Модел. и анализ информ. систем. Т. **20**, № **5** (2013) 62–77

УДК 517.911+517.935

Статистические характеристики управляемых систем, возникающие в различных моделях естествознания[1]

Ларина Я. Ю., Родина Л. И.

Удмуртский государственный университет
426034, Удмуртия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4

e-mail: yana_larina89@mail.ru, box0589@udmnet.ru

получена 21 июля 2013

Ключевые слова: управляемые системы, дифференциальные включения, инвариантные и статистически инвариантные множества

Продолжено исследование расширения понятия инвариантности множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Это расширение состоит в изучении статистически инвариантных множеств и статистических характеристик множества достижимости управляемых систем. В данной работе получены условия статистической инвариантности и исследованы свойства статистических характеристик для управляемых систем с периодическими коэффициентами. Показано, что свойство статистической инвариантности тесно связано со свойством допустимости периодических процессов для линейных управляемых систем. Допустимость означает, что любому периодическому управлению из фиксированного множества отвечает единственное периодическое решение, находящееся в заранее заданной области фазового пространства. Результаты работы могут найти применение при нахождении статистических характеристик, возникающих в различных моделях биологии, химии, экономики.

Введение

Задача о нахождении статистических характеристик возникает при исследовании инвариантных и статистически инвариантных множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Данной тематике посвящены работы [1]–[5], в которых предлагается новый подход к расширению понятия инвариантности. Этот подход состоит в вычислении относительной частоты пребывания множества достижимости управляемой системы в заранее заданном множестве $\mathfrak{M}$. Если такая частота равна единице, то множество $\mathfrak{M}$ названо статистически инвариантным. Необходимо добавить, что введение расширения понятия инвариантности

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 12-01-00195.

обусловлено многими прикладными задачами, возникающими в последние годы в экономике, экологии и технике.

Обозначим через $D(t, X)$ множество достижимости управляемой системы в момент времени t из начального множества X. При исследовании статистически инвариантных множеств возникает вопрос о вычислении или оценке такой характеристики, как относительная частота

$$\operatorname{freq}(X) = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : D(t, X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}$$

поглощения множества достижимости $D(t, X)$ системы заданным множеством

$$\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M(t)\big\}.$$

В терминах функций Ляпунова и производной Кларка в работах [1]–[5] получены условия, при которых частоту $\operatorname{freq}(X)$ можно оценить при помощи характеристики

$$\varkappa = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : x^*(t) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

где функция $x^*(t)$ является верхним решением скалярной задачи Коши. В данной работе исследуются характеристики, связанные со статистически слабой инвариантностью множества $\mathfrak{M}$. Это характеристика

$$\operatorname{freq}(\varphi) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta}$$

— относительная частота попадания решения $\varphi(t)$ управляемой системы в множество $\mathfrak{M}$ и нижняя и верхняя относительные частоты $\operatorname{freq}_*(\varphi)$ и $\operatorname{freq}^*(\varphi)$ попадания данного решения в $\mathfrak{M}$. Одним из основных результатов является утверждение о том, что при определенных условиях относительная частота $\operatorname{freq}(\varphi)$ совпадает с относительной частотой $\operatorname{freq}(\widetilde{\varphi})$, где $\widetilde{\varphi}(t)$ — некоторое периодическое решение управляемой системы.

Особое внимание мы также уделяем прикладным задачам, в которых вычисляются или оцениваются различные статистические характеристики. В частности, мы рассматриваем следующую задачу. Пусть задано число $\lambda_0 \in [0, 1]$ и $x(t)$ является решением задачи Коши с периодическими коэффициентами. Необходимо найти значение $C = C(\lambda_0)$ такое, что величина $x(t)$ не превышает $C(\lambda_0)$ с относительной частотой, равной λ_0. В зависимости от постановки прикладной задачи значение $x(t)$ можем интерпретировать как размер популяции, энергию частицы, концентрацию реагирующих веществ, величину производства или цену на продукцию (соответствующие примеры приведены в работах [6]–[14]), поэтому результаты работы могут найти применение при нахождении различных статистических характеристик в этих моделях.

1. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{1}$$

и отвечающее ей дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad F(t,x) = \operatorname{co} G(t,x), \tag{2}$$

где $G(t,x)$ представляет собой множество всех предельных значений функции $f\big(t,x,U(t,x)\big)$ при $(t_i,x_i) \to (t,x)$, $\operatorname{co} G(t,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $G(t,x)$. Предполагаем, что правая часть включения (2) принимает значения в пространстве $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, состоящем из непустых компактных выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа; функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных, а функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху. Под решением включения (2) на интервале $J \in \mathbb{R}$ будем понимать всякую абсолютно непрерывную функцию $\varphi : J \to \mathbb{R}$, которая при почти всех $t \in J$ удовлетворяет данному включению.

