Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **6** (2012) 161–169

УДК 514.772.35

Многочлены объема для некоторых многогранников в пространствах постоянной кривизны

Сабитов Д.И., Сабитов И.Х.[1]

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: diroler@yandex.ru   isabitov@mail.ru

получена 15 сентября 2012

Ключевые слова: многогранники, метрики, пирамиды, объемы, многочлены

Известно, что для каждого симплициального многогранника P в 3-пространстве существует многочлен Q, зависящий только от комбинаторного строения многогранника и длин его ребер, такой, что объемы многогранника P и любого другого изометричного P многогранника с таким же комбинаторным строением являются корнями многочлена Q. Но этот многочлен содержит много миллионов слагаемых, и его нельзя выписать в явном виде. В работе мы указываем один класс многогранников, для которых эти многочлены можно выписать в компактной форме, верной также в пространствах постоянной кривизны любой размерности.

1. Постановка задачи

Напомним, что формула Герона для площади треугольника была обобщена в 1752 г. Эйлером на объем тетраэдра. Он выразил объем тетраэдра через длины его ребер по следующей формуле (про историю получения этой формулы см. [1]):

$$V^2 = \frac{1}{144}[l_1^2l_5^2(l_2^2+l_3^2+l_4^2+l_6^2-l_1^2-l_5^2)+l_2^2l_6^2(l_1^2+l_3^2+l_4^2+l_5^2-l_2^2-l_6^2)+ \\ l_3^2l_4^2(l_1^2+l_2^2+l_5^2+l_6^2-l_3^2-l_4^2)-l_1^2l_2^2l_4^2-l_2^2l_3^2l_5^2-l_1^2l_3^2l_6^2-l_4^2l_5^2l_6^2],$$

где $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ – указанные на рис. 1 длины ребер тетраэдра.

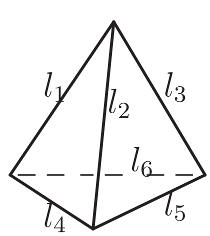

Рис.1

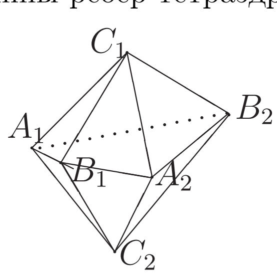

Рис.2

[1]Работа поддержана грантами РФФИ № 10-01-91000АНФ и правительства РФ № 11.G34.31.0053

Эта формула может быть интерпретирована как полиномиальное уравнение

$$V^2 + a_0(l) = 0$$

для объема, где $a_0(l)$ является известным многочленом от множества (l) квадратов длин ребер тетраэдра. Теперь известно [2], [3], что для любого симплициального многогранника P в $\mathbb{R}^3$ существует многочлен со старшим коэффициентом 1

$$Q(V) = V^{2N} + a_1(l)V^{2N-2} + ... + a_{N-1}(l)V^2 + a_N(l),$$

где коэффициенты $a_i(l)$ также являются некоторыми полиномами от квадратов длин ребер многогранника, с численными коэффициентами, зависящими от комбинаторного строения многогранника P, такой, что алгебраический объем любого многогранника, изометричного P и имеющего такое же комбинаторное строение, что и P, является корнем многочлена $Q(V)$. Таким образом, это утверждение может быть интерпретировано как широкое обобщение вышеприведенной формулы Герона-Эйлера для объема тетраэдра.

