

Модел. и анализ информ. систем. Т. 20, № 3 (2013) 86–98
© Быкова Н. Д., Глызин С. Д., Кащенко С. А., 2013

УДК 517.9

Параметрический резонанс при двухчастотном возмущении в логистическом уравнении с запаздыванием¹

Быкова Н. Д.* , Глызин С. Д.** , Кащенко С. А.*

* *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31*

** *Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14*

e-mail: n.bykova90@gmail.com, glyzin@uniyar.ac.ru, kasch@uniyar.ac.ru

получена 20 апреля 2013

Ключевые слова: уравнение с запаздыванием, параметрический резонанс, усреднение, метод нормальных форм, хаотическая динамика

Рассматривается логистическое уравнение с запаздыванием в цепи обратной связи и периодическим возмущением параметров. Параметры задачи (коэффициент линейного роста и запаздывание) выбраны близкими к критическим значениям, при которых от состояния равновесия уравнения отщепляется цикл. Далее предполагается, что эти величины имеют двухчастотную зависимость от времени, причем частоты воздействия близки к удвоенной частоте собственных колебаний задачи. При указанных предположениях и при условии малости величины надкритичности выполняется асимптотический анализ, который приводит к двумерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с периодической линейной частью. При условии, что параметр, характеризующий расстройку частот внешнего воздействия, велик или мал к полученной системе могут быть применены стандартные асимптотические методы. Если же это не так, выполняется численный анализ. На его основе были выяснены основные сценарии фазовых перестроек, найдена область хаотических колебаний. Основной вывод состоит в том, что динамика в случае параметрического резонанса при двухчастотном возмущении принципиально сложнее по сравнению с динамикой в случае одночастотного возмущения.

1. Постановка задачи. Логистическое уравнение

$$\dot{u} = r[1 - u]u \quad (1)$$

занимает особое место в задачах моделирования множества процессов и явлений [1, 2]. По смыслу задач функция $u(t)$ положительна. Коэффициент r положителен.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053, при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.В37.21.0457) и при поддержке РФФИ (проект №12-01-31527 мол_а).

Он характеризует экспоненциальный рост $u(t)$ при относительно малых значениях этой функции. В задачах математической экологии коэффициент r называют мальтузианским коэффициентом. Выражение $[1 - u]$, стоящее в (1), определяет так называемое насыщение. При всех (положительных) начальных условиях решение (1) стремится к состоянию равновесия $u_0 \equiv 1$ при $t \rightarrow \infty$.

В логистическом уравнении с запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u \quad (2)$$

учтен тот факт, что эффект насыщения происходит с некоторой положительной задержкой по времени T . При условии $rT \leq 37/24 \approx 1.51$ динамические свойства систем (1) и (2) совпадают: все (положительные) решения (2) тоже стремятся к u_0 при $t \rightarrow \infty$. Состояние равновесия u_0 в (2) асимптотически устойчиво при $rT \leq \pi/2 \approx 1.57$. По-видимому, все решения (2) стремятся к u_0 при $t \rightarrow \infty$ для $rT \leq \pi/2$. Некоторые результаты на эту тему приведены в [3–5].

Рассмотрим линеаризованное на u_0 уравнение

$$\dot{u} = -ru(t - T) \quad (3)$$

и его характеристический квазиполином

$$\mu = -r \exp(-\mu T). \quad (4)$$

При $rT < \pi/2$ все корни (4) имеют отрицательные вещественные части, поэтому все решения из некоторой достаточно малой окрестности u_0 стремятся к u_0 при $t \rightarrow \infty$. Если же $rT > \pi/2$, то (4) имеет корень с положительной вещественной частью. Тем самым, задача о динамике (2) в окрестности u_0 становится нелокальной. При $r = r_0$, $T = T_0$, где $r_0 T_0 = \pi/2$, характеристическое уравнение (4) имеет пару чисто мнимых корней

$$\mu_{1,2} = \pm i\pi(2T_0)^{-1}, \quad (5)$$

а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части.

Рассмотрим ситуацию, когда значения r и T «мало» отличаются от r_0 и T_0 соответственно. Пусть

$$r = r_0 + \varepsilon r_1, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 \quad \text{и} \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Тогда (см., например, [6–9]) в некоторой достаточно малой (в метрике $C_{[-T,0]}$) окрестности u_0 уравнение (2) имеет локальное двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором это уравнение с помощью простых преобразований представимо с точностью до $O(\varepsilon^{1/2})$ в виде скалярного комплексного уравнения

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha\xi + d|\xi|^2\xi, \quad (6)$$

где $\tau = \varepsilon t$,

$$\alpha = \frac{r_0^2 T_1 + i r_1}{1 + i\pi/2}, \quad d = d_0 + i c_0 = -\frac{r_0}{10(1 + \pi^2/4)}(3\pi - 2 + i(\pi + 6)), \quad (7)$$

отметим, что $\operatorname{Re} d < 0$. Функция $\xi(\tau)$ связана с решением (2) соотношением

$$u(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2} \left[\xi(\varepsilon t) \exp\left(i \frac{\pi}{2T_0} t\right) + \bar{\xi}(\varepsilon t) \exp\left(-i \frac{\pi}{2T_0} t\right) \right] + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau) + O(\varepsilon^2), \quad (8)$$

причем зависимость от $t - 4T_0$ -периодическая. Устойчивому циклу в (6) отвечает устойчивое периодическое решение (2) согласно формуле (8).