Обозначим через $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ пространство непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа. Каждому моменту времени $t \geqslant 0$ и множеству $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ поставим в соответствие множество $D(t,X)$, состоящее из всех значений в момент t решений $t \to \varphi(t,x)$ включения (2), когда начальное условие $\varphi(0,x) = x$ пробегает все множество X. Множество $D(t,X)$ является сечением в момент времени $t \geqslant 0$ интегральной воронки включения (2) и называется *множеством достижимости* управляемой системы (1). Предполагаем, что для каждого X множество достижимости $D(t,X)$ существует для всех $t \geqslant 0$. Это означает, что для каждой точки $x \in X$ существует решение $\varphi(t,x)$ включения (2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. С целью исследования статистической инвариантности множеств в работах [1]–[5] введены и изучены такие характеристики, как относительная частота $\operatorname{freq}(X)$, верхняя и нижняя относительные частоты $\operatorname{freq}^*(X)$, $\operatorname{freq}_*(X)$ поглощения множества достижимости $D(t,X)$ управляемой системы (1) заданным подмножеством

$$\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M(t)\big\}$$

пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. В этой работе предполагаем, что функция $t \to M(t)$ непрерывна (в последнем разделе кусочно-непрерывна), периодическая с периодом $T > 0$ и для любого $t \in [0,T]$ множество $M(t)$ выпукло, замкнуто и имеет непустую внутренность (относительно $\mathbb{R}^n$). Также предполагаем, что для любых $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $t \to f(t,x,u)$ периодическая с периодом T и для любого $x \in \mathbb{R}^n$ функции $t \to u(t,x)$ и $t \to U(t,x)$ периодические с периодом T.

Для определения статистических характеристик множества достижимости введем в рассмотрение множество

$$\alpha(\vartheta,X) \doteq \big\{t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\big\}.$$

Отметим, что для любого $\vartheta > 0$ и любого $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ множество $\alpha(\vartheta,X)$ измеримо по Лебегу. Это доказывается так же, как лемма 4 работы [1].

Определение 1 (см. [1, 2]). Относительной частотой поглощения множества достижимости $D(t,X)$ системы (1) множеством $\mathfrak{M}$ называется следующий предел

$$\operatorname{freq}(X) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,X)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \tag{3}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (3) не существует, то характеристики

$$\mathrm{freq}^*(X) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\alpha(\vartheta, X)}{\vartheta}, \quad \mathrm{freq}_*(X) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\alpha(\vartheta, X)}{\vartheta}$$

называются, соответственно верхней и нижней относительной частотой поглощения множества достижимости $D(t, X)$ системы (1) множеством $\mathfrak{M}$.

Определение 2 (см. [1, 2]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (1), если предел

$$\mathrm{freq}\bigl(M(0)\bigr) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\bigl\{t \in [0,\vartheta] : D\bigl(t, M(0)\bigr) \subseteq M(t)\bigr\}}{\vartheta}$$

существует и имеет место равенство $\mathrm{freq}\bigl(M(0)\bigr) = 1$.

Определение 3 (см. [1, 2]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (1), если для любой точки $x \in M(0)$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t)$ системы (1), определенное при всех $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = x$ и равенству

$$\mathrm{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta} = 1. \tag{4}$$

Равенством (4) определена характеристика $\mathrm{freq}^*(\varphi)$ — верхняя относительная частота попадания решения $\varphi(t)$ системы (1) в множество $\mathfrak{M}$, аналогично определим нижнюю относительную частоту $\mathrm{freq}_*(\varphi)$. Если $\mathrm{freq}^*(\varphi) = \mathrm{freq}_*(\varphi)$, то существует предел

$$\mathrm{freq}(\varphi) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta}.$$

Обозначим через $\widetilde{\varphi}(t)$ периодическое решение системы (1). Из условия периодичности функций $\widetilde{\varphi}(t)$ и $M(t)$ следует, что предел

$$\mathrm{freq}(\widetilde{\varphi}) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{\varphi}(t) \in M(t)\}}{\vartheta}$$

существует и выполнено равенство

$$\mathrm{freq}(\widetilde{\varphi}) = \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0,T] : \widetilde{\varphi}(t) \in M(t)\}}{T}.$$

Через $\partial M(t)$ обозначим границу, через $\mathrm{int}\,M(t)$ — внутренность множества $M(t)$.

Теорема 1. *Предположим, что существуют решения* $\varphi(t)$ *и* $\widetilde{\varphi}(t)$ *системы* (1) *такие, что функция* $\widetilde{\varphi}(t)$ *периодическая с периодом* T *и* $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| = 0$. *Тогда выполнено неравенство* $\mathrm{freq}^*(\varphi) \leqslant \mathrm{freq}(\widetilde{\varphi})$. *Если, кроме того, имеет место*

$$\mathrm{mes}\,\bigl\{t \in [0,T] : \widetilde{\varphi}(t) \in \partial M(t)\bigr\} = 0, \tag{5}$$

то предел $\mathrm{freq}(\varphi)$ *существует и* $\mathrm{freq}(\varphi) = \mathrm{freq}(\widetilde{\varphi})$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ и $\widetilde{\varphi}(t)$ — решения системы (1), функция $\widetilde{\varphi}(t)$ периодическая и $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| = 0$. Рассмотрим числовую последовательность $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $r_i = \max\limits_{t\in[(i-1)T,iT]} |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)|$. Понятно, что $r_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Обозначим через $O_r(0)$ замкнутую r-окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$. Для любого $r > 0$ определим множества $M^r(t) = M(t) + O_r(0)$ и $M^{-r}(t) = M(t) - O_r(0)$, которые называются внешним и внутренним параллельными множествами выпуклого множества $M(t)$. Рассмотрим подмножество $A = \{t \in [0,T] : \widetilde{\varphi}(t) \in M(t)\}$ отрезка $[0,T]$ и множества

