1}{n}\,w_0(nx,\delta_n(\nu,\varepsilon),\varepsilon),\ w_n^2(x,\nu,\varepsilon) = \frac{1}{n}\,w_0(\pi - nx,\delta_n(\nu,\varepsilon),\varepsilon), \tag{7}$$

*где*
$$\delta_n(\nu,\varepsilon) = (n^2\nu - 1)/\sqrt{\varepsilon}. \tag{8}$$

Фиксируем произвольно два числа $\delta_1$ и $\delta_2$ из интервала $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. На вопрос об устойчивости найденных в теоремах 1 и 2 решений отвечает следующая теорема.

**Теорема 3.** *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_1,\delta_2) \in (0,1)$, что при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и при каждом $n \ge 1$ пара диссипативных структур (7), (8) краевых задач*

*(1), (2) экспоненциально устойчива на отрезке* $[(1+\delta_1\sqrt{\varepsilon})/n^2, (1+\delta_2\sqrt{\varepsilon})/n^2]$ *изменения параметра* $\nu$.

Поскольку множество $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\nu_n^-(\varepsilon), \nu_n^+(\varepsilon))$ устроено так, что с уменьшением $\nu$ интервалы пересекаются в неограниченно возрастающем количестве, то в системах (1), (2) происходит неограниченное накопление устойчивых неоднородных стационарных решений, то есть реализуется феномен буферности (см. [2]).

В ходе численного моделирования было установлено, что указанные в теоремах 1 и 2 стационарные решения являются не единственными аттракторами. Благодаря квадратичному типу нелинейности, система обладает достаточно богатой глобальной динамикой. Она демонстрирует другую серию устойчивых стационаров, а также устойчивые периодические решения, которые при изменении параметров демонстрируют бифуркации удвоения периода. Особенности глобальной динамики представляется возможным осветить с помощью более подробного численного исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053.

1. *Swift J., Hohenberg P.S.* Hydrodynamic fluctuations at the convective instability // Phys. Rev. 1977. V. A15, №1. P. 319–328.

2. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 432 с.

**Бобок А. С. Локальный анализ цепочки автогенераторов в опыте Скотта.** Рассматривается дискретная математическая модель цепочки $N$ связанных нелинейных автогенераторов, взятая из статьи [1]

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial u_k}{\partial t} - \varepsilon\nu\frac{\partial}{\partial t}Lu_k + u_k = Lu_k - \varepsilon u_k^2\frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad k = 1,\ldots,N. \tag{1}$$

Здесь $Lu_k$ — разностный оператор вида $Lu_k = \delta^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$, $\varepsilon$ — малый параметр. Условия на границе взяты имеющими вид

$$u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0. \tag{2}$$

Исследованы варианты поведения системы, как в безрезонансном случае, так и в случае резонансов специального вида, были получены соответствующие нормальные формы и проведен локальный анализ устойчивости состояний равновесия системы. Ниже приведена нормальная форма, построенная в предположении отсутствия резонансов

$$2\frac{dz_n}{d\tau} = (1 - \nu(\omega_n^2 - 1))z_n - \frac{3}{4}z_n|z_n|^2 - \sum_{k=1,k\neq n}^{N} z_n|z_k|^2, \quad n = 1,\ldots,N, \tag{3}$$

где $\omega_n = \sqrt{1 + 2\delta^2(1 - \cos\dfrac{\pi n}{N+1})}, \quad n = 1,\ldots,N.$

Сформулируем теорему о сосуществовании в исходной системе максимального числа устойчивых однокомпонентных режимов (см. аналогичные утверждения в [2, 3]).

**Теорема.** *Пусть для краевой задачи (1) — (2) выполнено условие*

$$\omega_N^2 < \frac{1+\nu}{\nu},$$
$$1 - \nu(\omega_1^2 - 1) < \frac{4}{3}(1 - \nu(\omega_N^2 - 1)),$$

*где $\omega_1, \omega_N$ заданы выше, тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1) — (2) имеет максимальное количество (ровно $N$) сосуществующих орбитально асимптотически устойчивых циклов, асимптотика которых задается следующей формулой:*

$$u_i(t,j) = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-\nu(\omega_i^2-1)}\cos(\omega_i t + \varphi_i)\sin\frac{\pi i j}{N+1} + O(\varepsilon), \quad i = 1,\ldots,N.$$

Заметим при этом, что все остальные режимы исходной системы с числом ненулевых компонент, большим единицы, неустойчивы.


1. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Садовничий В. А.* Математические аспекты теории развития турбулентности по Ландау // УМН. 2008. 63:2(380). С. 21—-84.
2. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау // ТМФ. 2009. 158:2. С. 292—-311.
3. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Хаотическая буферность в цепочках связанных осцилляторов // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, №1. С. 41—49.


**Кубышкин Е.П. Метод равномерной нормализации в исследовании периодических решений дифференциально-разностных уравнений с малым параметром при производной.**

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение вида

$$\varepsilon_1\dot{x}(t) + x(t) + f(x(t-1)) = 0, \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon_1 << 1$, $f(x) \equiv -f(-x)$ — нелинейная функция класса $C^\infty$, $f(x) = f_1x + f_3x^3 + o(|x|^3)$ $(|x| < x_0, f_1 > 0, f_3 < 0)$. Уравнения вида (1) возникают при изучении многих прикладных задач. В предположении $f_1 = 1+\varepsilon_2, |\varepsilon_2| << 1$ изложен метод равномерной по $\varepsilon$ $(\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2), |\varepsilon| < \varepsilon_0, |\varepsilon| = (\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)^{1/2})$ нормализации уравнения (1), с помощью которого изучаются его периодические решения, возникающие из нулевого состояния при изменении параметров и принадлежащие некоторой фиксированной окрестности нулевого решения.

Введем в рассмотрение характеристическое уравнение

$$P(\lambda;\varepsilon_1) \equiv \varepsilon_1\lambda + 1 + (1+\varepsilon_2)\exp(-\lambda) = 0$$

линейной части уравнения (1).

**Утверждение 1.** *Множество* $\{\lambda_n(\varepsilon), \lambda_{-n}(\varepsilon) = \overline{\lambda}_n(\varepsilon), n = 1,3,5,...\}$, *где* $\lambda_n(\varepsilon) = i\pi n + \ln(1+\varepsilon_2) + \lambda^1(i\pi n + \ln(1+\varepsilon_2);\varepsilon_1) = i\pi n + \ln(1+\varepsilon_2) - \ln(1+\varepsilon_1(i\pi n + \ln(1+\varepsilon_2))) + o(|\varepsilon|)$, *определяет совокупность корней характеристического уравнения. Здесь* $\lambda^1(w;\varepsilon_1) \equiv -\ln(1+\varepsilon_1(w-\ln(1+\varepsilon_1(w-\ln(1+\varepsilon_1(w-...))))))$, *второе равенство в определении* $\lambda_n(\varepsilon)$ *выполняется равномерно относительно* $n$.

Обозначим через $l_2$ и $l_2^1$ $(l_2^1 \subset l_2)$ пространства последовательностей вида $z = (z_1,z_3,z_5,...), z_j \in C$, удовлетворяющих условиям $||z||_{l_2}^2 = \sum_{n=1}^\infty |z_n|^2 < \infty$ и $||z||_{l_2^1}^2 = \sum_{n=1}^\infty |z_n\lambda_n(\varepsilon)|^2 < \infty$ соответственно, $s(r_0) = \{z : ||z||_{l_2^1}^2 < r_0\}$ и введем в рассмотрение систему обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве $l_2$ вида:

$$\dot{z_n} = \lambda_n(\varepsilon)z_n + Z_n^{(3)}(z,\overline{z};\varepsilon), \quad \Big(Z_n^{(3)}(z,\overline{z};\varepsilon) \equiv \sum_{(n_1n_2n_3)\in\Omega_n^3} d_{n_1n_2n_3}(\varepsilon)z_{n_1}z_{n_2}z_{n_3}\Big), \tag{2}$$