В настоящей работе рассматривается вопрос о локальной — в окрестности u_0 — динамике логистического уравнения с запаздыванием (2) при двухчастотном возмущении, т. е. в предположении, что коэффициенты r и T в (2) зависят от времени и

$$r = r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon r_{11} \sin \omega_1 t + \varepsilon r_{12} \sin \omega_2 t, \quad (9)$$

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon T_{11} \sin \omega_1 t + \varepsilon T_{12} \sin \omega_2 t, \quad (10)$$

причем значения r_1 и T_1 неположительны и

$$r_1 + T_1 < 0. \quad (11)$$

Неравенство (11) означает, что в отсутствие возмущений нулевым средним в (9), (10) состояние равновесия u_0 в (2) (и $\xi \equiv 0$ в (6)) асимптотически устойчиво. При фиксированных ω_1 и ω_2 таких, что $\omega_{1,2} = \pi/T_0$, поставленная задача решается просто: при всех достаточно малых значениях ε решения (2) из некоторой достаточно малой, но не зависящей от ε окрестности u_0 , стремятся к u_0 при $t \rightarrow \infty$.

Здесь рассматривается задача о параметрическом резонансе при двухчастотном возмущении, т. е. предполагается, что значения частот ω_1 и ω_2 близки к удвоенной частоте π/T_0 собственных колебаний в (3):

$$\omega_1 = \frac{\pi}{T_0} + \varepsilon \delta_1, \quad \omega_2 = \frac{\pi}{T_0} + \varepsilon \delta_2. \quad (12)$$

Будет показано, что при условиях (12) динамика (2) достаточно богата и разнообразна. При этом случай двухчастотных возмущений принципиально сложнее случая одночастотного возмущения, когда $\omega_1 = \omega_2$. Отметим, что в линейной постановке задача о параметрическом резонансе при двухчастотных возмущениях рассматривалась в [10, 11].

2. Алгоритмическая часть. Соответствующие построения базируются на формальном соотношении (8). С его помощью нелинейное уравнение с запаздыванием (2) при условиях (9), (10) редуцируется к обыкновенному дифференциальному скалярному комплексному уравнению для определения медленно меняющейся амплитуды $\xi(\tau)$.

Подставим (8) в (2) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . На третьем шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, из условия разрешимости получающегося уравнения относительно $u_3(t, \tau)$ получаем уравнение относительно $\xi(\tau)$:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha \xi + A(\tau) \bar{\xi} + d|\xi|^2 \xi, \quad (13)$$

где $A(\tau) = \alpha_1 \exp(i\delta_1\tau) + \alpha_2 \exp(i\delta_2\tau)$ и $\alpha_1 = T_{11} \frac{r_0^2}{2i(1+i\pi/2)}$, $\alpha_2 = T_{12} \frac{r_0^2}{2i(1+i\pi/2)}$.

После замены в (13) $\xi = v \exp(\frac{i}{2}\delta_1\tau)$, $\delta_2 - \delta_1 = \mu$ ($\delta_2 > \delta_1$) и $\mu\tau = \tau_1$ получаем уравнение с 2π -периодическими коэффициентами

$$\mu \frac{dv}{d\tau_1} = \alpha_0 v + (\alpha_1 + \alpha_2 \exp(i\tau_1))\bar{v} + d|v|^2 v, \quad (14)$$

где $\alpha_0 = \alpha - i\delta_1$. Напомним, что $\operatorname{Re} \alpha_0 < 0$, $\operatorname{Re} d < 0$.

Исследуем динамические свойства уравнения (14) при различных значениях параметров μ , δ_1 , α_1 и α_2 . Отметим, что грубому периодическому решению (14) отвечает, согласно асимптотическому соотношению (8), двумерный тор той же устойчивости.

В случае параметрического резонанса при одночастотном возмущении (т. е. при $\alpha_2 = 0$) уравнение (14) хорошо изучено (см., например, [12]).

В [10, 11] исследовалась на устойчивость линейная часть (14). Приведем здесь соответствующие результаты. Сначала представим линейную часть (14) в вещественной форме

$$\begin{aligned} \mu \frac{dw}{d\tau_1} &= B(\tau_1)w, \quad w = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} v \\ \operatorname{Im} v \end{pmatrix}, \\ B(\tau_1) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \alpha_0 + B_1(\tau_1) & -\operatorname{Im} \alpha_0 + B_2(\tau_1) \\ \operatorname{Im} \alpha_0 + B_2(\tau_1) & \operatorname{Re} \alpha_0 - B_1(\tau_1) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $B_1(\tau_1) = \operatorname{Re} \alpha_1 + \operatorname{Re} \alpha_2 \cos \tau_1 - \operatorname{Im} \alpha_2 \sin \tau_1$, $B_2(\tau_1) = \operatorname{Im} \alpha_1 + \operatorname{Re} \alpha_2 \sin \tau_1 + \operatorname{Im} \alpha_2 \cos \tau_1$.