$$A_i = \{t \in [0,T] : \widetilde{\varphi}(t) \in M^{r_i}(t)\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Покажем, что $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ является последовательностью измеримых множеств, сходящейся к измеримому множеству A. Для этого достаточно показать, что множества A_i, $i = 1, 2, \ldots$ и A замкнуты. Докажем замкнутость множества A_i при фиксированном значении i. Пусть последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $t_k \in [0,T]$, $t_k \to t_*$ и вложения $\widetilde{\varphi}(t_k) \in M^{r_i}(t_k)$ имеют место при всех $k = 1, 2, \ldots$. Тогда, в силу непрерывности (в метрике Хаусдорфа) функции $t \to M^{r_i}(t)$, найдется такая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, что $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$ и $\widetilde{\varphi}(t_k) \in M^{r_i}(t_*) + O_{\varepsilon_k}(0)$. Поэтому вложения

$$\widetilde{\varphi}(t_k) \in M^{r_i}(t_*) + O_{\varepsilon_k}(0)$$

выполнены при всех k. Далее, из непрерывности $\widetilde{\varphi}(t)$ по t и замкнутости $M^{r_i}(t_*)$, имеем вложение $\widetilde{\varphi}(t_*) \in M^{r_i}(t_*)$. Следовательно, $t_* \in A_i$, то есть множество A_i замкнуто и, следовательно, измеримо. Аналогично доказывается измеримость множества A. Таким образом, по свойствам меры Лебега $\lim\limits_{i\to\infty} \mathrm{mes}\, A_i = \mathrm{mes}\, A$.

Введем кусочно-постоянную функцию $r(t) = r_i$ при $t \in [i(T-1), iT)$, $i = 1, 2, \ldots$ Из неравенства $|\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| \leqslant r(t)$, которое верно для всех $t \in [0, \infty)$, следует включение

$$\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\} \subseteq \{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{\varphi}(t) \in M^{r(t)}(t)\},$$

из которого получаем неравенство

$$\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\} \leqslant \mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{\varphi}(t) \in M^{r(t)}(t)\}. \tag{6}$$

Используя условие периодичности функций $\widetilde{\varphi}(t)$ и $M(t)$, получим:

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{\varphi}(t) \in M^{r(t)}(t)\}}{\vartheta} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mes}\{t \in [(i-1)T, iT] : \widetilde{\varphi}(t) \in M^{r_i}(t)\} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{\varphi}(t) \in M^{r_i}(t)\}.$$

В силу теоремы Штольца о свойствах предела последовательности, последний предел существует и равен

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{\varphi}(t)\in M^{r_k}(t)\}}{T}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{mes}A_k}{T}=$$
$$=\frac{\operatorname{mes}A}{T}=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{\varphi}(t)\in M(t)\}}{T}=\operatorname{freq}(\widetilde{\varphi}),$$

следовательно, учитывая неравенство (6), получаем

$$\operatorname{freq}^*(\varphi)\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\varphi(t)\in M(t)\}}{\vartheta}\leqslant$$
$$\leqslant\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\widetilde{\varphi}(t)\in M^{r(t)}(t)\}}{\vartheta}=$$
$$=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\widetilde{\varphi}(t)\in M^{r(t)}(t)\}}{\vartheta}=\operatorname{freq}(\widetilde{\varphi}).$$

Рассмотрим множества $B_i\doteq\big\{t\in[0,T]\,:\,\widetilde{\varphi}(t)\in M^{-r_i}(t)\big\}$, $i=1,2,\ldots$, для которых в силу условия (5) верно следующее равенство:

$$\lim_{i\to\infty}\operatorname{mes}B_i=\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\,\widetilde{\varphi}(t)\in\operatorname{int}M(t)\}=\operatorname{mes}A.$$

Из включения $\big\{t\in[0,\vartheta]:\widetilde{\varphi}(t)\in M^{-r(t)}(t)\big\}\subseteq\big\{t\in[0,\vartheta]:\varphi(t)\in M(t)\big\}$ аналогично доказанному выше получим оценку $\operatorname{freq}_*(\varphi)\geqslant\operatorname{freq}(\widetilde{\varphi})$. Следовательно, если имеет место (5), то предел $\operatorname{freq}(\varphi)$ существует и выполнено равенство $\operatorname{freq}(\varphi)=\operatorname{freq}(\widetilde{\varphi})$.

Следствие 1. *Пусть для любой точки $x\in M(0)$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t)$ системы* (1), *удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0)=x$ и равенству $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\widetilde{\varphi}(t)|=0$, где $\widetilde{\varphi}(t)$ — T-периодическое решение данной системы, которое при всех $t\geqslant 0$ находится в множестве $\mathfrak{M}$ и удовлетворяет равенству* (5). *Тогда множество $\mathfrak{M}$ статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы* (1).

Следствие 2. *Пусть для любой точки $x\in M(0)$ для каждого решения $\varphi(t)$ системы* (1), *удовлетворяющего начальному условию $\varphi(0)=x$, существует единственное T-периодическое решение данной системы $\widetilde{\varphi}(t)$, которое при всех $t\geqslant 0$ находится в множестве $\mathfrak{M}$, удовлетворяет* (5) *и равенству $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\widetilde{\varphi}(t)|=0$. Тогда множество $\mathfrak{M}$ статистически инвариантно относительно управляемой системы* (1).

2. Статистическая инвариантность и допустимость периодических процессов для линейных управляемых систем

Задачам исследования периодических процессов управляемых систем и оптимального управления периодическими движениями посвящено множество работ, среди которых работы Е. Л. Тонкова. В этом разделе мы покажем, что свойство статистической инвариантности тесно связано со свойством допустимости периодических процессов для линейных управляемых систем, которое изучалось в работах В. В. Петровой и Е. Л. Тонкова [15], [16]. Допустимость означает, что любому периодическому управлению из фиксированного множества отвечает единственное периодическое решение, находящееся в заранее заданной области фазового пространства.