в которой $(n = \pm 1, \pm 3, \ldots), \Omega_n^3 = \{(n_1, n_2, n_3) : n_j = \pm 1, \pm 3 \ldots, n = n_1 + n_2 + n_3\}$, $z_{-n} = \overline{z_n}$, $z \in s(r_0)$, $d_{-n_1-n_2-n_3} = \overline{d_{n_1n_2n_3}}$, $d_{n_1n_2n_3}(\varepsilon) = [\varepsilon_1 + (1+\varepsilon_2)\exp(-\lambda_{n_1n_2n_3}(\varepsilon))\,(1 - \exp(\lambda_{n_1n_2n_3}(\varepsilon) - \lambda_n(\varepsilon))/(\lambda_{n_1n_2n_3}(\varepsilon) - \lambda_n(\varepsilon))]^{-1} p f_3 \exp(-\lambda_{n_1n_2n_3}(\varepsilon)) \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1\lambda_n)^{1/2}\,(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1\lambda_{n_1})^{-1/2} \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1\lambda_{n_2})^{-1/2}(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1\lambda_{n_3})^{-1/2}$. Параметр $p$ принимает значение $1, 2$ или $3$ в зависимости от вида резонанса. Систему уравнений (2) будем называть равномерной нормальной формой уравнения (1). Перейдем в (2) к полярным координатам, положив $z_n = \rho_n \exp(i\tau_n)(\rho_n \geq 0)$. Структура системы уравнений (2) такова, что позволяет ввести одну „быструю“ переменную $\tau_1$, для которой имеем дифференциальное уравнение $\dot{\tau_1} = \pi + \sigma_1(\varepsilon) + T(\rho, \theta; \varepsilon)$, и счетное число „медленных“ переменных $\rho = (\rho_1, \rho_3, \rho_5, \ldots)$, $\theta = (\theta_1, \theta_3, \theta_5, \ldots)$ $(\theta_j \in [0, 2\pi))$, для которых имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\rho_n} = \gamma_n(\varepsilon)\rho_n + R_n(\rho, \theta; \varepsilon), \quad \dot{\theta_n} = \delta_n(\varepsilon) + \Theta_n(\rho, \theta; \varepsilon), (n = 1, 3, 5, \ldots). \tag{3}$$

В (3) функционалы $R_n(\rho, \tau; \varepsilon), \Theta_n(\rho, \theta; \varepsilon)$ и функционал $T(\rho, \tau; \varepsilon)$ гладко зависят от своих переменных и $2\pi$ периодические по $\theta_j$ $(j = 1, 3, 5, \ldots)$, $\lambda_n(\varepsilon) = \gamma_n(\varepsilon) + i\sigma_n(\varepsilon)$, $\delta_n(\varepsilon)$ $(\delta(0) = 0)$ является конечной линейной комбинацией из $\sigma_j(\varepsilon)$.

Предположим, что в области $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ имеется подобласть $\Omega(\varepsilon_0)$, примыкающая к точке $\varepsilon = 0$, при значениях $\varepsilon$ из которой система уравнений (3) имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия $(\rho^*(\varepsilon), \theta^*(\varepsilon)), (\rho^*(\varepsilon) \to 0, \theta^*(\varepsilon) \to \theta^*(0) \in [0; 2\pi)$ при $\varepsilon \to 0, \rho^*(\varepsilon) \in l_2^1)$. Обозначим $\rho = \rho(\varepsilon) = ||\rho^*(\varepsilon)||_{l^1} = \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \rho_j^{*2}(\varepsilon)|\lambda_j(\varepsilon)|^2\right)^{1/2}$, $\xi_n^*(\varepsilon) = \rho_n^*(\varepsilon)/\rho$ и введем фазу синхронизации $\alpha_n^*(\varepsilon) = \tau_n - n\tau_1$, вычисленную на указанном состоянии равновесия.

**Утверждение 2.** *Пусть при $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$ для некоторого $\varepsilon_0$ система уравнений (3) имеет состояние равновесия с перечисленными выше свойствами. Тогда при указанных значениях $\varepsilon$ уравнение (1) имеет асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл, период которого $T(\varepsilon) \to 2$ при $\varepsilon \to 0$ и имеющий следующую асимптотическую формулу:*

$$x^*(t; \varepsilon) = \rho x_1^*(\tau_1; \varepsilon) + \rho^3 x_3^*(\tau_1; \rho, \varepsilon), \quad x_1^*(\tau_1; \varepsilon) = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_n^*(\varepsilon) \exp(i(n\tau_1 + \alpha_n^*(\varepsilon))),$$
$$\dot{\tau_1} = \pi + \sigma_1(\varepsilon) + \rho^2 \sigma_2^*(\rho, \varepsilon),$$

*где функции $x_3^*(\tau_1; \rho, \varepsilon) \equiv x_3^*(\tau_1 + 2\pi; \rho, \varepsilon)$ и $\sigma_2^*(\rho, \varepsilon)$ непрерывны по совокупности переменных и бесконечно дифференцируемы по $\tau_1, \rho$.*