При достаточно больших μ применим хорошо известный принцип усреднения [16]. Свойства устойчивости определяются тогда усредненным уравнением

$$\mu \frac{dw}{d\tau_1} = B_0 w, \quad B_0 = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \alpha_0 + \operatorname{Re} \alpha_1 & -\operatorname{Im} \alpha_0 + \operatorname{Im} \alpha_1 \\ \operatorname{Im} \alpha_0 + \operatorname{Im} \alpha_1 & \operatorname{Re} \alpha_0 - \operatorname{Re} \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым случай больших значений μ сводится к случаю параметрического резонанса при одночастотном возмущении.

Предположим теперь, что

$$0 < \mu \ll 1,$$

тогда, исходя из результатов статей [10, 11, 13], устойчивость нулевого решения системы (15) тесно связана с поведением функции

$$\rho(\tau_1) = \det (B(\tau_1) - \operatorname{Re} \alpha_0 \cdot E). \quad (16)$$

В зависимости от того, является ли функция $\rho(\tau_1)$ положительной, отрицательной или знакопеременной, выделяются три варианта в исследовании системы (15). Учитывая вид матрицы $B(\tau_1)$ в (15), имеем

$$\rho(\tau_1) = (\operatorname{Im} \alpha_0)^2 - (B_1^2(\tau_1) + B_2^2(\tau_1)), \quad (17)$$

тем самым, подходящим образом меняя $\operatorname{Im} \alpha_0$, можно добиться выполнения любого из этих условий. Следуя [10], опишем динамику системы (15). Как оказалось, имеют место три следующих варианта поведения решений системы (15):

1. Пусть $\rho(\tau) > 0$ при всех $\tau > 0$, тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при $0 < \mu \leq \mu_0$ нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво.
2. Пусть $\rho(\tau) < 0$ при всех $\tau > 0$, тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при $0 < \mu \leq \mu_0$ нулевое решение (15) асимптотически устойчиво (неустойчиво), если

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{-\rho(\tau)} d\tau + \operatorname{Re} \alpha_0 < 0 (> 0). \quad (18)$$

3. Наконец, в случае знакопеременной функции $\rho(\tau)$ задача (15) является системой с точками поворота. При этом, если для нее выполнено условие

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{|\rho(\tau)| - \rho(\tau)}{2}} d\tau > \operatorname{Re} \alpha_0, \quad (19)$$

то устойчивость и неустойчивость решений системы (15) бесконечно чередуются при $\mu \rightarrow 0$. (Отметим, что, если в (19) неравенство заменить на противоположное, то нулевое решение асимптотически устойчиво при достаточно малых μ .)

Перечисленные свойства решений системы (15) позволяют сделать выводы о локальной устойчивости или неустойчивости нулевого решения нелинейного уравнения (14) при достаточно больших или достаточно малых μ . Фазовые перестройки уравнения (14) при условно «средних» значениях параметра не поддаются асимптотическому анализу. В связи с этим уместно применить численные методы. Приемлемость их применения для отыскания устойчивых режимов уравнения (14) обусловлена, в частности, и его очевидной диссипативностью ($\operatorname{Re} d < 0$). Последнее свойство позволяет выбирать начальные условия лишь из некоторой окрестности точки ноль фазовой плоскости.

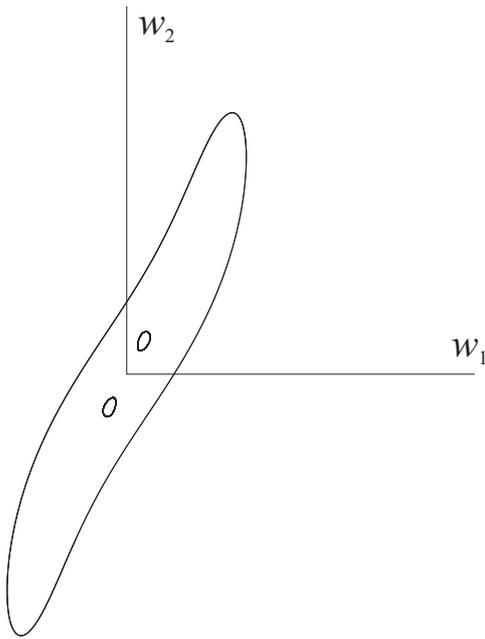
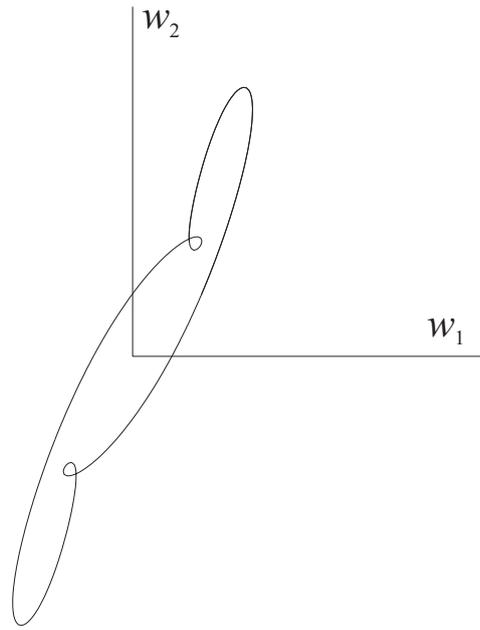
3. Результаты численного исследования. Перейдем к численному анализу нелинейного уравнения (14). По аналогии с (15) из уравнения (14) имеем