Пусть $H(n,m)$ — пространство $(n\times m)$-матриц над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot x = A(t)x + B(t)u, \quad (t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \tag{7}$$

с измеримыми и ограниченными на $\mathbb{R}$ функциями $A:\mathbb{R}\to H(n,n)$, $B:\mathbb{R}\to H(n,m)$, а также непрерывные функции $U:\mathbb{R}\to\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$, $M:\mathbb{R}\to\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Предполагаем, что функции A, B, U и M периодические с периодом $T>0$.

Определение 4 (см. [15]). Система (7) называется (U,M)-допустимой, если для любой измеримой T-периодической функции $u(t)$ со значениями в $U(t)$ система (7) имеет единственное T-периодическое решение $\widetilde\varphi(t)$, и это решение при всех t находится в множестве $M(t)$.

Необходимые и достаточные условия (U,M)-допустимости системы (7) получены в работах [15], [16]. Вместе с множеством $\mathfrak{M}=\big\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}: x\in M(t)\big\}$ будем рассматривать множество

$$\mathfrak{M}^\varepsilon=\big\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}: x\in M^\varepsilon(t)\big\},\quad \text{где}\quad M^\varepsilon(t)=M(t)+O_\varepsilon(0),$$

$O_\varepsilon(0)$ — замкнутая ε-окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Предположим, что система* (7) *является* (U,M)*-допустимой и система* $\dot x = A(t)x$ *асимптотически устойчива. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *множество* $\mathfrak{M}^\varepsilon$ *статистически инвариантно относительно системы* (7).

Если, кроме того, для каждого T*-периодического решения системы* (7) *выполнено равенство* (5), *то множество* $\mathfrak{M}$ *статистически инвариантно относительно данной системы.*

Доказательство. Пусть $\widetilde\varphi(t)$ — периодическое решение системы (7), отвечающее управлению $u(t)$; так как эта система (U,M)-допустима, то для данного решения при всех $t\geqslant 0$ выполнено включение $\widetilde\varphi(t)\in M(t)$. Система $\dot x=A(t)x$ асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда асимптотически устойчива система (7) при любом свободном члене $B(t)u$ (см., например, [17, с. 81]). Следовательно, для любого решения $\varphi(t)$ системы (7) выполнено $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\widetilde\varphi(t)|=0$.

Введем следующие обозначения:

$$\operatorname{freq}(\varphi,\varepsilon)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\varphi(t)\subseteq M^\varepsilon(t)\}}{\vartheta},$$

$$\operatorname{freq}(\widetilde\varphi,\varepsilon)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\widetilde\varphi(t)\subseteq M^\varepsilon(t)\}}{\vartheta}.$$

Поскольку $\widetilde{\varphi}(t) \in M(t)$ при всех $t \geqslant 0$, то $\operatorname{freq}(\widetilde{\varphi}) = 1$ и

$$\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{\varphi}(t) \in \partial M^{\varepsilon}(t)\} = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{freq}(\widetilde{\varphi}, \varepsilon) = 1$, поэтому в силу теоремы 1 выполнено равенство

$$\operatorname{freq}(\varphi, \varepsilon) = \operatorname{freq}(\widetilde{\varphi}, \varepsilon) = 1,$$

что и означает статистическую инвариантность множества $\mathfrak{M}^{\varepsilon}$.

Пусть выполнено (5), тогда выполнены условия следствия 2 теоремы 1 и, таким образом, множество $\mathfrak{M}$ статистически инвариантно относительно данной системы.

П р и м е р 1. В работах [15, 16] рассматривается система, которая описывает процессы в химическом реакторе:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 v + k_2(1 - x_1 - x_2) - 2k_3 x_1^2 v + 2k_4 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = 2k_3 x_1^2 v - 2k_4 x_2^2. \end{cases} \tag{8}$$

Предполагается, что x_1, x_2 — концентрации промежуточных веществ (следовательно, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 \leqslant 1$); k_i — скорости реакций ($k_i > 0$, $i = 1, \ldots, 4$); параметр v характеризует скорость продувки катализатора и рассматривается как управляющий параметр, который может меняться с течением времени в заданных границах: $v(t) \in [\alpha, \beta]$, где $0 < \alpha < \beta$. В теории управления химическим реактором представляет интерес реакция системы (8) на периодическое управление $v(t)$ (с периодом T). Периодическое управление $v(t)$ называется допустимым, если оно измеримо по Лебегу и $v(t) \in [\alpha, \beta]$ для всех $t \geqslant t_0$.

В [15] указано, что множество

$$X = \{(x_1, x_2) : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 \leqslant 1\}$$

инвариантно относительно системы (8) для любого управления $v(t) \in [\alpha, \beta]$, поэтому X можно рассматривать как естественное фазовое пространство данной системы.

Теорема 3 (см. [15]). *Пусть $k_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, $0 < \alpha < \beta$. Имеют место следующие утверждения:*

1. *Всякому $T > 0$ и любому допустимому управлению отвечает T-периодическое решение системы* (8), *расположенное в множестве*

$$X_r = \{(x_1, x_2) : x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ r \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 1\}, \quad \text{где} \quad r = k_2(k_1\beta + k_2)^{-1}.$$

2. *Это решение единственно (в X_r).*

3. *Существуют константы $L > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для любой точки $x \in X$ и любого допустимого управления $\widetilde{v}(\cdot)$ решение $\varphi(t)$ системы* (8) *с управлением $v = \widetilde{v}(t)$ и начальным условием $\varphi(0) = x_0$ удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| \leqslant L|x_0 - \widetilde{\varphi}(0)|e^{-\gamma t}, \quad t \geqslant 0, \tag{9}$$

где $\widetilde{\varphi}(t)$ — T-периодическое решение системы (8).