Данное в [2] доказательство существования такого многочлена является конструктивным, однако алгоритм его построения очень многовариантный, так как после каждого его шага для его продолжения есть много вариантов, и в конечном счете получается многочлен с очень большим количеством мономов.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим примеры с многочленами для объема V октаэдров Брикара 1-го и 2-го типа. Комбинаторную модель октаэдра см. на рис. 2. Для октаэдра Брикара 1-го типа имеем следующие соотношения между длинами ребер

$$|A_1B_1|^2 = |A_2B_2|^2 = a,\ |A_1B_2|^2 = |A_2B_1|^2 = b,\ |C_1B_1|^2 = |C_2B_2|^2 = c,$$
$$|C_2B_1|^2 = |C_1B_2|^2 = d,\ |A_1C_1|^2 = |A_2C_2|^2 = e,\ |A_1C_2|^2 = |A_2C_1|^2 = f.$$

Тогда для $\mathbf{v} = 36V^2$ имеем следующее уравнение:

$$Q(\mathbf{v}) = \mathbf{v^8} - 4[ab(c+d+e+f-a-b)+c\,d\,(\,a+b+e+f-c-d\,)+ e\,f\,(\,a+b+c+d-e-f\,) - eac - fad - fbc - ebd]\mathbf{v^7} = 0.$$

Рассмотрим теперь октаэдр Брикара 2-го типа со следующими соотношениями между длинами ребер.

$$|A_1B_1|^2 = |A_2B_2|^2 = a,\ |A_1B_2|^2 = |A_2B_1|^2 = b,$$
$$|C_2B_1|^2 = |C_2B_2|^2 = d,\ |C_1B_1|^2 = |C_1B_2|^2 = c,$$
$$|A_2C_1|^2 = |A_1C_1|^2 = e,\ |A_1C_2|^2 = |A_2C_2|^2 = f.$$

Тогда многочлен для объема этого октаэдра имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{v}) = \mathbf{v^8} + (&4fbc+4fac+4ebd+4ead-4fab-4eab-4adc-4bdc-8edc-8fdc-\\
&4afe-4bfe-8cfe-8dfe-4cba-4dba+4cd^2+4dc^2+4ed^2+4fc^2+4cf^2+4de^2+\\
&4ef^2+4fe^2+4ab^2+4ba^2)\mathbf{v^7} + (16e^2bd^3+16e^2ad^3+16f^2bc^3+16f^2ac^3+\\
&16e^3bd^2 + 16e^3ad^2+16fc^4d-16c^2baed-64c^2baf^2+32cbadf^2+32cbade^2+32cbaef^2+\\
&32cbaed^2+32c^2bafe-16cbafd^2-16cbafe^2+32c^2bafd-32e^2bd^2c-32e^2ad^2c-32f^2bc^2d-\\
&32f^2ac^2d-32ef^2bc^2-32ef^2ac^2+16fb^2c^2a+16fbc^2a^2-16fbc^3d-16ebd^3c-16ead^3c+\\
&16eb^2d^2a+16ebd^2a^2-32fe^2bd^2-32fe^2ad^2+16f^3bc^2+16f^3ac^2-16fac^3d+16ed^4c+\\
&16fb^2da^2-16fb^2ca^2+16eb^2ca^2+32ead^2bf-64e^2ad^2b-16eb^2da^2+16e^2a^2bd+16f^2a^2bc+\\
&16e^2b^2ad+16f^2b^2ac-16e^3fbd-16e^3fad-16f^3ebc-16f^3eac+16cf^4e-16dbaef^2+\\
&32dbafe^2+16de^4f-16fc^3d^2+32d^2e^3f-16ab^2cfe+32d^3e^2c-16d^3e^3+32c^2f^3e+\\
&32f^2c^3d-16de^3f^2-16cf^3e^2-16c^3f^3-16ab^2edc-16ab^2fdc-16ab^2dfe-16ed^3c^2-\\
&16c^3baf-16e^3abd+64df^2e^2c+64fd^2c^2e-80f^2c^2de-80d^2e^2fc-16f^3abc-64cf^3de-\\
&16d^3bae-64fc^3ed+16fc^2ead+16fc^2ebd+16d^2feac+16cf^2e^2a+16cf^2e^2b+96c^2fe^2d+\\
&16df^2e^2b + 16d^2febc + 16ed^2c^2a + 16ed^2c^2b+16de^2fbc - 64de^3cf + 16de^2fac +\\
&16cf^2ead - 64ed^3fc+16cf^2ebd - 16cba^2ed - 16ba^2fdc-16ba^2dfe - 16ba^2cfe +\\
&16df^2e^2a + 16fd^2c^2b + 16fd^2c^2a + 96f^2d^2ce)\mathbf{v^6} = 0.
\end{aligned}$$

Мы видим, что даже для довольно простого многогранника с высокой комбинаторной симметрией и только с 6 различными длинами для 12 ребер многочлен объема имеет более 100 мономов. В случае общего октаэдра с 12 разными длинами ребер многочлен для его объема будет содержать много миллионов и даже миллиардов мономов. Следовательно, **есть необходимость искать такие способы записи многочленов объема, которые позволяли бы представить эти многочлены в некоторой компактной форме, или найти хотя бы те классы многогранников, для которых есть такой способ записи**. В этом и состоит цель нашей заметки – указать один такой класс многогранников, допускающих компактное представление их многочленов объема.

2. Пирамиды

Пирамидой мы будем называть многогранник (в смысле "многогранная поверхность"), у которого есть вершина, соединенная ребрами со всеми остальными вершинами. Иными словами, если многогранник имеет n вершин, тогда в многограннике-пирамиде есть вершина степени $n-1$. Эту вершину пирамиды мы будем называть *главной* вершиной. Главных вершин у пирамиды может быть несколько; например, у тетраэдра все вершины являются главными.

Сначала мы докажем, что в 3-мерном пространстве существуют многогранники-пирамиды любого топологического рода g, как ориентируемые, так и неориентируемые. Рассмотрим сначала случай ориентируемых многогранников. Возьмем тетраэдр, одну из его вершин выберем как главную, противоположную ей грань примем за основание и на двух боковых гранях, инцидентных главной вершине, вырежем два треугольника, расположенных таким образом, чтобы их вершины можно было соединить ребрами с главной вершиной. Получаем многогранник с двумя треугольными отверстиями. Смотрим на края этих отверстий как на края боковых поверхностей треугольной призмы с триангулированными гранями, т.е. как бы соединяем эти два треугольных отверстия тоннелем, вход и выход из которого совпадают с построенными заранее отверстиями, а затем триангулируем боковые грани с учетом проведенных к главной вершине ребер. Получим пирамиду топологически рода тора, см. рисунки 3 и 4 (на рис. 4 не проведена триангуляция боковых граней "тоннеля").

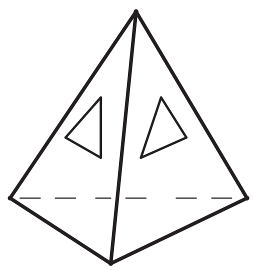

Рис.3

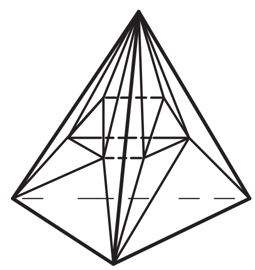

Рис.4

Таким образом, проделывая на боковых гранях произвольное количество попарно соединяемых "тоннелями" треугольных отверстий с нужным расположением относительно главной вершины, можем получить ориентируемую пирамиду произвольного топологического рода.

Неориентируемую пирамиду можно получить из классического многогранника гептаэдра (см. книгу [4], § 46), если в одной из его квадратных граней провести диагональ и объявить ее дополнительным ребром, что приведет к построению пирамиды, гомеоморфной проективной плоскости. А неориентируемые пирамиды с четной эйлеровой характеристикой можно построить по аналогии с ориентируемыми пирамидами, как это было сделано выше, только вместо треугольной пирамиды надо взять невыпуклую 4-угольную пирамиду и расположить соединяемые "тоннелем" треугольные отверстия не на соседних гранях, а через одну грань так, чтобы соединяющий их "тоннель" пересекал грань по пути между отверстиями.Как заметил С.А. Лавренченко, при этих построениях вопрос о существовании неориентируемых *погруженных* пирамид с нечетной эйлеровой характеристикой остается открытым.

Определение многогранников-пирамид можно распространить на многогранники в пространстве любой размерности и любой постоянной кривизны, но в отличие от 3-мерного случая мы не знаем никаких их особых топологических или комбинаторных свойств; очевидно лишь, что в принципе они существуют. А в трехмерном случае можно поставить задачу о нахождении симплициальных пирамид данного топологического типа, имеющих наименьшее количество вершин.

3. Многочлены для объемов пирамид

Мы используем специальное комбинаторное строение пирамид для указания быстрого алгоритма нахождения их многочлена объема с представлением этого многочлена в компактной записи по крайней мере при достаточно малом количестве вершин.

Напомним, что алгебраический объем ориентированного симплициального многогранника определяется как сумма ориентированных объемов тетраэдров с некоторой общей вершиной, называемой апексом, и с основаниями на согласованно ориентированных гранях многогранника. Доказывается, что такой объем не зависит от выбора апекса. Поэтому в случае пирамиды мы можем выбрать в качестве апекса главную вершину пирамиды и тогда объем каждого тетраэдра можно будет вычислять по формуле Герона–Эйлера, так как нам известны все расстояния между вершинами каждого такого тетраэдра, т.е. все длины ребер. Таким образом, для объема пирамиды имеем следующее представление

$$V = \sum_i \varepsilon_i V_i, \tag{1}$$

где сумма взята по всем гиперграням пирамиды (мы теперь предполагаем, что работаем в пространстве произвольной размерности $n \geq 3$), через $V_i \geq 0$ обозначены модули объемов соответствующих тетраэдров, а $\varepsilon_i = \pm 1$, потому что мы не знаем, как расположены эти тетраэдры в пространстве относительно друг друга в произвольной конфигурации пирамиды с данными длинами ребер. Чтобы охватить все возможные случаи расположения пирамиды в пространстве, нам нужно из уравнения (1) исключить неизвестные значения ε_i. Это удается сделать довольно легко, что даст нам следующую теорему

Теорема 1. *Для любой пирамиды P в $\mathbb{R}^d, d \geq 3$, существует многочлен*

$$Q(V) = V^{2N} + a_1 V^{2N-2} + \ldots + a_{N-1} V^2 + a_N,$$

где коэффициенты a_j полиномиально зависят от квадратов объемов V_i тетраэдров, с общим апексом в одной из главных вершин пирамиды и с основаниями на гипергранях пирамиды, причем численные коэффициенты многочленов a_i зависят только от комбинаторного строения пирамиды и от выбора ее главной вершины (если главных вершин несколько), такой, что объем любой пирамиды, изометричной P и с тем же комбинаторным строением, является корнем этого многочлена $Q(V)$.

Для доказательства теоремы достаточно доказать следующую простую алгебраическую лемму.

Лемма 1. *Пусть величина V определяется как сумма вида*

$$V = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2 + \ldots + \varepsilon_n V_n, \tag{2}$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, а V_i – некоторые известные величины, $1 \le i \le n$. Тогда существует многочлен вида

$$Q(V) = V^{2N} + A_1 V^{2N-2} + ... + A_{n-1} V^{n-1} + A_n,\ 2N = 2^n, \tag{3}$$

с явно выписываемыми в виде полиномов от $V_1^2, ..., V_n^2$ коэффициентами A_i, такой, что V^2 удовлетворяет уравнению $Q(V) = 0$ при любом наборе чисел $\varepsilon_i = \pm 1$.

Доказательство. Доказательство проводим индукцией по n. При $n = 1$ лемма верна. Пусть она верна в случае $n - 1$ слагаемых в правой части соотношения (1), так что пусть в этом случае для величины V имеем уравнение

$$V^{2N} + a_1 V^{2N-2} + ... + a_{N-1} V^2 + a_N = 0,\ 2N = 2^{n-1}, \tag{3a}$$

где коэффициенты $a_i, 1 \le i \le N$, являются некоторыми полиномами от переменных $V_1^2, ..., V_{N-1}^2$. Пусть дано соотношение вида (1). Введем величину $\tilde{V} = V - \varepsilon_n V_n$. Для нее имеем уравнение

$$\tilde{V} = \varepsilon_1 V_1 + ... + \varepsilon_{n-1} V_{n-1}$$

и поэтому по индукционному предположению $\tilde{V}$ является корнем уравнения вида

$$\tilde{V}^{2N} + a_1(V_1^2, ..., V_{n-1}^2)\tilde{V}^{2N-2} + ... + a_N(V_1^2, ..., V_{n-1}^2) = 0. \tag{4}$$

Подставим сюда значение $\tilde{V} = V - \varepsilon_n V_n$ и после раскрытия всех скобок по формуле бинома и переноса слагаемых с ε_n в правую часть возведем обе части в квадрат. Получим уравнение

$$\Big[\sum_{j=0}^{N} C_{2N}^{2j}(V_n^2)^j V^{2N-2j} + \sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{j=0}^{N-k} C_{2N-2k}^{2j}(V_n^2)^j V^{2N-2k-2j}\Big]^2 =$$
$$V_n^2 V^2 \Big[\sum_{j=0}^{N-1} C_{2N}^{2j+1}(V_n^2)^j V^{2N-2-2j} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sum_{j=0}^{N-k-1} C_{2N-2k}^{2j+1}(V_n^2)^j V^{2N-2-2k-2j}\Big]^2, \tag{5}$$

которое после собирания коэффициентов при степенях V сведется к уравнению вида

$$Q(V) = V^{4N} + \sum_{i=i}^{2N} A_i(V_1^2, ..., V_n^2) V^{4N-2i} = 0,\ 4N = 2^n. \tag{6}$$

Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны. □

Важно отметить, что коэффициенты A_i вычисляются по коэффициентам a_k уравнения (3a) по формулам

$$A_i = \sum_{m=i-N}^{i} \alpha_{2m}\alpha_{2(i-m)} - V_n^2 \sum_{m=i-N}^{i-1} \beta_{2m}\beta_{2(i-1-m)},\ 1 \le i \le 2N, \tag{7}$$

где

$$\alpha_{2m} = C_{2N}^{2m}(V_n^2)^m + \sum_{k=1}^{m} a_k C_{2N-2k}^{2(m-k)}(V_n^2)^{m-k},\ 1 \le m \le N, \alpha_0 = 1$$

$$\beta_{2m} = C_{2N}^{2m+1}(V_n^2)^m + \sum_{k=1}^{m} a_k C_{2N-2k}^{2(m-k)+1}(V_n^2)^{m-k},\ 1 \le m \le N-1, \beta_0 = 2N$$

причем считается, что $\alpha_{2p} = 0, p > N, \beta_{2q} = 0, q \ge N$. Следовательно, **имеем алгоритм нахождения многочлена для V для всех n, начиная со значения** $V^2 = V_1^2$.

Чтобы иметь возможность практического применения утверждения леммы для вычисления многочлена объема пирамид, надо выписать явный вид коэффициентов многочлена (6). В случае $n = 2$ (что соответствует 4-угольной пирамиде с триангулированным основанием) имеем полиномиальное уравнение

$$Q(V) = V^4 - 2(V_1^2 + V_2^2)V^2 + (V_1^2 - V_2^2)^2 = 0,$$

которое при выражении коэффициентов через квадраты длин ребер будет содержать около 1000 мономов.

При $n = 3$ (случай 5-угольной пирамиды, число вершин равно 6) уравнение для объема пирамиды имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V^8} - 4(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2)\mathbf{V^6} + 2(3V_1^4 + 3V_2^4 + 3V_3^4 + 2V_2^2V_3^2 + \\
&+2V_3^2V_1^2 + 2V_2^2V_1^2)\mathbf{V^4} + 4(V_3^4V_1^2 + V_2^2V_1^4 - V_1^6 - V_2^6 - V_3^6 + \\
&+V_2^4V_1^2 + V_3^2V_1^4 - 10V_2^2V_3^2V_1^2 + V_2^4V_3^2 + V_2^2V_3^4)\mathbf{V^2} + \\
&V_1^8 + V_2^8 + V_3^8 - 4V_2^6V_1^2 - 4V_2^2V_1^6 + 4V_2^4V_3^2V_1^2 - 4V_3^6V_1^2 + \\
&+6V_2^4V_3^4 - 4V_3^2V_1^6 + V_2^4V_1^4 + 4V_2^2V_3^2V_1^4 - 4V_2^6V_3^2 - 4V_2^2V_3^6 + \\
&+6V_3^4V_1^4 + 4V_2^2V_3^4V_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

В терминах квадратов длин ребер в нем будет уже несколько миллионов слагаемых.

Эти уравнения получены вручную , т.е. непосредственным вычислением "на бумаге". Для получения многочлена объема пирамид с числом вершин 7 и больше уже не обойтись без помощи компьютера. Программа для таких вычислений написана первым автором статьи на основе формулы (7), и ее можно найти по адресу http://www.facebook.com/notes/%D0%B8%D0%B4%D0%B6%D0%B0%D0%B4-%D1%81%D0%B0%D0%B1%D0%B8%D1%82%D0%BE%D0%B2/volume-polynomial-for-pyramids-source-code-of-the-program/102809339875130. При вычислении многочлена объема для пирамиды с 7 вершинами получается многочлен, для записи которого достаточно полутора страниц текста. Приведем начальную часть этого многочлена

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V^{16}}-8(v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2)\mathbf{V^{14}}+4[7(v_1^4+v_2^4+v_3^4+v_4^4)+\\
&10(v_2^2v_3^2+v_4^2v_1^2+v_3^2v_4^2+v_3^2v_1^2+v_2^2v_4^2+v_2^2v_1^2)]\mathbf{V^{12}}-\\
&8[7(v_1^6+v_2^6+v_3^6+v_4^6)+22(v_3^2v_4^2v_1^2+v_2^2v_4^2v_1^2+v_2^2v_3^2v_1^2+v_2^2v_3^2v_4^2)+\\
&9(v_2^2v_1^4+v_2^4v_4^2+v_2^4v_1^2+v_3^4v_1^2+v_2^2v_4^4+v_3^4v_4^2+v_3^2v_4^4+v_3^2v_1^4+\\
&v_2^4v_3^2+v_4^2v_1^4+v_2^2v_3^4+v_4^4v_1^2+v_3^4v_4^2)]\mathbf{V^{10}}+2(20v_2^6v_1^2+35v_2^8+20v_2^2v_1^6+\\
&18v_4^4v_1^4+172v_2^4v_3^2v_4^2+172v_2^2v_4^4v_1^2+20v_2^6v_4^2+20v_2^2v_4^6+172v_2^4v_3^2v_1^2+\\
&35v_4^8+20v_3^6v_1^2+18v_2^4v_3^4+20v_3^2v_1^6+172v_3^4v_4^2v_1^2+20v_3^6v_4^2+172v_2^2v_4^2v_1^4+\\
&35v_1^8+20v_3^2v_4^6+172v_3^2v_4^4v_1^2+172v_2^2v_3^2v_4^4+20v_4^6v_1^2-376v_2^2v_3^2v_4^2v_1^2+\\
&18v_2^4v_1^4+20v_4^2v_1^6+35v_3^8+172v_2^2v_3^2v_1^4+18v_2^4v_4^4+20v_2^6v_3^2+20v_2^2v_3^6+\\
&18v_3^4v_1^4+172v_2^2v_3^4v_1^2+172v_3^2v_4^2v_1^4+172v_2^4v_4^2v_1^2+172v_2^2v_3^4v_4^2+18v_3^4v_4^4)\mathbf{V^8}+\\
&A_6(v_1^2,...,v_4^2)\mathbf{V^6}+A_4(v_1^2,...,v_4^2)\mathbf{V^4}+A_2(v_1^2,...,v_4^2)\mathbf{V^2}+A_0(v_1^2,...,v_4^2)=0,
\end{aligned}$$

где через A_6, A_4, A_2 и A_0 обозначены коэффициенты при соответствующих степенях V, требующие для свой записи еще одной страницы текста. Но отметим, что в записи этого многочлена в функции квадратов длин ребер было бы много миллиардов мономов, а здесь мы имеем многочлен объема, который впервые можно записать в довольно компактной форме для многогранника с 7 вершинами (до этого была известна точная формула только для объема тора с 7 вершинами, в котором все вершины являются главными, т.е. нет диагоналей). Если вместо буквенных обозначений длин ребер брать их конкретные численные значения и на их основе сначала вычислить квадраты объемов тетраэдров, тогда вычисление многочлена объема будет существенно быстрее и ответ получится в виде многочлена с конкретными численными значениями, причем вычисления можно довести до конца для пирамид с числом вершин значительно больше 7.

В заключение сделаем два замечания, характеризующие полученный результат.

1) Для пирамид топологического типа сферы степень полученного многочлена объема не может быть снижена, так как число возможных значений объемов таких пирамид при заданных значениях длин ребер в точности равно степени найденного многочлена. Для справедливости высказанного утверждения достаточно заметить, что всякая пирамида типа сферы в общем положении допускает зеркальное отражение относительно плоскости, проходящей через главную вершину и ребро, соединяющее две вершины основания. Следовательно, для пирамид типа сферы найденный многочлен является каноническим, т.е. имеющим наименьшую возможную степень $2N = 2^n$, где n – число вершин.

2) Так как доказанная Лемма 1 справедлива для любых величин V_i, то теорема 1 справедлива для пирамид в гиперболическом и сферическом пространствах любой размерности, потому что в них объем пирамиды тоже может быть представлен в виде суммы объемов тетраэдров. Хотя полученный многочлен нельзя объявить многочленом объема относительно длин ребер пирамиды, так как в этих пространствах для объемов тетраэдров нет аналога формулы Герона–Эйлера, но учитывая, что для объема тетраэдра все же имеются некоторые аналитические формулы, мы можем

утверждать, что для вычисления объема пирамид мы теперь имеем некоторую аналитическую формулу.

Список литературы

1. Сабитов И.Х. Объемы многогранников. М.: Изд-во МЦНМО, 2009.
2. Сабитов И.Х. Объем многогранника как функция его метрики // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2, № 4. С. 1235–1246.
3. Connelly R., Sabitov I., Walz A. The Bellows Conjecture // Beiträge zur Algebra und Geometrie. 1997. V. 38, № 1. P. 1–10.
4. Гильберт Д, Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

Volume Polynomials for Some Polyhedra in Spaces of Constant Curvature

Sabitov D.I, Sabitov I.Kh.

Keywords: polyhedra, metrics, pyramids, volumes, polynomials

It is known that for each simplicial polyhedron P in 3-space there exists a monic polynomial Q depending on the combinatorial structure of P and the lengths of its edges only such that the volume of the polyhedron P as well as one of any polyhedron isometric to P and with the same combinatorial structure are roots of the polynomial Q. But this polynomial contains many millions of terms and it cannot be presented in an explicit form. In this work we indicate some special classes of polyhedra for which these polynomials can be found by a sufficiently effective algorithm which also works in spaces of constsnt curvature of any dimension.

Сведения об авторах:
Сабитов Денис Иджадович,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
ассистент механико-математического факультета.
Сабитов Иджад Хакович,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, профессор,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
научный сотрудник Международной лаборатории
"Дискретная и вычислительная геометрия" им. Б.Н. Делоне