$$\begin{aligned} w_1' &= \nu((\operatorname{Re} \alpha_0 + B_1(\tau_1))w_1 - (\operatorname{Im} \alpha_0 - B_2(\tau_1))w_2 + (d_0 w_1 - c_0 w_2)(w_1^2 + w_2^2)), \\ w_2' &= \nu((\operatorname{Im} \alpha_0 + B_2(\tau_1))w_1 + (\operatorname{Re} \alpha_0 - B_1(\tau_1))w_2 + (c_0 w_1 + d_0 w_2)(w_1^2 + w_2^2)), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\nu = 1/\mu$, $d = d_0 + ic_0$, а w_1, w_2 — компоненты вектора w . Отметим, что наряду с диссипативностью система (20) обладает еще свойством симметрии относительно одновременной смены знака переменных w_1 и w_2 .

В случае, если матрица линейной части $B(\tau_1)$ не зависит от времени, фазовые перестройки происходят в системе (20) стандартным образом и описаны, например, в [12], а также в [17]. У системы (20) при этом могут быть устойчивыми только состояния равновесия и циклы.

При наличии периодического воздействия система (20) оказывается существенно сложнее, в ней возможно появление неупорядоченных колебаний. Стандартные ситуации, возникающие в данном случае, описаны, например, в книге [17]. Система (20) зависит от довольно большого числа параметров, изменение которых приводит к различным фазовым перестройкам. Опишем подробнее ситуацию, в которой появляются хаотические колебания.

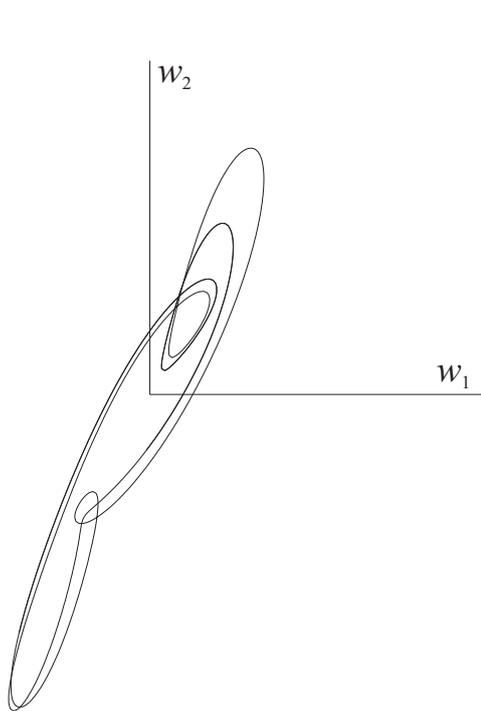
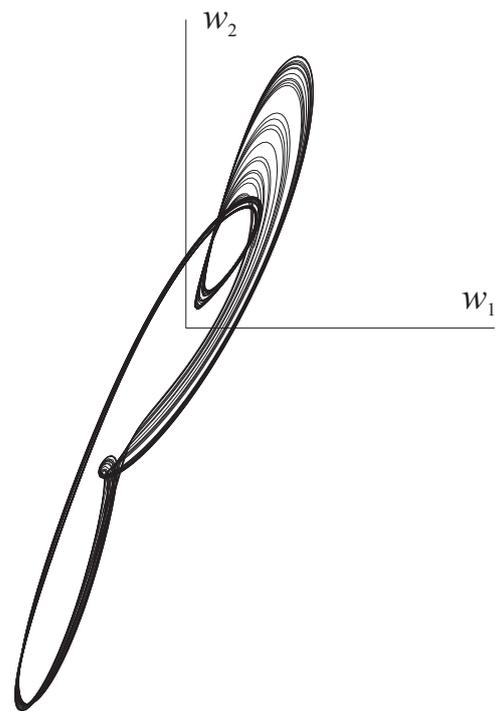

 Рис. 1. $\nu = 0.4$

 Рис. 2. $\nu = 0.8$

Предположим, что параметры задачи зафиксированы следующим образом:

$$r_1 = 0, T_1 = -0.1, \delta_1 = 1, T_{11} = 1, T_{12} = 0.1, \quad (21)$$

параметры d_0, c_0 определяются по формулам (7) и равны $d_0 \approx -0.528347$, $c_0 \approx -0.650515$. В качестве бифуркационного параметра примем величину ν и будем ее менять от малых к большим значениям. В этой ситуации динамика системы (20) определяется следующими численно определенными фазовыми перестройками. В областях с хаотическим поведением приведены только фрагменты динамики