Нетрудно проверить, что для системы (8) и множества X_r выполнено (5); кроме того, из неравенства (9) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| = 0$. Таким образом, в силу теорем 1 и 2 множество X_r статистически инвариантно относительно системы (8).

3. Статистические характеристики, возникающие в различных моделях динамики роста популяции

Известно, что многие модели динамики роста популяций являются дискретно-непрерывными, то есть описываются системами дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями. Поэтому вместе с управляемой системой (1), которая описывает непрерывные модели, будем рассматривать управляемую систему, подверженную импульсному воздействию в фиксированные моменты времени:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} &= g_i(x, w_i). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\{\tau_1, \ldots, \tau_p\}$ — точки отрезка $[0, T]$, $\tau_{i+p} = \tau_i + T$, $i = 1, 2, \ldots$, функции $f(t, x, u)$ и $g_i(x, w_i)$ непрерывны по совокупности переменных. Векторы u и w_i являются управляющими воздействиями и принимают значения в множествах $U \subset \mathbb{R}^m$ и $W \subset \mathbb{R}^k$ соответственно. Допустимыми управлениями $u(t)$ являются всевозможные ограниченные измеримые функции со значениями в множестве U. Решения системы (10) предполагаем непрерывными слева в точках разрыва.

В данной работе рассматриваем T-периодическую систему (10). Это означает, что функция $t \to f(t, x, u)$ периодическая с периодом $T > 0$, в качестве допустимых управлений $u(t)$ берем всевозможные T-периодические функции, удовлетворяющие соответствующим ограничениям, $w_{i+p} = w_i$, $g_{i+p}(x, w_{i+p}) = g_i(x, w_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

Отметим, что условия существования периодических решений систем с импульсным воздействием получены в монографиях А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка [18, с. 142–152] и С. Т. Завалищина и А. Н. Сесекина [19, с. 92–97]. Вопросы устойчивости решений данных систем исследованы в работах [18, с. 56–60, 102–112], [19, с. 104–110], [20], [21] и других.

Напомним, что мы изучаем такие статистические характеристики системы (10), как $\mathrm{freq}_*(\varphi)$ и $\mathrm{freq}^*(\varphi)$ — нижняя и верхняя относительные частоты попадания решения $\varphi(t)$ системы (1) в множество $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M(t)\big\}$, заданное кусочно-непрерывной T-периодической функцией $t \to M(t)$ такой, что для любого $t \in [0, T]$ множество $M(t)$ выпукло, замкнуто и имеет непустую внутренность. Предполагаем, что функция $t \to M(t)$ имеет разрывы только в точках τ_i.

Замечание 1. Отметим, что для управляемой системы с импульсным воздействием (10) справедливы утверждения теорем 1 и 2. Чтобы доказать эти теоремы для данной системы, достаточно показать, что множества

$$A_i = \big\{t \in [0, T) : \widetilde{\varphi}(t) \in M^{r_i}(t)\big\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

измеримы по Лебегу. Это следует из того, что $A_i = \sum\limits_{j=1}^{p} A_{ij}$, где множества

$$A_{ij} = \big\{t \in [\tau_{j-1}, \tau_j) : \widetilde{\varphi}(t) \in M^{r_i}(t)\big\}$$

измеримы. Дальше доказательство проводится так же, как в теоремах 1 и 2.

П р и м е р 2. Рассмотрим дискретно-непрерывную модель, которая используется при описании динамики изолированной популяции (см. [6, с. 35]). Целесообразность применения этой модели связана с тем, что в реализации процесса рождения, появления новых генераций особей мы имеем синхронность. В то же время процесс гибели носит непрерывный характер, каждая отдельная особь может погибнуть в любой момент времени под воздействием различных факторов. Для описания динамики популяции в этом случае требуется дифференциальное уравнение, траектории которого терпят разрыв в определенные моменты времени (моменты появления новых поколений) $\tau_i = iT$, $i = 1, 2, \ldots$, где $T > 0$. В рамках модели можно считать, что появление новой генерации осуществляется моментально в моменты времени τ_i, поскольку временной диапазон ее появления намного меньше времени жизни отдельных особей.

Предположим, что численность популяции $x(t)$ изменяется согласно дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x(ax+b), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x\Big|_{t=\tau_i} &= (w-1)x, \end{aligned} \tag{11}$$

где a, b — положительные постоянные, $w = const > 0$ — коэффициент размножения, численно равный количеству новых особей, приходящихся на одну выжившую к моменту размножения особь в популяции. Будем считать, что мы можем управлять коэффициентом w, уменьшая или увеличивая его в зависимости от цели практической задачи.