**Глызин С. Д., Горчакова Е. В. Слабое взаимодействие двух не идентичных уравнений Хатчинсона.** Рассматривается система двух слабосвязанных логистических уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{N_1} &= r_1\,[1 - N_1(t-1)]\,N_1 + D(N_2 - N_1), \\ \dot{N_2} &= r_2\,[1 - N_2(t-h)]\,N_2 + D(N_1 - N_2), \end{aligned} \tag{1}$$

находящая приложения в популяционной динамике. Локальный анализ (1) выполняется при условии, что параметры задачи близки к критическому случаю двух пар чисто мнимых собственных значений. Ниже считаем

$$r_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon,\ r_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha\varepsilon,\ h = 1 + \varepsilon h_0,\ D = \varepsilon d, \tag{2}$$

где $\varepsilon$ — положительный малый параметр, а величины $\alpha$, $h_0$, $d$ имеют порядок единицы. Отметим, что параметр связи $d > 0$, а знак $\alpha$ и $h_0$, вообще говоря, произволен.

Для применения метода нормальных форм в окрестности состояния равновесия $N_1 = N_2 \equiv 1$ выполним стандартную замену Пуанкаре–Боголюбова–Митропольского

$$N_j(t,s) = 1 + \sqrt{\varepsilon} u_{0j}(t,s) + \varepsilon u_{1j}(t,s) + \varepsilon^{3/2} u_{2j}(t,s) + \ldots \quad j = 1,2, \tag{3}$$

где $s = \varepsilon t$ — медленное время, $u_{0j}(t,s) = z_j(s)\exp(i\pi t/2) + \bar{z}_j(s)\exp(-i\pi t/2)$, а $u_{1j}(t,s)$ и $u_{2j}(t,s)$ — 4-периодические по $t$ функции. Медленно меняющиеся комплексные амплитуды $z_1(s)$ и $z_2(s)$ определяются из условий разрешимости задач для $u_{2j}(t,s)$ $(j = 1,2)$ в классе 4-периодических по $t$ функций. Система

$$\begin{aligned} z_1' \cdot \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) &= iz_1 + \frac{\pi(-1+3i)}{5}|z_1|^2 z_1 + d(z_2 - z_1), \\ z_2' \cdot \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\frac{\pi^2}{4}h_0 + \alpha i\right) z_2 + \frac{\pi(-1+3i)}{5}|z_2|^2 z_2 + d(z_1 - z_2), \end{aligned} \tag{4}$$

представляет собой нормальную форму системы (1) при условиях (2) с отброшенными членами более высокого по $\varepsilon$ порядка малости. Штрихом в (4) обозначена производная функций $z_j(s)$ по $s$. Для нормальной формы выполнена стандартная теорема о соответствии, состоящая в том, что *ее экспоненциально устойчивым или дихотомичным автомодельным циклам и торам соответствуют, при достаточно малых $\varepsilon$, циклы и торы исходной системы* (1) *той же устойчивости.* Представляет интерес подробное исследование фазовых перестроек (4) при изменении параметра связи $d$, а также выявление изменений бифуркационных сценариев при изменении параметров $\alpha$ и $h_0$.

Отметим, что система (4) исследовалась в [1] при $\alpha = 1$ и $h_0 = 0$, а в статье [2] — в случае связи конкурентного типа, наконец, в статьях [3] и [4] аналогичная задача решалась для пары осцилляторов из нейродинамики.

1. *Глызин С. Д.* Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения «реакция-диффузия» // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, №6. С. 805–811.

2. *Горчакова Е. В.* Динамика слабого взаимодействия в системе близких видов // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, № 1. С. 68–74.

3. *Глызин С.Д., Киселева Е.О.* Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, № 2. С. 75–88.

4. *Глызин С.Д., Киселева Е.О.* Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17, № 2. С. 140–150.

**Кащенко С. А. Об одном уравнении для химеры.** В работе [1] предложена следующая модель химеры:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{2}(Z - z^2\overline{Z}) + D\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$B = \int\limits_{-L/2}^{L/2} dx' G(|x - x'|) z(x', t), \tag{2}$$

$$Z = B\exp[i\beta_0 + i\beta_1|B|^2] \tag{3}$$

с $L$-периодическими краевыми условиями

$$z(x+L,t) \equiv z(x,t). \tag{4}$$

Интересом к этой модели автор обязан А. Пиковскому.

По-видимому, представляет интерес несколько иная модель, которая имеет два существенных отличия от (1)–(4).

Первое из них связано с тем, что интегрирование в (2) происходит по бесконечному промежутку

$$B = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' G(|x-x'|)z(x',t). \tag{5}$$

Важно отметить, что в этом случае, в отличие от (2), краевая задача (1),(3),(4),(5) явно не зависит от пространственной переменной.

Предполагается, что значения функции $G(s)$ сосредоточены в окрестности $s = 0$. В связи с этим удобно считать, что

$$G(s) = (\sigma\sqrt{\pi})^{-1}\exp(-\sigma^{-2}s^2), \qquad \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(s)ds = 1\Big). \tag{6}$$

Отметим еще, что после стандартной замены $x \to \frac{L}{2\pi}x$ можно перейти от (4) к $2\pi$-периодической краевой задаче. При этом коэффициент $D$ в (1) меняется на $\varepsilon^2 D$, а коэффициент $\sigma$ в (6) на $\varepsilon\sigma$.

Рассмотрим вопрос о существовании бегущих волн — решений вида

$$z = \rho_k\exp(i\omega_k t + ikx), \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{7}$$

Подставляя (7) в (1), (3), (5), приходим к соотношениям

$$\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2\sigma^2k^2}{4}\Big)(1-\rho_k^2)\cos\Big(\beta_0 + \beta_1\rho_k^2\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2\sigma^2k^2}{2}\Big)\Big) = 2\varepsilon^2k^2D_1, \tag{8}$$

$$\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2\sigma^2k^2}{4}\Big)(1+\rho_k^2)\sin\Big(\beta_0 + \beta_1\rho_k^2\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2\sigma^2k^2}{2}\Big)\Big) = 2\varepsilon^2k^2D_2 + 2\omega_k. \tag{9}$$

При $D_1 = 0$ имеем бесконечно много корней $\rho_{k0} = 1$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ со своими $\omega_{k0}$ и $\rho_{km} = \left(\exp\Big(\frac{\sigma^2k^2}{2}\Big)\Big[\frac{\pi}{2}m - \beta_0\Big]\beta_1^{-1}\right)^{1/2}$, (при $\Big[\frac{\pi}{2}m - \beta_0\Big]\beta_1^{-1} > 0$) $m = 2n-1$, $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, т.е. имеется последовательность $\rho_{km} \to \infty$ при $|k| \to \infty$ и при $|m| \to \infty$.

Можно показать, что и при любом $D_1 > 0$ тоже есть сколь угодно большие корни, т.е. в моделях (1)–(4) и (1), (3), (4), (5) нет диссипативности. Можно исследовать на устойчивость каждую такую волну. При малых $\varepsilon$ имеем либо неустойчивость, либо критический случай бесконечной размерности в задаче об устойчивости.

Второе отличие от (1)–(4) обусловлено необходимостью соблюсти свойство диссипативности задачи. В этой связи представляется логичным в формулу (2) дополнительно ввести вещественную часть в коэффициент при $|B|^2$, т.е.

$$Z = B\exp[i\beta_0 + (i\beta_1 - \mu)|B|^2], \tag{10}$$

где $\mu > 0$. Отметим, что при нахождении амплитуды бегущей волны (7) получаем уравнение, которое отличается от (9) только наличием дополнительного множителя $\exp \mu\rho^2$ в правой части. В этом случае уже нельзя сделать вывод об отсутствии диссипативности при $D_1 = 0$: все значения $\rho_k$ находятся в некотором промежутке $\rho_k \le c$ (где $c$ не зависит от $k$). Интересно отметить, что при достаточно малых $\mu$ $(0 < \mu \ll 1)$ имеем асимптотически точную оценку

$$c = \mu^{-1/2}(1 + O(\mu)),$$

а количество $N$ бегущих волн, для которых $\rho_k > 1$, удовлетворяет асимптотически точной оценке

$$N = 2(\varepsilon\sigma)^{-1}|\ln\mu|^{1/2}(1 + O((\ln\mu)^{-1})).$$

Тем самым, с чисто математической точки зрения, имеет смысл рассматривать краевую задачу

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{2}(Z - z^2\overline{Z}) + D\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad z(x+L,t) \equiv z(x,t),$$

$$B = (\sigma\sqrt{\pi})^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\sigma^{-2}s^2)z(x+s,t)ds,$$

$$Z = B\exp[i\beta_0 + (i\beta_1 - \mu)|B|^2].$$

1. *Bordyugov G., Pikovsky A., Rosemblum M.* Self-emerging and turbulent chimeras in oscillator chains // Phys. Rev. 2010. E 82. 035205 (R) (4 pages).