1. При достаточно малых $\nu < \nu_1$, $\nu_1 \approx 0.369$ система (20) имеет два симметричных друг другу устойчивых цикла C_1, C_1^* .
2. При $\nu = \nu_1$ из уплотнения траекторий рождается устойчивый самосимметричный цикл C^S , который при $\nu_1 < \nu < \nu_2$, $\nu_2 \approx 0.435$ сосуществует с найденными ранее циклами C_1, C_1^* (на рис. 1 изображен фазовый портрет системы (20) при $\nu = 0.4$ с двумя симметричными циклами C_1, C_1^* и самосимметричным C^S).
3. При $\nu = \nu_2$ циклы C_1, C_1^* исчезают (сливаются с нулевым состоянием равновесия) и при $\nu_2 < \nu < \nu_3$, $\nu_3 \approx 0.895$ у системы остается лишь цикл C^S (см. рис. 2, полученный при $\nu = 0.8$).
4. При $\nu = \nu_3$ самосимметричный цикл C^S теряет симметрию и распадается на два симметричных друг другу цикла C_2, C_2^* , которые сосуществуют при $\nu_3 < \nu < \nu_4$, $\nu_4 \approx 0.933$.
5. $\nu = \nu_4$ — точка бифуркации удвоения циклов C_2, C_2^* (см. рис. 3, полученный при $\nu = 0.94$).

Рис. 3. $\nu = 0.94$ Рис. 4. $\nu = 0.95$

6. На промежутке $\nu_4 < \nu < \nu_5$, $\nu_5 \approx 0.945$ с каждым из циклов C_2, C_2^* происходит каскад бифуркаций удвоения, в результате чего появляется два симметричных друг другу хаотических режима (на рис. 4 изображен фазовый портрет одного из двух хаотических режимов системы (20) при $\nu = 0.95$).
7. При $\nu_5 < \nu < \nu_6$, $\nu_6 \approx 0.961$ наблюдаются два симметричных друг другу хаотических режима.
8. На промежутке $\nu_6 < \nu < \nu_7$, $\nu_7 \approx 0.966$ происходит обратный каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к появлению двух симметричных циклов C_3, C_3^* .
9. На промежутке $\nu_7 < \nu < \nu_8$, $\nu_8 \approx 0.97$ устойчива пара симметричных циклов C_3, C_3^* , а при $\nu = \nu_8$ в результате бифуркации расщепления сепаратрис появляется самосимметричный хаос (на рис. 5 изображен фазовый портрет самосимметричного хаотического режима системы (20) при $\nu = 1$).
10. При $\nu = \nu_9$, $\nu_9 \approx 1.015$ в результате обратной бифуркации расщепления сепаратрис появляются два симметричных друг другу цикла C_4, C_4^* , которые и остаются у системы при $\nu > \nu_9$ (на рис. 6 изображен фазовый портрет одного из двух устойчивых циклов системы (20) при $\nu = 1.05$).

Наглядное представление о фазовых перестройках, происходящих с системой (20) в области неупорядоченных колебаний, дает график зависимости старшего ляпуновского показателя аттрактора системы (20) от параметра ν , представленный на

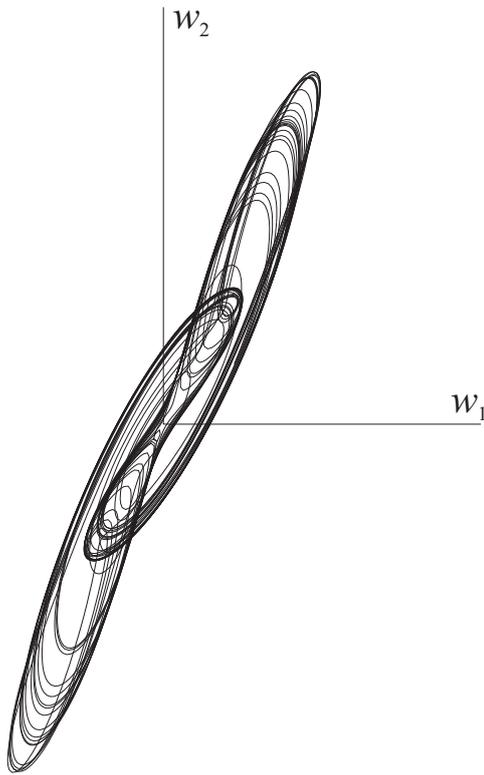
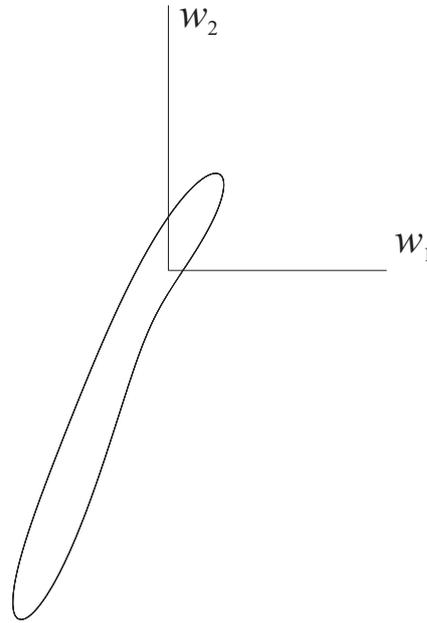