На каждом интервале (τ_i, τ_{i+1}) решением уравнения (11) является функция

$$x(t) = \frac{bx_i}{ax_i(e^{b(t-\tau_i)} - 1) + be^{b(t-\tau_i)}},$$

где $x_i = x(\tau_i +) = \lim\limits_{t \to \tau_i + 0} x(t)$. Следовательно,

$$x_{i+1} = x(\tau_{i+1} +) = wx(\tau_{i+1}) = \frac{bwx_i}{ax_i(e^{bT} - 1) + be^{bT}}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F(x) = \frac{bwx}{ax(e^{bT} - 1) + be^{bT}},$$

тогда размеры популяции подчиняются следующим рекуррентным уравнениям:

$$x_{i+1} = F(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

Уравнение $F(x) = x$ имеет решения $x = 0$ и $x = \bar{x} = \dfrac{b(w - e^{bT})}{a(e^{bT} - 1)}$. Если выполнено неравенство $w \leqslant e^{bT}$, то уравнение $F(x) = x$ не имеет положительного решения (второе решение лежит в «небиологической области») и $F'(0) = \dfrac{w}{e^{bT}} \leqslant 1$. Это означает, что при любых неотрицательных начальных данных численность популяции асимптотически стремится к нулю. Если $w > e^{bT}$, то $\bar{x} > 0$ и, кроме того, выполнено неравенство $F'(\bar{x}) = \dfrac{e^{bT}}{w} < 1$. Обозначим через $\widetilde{x}(t)$ решение задачи (11) при начальном условии $x_0 = \bar{x}$; поскольку $x_i = \bar{x}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, это решение является периодическим с периодом T. Из неравенства $F'(\bar{x}) < 1$ следует, что точка $\bar{x}$ устойчивая, то есть для каждого $x_0 > 0$ решение $x(t)$ задачи (11) удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t) - \widetilde{x}(t)| = 0$ (см. [6, с. 27-31]).

Рассмотрим статистические характеристики для множества

$$\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, C]\big\},$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Поскольку для любого $C > 0$ выполнено равенство $\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{x}(t) = C\} = 0$, то в силу теоремы 1 предел $\operatorname{freq}(x)$ существует и

$$\operatorname{freq}(x) = \operatorname{freq}(\widetilde{x}) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \widetilde{x}(t) \in [0, C]\}}{\vartheta} = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{x}(t) \in [0, C]\}}{T}.$$

Следовательно, если $C \geqslant \bar{x}$, то $\operatorname{freq}(\widetilde{x}) = 1$; если $C \leqslant \dfrac{\bar{x}}{w}$, то $\operatorname{freq}(\widetilde{x}) = 0$. Если же $C \in \left(\dfrac{\bar{x}}{w}, \bar{x}\right)$, то после несложных вычислений получаем, что

$$\operatorname{freq}(\widetilde{x}) = 1 - \frac{1}{bT} \ln \frac{\bar{x}(aC + b)}{C(a\bar{x} + b)} = 1 - \frac{1}{bT} \ln \frac{(w - e^{bT})(aC + b)}{aC(w - 1)}. \tag{12}$$

Пусть задано $\lambda_0 \in [0, 1]$. Из (12) следует, что при

$$C = C(\lambda_0) = \frac{b\bar{x}}{(a\bar{x} + b)e^{bT(1-\lambda_0)} - a\bar{x}} = \frac{b(w - e^{bT})}{a(w - 1)e^{bT(1-\lambda_0)} - a(w - e^{bT})}$$

выполнено равенство $\operatorname{freq}(\widetilde{x}) = \lambda_0$. Это означает, что размер популяции не превышает значения $C(\lambda_0)$ с относительной частотой, равной λ_0.

Отметим, что данная модель является аналогом для дискретной модели Скеллама (см. [6, с. 27]), поэтому подобным образом мы можем исследовать различные статистические характеристики для дискретных моделей развития популяции.

П р и м е р 3. Рассмотрим дискретно-непрерывную модель динамики численности двуполой популяции, описанную в работе [14]. Пусть $x(t)$ — численность мужских и $y(t)$ — численность женских особей в момент времени t удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{gathered} \dot{x} = -\alpha_1 x - \beta_1 x(x + \gamma y), \quad \dot{y} = -\alpha_2 y - \beta_2 y(x + \gamma y), \\ \Delta x\big|_{t=\tau_i} = m_1 f - x, \quad \Delta y\big|_{t=\tau_i} = m_2 f - y, \end{gathered} \tag{13}$$

где $\tau_i = iT$, $i = 1, 2, \ldots$, α_1, α_2 — коэффициенты естественной гибели мужских и женских особей, β_1, β_2 — коэффициенты саморегуляции. Коэффициент γ отражает неравнозначность «вклада» особей различных полов в процесс саморегуляции, все указанные выше коэффициенты положительные. Величина

$$f = \min\{y(\tau_i), \varepsilon x(\tau_i)\}$$

равна численности оплодотворенных самок, где ε — «коэффициент активности» самцов, который отражает не только их потенциальные возможности, но и характер взаимодействия особей различных полов. В частности, если все особи строго разбиваются на пары, то $\varepsilon = 1$. Величины $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ равны среднему числу потомков мужского и женского полов соответственно, порождаемых одной оплодотворенной самкой. Не уменьшая общности, будем полагать, что $\varepsilon = 1$ и $T = 1$.

Заметим, что решения задачи

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -\alpha_1 x - \beta_1 x^2, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i} = (m_1 - 1)x, \\ &\dot{y} = -\alpha_2 y - \beta_2 \gamma y^2, \quad \Delta y\big|_{t=\tau_i} = (m_2 - 1)y \end{aligned} \tag{14}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$ ограничивают сверху решения системы (13) с такими же начальными условиями. Найдем x_0, y_0 такие, чтобы решения задачи (14) были периодическими; для этого нужно, чтобы выполнялись условия

$$x_0 = x(1+) = m_1 x(1), \quad y_0 = y(1+) = m_2 y(1). \tag{15}$$

Из (14) и (15) находим, что

$$x_0 = \frac{\alpha_1(m_1 - e^{\alpha_1})}{\beta_1(e^{\alpha_1} - 1)}, \quad y_0 = \frac{\alpha_2(m_2 - e^{\alpha_2})}{\beta_2\gamma(e^{\alpha_2} - 1)}$$

и периодическое решение задачи (14) при $t \in [0, 1)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(t) &= \frac{\alpha_1(m_1 - e^{\alpha_1})}{\beta_1\big((m_1 - 1)e^{\alpha_1 t} - m_1 + e^{\alpha_1}\big)}, \\ \widetilde{y}(t) &= \frac{\alpha_2(m_2 - e^{\alpha_2})}{\beta_2\gamma\big((m_2 - 1)e^{\alpha_2 t} - m_2 + e^{\alpha_2}\big)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что $x_0 > 0$ при $m_1 > e^{\alpha_1}$ и $y_0 > 0$ при $m_2 > e^{\alpha_2}$, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что эти неравенства выполняются. Найдем следующие статистические характеристики, определенные для любого $C \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varkappa}_1(C) &\doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \widetilde{x}(t) \leqslant C\}}{\vartheta} = \operatorname{mes}\{t \in [0, 1] : \widetilde{x}(t) \leqslant C\}, \\ \widetilde{\varkappa}_2(C) &\doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \widetilde{y}(t) \leqslant C\}}{\vartheta} = \operatorname{mes}\{t \in [0, 1] : \widetilde{y}(t) \leqslant C\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что

$$\begin{aligned} \widetilde{\varkappa}_1(C) &= 1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{(\alpha_1 + C\beta_1)(m_1 - e^{\alpha_1})}{C\beta_1(m_1 - 1)} \quad \text{при} \quad C \in \Big[\frac{x_0}{m_1}, x_0\Big], \\ \widetilde{\varkappa}_2(C) &= 1 - \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{(\alpha_2 + C\beta_2\gamma)(m_2 - e^{\alpha_2})}{C\beta_2\gamma(m_2 - 1)} \quad \text{при} \quad C \in \Big[\frac{y_0}{m_2}, y_0\Big]. \end{aligned}$$

Отметим также, что $\widetilde{\varkappa}_1(C) = 1$ при $C > x_0$, $\widetilde{\varkappa}_1(C) = 0$ при $C < \dfrac{x_0}{m_1}$ и $\widetilde{\varkappa}_2(C) = 1$ при $C > y_0$, $\widetilde{\varkappa}_2(C) = 0$ при $C < \dfrac{y_0}{m_2}$.

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M} = \big\{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in M \doteq [0,C_1] \times [0,C_2]\big\}, \quad \text{где} \quad C_1 > 0, C_2 > 0.$$

Пусть $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ — решение системы (13), $\widetilde{\varphi}(t) = (\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))$ — периодическое решение системы (14). Несложно проверить, что выполнены все условия теоремы 1, поэтому относительную частоту попадания решения $\varphi(t)$ системы (13) в множество $\mathfrak{M}$ можно оценить следующим образом:

$$\operatorname{freq}(\varphi) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M\}}{\vartheta} \geqslant \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{\varphi}(t) \in M\}}{\vartheta} \doteq \operatorname{freq}(\widetilde{\varphi}).$$

Из периодичности функции $\widetilde{\varphi}(t)$ с периодом $T = 1$ следует, что

$$\operatorname{freq}(\widetilde{\varphi}) = \operatorname{mes}\{t \in [0,1] : \widetilde{\varphi}(t) \in M\} = \operatorname{mes}\{t \in [0,1] : \widetilde{x}(t) \leqslant C_1, \widetilde{y}(t) \leqslant C_2\} = \\ = \min\big(\widetilde{\varkappa}_1(C_1), \widetilde{\varkappa}_2(C_2)\big).$$

Таким образом, получаем оценку $\operatorname{freq}(\varphi) \geqslant \min\big(\widetilde{\varkappa}_1(C_1), \widetilde{\varkappa}_2(C_2)\big)$.

Список литературы

1. *Родина Л.И., Тонков Е.Л.* Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 265–288. (*Rodina L.I., Tonkov E.L.* Statisticheskie kharakteristiki mnozhestva dostizhimosti upravlyaemoy sistemy, nebluzhdaemost i minimalnyy tsentr prityazheniya // Nelineynaya dinamika. 2009. V. 5, No 2. P. 265–288 [in Russian].)

2. *Родина Л.И. Тонков Е.Л.* Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86. (*Rodina L.I., Tonkov E.L.* Statisticheski slabo invariantnye mnozhestva upravlyaemykh sistem // Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki. 2011. No 1, P. 67–86 [in Russian].)

3. *Родина Л.И.* Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа – Бебутова и статистически инвариантные множества управляемых систем // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 278, С. 217–226. (English transl.: *Rodina L.I.* The space $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ with the Hausdorff–Bebutov metric and statistically invariant sets of control systems // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. V. 278, No 1. P. 208–217.)

4. *Родина Л.И.* Статистические характеристики множества достижимости и периодические процессы управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 34–43. (*Rodina L.I.* Statisticheskie kharakteristiki mnozhestva dostizhimosti i periodicheskie protsessy upravlyaemykh sistem // Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki. 2012. No 2, P. 34–43 [in Russian].)

5. *Родина Л.И.* Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164. (*Rodina L.I.* Invariantnye i statisticheski slabo invariantnye mnozhestva upravlyaemykh sistem // Izvestiya Instituta matematiki i informatiki UdGU. Izhevsk. 2012. No 2 (40), P. 3–164 [in Russian].)

6. *Недорезов Л.В.* Курс лекций по математической экологии. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1997. (*Nedorezov L.V.* Kurs lektsiy po matematicheskoy ekologii. Novosibirsk: Sibirskiy khronograf, 1997 [in Russian].)

7. *Слинько М.Г., Зеленяк Т.И., Акрамов Т.А., Лаврентьев М.М. (мл.), Шеплев В.С.* Нелинейная динамика каталитических реакций и процессов (обзор) // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 12. С. 87–109. (*Slinko M.G., Zelenyak T.I., Akramov T.A., Lavrentev M.M., Sheplev V.S.* Nelineynaya dinamika kataliticheskikh reaktsiy i protsessov (obzor) // Matematicheskoe modelirovanie. 1997. V. 9, No 12. P. 87–109 [in Russian].)

8. *Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю.* Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2009. Т. 267. С. 46–55. (English transl.: *Davydov A.A., Danchenko V.I., Zvyagin M. Yu.* Existence and uniqueness of a stationary distribution of a biological community // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2009. V. 267, No 1. P. 40–49.)

9. *Прасолов А.В.* Математические методы экономической динамики. СПб.: Лань, 2008. (*Prasolov A.V.* Matematicheskie metody ekonomicheskoy dinamiki. SPb.: Lan, 2008 [in Russian].)

10. *Ризниченко Г.Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. (*Riznichenko G.Yu.* Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii. Chast 1. Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2002 [in Russian].)

11. *Глызин С.Д.* Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 3. С. 29 – 42. (*Glyzin S. D.* A registration of age groups for the Hutchinson's equation // Modeling and Analysis of Information Systems. 2007. V. 14, № 3. P. 29–42 [in Russian].)

12. *Кащенко С.А.* Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых // Моделирование и анализ информационных систем. 2012 Т. 19, № 5. С. 18 – 34. (*Kaschenko S. A.* Stationary states of delay differentional equation of insect population's dynamics // Modeling and Analysis of Information Systems. 2012. V. 19, № 5. P. 18 – 34 [in Russian].)

13. *Глызин С.Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96–116. (*Glyzin S. D.* Difference approximations of "reaction – diffusion" equation on a segment // Modeling and Analysis of Information Systems. 2009. V. 16, № 3. P. 96 – 116 [in Russian].)

14. *Недорезов Л.В., Утюпин Ю.В.* Дискретно-непрерывная модель динамики численности двуполой популяции // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44, № 3. С. 650–659. (*Nedorezov L.V., Utyupin Yu.V.* Diskretno-nepreryvnaya model dinamiki chislennosti dvupoloy populyatsii // Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. 2003. V. 44, No 3. P. 650–659 [in Russian].)

15. *Петрова В.В., Тонков Е.Л.* Допустимость периодических процессов и теоремы существования периодических решений. I // Известия вузов. Математика. 1996. № 11. С. 65–72. (English transl.: *Petrova V. V., Tonkov E. L.* The admissibility of periodic

processes and existence theorems for periodic solutions. I // Izvestiya VUZ. Matematika. 1996. V. 40, No 11. P. 62–69.)

16. *Петрова В.В., Тонков Е.Л.* Допустимость периодических процессов и теоремы существования периодических решений. II // Известия вузов. Математика. 1997. № 6. С. 17–24. (English transl.: *Petrova V. V., Tonkov E. L.* The admissibility of periodic processes and existence theorems for periodic solutions. II // Izvestiya VUZ. Matematika. 1997. V. 41, No 6. P. 15–21.)

17. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. (*Demidovich B. P.* Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti. M.: Nauka, 1967 [in Russian].)

18. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. (*Samoylenko A. M., Perestyuk N. A.* Differentsialnye uravneniya s impulsnym vozdeystviem. Kiev: Vishcha shkola, 1987 [in Russian].)

19. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991. (*Zavalishchin S. T., Sesekin A. N.* Impulsnye protsessy: Modeli i prilozheniya. M.: Nauka, 1991 [in Russian].)

20. *Мильман В. Д., Мышкис А. Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сибирский мат. журнал. 1960. № 2. С. 233–237. (*Milman V. D., Myshkis A. D.* Ob ustoychivosti dvizheniya pri nalichii tolchkov // Sibirskiy mat. zhurnal. 1960. No 2. P. 233–237 [in Russian].)

21. *Мышкис А. Д.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений при обобщенных импульсных возмущениях // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 125–133. (English transl.: *Myshkis A. D.* Stability of solutions of differential equations under generalized pulse pertubations // Automation and Remove Control. 2007. V. 68, No 10. P. 1844–1851.)

Statistical Characteristics of Control Systems, Arising in Various Models of Natural Sciences

Larina Y. Y., Rodina L. I.

Udmurt State University,
Universitetskaya St., 1, bld. 4, off. 206, Izhevsk, 426034, Russia

Keywords: control systems, differential inclusions, invariant and statistically invariant sets

We continue the study of extending the concept of invariance sets relative to control systems and differential inclusions. This expansion consists in studying statistically invariant sets and statistical characteristics of the attainability set of control systems. In this work, we obtain conditions for the statistical invariance and investigate the properties of the statistical characteristics of control systems with periodic coefficients. It is shown that the property of statistical invariancy is closely connected with the property of admissibility of periodic processes for linear control systems. The admissibility means that for any periodic control from the fixed set there exists a unique periodic solution which is in the given set of the phase space. The results of the work can be applied while finding the statistical characteristics arising in various models of biology, chemistry, economy.

Сведения об авторах:
Ларина Яна Юрьевна,
Удмуртский государственный университет,
аспирант кафедры математического анализа,
Родина Людмила Ивановна,
Удмуртский государственный университет,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического анализа