 Рис. 5. $\nu = 1.0$

 Рис. 6. $\nu = 1.05$

рис. 7. Вычисления выполнены с шагом по параметру $\Delta\nu = 0.5 \cdot 10^{-4}$. Еще два графика зависимости старшего ляпуновского показателя аттрактора представлены на рис. 8, 9. Они вычислены при тех же значениях параметров (21) за исключением параметра T_{12} и шага по параметру ν , которые приняты равными $T_{12} = 0.9$, $\Delta\nu = 0.5 \cdot 10^{-4}$ в случае рис. 8 и $T_{12} = 0.223$, $\Delta\nu = 0.25 \cdot 10^{-4}$ в случае рис. 9. График $\lambda_{\max}(\nu)$, очевидно, негладкий, более того, имеется большое, вероятно, неограниченное число точек, в которых $\lambda_{\max}(\nu)$ пересекает ось абсцисс. Отметим также точки, в которых функция $\lambda_{\max}(\nu)$, оставаясь неположительной, обращается в ноль. В этих точках происходят бифуркации удвоения периода или потери симметрии для циклов системы (20).

Вычисление ляпуновских экспонент выполнено с помощью программного комплекса Tracer3.70, разработанного Д.С. Глызиным, на основе варианта алгоритма Беннетина, изложенного в статье [18].

4. Обобщение результатов. Уравнение с малой диффузией. Полученные выше результаты распространяются (см. [14, 15]) на параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r[1 - u(t - T)]u \quad (22)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (23)$$

При условиях (9), (10) приходим к краевой задаче для определения медленно ме-

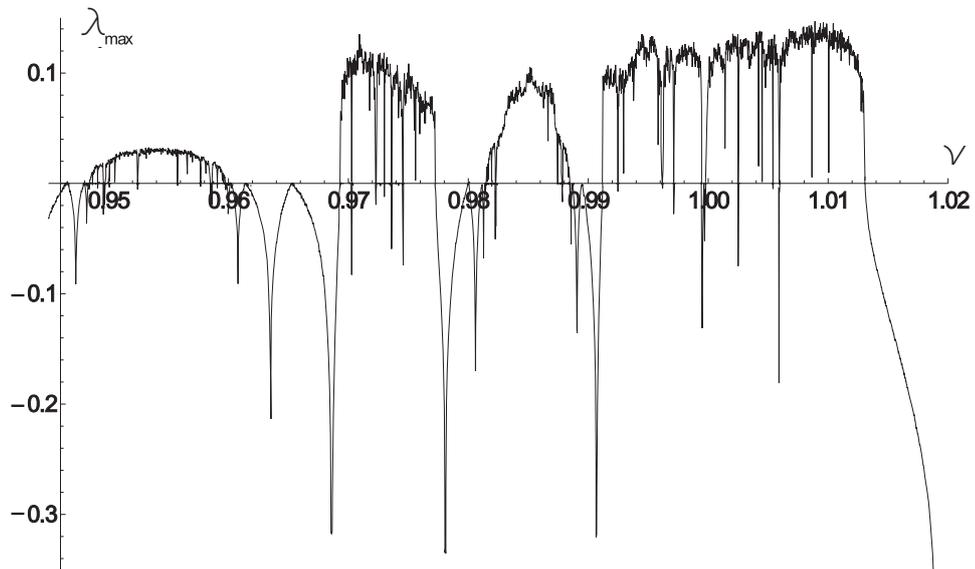


Рис. 7. Зависимость $\lambda_{\max}(\nu)$ при $T_{12} = 0.1$, $\Delta\nu = 0.25 \cdot 10^{-4}$

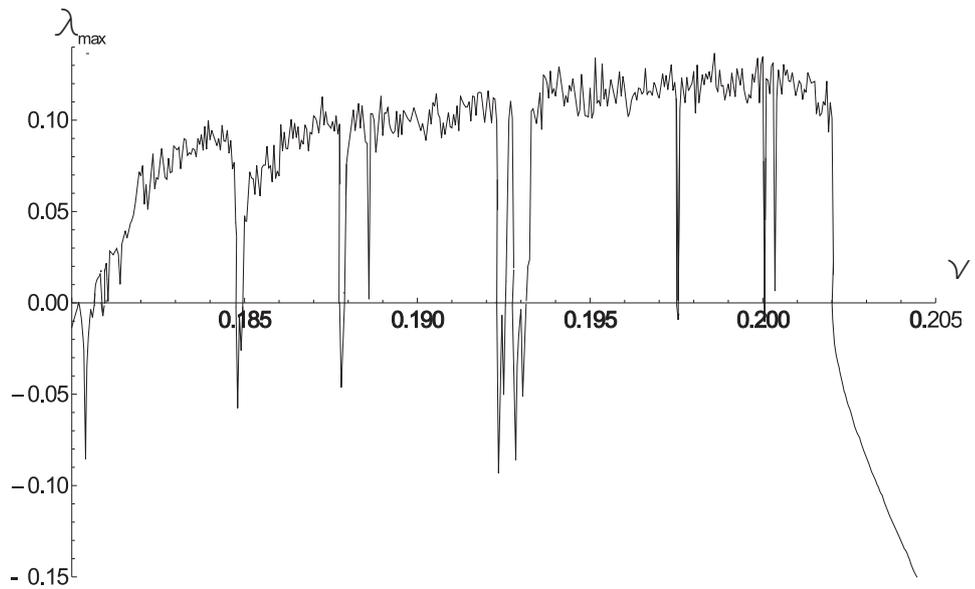


Рис. 8. Зависимость $\lambda_{\max}(\nu)$ при $T_{12} = 0.9$, $\Delta\nu = 0.5 \cdot 10^{-4}$

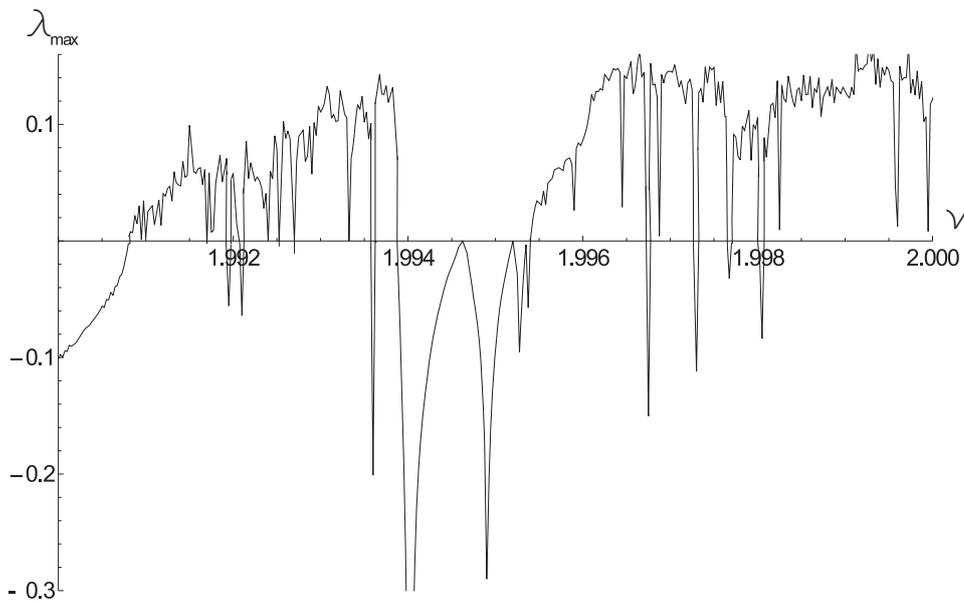


Рис. 9. Зависимость $\lambda_{\max}(\nu)$ при $T_{12} = 0.223$, $\Delta\nu = 0.25 \cdot 10^{-4}$

няющихся амплитуд $\xi(\tau, x)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \gamma \left(1 + i \frac{\pi}{2}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \alpha \xi + A(\tau) \bar{\xi} + d |\xi|^2 \xi, \quad (24)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \quad (25)$$

Связь между решениями этой краевой задачи и решениями (22), (23) устанавливает асимптотическая формула (8), где вместо $\xi(\tau)$ следует писать $\xi(\tau, x)$.

Конечно, динамика (24), (25) может быть существенно богаче и разнообразнее по сравнению с (13).

5. Выводы

5.1. Динамика в случае параметрического резонанса при двухчастотном возмущении принципиально сложнее по сравнению с динамикой в случае одночастотного возмущения. Появляются существенно более сложные по форме циклы (см. рис. 2, 3) и области (в пространстве параметров) нерегулярного поведения решений.

5.2. В случае $\rho(\tau_1) < 0$, т. е. при асимптотической устойчивости нулевого решения, не выявлено нестационарных установившихся решений (2).

5.3. При достаточно больших μ динамические свойства (2) относительно простые. При достаточно малых μ имеем сложно устроенные релаксационные устойчивые циклы. Они либо симметричны, либо сосуществуют два устойчивых симметричных относительно друг друга цикла.

5.4. Нерегулярные колебания характерны для «средних» значений параметра μ .

5.5 Нерегулярные колебания системы (20) реализуются в относительно узких областях изменения ν . Фазовые перестройки в этом случае связаны бифуркациями потери симметрии, с каскадами бифуркаций удвоения периодов и бифуркациями расщепления сепаратрис.

Список литературы

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 287 с. (*Volterra V. Variazione e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi.* — Mem. Accad. naz. Lincei. Ser. 6, 1926.)
2. *Verhulst P. F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // Correspondance mathématique et physique. 1838. 10. P. 113–121.
3. *Wright E. M.* A non-linear differential equation // J. Reine Angew. Math. 1955. Vol. 194, №1–4. P. 66–87.
4. *Кащенко С. А.* К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль: ЯрГУ, 1985. С. 55–62. (*Kaschenko S. A. K voprosu ob otsenke v prostranstve parametrov oblasti global'noy ustoychivosti uravneniya Khatchinsona // Nelineynnye kolebaniya v zadachakh ekologii. Yaroslavl: YarGU, 1985. S. 55–62 [in Russian].*)
5. *Кащенко С. А.* Асимптотика решений обобщённого уравнения Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 3. С. 32–62. (*Kaschenko S. A. Asymptotic of solutions of generalized Hutchinson's equation // Modeling and Analysis of Information Systems. 2012. V. 19, No 3. P. 32–62 [in Russian].*)
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с. (*Hartman P. Ordinary Differential Equations. Wiley, New York, 1964. 612 p.*)
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 422 с. (*Hale J. Theory of Functional Differential Equations. Springer, New York, 1977. 366 p.*)
8. *Wu Jianhong.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. Springer-Verlag New York, 1996. 442 p.
9. *Yang Kuang.* Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics. Academic Press, 1993. 398 p.
10. *Кащенко С. А., Колесов Ю. С.* Раскачивание «качелей» при помощи двухчастотной силы // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1978. С. 19–25. (*Kaschenko S. A., Kolesov Yu. S. Raskachivanie «kacheley» pri pomoschi dvuhchastotnoy sily // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl, 1980. S. 79–131 [in Russian].*)
11. *Кащенко С. А., Колесов Ю. С.* Параметрический резонанс в системах с запаздыванием при двухчастотном возмущении // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 2. С. 113–118. (English transl.: *Kashchenko S. A., Kolesov Yu. S. Parametric resonance in systems with delay under a two-frequency perturbation // Siberian Mathematical Journal. 1980. V. 21, Issue 2. P. 231–235.*)
12. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с. (*Bautin N. N. Leontovich E. A. Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti. M.: Nauka, 1990. 488 s. [in Russian].*)

13. *Васильева А. В., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с. (*Vasil'eva A. V., Butuzov V. F.* Asimptoticheskie razlozheniya reshenij singulyarno vozmushhennyh uravnenij. М.: Nauka, 1973. 272 s. [in Russian]).
14. *Кащенко С. А.* Исследование устойчивости решений линейных параболических уравнений с близкими к постоянным коэффициентами и малой диффузией // Труды семинара Петровского. 1991. Вып. 15. С. 128–155. (*Kaschenko S. A.* Issledovaniye ustoychivosti resheniy lineynykh parabolicheskikh uravneniy s blizkimi k postoyannym koeffitsiyentami i maloy diffuziyey // Trudy seminar Petrovskogo. 1991. Вып. 15. S. 128–155 [in Russian]).
15. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17, № 3(105) С. 3–146. (English transl.: *I'in A. M., Kalashnikov A. S., Oleinik O. A.* Linear equations of the second order of parabolic type // Russian Mathematical Surveys, 1962. V. 17, № 3. P. 1–143.)
16. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1958. 408 с. (English transl.: *Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A.* Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations. New York, Gordon and Breach, 1961. 573 p.)
17. *Гукенхеймер Д., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 560 с. (*Guckenheimer J. and Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. volume AMS 42. Springer-Verlag, New York, 1983. 459 p.)
18. *Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 268–273. (English transl.: *Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., and Rozov N. Kh.* The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor // Differential Equations. 2005. V. 41. No. 2. P. 284–289.)

Parametric Resonance in the Logistic Equation with Delay under a Two-Frequency Perturbation

Bykova N. D., Glyzin S. D., Kaschenko S. A.

*National Research Nuclear University MEPhI
Kashirskoye shosse 31, Moscow, 115409, Russia
P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

Keywords: difference-differential equation, parametric resonance, averaging, normal form, chaotic dynamics

A logistic equation with a delay feedback circuit and with periodic perturbation of parameters is considered. The problem parameters (a coefficient of the linear growth and a delay) are chosen close to the critical values at which a cycle is bifurcated from the equilibrium point. We assume that these values have a double-frequency relation to the time, the frequency of action being close to the doubled frequency of the natural vibration. Asymptotic analysis is performed under these assumptions and leads to a two-dimensional system of ordinary differential equations. The linear part of this system is periodic. If the parameter which defines the frequency detuning of the external action is large or small, we can apply standard asymptotic methods to the resulting system. Otherwise, numerical analysis is performed. Using the results of the numerical analysis, we clarify the main scenarios of phase transformations and find the area of chaotic oscillations. The main conclusion is that in case of parametric resonance the dynamics of the problem with double-frequency perturbation is more complicated than the dynamics of the problem with single-frequency perturbation.

Сведения об авторах:

Быкова Надежда Дмитриевна,

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
аспирант,

Глызин Сергей Дмитриевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей

Кащенко Сергей Александрович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования