Моделирование и анализ информационных систем. Т. 23, № 4 (2016), с. 440–465
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 23, No 4 (2016), pp. 440–465

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-4-440-465

УДК 512.7

Об алгебраических циклах на расслоенных произведениях неизотривиальных семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1

Никольская О. В.

получена 7 июня 2016

Аннотация. Пусть $\pi_k : X_k \to C \quad (k = 1, 2)$ – проективное семейство поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C. Предположим, что дискриминантные локусы $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \mathrm{Sing}(X_{k\delta}) \neq \varnothing\} \quad (k = 1, 2)$ не пересекаются, причем $h^{2,0}(X_{ks}) = 1, \quad h^{1,0}(X_{ks}) = 0$ для любого гладкого слоя X_{ks} и отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}$ (где $\pi'_k : X'_k \to C \setminus \Delta_k$ – гладкая часть морфизма π_k), является непостоянным. Если для общих геометрических слоев X_{1s} и X_{2s} выполнены следующие условия:

(i) $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s})$ является нечетным числом;

(ii) $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$,

то для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

Если, кроме того, морфизмы π_k гладкие, $p_k = b_2(X_{ks}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{ks}) \ (k = 1, 2)$ – нечетные простые числа и $p_1 \neq p_2$, то для $X_1 \times_C X_2$ и для расслоенного квадрата $X_1 \times_C X_1$ верны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.

Этот результат доставляет новые примеры гладких проективных 5-мерных многообразий, для которых верны гипотезы Ходжа и Гротендика, потому что в качестве гладких слоев морфизма $\pi_k : X_k \to C$ могут быть $K3$-поверхности, а также минимальные регулярные поверхности основного типа (размерности Кодаиры $\varkappa = 2$) с геометрическим родом 1, принадлежащие одному из следующих типов: (a) поверхности с $K^2 \leq 2$; (b) поверхности с $3 \leq K^2 \leq 8$, модули которых лежат в одной компоненте модулей с поверхностью Тодорова; (c) поверхности с $K^2 = 3$ с кручением группы Пикара $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Ключевые слова: гипотеза Ходжа, стандартная гипотеза, расслоенное произведение, группа Ходжа, цикл Пуанкаре

Для цитирования: Никольская О. В., "Об алгебраических циклах на расслоенных произведениях неизотривиальных семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1", *Моделирование и анализ информационных систем*, **23**:4 (2016), 440–465.

Об авторах:
Никольская Ольга Владимировна, orcid.org/0000-0002-6742-8453, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
ул. Горького, 87, г. Владимир, 600000, Россия, e-mail: papichonok@yandex.ru

Благодарности:
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 16-31-00266).

Введение

Пусть X — гладкое проективное комплексное многообразие, $r \in \mathbb{Z}, \quad r \geq 0$,

$$H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \oplus_{p+q=2r} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

— разложение Ходжа. Гипотеза Ходжа [1] утверждает, что $\mathbb{Q}$-пространство

$$H^{2r}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}(X, \mathbb{C})$$

порождается классами когомологий алгебраических циклов коразмерности r на X. Эта гипотеза верна для всех многообразий размерности ≤ 3, для всех простых абелевых многообразий простой размерности [2], а также для некоторых других типов абелевых многообразий, перечисленных в обзоре [3]. Справедливость гипотезы Ходжа не установлена даже для произведения двух $K3$-поверхностей. Тем не менее эта гипотеза верна для гладких моделей расслоенных произведений некоторых неизотривиальных семейств $K3$-поверхностей над гладкой проективной кривой [4], [5], [6].

С другой стороны, стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца утверждает [7], что классические операторы $*$ и Λ теории Ходжа, рассматриваемые как соответствия на декартовом квадрате $X \times X$, представлены алгебраическими классами когомологий на $X \times X$. Эта гипотеза верна для всех гладких комплексных проективных кривых, поверхностей, абелевых многообразий [8] и трехмерных многообразий размерности Кодаиры $\varkappa(X) < 3 \quad$ [9]. Кроме того, $B(X)$ выполняется для гиперкэлеровых многообразий, являющихся деформациями точечных схем Гильберта $K3$-поверхностей [10], а также для расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ двух проективных неизотривиальных гладких семейств $\pi_k : X_k \to C \ (k = 1, 2) \quad K3$-поверхностей над гладкой проективной кривой C при условии, что ранги решеток трансцендентных циклов на общих геометрических слоях X_{ks} $(k = 1, 2)$ являются различными простыми нечетными числами [4]. Другие известные примеры справедливости стандартной гипотезы содержатся в [11].

В данной работе гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика доказываются для расслоенных произведений семейств регулярных поверхностей с геометрическим родом 1 при некоторых естественных условиях на ранги решеток трансцендентных циклов общих геометрических слоев. Это доставляет в том числе примеры 5-мерных гладких проективных многообразий размерности Кодаиры 5, для которых верны обе гипотезы.

Пусть $\pi_k : X_k \to C \quad (k = 1, 2)$ — проективное семейство поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C. Предположим, что дискриминантные локусы $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \mathrm{Sing}(X_{k\delta}) \neq \varnothing\} \quad (k = 1, 2)$ не пересекаются, причем $h^{2,0}(X_{ks}) = 1, \quad h^{1,0}(X_{ks}) = 0$ для любого гладкого слоя X_{ks} и отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}$ (где $\pi'_k : X'_k \to C \setminus \Delta_k$ — гладкая часть морфизма π_k), является непостоянным. Если для общих геометрических слоев X_{1s} и X_{2s} выполнены следующие условия:

(i) $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s})$ является нечетным числом;

(ii) $b_2(X_{1s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \mathrm{rank}\,\mathrm{NS}(X_{2s})$,

то для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

Если, кроме того, морфизмы π_k гладкие, $p_k = b_2(X_{ks}) - \operatorname{rank} \mathrm{NS}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ – нечетные простые числа и $p_1 \neq p_2$, то для $X_1 \times_C X_2$ и для расслоенного квадрата $X_1 \times_C X_1$ верны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.

Заметим, что в качестве гладких слоев морфизма $\pi_k : X_k \to C$ могут быть $K3$-поверхности, а также минимальные регулярные поверхности основного типа (размерности Кодаиры $\varkappa = 2$) с геометрическим родом 1, принадлежащие одному из следующих типов: (a) поверхности с $K^2 \leq 2$; (b) поверхности с $3 \leq K^2 \leq 8$, модули которых лежат в одной компоненте модулей с поверхностью Тодорова; (c) поверхности с $K^2 = 3$ с кручением группы Пикара $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

1. Отображение периодов и группы Ходжа

1.1. Отображение периодов и монодромия

По определению, отображение периодов сопоставляет точке s базы семейства гладких проективных многообразий над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел когомологии слоя над этой точкой, снабженные структурой Ходжа. Полученная при этом структура Ходжа рассматривается как точка в многообразии модулей структур Ходжа данного типа.

Пусть $\{\mathcal{X}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ – семейство слоев гладкого проективного морфизма $f : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ – гладкое алгебраическое многообразие. Тогда когомологии $H^p(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z}) = V_{\mathbb{Z}}$ снабжены чистой поляризованной структурой Ходжа, которая задается морфизмом вещественных алгебраических групп $h : \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{G}_m) \to G_{\mathbb{R}}$, где $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{G}_m)$ – мультипликативная группа $\mathbb{C}^\times$ поля комплексных чисел, рассматриваемая как вещественная алгебраическая группа,

$$G = \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \psi(gx, gy) = \lambda(g)\psi(x, y)\}$$

– алгебраическая группа линейных автоморфизмов пространства V, умножающих невырожденную (симметрическую или кососимметрическую) билинейную форму поляризации ψ на скалярный множитель, причем автоморфизм $\mathrm{Ad}\, h(i)$ группы $G_{\mathbb{R}}$ является инволюцией Картана и $h(\mathbb{R}^\times)$ лежит в центре группы $G_{\mathbb{R}}$.

Множество X_G морфизмов групп $h : \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathrm{G}_m) \to G_{\mathbb{R}}$, обладающих этими свойствами, естественным образом снабжено $G_{\mathbb{R}}$-инвариантной структурой однородного кэлерова многообразия, а фактор $M_G = X_G/G_{\mathbb{Z}}$ является пространством модулей структур Ходжа.

Голоморфное отображение в X_G или M_G называется *горизонтальным*, если образ его касательного отображения лежит в горизонтальном подрасслоении. Хорошо известно, что отображение периодов $\Phi : \mathcal{S} \to M_G$ горизонтально [12], [13, п. (2.4)]. Образ группы монодромии

$$\Phi_*(\pi_1(\mathcal{S}, s)) \subset G_{\mathbb{Z}}$$

полупрост во всяком рациональном представлении группы G [13, теорема (3.3)], а преобразования обхода T вокруг дивизора с нормальными пересечениями $\overline{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S}$ в гладкой компактификации $\overline{\mathcal{S}}$ многообразия $\mathcal{S}$ (преобразования Пикара – Лефшеца) порождают квазиунипотентные (другими словами, имеющие в качестве собственных чисел корни из 1) элементы $\Phi_*(T) \in G_{\mathbb{Z}}$ [13, теорема (3.1)]. Группа монодромии важна в силу теоремы жесткости [13, теорема (5.4)], [14], [15]: если над $\mathcal{S}$ имеются два семейства гладких проективных многообразий, то соответствующие отображения периодов Φ_1 и Φ_2 из $\mathcal{S}$ в M_G совпадают тогда и только тогда, когда $\Phi_1(s_0) = \Phi_2(s_0)$ в некоторой точке s_0 и морфизмы групп $\Phi_{i*} : (\pi_1(\mathcal{S}, s_0)) \to G_{\mathbb{Z}}$, $i = 1, 2$ совпадают.

1.2. Поверхность Тодорова

Поверхностью Тодорова называется любая проективная комплексная поверхность Z с эйлеровой характеристикой структурного пучка $\chi(\mathcal{O}_Z) = 2$, двойными рациональными особыми точками и обильным каноническим классом при условии, что ее биканонический образ является $K3$-поверхностью S с двойными рациональными особыми точками (в частности, $q(S) = 0$, $K_S = 0$) [16, § 2].

1.3. Типы гладких слоев семейств поверхностей

Пусть V – гладкая проективная поверхность основного типа над конечнопорожденным полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ с $h^{2,0}(V \otimes_k \mathbb{C}) = 1$. Если минимальная модель поверхности $V \otimes_k \mathbb{C}$ принадлежит одному из следующих типов:

(a) поверхности с $q = 0$ и $K^2 \leq 2$;

(b) поверхности с $q = 0$ и $3 \leq K^2 \leq 8$, модули которых лежат в одной компоненте модулей с поверхностью Тодорова;

(c) поверхности с $q = 0$ и $K^2 = 3$ с кручением группы Пикара $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

(d) поверхности с $q = 1$ и $K^2 = 2$;

(e) поверхности с $q = 1$ и $K^2 = 3$ и общим слоем отображения Альбанезе рода 3;

(f) поверхности с $q = 1$ и $K^2 = 4$ в любой из восьми компонент модулей, описанных в работе Пигнателли [17],

то можно считать, что существует такой гладкий проективный k-морфизм $f : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ над некоторой гладкой связной базой $\mathcal{S}$, что отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2 f_{\mathbb{C}*}\mathbb{Q}$, непостоянно, причем многообразие V является слоем морфизма f над некоторой точкой $s \in \mathcal{S}(k)$, гипотеза Тэйта для дивизоров V и гипотеза Мамфорда – Тэйта для когомологий степени 2 верны [18, теорема 9.3].

1.4. Второе число Бетти гладкого слоя

Используя формулу для арифметического рода поверхности

$$1 - q + p_g = \frac{K^2 + \chi}{12},$$

где $\chi = 2 - 2b_1 + b_2$ – эйлерова характеристика, мы видим, что в рассматриваемых случаях

$$b_2 = \chi - 2 + 2b_1 = 12(1 - q + p_g) - K^2 - 2 + 4q = 10 - 8q + 12p_g - K^2 = 22 - 8q - K^2 \geq 10.$$

1.5. Определение группы Ходжа

Пусть S – гладкая проективная поверхность с $h^{2,0}(S) = 1$. Рассмотрим разложение Ходжа
$$H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = H^{2,0}(S, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(S, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(S, \mathbb{C}),$$
где $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$ – пространство гармонических форм типа (p, q). Известно, что $H^{2,0}(S, \mathbb{C}) \widetilde{\to} H^0(S, \Omega_S^2)$, $H^{0,2}(S, \mathbb{C}) \widetilde{\to} H^2(S, \mathcal{O}_S)$ являются одномерными пространствами над $\mathbb{C}$.

Пусть $U^1 = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$ – единичная окружность. Определим ее действие в $H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ следующим образом: $e^{i\theta}$ действует на $H^{p,q}(S, \mathbb{C})$ как умножение на число $e^{i\theta(p-q)}$. В итоге мы получаем морфизм групп
$$U^1 \xrightarrow{h} \mathrm{GL}(H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}),$$
где $h(e^{i\theta})(w_{2,0} + w_{1,1} + w_{0,2}) = e^{2i\theta} w_{2,0} + w_{1,1} + e^{-2i\theta} w_{0,2}$ на пространстве $H^2(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$.

По определению, *группой Ходжа* структуры Ходжа $H^2(S, \mathbb{Q})$ называется наименьшая алгебраическая $\mathbb{Q}$-подгруппа $\mathrm{Hg}(H^2(S, \mathbb{Q})) \hookrightarrow \mathrm{GL}(H^2(S, \mathbb{Q}))$, группа $\mathbb{R}$-точек которой содержит $h(U^1)$.

По теореме Лефшеца о дивизорах имеем:
$$H^2(S, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))} = H^2(S, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(S, \mathbb{C}) = \mathrm{NS}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S),$$
где $\mathrm{NS}(S)$ группа Нерона–Севери поверхности S.

1.6. Некоторые спаривания

Пусть $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ – ортогональное дополнение к $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)$ в $H^2(S, \mathbb{Q})$ относительно билинейного спаривания
$$<,>: H^2(S, \mathbb{Q}) \times H^2(S, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto x \smile y} H^4(S, \mathbb{Q}) \widetilde{\to} \mathbb{Q}(-2) \xrightarrow[\sim]{(2\pi i)^2} \mathbb{Q}.$$
Из описания Ю.Г. Зархиным группы $\mathrm{Hg}(H^2(S, \mathbb{Q}))$ известно, что $\mathrm{Hg}(H^2(S, \mathbb{Q}))$-модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ простой и $E = E(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ – вполне вещественное поле $E_0 = E_0(S)$ или мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля E_0 [19, теоремы 1.4.1, 1.6, 1.5.1]. Пусть
$$\Phi : \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \times \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \xrightarrow{x \times y \mapsto \alpha} E$$
– спаривание, определяемое формулой
$$< ex, y >= \mathrm{tr}_{E/\mathbb{Q}}(e\alpha) \quad \text{для всех} \quad e \in E.$$

1.7. Структура группы Ходжа в случае вполне вещественного поля

Если $E = E_0$, то группа $\mathrm{Hg}(H^2(S, \mathbb{Q}))$ полупростая [19, замечание 1.5.3.b],
$$\mathrm{Hg}(H^2(S, \mathbb{Q})) = \mathrm{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}, \Phi)),$$

где $\mathrm{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp},\Phi))$ получается из E_0-группы $\mathrm{SO}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp},\Phi)$ ограничением поля скаляров до $\mathbb{Q}$ [19, теорема 2.2.1]. Лемма Шура и равенство

$$E\otimes\overline{\mathbb{Q}}=\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))}\,\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}\otimes\overline{\mathbb{Q}}$$

дают разложение

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}\otimes\overline{\mathbb{Q}}=V_1\oplus\cdots\oplus V_e,$$

где $e=[E:\mathbb{Q}]$, $V_i=V_i(S)$ $(i=1,\dots,e)$ – неприводимые попарно неизоморфные ортогональные $\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))\otimes\overline{\mathbb{Q}}$-модули, образ канонического морфизма

$$\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))\otimes\overline{\mathbb{Q}}\to\mathrm{GL}(V_i)$$

совпадает с $\mathrm{SO}(V_i)$, группа Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ транзитивно переставляет $V_1,\dots,V_e$. Следовательно,

$$\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))\otimes\overline{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}\prod_{i=1}^{e}\mathrm{SO}(V_i).$$

Пара

$$\left(\text{тип Lie}\,\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))\otimes\overline{\mathbb{Q}},\ \ \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}\otimes\overline{\mathbb{Q}}\right)$$

принимает одно из следующих значений:

$$\left(A_1\times\cdots\times A_1=A_1^e,\ \ E(2\omega_1^{(1)})\oplus\cdots\oplus E(2\omega_1^{(e)})\right),\quad \text{если}\quad \dim V_i=3; \tag{1.1}$$

$$\left(A_1\times\cdots\times A_1=A_1^{2e},\ \ E(\omega_1^{(1)}+\omega_1^{(2)})\oplus\cdots\oplus E(\omega_1^{(2e-1)}+\omega_1^{(2e)})\right),\quad \text{если}\quad \dim V_i=4; \tag{1.2}$$

$$\left(B_n\times\cdots\times B_n=B_n^e,\ \ E(\omega_1^{(1)})\oplus\cdots\oplus E(\omega_1^{(e)})\right),\quad \text{если}\quad \dim V_i=2n+1,\quad n\geq 2; \tag{1.3}$$

$$\left(D_n\times\cdots\times D_n=D_n^e,\ \ E(\omega_1^{(1)})\oplus\cdots\oplus E(\omega_1^{(e)})\right),\quad \text{если}\quad \dim V_i=2n,\quad n\geq 3, \tag{1.4}$$

где через $E(\omega_1^{(i)})$ обозначается стандартное неприводимое представление со старшим весом $\omega_1^{(i)}$ (в обозначениях Н. Бурбаки [20]) i-го простого фактора типа A_1,B_n или D_n полупростой алгебры Ли $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))\otimes\overline{\mathbb{Q}}$.

1.8. Лемма Мустафина

Лемма Мустафина [21, § 4, лемма 3]. *Пусть $\rho: g\to\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}V$ — точное $\mathbb{Q}$-неприводимое представление $\mathbb{Q}$-полупростой алгебры Ли g, и пусть $g_{\mathbb{C}}=g_1\times\ldots\times g_e$ — разложение на простые факторы комплексификации g, где $e=\dim_{\mathbb{Q}}(Z(\mathrm{End}_g V))$, $Z(\mathrm{End}_g V)$ — центр алгебры $\mathrm{End}_g V$. Тогда алгебра Ли g $\mathbb{Q}$-проста.*

Согласно лемме Мустафина, алгебра Ли $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q})S)$ является $\mathbb{Q}$-простой в случаях (1.1), (1.3) – (1.4) (другими словами, если $\dim V_i\neq 4$).

1.9. Структура группы Ходжа в случае мнимого квадратичного расширения вполне вещественного поля

Предположим, что $E \neq E_0$. Тогда

$$\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q})) = \mathrm{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}(\mathrm{U}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}, \Phi)),$$

где $\mathrm{U}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}, \Phi)$ – унитарная группа E-векторного пространства $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ относительно эрмитовой формы Φ [19, теорема 2.3.1].

В этом случае легко проверить, что полупростая часть $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ редуктивной алгебры Ли $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q})) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ является произведением $e_0 = e/2$ экземпляров простой алгебры Ли типа A_n $(n \geq 1)$ и $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$-модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ допускает разложение

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}} = E(\omega_1^{(1)}) \oplus E(\omega_n^{(1)}) \oplus \cdots \oplus E(\omega_1^{(e_0)}) \oplus E(\omega_n^{(e_0)}), \tag{1.5}$$

где $E(\omega_1^{(i)})$ – стандартное неприводимое представление алгебры Ли типа A_n в $(n+1)$-мерном пространстве над $\overline{\mathbb{Q}}$ и $E(\omega_n^{(i)}) = E(\omega_1^{(i)})^{\vee}$ – представление, двойственное стандартному (оно изоморфно n-й внешней степени стандартного представления).

Действительно, поскольку E_0 – вполне вещественное поле, то алгебра $E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ – прямая сумма полей $\mathbb{R}_{\sigma} = \mathbb{R}$, индексированных вложениями $\sigma : E_0 \hookrightarrow \mathbb{R}$, где

$$\mathbb{R}_{\sigma} = \{a \in E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \mid ea = \sigma(e)a \quad \text{для} \quad e \in E_0\} = E_0 \otimes_{E_0,\sigma} \mathbb{R}.$$

Поэтому $E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$-модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes_{E_0} (E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ является прямой суммой таких $\mathbb{R}_{\sigma}$-векторных пространств W_{σ}, что

$$W_{\sigma} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes_{E_0,\sigma} \mathbb{R}$$

и $\dim_{\mathbb{R}} W_{\sigma} = \dim_{E_0} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp}$ для любого σ. Аналогично $E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$- алгебра Ли $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ является прямой суммой таких $\mathbb{R}_{\sigma}$- алгебр Ли $hg_{\sigma} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}} W_{\sigma}$, что

$$hg_{\sigma} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q})) \otimes_{E_0,\sigma} \mathbb{R}$$

и $\dim_{\mathbb{R}} hg_{\sigma} = \dim_{E_0} \mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q}))$. Более того, $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hg}(H^2(S,\mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$-модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(S)^{\perp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ – прямая сумма точных hg_{σ}-модулей W_{σ} и

$$\mathrm{End}_{hg_{\sigma}} W_{\sigma} = \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

В частности, hg_{σ} – неприводимая подалгебра в $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} W_{\sigma}$ [19, замечание 1.9.4]. Поэтому остается проверить, что существует разложение

$$W_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_{\sigma} \oplus \overset{\vee}{V}_{\sigma}, \tag{1.7}$$

где V_{σ} – неприводимый $hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-модуль.

В силу (1.6) и леммы Шура имеется разложение $W_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_{\sigma} \oplus U_{\sigma}$, где V_{σ} и U_{σ} – неизоморфные неприводимые $hg_{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-модули. Введем обозначения

$$V_{\sigma} = E(\omega_{\sigma}^{(1)})(\chi_{\sigma}^{(1)}), \qquad U_{\sigma} = E(\omega_{\sigma}^{(2)})(\chi_{\sigma}^{(2)}),$$

где $\omega_\sigma^{(1)}$ – старший вес пространства V_σ, рассматриваемого как модуль над полупростой частью $[hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}]^{\mathrm{ss}}$ алгебры Ли $hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, и $\chi_\sigma^{(1)}$ – вес $\mathrm{Cent}(hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$-модуля V_σ; аналогичные обозначения используются для U_σ. Хорошо известно, что для невырожденной эрмитовой формы Ψ на $(n+1)$-мерном комплексном векторном пространстве $V_{\mathbb{C}}$ существует каноническая точная последовательность вещественных групп Ли [22, гл. IX, § 6, предложение 3]:

$$1 \to \mathrm{SU}(\Psi) \to \mathrm{U}(\Psi) \to \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \to 1,$$

где $\mathrm{SU}(\Psi)$ – компактная вещественная форма комплексной группы Ли $\mathrm{SL}(V_{\mathbb{C}})$ типа A_n [23, гл. IX. § 4, таблица I]. Следовательно, $\chi_\sigma^{(1)} \neq 0$ или $\chi_\sigma^{(2)} \neq 0$. Мы можем (и будем) считать, что $\chi_\sigma^{(1)} \neq 0$. Тогда

$$[\mathrm{Sym}^2(V_\sigma)]^{hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} = \left[[\mathrm{Sym}^2(E(\omega_\sigma^{(1)}))](2\chi_\sigma^{(1)})\right]^{hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} = 0. \tag{1.8}$$

Поскольку ограничение формы поляризации на неприводимую $\mathbb{R}$-структуру Ходжа W_σ веса 2 невырождено и hg_σ-инвариантно [19, п. 0.3.1.1 - 0.3.1.2, 0.3.2], то разложение

$$\begin{gathered}[\mathrm{Sym}^2(W_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})]^{hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} = [\mathrm{Sym}^2(V_\sigma \oplus U_\sigma)]^{hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} = \\ [\mathrm{Sym}^2(V_\sigma)]^{hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \oplus [V_\sigma \otimes_{\mathbb{C}} U_\sigma]^{hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}} \oplus [\mathrm{Sym}^2(U_\sigma)]^{hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}},\end{gathered}$$

лемма Шура и (1.8) показывают, что имеется ненулевой элемент $\mathbb{C}$-пространств $[V_\sigma \otimes_{\mathbb{C}} U_\sigma]^{hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}}$, определяющий некоторый изоморфизм $hg_\sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-модулей $U_\sigma \xrightarrow{\sim} \check{V}_\sigma$. Формула (1.7) доказана.

В дальнейшем мы будем обозначать i-е слагаемое в разложении (1.5) через $V_i = V_i(S)$.

1.10. Точки, общие в смысле Ходжа

Лемма. *Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ – гладкий проективный морфизм над гладкой связной комплексной кривой $\mathcal{S}$, слоями которого являются поверхности $\mathcal{X}_s$ с $h^{2,0}(\mathcal{X}_s) = 1$. Если отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2 f_* \mathbb{Q}$, непостоянно, то существует такое счётное подмножество $\Delta_{\mathrm{countable}} \subset \mathcal{S}$, что функция $s \mapsto \mathrm{rank}\, \mathrm{NS}(\mathcal{X}_s)$ постоянна на множестве $\mathcal{S} \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$.*

Доказательство. Используя замену базы, мы можем (и будем считать), что замыкание $G^{(2)}$ образа представления монодромии $\pi_1(\mathcal{S}, s) \to \mathrm{GL}(H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q}))$ связное в топологии Зариского. По теореме Делиня, для любой точки $s \in \mathcal{S}$ вне некоторого счётного подмножества $\Delta_{\mathrm{countable}}$, группа $G^{(2)}$ – нормальная подгруппа в группе Ходжа $\mathrm{Hg}(H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q}))$ структуры Ходжа $H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q})$ [24, теорема 7.3]. Для таких точек s, называемых *общими в смысле Ходжа*, имеем согласно предложениям 1.2 и 1.3 в [21] и теореме Лефшеца о дивизорах:

$$\begin{aligned}H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(\mathcal{S}, s)} = H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q})^{G^{(2)}} &\hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}_s) \\ = H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q}))} &\hookrightarrow H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q})^{G^{(2)}},\end{aligned}$$

поэтому $H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(\mathcal{S},s)} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}_s)$ и, следовательно,

$$\operatorname{rank}\mathrm{NS}(\mathcal{X}_s) = \dim_{\mathbb{Q}} H^0(\mathcal{S}, R^2 f_*\mathbb{Q})$$

не зависит от выбора точки $s \in \mathcal{S} \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$.

Эта лемма позволяет заменять выражение "точка, общая в смысле Ходжа" на выражение "общая геометрическая точка", где "общность" точки означает ее принадлежность множеству $\mathcal{S}\setminus\Delta_{\mathrm{countable}}$ для некоторого счётного подмножества $\Delta_{\mathrm{countable}} \hookrightarrow \mathcal{S}$.

1.11. Непостоянное отображение периодов и бесконечная группа монодромии

Предложение [21, §1, предложение 1.2]. *Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ – гладкое проективное семейство поверхностей с $h^{2,0} = 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) отображение периодов голоморфной 2-формы не является отображением $\mathcal{S}$ в точку (другими словами, отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2 f_*\mathbb{Q}$, непостоянно);

б) образ представления монодромии $\pi_1(\mathcal{S}, s) \to \mathrm{GL}(H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Q}))$ бесконечен.

2. Доказательство основной теоремы об алгебраических циклах на расслоенном произведении

2.1. Формулировка основной теоремы

Теорема. *Пусть $\pi_k : X_k \to C$ $(k = 1, 2)$ – проективное семейство поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C. Предположим, что множества $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \mathrm{Sing}(X_{k\delta}) \neq \varnothing\}$ $(k = 1, 2)$ не пересекаются, причём $h^{2,0}(X_{ks}) = 1$, $h^{1,0}(X_{ks}) = 0$ для любого гладкого слоя X_{ks} и отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}$, непостоянно (где $\pi'_k : X_k \setminus \pi_k^{-1}(\Delta_k) \to C \setminus \Delta_k$ – гладкая часть морфизма π_k).*

Если для общих геометрических слоев X_{1s} и X_{2s} выполнены следующие условия:

(i) $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{1s})$ *является нечётным числом;*

(ii) $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{2s})$,

то для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

Если, кроме того, морфизмы π_1 и π_2 гладкие, $p_k = b_2(X_{ks}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ – нечётные простые числа и $p_1 \neq p_2$, то для $X_1 \times_C X_2$ верна стандартная гипотеза Гротендика об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.

Здесь общность точки $s \in C$ означает, что она принадлежит множеству $C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$, где $\Delta_{\mathrm{countable}}$ – счётное подмножество, зависящее от семейств π_k; в силу леммы п. 1.10 мы можем также предполагать, что функции $s \mapsto \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ постоянны на множестве $C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$.

2.2. Некоторые обозначения и дополнительные условия

Мы начинаем доказательство этой теоремы.

Прежде всего, если 5-мерные гладкие проективные многообразия X и $\widetilde{X}$ бирационально эквивалентны, то гипотезы Ходжа для X и $\widetilde{X}$ эквивалентны в силу следствия 1.8 в [25]. С другой стороны, если $f : X \to Y$ - сюръективный морфизм гладких проективных многообразий, то из гипотезы Ходжа для X следует гипотеза Ходжа для Y [26, следствие 1.2]. Поэтому в силу теоремы Мамфорда о полустабильных редукциях [27, с. 53-54] мы можем (и будем) предполагать, что любой особый слой морфизма $\pi_k : X_k \to C$ является объединением гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, и $X = X_1 \times_C X_2$ (очевидно, что условие $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$ сохраняется при замене базы и многообразие X не имеет особенностей).

Пусть

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2,$$
$$C' = C \setminus \Delta, \quad X'_k = \pi_k^{-1}(C'), \quad \pi'_k = \pi_k|_{X'_k} : X'_k \to C',$$
$$X' = X'_1 \times_{C'} X'_2, \quad \pi' = \pi'_1 \times_{C'} \pi'_2 : X' \to C',$$

кроме того, пусть $\pi = \pi_1 \times_C \pi_2 : X \to C$ – структурный морфизм.

Фиксируем точку $s \in C'$. Тогда X_{1s} и X_{2s} – поверхности с $h^{2,0} = 1$.

Пусть

$$\rho^{(i)} : \pi_1(C', s) \longrightarrow \mathrm{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$$

–*представление монодромии*, $G^{(i)} = \overline{\rho^{(i)}(\pi_1(C', s))} \subset \mathrm{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$ – замыкание группы $\rho^{(i)}(\pi_1(C', s))$ в топологии Зариского группы $\mathrm{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$. Аналогично определяются группы $G_k^{(i)}$, связанные с представлениями $\rho_k^{(i)} : \pi_1(C', s) \longrightarrow \mathrm{GL}(H^i(X_{ks}, \mathbb{Q}))$.

Пусть $\left(G^{(i)}\right)^0$ – связная компонента единицы группы $G^{(i)}$. Рассматривая в случае необходимости конечное разветвлённое накрытие $\widetilde{C} \to C$ и $\widetilde{X} = X \times_C \widetilde{C} \to \widetilde{C}$, мы можем (и будем) считать, что $G^{(i)} = \left(G^{(i)}\right)^0$, потому что $B(\widetilde{X}) \Rightarrow B(X)$ [28, теорема 1.6] и из гипотезы Ходжа для $\widetilde{X}$ следует гипотеза Ходжа для X [26, следствие 1.2]. По теореме Делиня о полупростоте представления монодромии группа $G^{(i)}$ полупростая [29, следствие 4.2.9] и не зависит от выбора точки $s \in C'$.

Согласно одной теореме Делиня [24, теорема 7.3] можно считать, что существует такое счётное подмножество $\Delta_{\mathrm{countable}} \subset C$, что для любой точки $s \in C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$ группа $G_k^{(2)}$ является нормальной подгруппой в группе Ходжа $\mathrm{Hg}(X_{ks}) \quad (k = 1, 2)$. Точки $s \in C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$ мы будем называть *общими* в смысле Ходжа. Для таких точек s алгебра Ли $\mathrm{Lie}\, G_k^{(2)}$ является *идеалом* в $\mathrm{Lie}\, \mathrm{Hg}(X_{ks})$.

2.3. Морфизмы трансцендентных частей и представления монодромии

Лемма. *При выполнении условий теоремы п.* 2.1 *для общих геометрических слоёв* X_{1s}, X_{2s} *имеем:*

$$\mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0.$$

Доказательство. Рассматривая, в случае необходимости, подходящее разветвленное накрытие $\widetilde{C} \to C$, мы можем считать, что группы $G_k^{(2)}$ связны $(k = 1, 2)$.

Из условия (i) следует, что для поверхности X_{1s} выполнено равенство $E(X_{1s}) = E_0(X_{1s})$, причем случай (1.2) невозможен. Поэтому, в силу леммы п. 1.8, алгебра Ли $\mathrm{Lie\,Hg}(X_{1s})$ является $\mathbb{Q}$-простой. С другой стороны, точка $s \in C$ является общей в смысле Ходжа, поэтому $G_1^{(2)}$ является нетривиальной (в силу предложения п. 1.11 нормальной подгруппой $\mathbb{Q}$-простой связной алгебраической группы $\mathrm{Hg}(X_{1s})$. Поэтому

$$G_1^{(2)} = \mathrm{Hg}(X_{1s}) \tag{2.1}$$

и, следовательно, $\pi_1(C', s)$-модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является простым, так как он является простым $\mathrm{Hg}(X_{1s})$-модулем по теореме Ю.Г. Зархина [19, теорема 1.6].

Будем предполагать в дальнейшем, что $\mathrm{Hom}_{\pi_1(C',s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) \neq 0$. Тогда простой $\pi_1(C', s)$-модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является прямым слагаемым полупростого $\pi_1(C', s)$-модуля $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ [29, теорема 4.2.6].

Если $E(X_{2s}) = E_0(X_{2s})$ и для поверхности X_{2s} выполнено одно из условий (1.1), (1.3), (1.4), то по лемме Мустафина алгебра Ли $\mathrm{Lie\,Hg}(X_{2s})$ является $\mathbb{Q}$-простой и, следовательно, $\pi_1(C', s)$-модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ является простым, причем он содержит простой $\pi_1(C', s)$-модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$. Поэтому $\dim \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = \dim \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$, что противоречит условию (ii). Если для поверхности X_{2s} выполнено условие (1.2), то $V_i(X_{2s})$ является неприводимым $\pi_1(C, s)$-модулем степени 4 или прямой суммой $\pi_1(C, s)$-модулей степеней 1 или 2 (потому что $G_2^{(2)}$ является связной нормальной подгруппой в группе Ходжа $\mathrm{Hg}(X_{2s})$), в то время как $V_i(X_{1s})$ является неприводимым $\pi_1(C, s)$-модулем степени 3, $2n + 1$ $(n \geq 2)$, $2n$ $(n \geq 3)$. В этом случае утверждение леммы следует из леммы Шура.

Если $E(X_{2s}) \neq E_0(X_{2s})$, то из (1.5) следует, что $V_i(X_{2s})$ является прямой суммой 1-мерных модулей (с тривиальным действием $\pi_1(C', s)$) или неприводимым $\pi_1(C', s)$-модулем степени $n+1$ (потому что $G_2^{(2)}$ является связной нормальной подгруппой в группе Ходжа $\mathrm{Hg}(X_{2s})$ с полупростой частью $\mathrm{Hg}(X_{2s})^{\mathrm{ss}}$ типа $A_n \times \cdots \times A_n = A_n^{e_0}$ $(n \geq 1)$). Поскольку для поверхности X_{1s} выполнено одно из условий (1.1), (1.3) – (1.4) и включение $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ индуцирует сюръективный морфизм алгебраических $\mathbb{Q}$-групп $G_2^{(2)} \to G_1^{(2)}$, то из (2.1) следует, что простые факторы алгебры Ли $\mathrm{Lie\,Hg}(X_{1s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ имеют тип A_n $(n \geq 2)$, причем неприводимые представления $V_i(X_{1s})$ не являются автодуальными (другими словами, $V_i(X_{1s})^{\vee}$ не изоморфно $V_i(X_{1s})$ над алгеброй Ли $\mathrm{Lie\,Hg}(X_{1s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$). Это противоречит автодуальности $V_i(X_{1s})$ при выполнении одного из условий (1.1), (1.3) - (1.4) для поверхности X_{1s}. Лемма доказана.

2.4. Точная последовательность рациональных структур Ходжа

Спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\pi_{k*}\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X_k, \mathbb{Q})$ $(k = 1, 2)$ вырождена [30, следствие (15.15)], причем краевое отображение

$$H^{2i}(X_k, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^{2i}\pi_{k*}\mathbb{Q})$$

сюръективно [30, следствие (15.14)], поэтому имеется точная последовательность $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [30, теорема (15.11), следствие (15.15), теорема (15.16)]

$$\begin{aligned}0 \to H^2(C, R^{2i-2}\pi_{k*}\mathbb{Q}) \to \operatorname{Ker}[H^{2i}(X_k, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^{2i}\pi_{k*}\mathbb{Q})]\\ \to H^1(C, R^{2i-1}\pi_{k*}\mathbb{Q}) \to 0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Так как $H^1(X_{ks}, \mathbb{Q}) = 0$ для всех $s \in C'$, то для $s \in C'$ имеем:

$$H^1(X_{ks}, \mathbb{Q}) = H^3(X_{ks}, \mathbb{Q}) = 0.$$

Поэтому пучок $R^{2i-1}\pi_{k*}\mathbb{Q}$ сосредоточен на конечном множестве $\Delta = C \setminus C'$ и, следовательно, $H^1(C, R^{2i-1}\pi_{k*}\mathbb{Q}) = 0$. Из (2.2) следует точность последовательности

$$0 \to H^2(C, R^{2i-2}\pi_{k*}\mathbb{Q}) \to H^{2i}(X_k, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^{2i}\pi_{k*}\mathbb{Q}) \to 0. \tag{2.3}$$

В случае $i = 1$ получаем из (2.3) точную последовательность $\mathbb{Q}$-структур Ходжа

$$0 \to H^2(C, \mathbb{Q}) \to H^2(X_k, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^2\pi_{k*}\mathbb{Q}) \to 0, \tag{2.4}$$

где $H^2(C, \mathbb{Q})$ порождается алгебраическим классом $\mathrm{cl}_{X_k}(X_{ks})$ слоя X_{ks} (и, следовательно, имеет тип Ходжа $(1,1)$).

2.5. Вычисление типа одной рациональной структуры Ходжа

Лемма. *Рациональная структура Ходжа* $H^0(C, R^2\pi_{k*}\mathbb{Q})$ *имеет тип* $(1,1)$.
Доказательство. Как показано в п. 1.10, мы имеем:

$$H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}). \tag{2.5}$$

Используя алгоритм п. 1.4 в [9], легко получить из теории смешанных структур Ходжа, что

$$\operatorname{Coker}\left[H^1(C, R^1\pi_{k*}\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C', R^1\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \cap \operatorname{Im}[H^2(X_k, \mathbb{Q}) \to H^2(X'_k, \mathbb{Q})]\right]$$

– чистая $\mathbb{Q}$-структура Ходжа типа $(1,1)$. Поскольку из (2.5) следует, что $H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q})$ – рациональная структура Ходжа типа $(1,1)$ то $H^0(C, R^2\pi_{k*}\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$ в силу результатов п. 2.3 в [31]. Лемма доказана.

2.6. Рациональные когомологии степени 2 и группы Нерона – Севери

Лемма. *Имеем*: $H^2(X_k, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$, $\quad H^2(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$.
Доказательство. Первое равенство следует из (2.4), леммы п. 2.5 и теоремы Лефшеца о дивизорах. Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$$

вырождена [30, следствие (15.15)], причем краевое отображение

$$H^{2i}(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q})$$

сюръективно [30, следствие (15.14)], поэтому имеется точная последовательность $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [30, теорема (15.11), следствие (15.15), теорема (15.16)]

$$\begin{aligned} 0 \to H^2(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \to \operatorname{Ker}[H^{2i}(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q})] \\ \to H^1(C, R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q}) \to 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Так как $H^1(X_{ks},\mathbb{Q}) = 0$ для всех $s \in C \setminus \Delta_k$, то пучок $R^{2j-1}\pi_{k*}\mathbb{Q}$ сосредоточен на конечном множестве Δ_k и, следовательно,

$$H^1(C, R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q}) = 0 \tag{2.7}$$

в силу формулы Кюннета

$$R^{2i-1}\pi_*\mathbb{Q} = \bigoplus_{p+q=2i-1} R^p\pi_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^q\pi_{2*}\mathbb{Q}.$$

Из (2.7) следует точность последовательности

$$0 \to H^2(C, R^{2i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \to H^{2i}(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C, R^{2i}\pi_*\mathbb{Q}) \to 0. \tag{2.8}$$

В случае $i = 1$ получаем из (2.8) точную последовательность $\mathbb{Q}$-структур Ходжа

$$0 \to H^2(C,\mathbb{Q}) \to H^2(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \to 0, \tag{2.9}$$

где в силу условия $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$ имеем $R^1\pi_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^1\pi_{2*}\mathbb{Q} = 0$, поэтому из формулы Кюннета следует, что

$$R^2\pi_*\mathbb{Q} = R^2\pi_{1*}\mathbb{Q} \oplus [R^1\pi_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^1\pi_{2*}\mathbb{Q}] \oplus R^2\pi_{2*}\mathbb{Q} = R^2\pi_{1*}\mathbb{Q} \oplus R^2\pi_{2*}\mathbb{Q}. \tag{2.10}$$

Остается применить (2.9), лемму п. 2.5 и теорему Лефшеца о дивизорах. Лемма доказана.

2.7. Алгебраичность рациональных когомологий степени 4

Согласно сильной теореме Лефшеца $H^4(X_k,\mathbb{Q}) = H^2(X_k,\mathbb{Q}) \smile \mathrm{cl}_{X_k}(H_k)$, где H_k – гиперплоское сечение многообразия X_k. Поэтому из леммы п. 2.6 следует, что пространство $H^4(X_k,\mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами когомологий.

2.8. Доказательство гипотезы Ходжа для расслоенного произведения

Пусть

$$f : Z \to \pi^{-1}(\Delta)$$

– нормализация схемы $\pi^{-1}(\Delta)$. Тогда Z – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поскольку $f : Z \to \pi^{-1}(\Delta)$ – разрешение особенностей замкнутой подсхемы $i_\Delta : \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$, то имеется точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [32, следствие (8.2.8)]:

$$H^2(Z,\mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_\Delta f)_*} H^4(X,\mathbb{Q}) \to H^4(X',\mathbb{Q}),$$

где $(i_\Delta f)_*$ – морфизм типа $(1,1)$ рациональных структур Ходжа. Поэтому

$$(i_\Delta f)_* \, H^2(Z,\mathbb{Q}) = \operatorname{Ker}\left[H^4(X,\mathbb{Q}) \to H^4(X',\mathbb{Q})\right]. \tag{2.11}$$

Хорошо известно, что имеется канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$-структур Ходжа $H^4(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C,R^4\pi_*\mathbb{Q})$ [30, следствие (15.14)], включенный в коммутативную диаграмму с точными строками [30, диаграмма (15.1) для случая $m=3$]

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & L_4 & \to & H^4(X,\mathbb{Q}) & \to & H^0(C,R^4\pi_*\mathbb{Q}) & \to & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_4} & & | & & | & & \\
 & & H^1(C,R^3\pi_*\mathbb{Q}) & & | & & | & & \\
 & & \simeq\downarrow{\scriptstyle\gamma_4} & & | & & | & & \\
 & & H^1(C,j_*R^3\pi'_*\mathbb{Q}) & & | & & | & & \\
 & & \bigcap & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_4} & & \\
0 & \to & H^1(C',R^3\pi'_*\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\beta_4} & H^4(X',\mathbb{Q}) & \to & H^0(C',R^4\pi'_*\mathbb{Q}) & \to & 0,
\end{array} \tag{2.12}$$

где $\gamma_4 \circ \alpha_4$ – морфизм $\mathbb{Q}$-структур Ходжа и β_4 – морфизм смешанных структур Ходжа [30, теоремы (15.3), (15.4)].

По теореме Делиня каноническое отображение $H^4(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C',R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом рациональных структур Ходжа [29, п. 4.1.1 – 4.1.2]. Поэтому диаграмма (2.12) даёт коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & L_4 & \to & H^4(X,\mathbb{Q}) & \to & H^0(C,R^4\pi_*\mathbb{Q}) & \to & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_4} & & | & & | & & \\
 & & H^1(C,R^3\pi_*\mathbb{Q}) & & | & & | & & \\
 & & \bigcap & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_4} & & \\
0 & \to & H^1(C',R^3\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \operatorname{Im}(\varphi_4) & \to & \operatorname{Im}(\varphi_4) & \to & H^0(C',R^4\pi'_*\mathbb{Q}) & \to & 0.
\end{array} \tag{2.13}$$

Спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C,R^q\pi_*\mathbb{Q})$ вырождается и даёт точную последовательность $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [30, теорема (15.11), предложение (15.12), следствие (15.15), теорема (15.16)]

$$0 \to H^2(C,R^2\pi_*\mathbb{Q}) \to \operatorname{Ker}[H^4(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C,R^4\pi_*\mathbb{Q})] \xrightarrow{\alpha_4} H^1(C,R^3\pi_*\mathbb{Q}) \to 0. \tag{2.14}$$

Поэтому, принимая во внимание (2.11) и присоединяя канонические отображения ядер и коядер к диаграмме (2.13), мы получим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & & H^2(C,R^2\pi_*\mathbb{Q}) & \to & (i_\Delta f)_* \, H^2(Z,\mathbb{Q}) & \to & \operatorname{Ker}(\psi_4) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & & L_4 & \to & H^4(X,\mathbb{Q}) & \to & H^0(C,R^4\pi_*\mathbb{Q}) \to 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_4} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_4} \\
0 \to & & H^1(C',R^3\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \operatorname{Im}(\varphi_4) & \to & \operatorname{Im}(\varphi_4) & \to & H^0(C',R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \frac{H^1(C',R^3\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \operatorname{Im}(\varphi_4)}{H^1(C,R^3\pi_*\mathbb{Q})} & \to & 0 & \to & 0.
\end{array} \tag{2.15}$$

Поскольку $R^3\pi'_*\mathbb{Q} = 0$ в силу формулы Кюннета, то диаграмма (2.15) даёт точную последовательность рациональных структур Ходжа

$$0 \to (i_\Delta f)_* H^2(Z, \mathbb{Q}) \to H^4(X, \mathbb{Q}) \to H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0. \qquad (2.16)$$

С другой стороны,

$$R^4\pi'_*\mathbb{Q} = R^4\pi'_{1*}\mathbb{Q} \oplus [R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^2\pi'_{2*}\mathbb{Q}] \oplus R^4\pi'_{2*}\mathbb{Q}.$$

Пусть $s \in C'$ – общая точка в смысле Ходжа для семейств $\pi'_k : X'_k \to C'$ $(k = 1, 2)$. Тогда можно считать (переходя в случае необходимости к разветвлённому накрытию $\widetilde{C} \to C$ и подходящей гладкой модели многообразия $X_k \times_C \widetilde{C}$ над $\widetilde{C}$), что $G^{(2)}_k \hookrightarrow \mathrm{Hg}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ – нормальная связная подгруппа. В этом случае

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) = H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(X_{ks})} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\pi_1(C',s)} \qquad (2.17)$$

по теореме Лефшеца о дивизорах. Имеем в силу (2.5):

$$[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^\perp]^{\pi_1(C',s)} \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}),$$

поэтому

$$[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^\perp]^{\pi_1(C',s)} = 0. \qquad (2.18)$$

Из (2.17) – (2.18) следует, что

$$\begin{gathered} H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^4(X_{1s} \times X_{2s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} \\ = H^4(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} \oplus [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C',s)} \oplus H^4(X_{2s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}, \end{gathered} \qquad (2.19)$$

где

$$\begin{gathered} [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C',s)} \\ = \big[[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^\perp] \otimes [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^\perp]\big]^{\pi_1(C',s)} \\ = [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s}] \oplus \big[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^\perp \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^\perp\big]^{\pi_1(C',s)} \\ \xrightarrow{\sim} [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s}] \oplus \mathrm{Hom}_{\pi_1(C',s)}[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^\perp, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^\perp] = \\ \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s}) \end{gathered} \qquad (2.20)$$

согласно лемме п. 2.3. В силу леммы п. 2.6, (2.17) – (2.18) и теоремы Делиня [29, теорема 4.1.1], существует каноническое сюръективное отображение ограничения

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \to H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}).$$

Поэтому элементы из $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})$ поднимаются до алгебраических классов из пространства $H^2(X_k, \mathbb{Q})$. С другой стороны, элементы пространства $H^4(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ поднимаются до алгебраических классов из $H^4(X_k, \mathbb{Q})$, потому что каноническое отображение ограничения $H^4(X_k, \mathbb{Q}) \to H^4(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ сюръективно по теореме Делиня [29, теорема 4.1.1]. Согласно (2.16), (2.19) – (2.20) пространство $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов в $H^4(X, \mathbb{Q})$, лежащих в $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1) \smile$

$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_2)$, $H^4(X_1,\mathbb{Q})$, $H^4(X_2,\mathbb{Q})$, где $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ отождествляется с образом $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ при каноническом отображении $q_k^*: H^2(X_k,\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Q})$, определённом проекцией $X = X_1 \times_C X_2 \xrightarrow{q_k} X_k$ и $H^4(X_k,\mathbb{Q})$ отождествляется с образом $H^4(X_k,\mathbb{Q})$ при каноническом отображении $q_k^*: H^4(X_k,\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^4(X,\mathbb{Q})$. В частности, точная последовательность (2.16) рациональных структур Ходжа даёт точную последовательность $\mathbb{Q}$-структур Ходжа

$$0 \to (i_\Delta f)_* \left[H^2(Z,\mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(Z,\mathbb{C})\right] \to \left[H^4(X,\mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X,\mathbb{C})\right] \to H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0. \tag{2.21}$$

Теорема Лефшеца о дивизорах на гладком (возможно, несвязном) многообразии Z показывает, что (2.21) имеет вид

$$0 \to (i_\Delta f)_* \,\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(Z) \to \left[H^4(X,\mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X,\mathbb{C})\right] \to H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \to 0.$$

Поскольку $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов на X, то $H^4(X,\mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X,\mathbb{C})$ порождается классами когомологий алгебраических циклов коразмерности 2 на X. Значит, для X верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах.

2.9. Доказательство стандартной гипотезы для расслоенного произведения

Будем предполагать в дальнейшем, что морфизмы π_1 и π_2 гладкие, $p_k = b_2(X_{ks}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{ks})$ $(k = 1,2)$ – нечётные простые числа и $p_1 \neq p_2$. Мы будем использовать основные свойства циклов Пуанкаре [31, §1], ассоциированных с $\mathbb{Q}$-структурами Ходжа.

Для любой точки $t \in C$ 4-мерное проективное многообразие $X_t = X_{1t} \times X_{2t}$ снабжено поляризацией. Она задает невырожденную билинейную форму поляризации

$$\psi_t : H^2(X_t,\mathbb{Q}) \times H^2(X_t,\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$$

на пространстве $H^2(X_t,\mathbb{Q})$. Очевидно, что

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^2(X_t,\mathbb{Q}) \neq 2.$$

Поэтому корректно определен цикл Пуанкаре $\wp(H^2(X_t,\mathbb{Q}))$ [31, § 1], являющийся образующей 1-мерного пространства

$$\left[H^2(X_t,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^2(X_t,\mathbb{Q})\right]^{\mathrm{SO}(H^2(X_t,\mathbb{Q}),\psi_t)},$$

где алгебраическая $\mathbb{Q}$-группа $\mathrm{SO}(H^2(X_t,\mathbb{Q}),\psi_t)$ действует диагонально на тензорном произведении $H^2(X_t,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^2(X_t,\mathbb{Q})$. Это действие задается формулой

$$\sigma(x \otimes y) = \sigma(x) \otimes \sigma(y) \qquad (\sigma \in \mathrm{SO}(H^2(X_t,\mathbb{Q}),\psi_t),\ \ x,y \in H^2(X_t,\mathbb{Q})).$$

Хорошо известно, что $\wp(H^2(X_t,\mathbb{Q})) \in \left[H^2(X_t,\mathbb{Q}) \otimes H^2(X_t,\mathbb{Q})\right] \cap H^{2,2}(X_t \times X_t,\mathbb{C})$ является *циклом Ходжа* [31, § 1].

Для общей в смысле Ходжа точки $t \in C \backslash \Delta_{\text{countable}}$ пространство $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{kt})^{\perp}$ является неприводимым $\mathrm{Hg}(H^2(X_{kt}, \mathbb{Q}))$-модулем простой нечетной степени p_k, поэтому из классификации (1.1) – (1.4) следует, что $\mathrm{Hg}(H^2(X_{kt}, \mathbb{Q}))$ – простая алгебраическая группа типа $B_{\frac{p_k-1}{2}}$. Из неравенства $p_1 \neq p_2$ следует, что в силу существования включения

$$\mathrm{Hg}(H^2(X_{1t} \times X_{2t}, \mathbb{Q})) \hookrightarrow \mathrm{Hg}(H^2(X_{1t}, \mathbb{Q})) \times \mathrm{Hg}(H^2(X_{2t}, \mathbb{Q}))$$

и сюръективности канонических морфизмов

$$\mathrm{Hg}(H^2(X_{1t} \times X_{2t}, \mathbb{Q})) \to \mathrm{Hg}(H^2(X_{kt}, \mathbb{Q})) \ \ (k = 1, 2)$$

группа

$$\mathrm{Hg}(H^2(X_t, \mathbb{Q})) = \mathrm{Hg}(H^2(X_{1t} \times X_{2t}, \mathbb{Q})) = \mathrm{Hg}(H^2(X_{1t}, \mathbb{Q}) \oplus H^2(X_{2t}, \mathbb{Q}))$$

имеет тип $B_{\frac{p_1-1}{2}} \times B_{\frac{p_2-1}{2}}$. В частности,

$$\mathrm{Hg}(H^2(X_t, \mathbb{Q})) = \mathrm{Hg}(H^2(X_{1t}, \mathbb{Q}) \times \mathrm{Hg}(H^2(X_{2t}, \mathbb{Q})).$$

Используя алгоритм доказательства теоремы 0.8 в [26], легко проверить, что пространство

$$H^4(X_{kt} \times X_{kt}, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{kt} \times X_{kt}, \mathbb{C}))$$

порождается классами пересечений дивизоров и классом диагонали $\Delta_{X_{kt}} \hookrightarrow X_{kt} \times X_{kt}$ (в частности, гипотеза Ходжа выполнена для многообразия $X_{kt} \times X_{kt}$).

Действительно, разложение

$$H^2(X_{kt}, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{kt}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{kt})^{\perp}$$

и теорема Лефшеца о дивизорах дают равенства

$$H^2(X_{kt}, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{kt}, \mathbb{Q}))} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{kt}), \qquad [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{kt})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{kt}, \mathbb{Q}))} = 0,$$

поэтому из хорошо известного равенства [3, следствие B55]

$$H^4(X_{kt} \times X_{kt}, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{kt} \times X_{kt}, \mathbb{C})) = [H^4(X_{kt} \times X_{kt}, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{kt}, \mathbb{Q}))},$$

теоремы Кюннета и леммы Шура следует, что это пространство порождается классами пересечений дивизоров и 1-мерным пространством

$$[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{kt})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{kt})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{kt}, \mathbb{Q}))} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(H^2(X_{kt}, \mathbb{Q}))} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{kt})^{\perp}.$$

Из равенства $h^{1,0}(X_{kt}) = 0$ и результатов Окамото [33] следует, что *алгебраический* класс диагонали не является линейной комбинацией классов пересечений дивизоров на квадрате $X_{kt} \times X_{kt}$ поверхности X_{kt}, поэтому для многообразия $X_{kt} \times X_{kt}$ верна гипотеза Ходжа.

Очевидно, что

$$[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2t})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{1t},\mathbb{Q}))\times \mathrm{Hg}(H^2(X_{2t},\mathbb{Q}))}$$
$$= \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t}) \otimes [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2t})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{2t},\mathbb{Q}))} = 0;$$
$$[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2t})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{1t},\mathbb{Q}))\times \mathrm{Hg}(H^2(X_{2t},\mathbb{Q}))}$$
$$= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{1t},\mathbb{Q}))} \otimes [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2t})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{2t},\mathbb{Q}))} = 0;$$
$$[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2t})]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{1t},\mathbb{Q}))\times \mathrm{Hg}(H^2(X_{2t},\mathbb{Q}))}$$
$$= [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{1t},\mathbb{Q}))} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2t}) = 0,$$

поэтому для многообразия

$$X_t \times X_t = X_{1t} \times X_{2t} \times X_{1t} \times X_{2t} \widetilde{\to} X_{1t} \times X_{1t} \times X_{2t} \times X_{2t}$$

пространство

$$H^4(X_{1t} \times X_{1t} \times X_{2t} \times X_{2t}, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{1t} \times X_{1t} \times X_{2t} \times X_{2t}, \mathbb{C})$$
$$= [H^4(X_{1t} \times X_{1t} \times X_{2t} \times X_{2t}, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{1t},\mathbb{Q}))\times \mathrm{Hg}(H^2(X_{2t},\mathbb{Q}))}$$
$$= [H^4(X_{1t} \times X_{1t}, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{1t},\mathbb{Q}))}$$
$$\oplus [H^2(X_{1t} \times X_{1t}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2t} \times X_{2t}, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{1t},\mathbb{Q}))\times \mathrm{Hg}(H^2(X_{2t},\mathbb{Q}))}$$
$$\oplus [H^4(X_{2t} \times X_{2t}, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{2t},\mathbb{Q}))}$$

порождается алгебраическими классами когомологий. В частности, класс Пуанкаре

$$\wp(H^2(X_t, \mathbb{Q})) \in [H^2(X_t, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_t, \mathbb{Q})] \cap H^{2,2}(X_t \times X_t, \mathbb{C})$$

алгебраический для всех точек $t \in C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$.

Если $\eta \in C$ – общая схемная точка кривой C, то можно считать (используя в случае необходимости разветвлённое накрытие $\widetilde{C} \to C$ и замену базы $X \times_C \widetilde{C} \to \widetilde{C}$), что цикл Пуанкаре $\wp(H^2(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}))$ на общем геометрическом слое $X_{\overline{\eta}}$ определён над полем $\kappa(\eta) = k(C)$ рациональных функций кривой C. Пусть Z_η – цикл Пуанкаре на $X_\eta \times_{\kappa(\eta)} X_\eta$. Замыкание его компонент в топологии Зариского многообразия $X \times_C X$ даёт алгебраический цикл Z на $X \times_C X$, определяющий алгебраические циклы Z_t на $X_t \times X_t$ для всех $t \in C$. Каждый цикл Z_t определяет изоморфизм $H^6(X_t, \mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^2(X_t, \mathbb{Q})$ (это следствие теории редукции (специализации) алгебраических циклов [34] и леммы 1.5 в [31]); в нашем случае рассматриваются алгебраические циклы с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$.

Используя идею доказательства теоремы 8.3 в [31], можно легко показать, что существует *алгебраический* изоморфизм

$$H^1(C, R^6\pi_*\mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}), \tag{2.22}$$

определённый алгебраическим классом $\iota_*(\mathrm{cl}_{X\times_C X}(Z))$, где $\iota : X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ – каноническое вложение.

Действительно, алгебраический цикл Z_t коразмерности 2 на $X_t \times X_t$ определяет изоморфизм $H^6(X_t, \mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^2(X_t, \mathbb{Q})$, являющийся композицией

$$\begin{gathered} H^6(X_t, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{1t}^*} H^6(X_t, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_t, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\smile \mathrm{cl}_{X_t \times X_t}(Z_t)} \\ H^8(X_t, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_t, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{2t*}} H^2(X_t, \mathbb{Q}), \end{gathered} \tag{2.23}$$

где pr_{1t} и pr_{1t} – канонические проекции $X_t \times X_t \to X_t$.

С другой стороны, цикл Z имеет коразмерность 2 на $X \times_C X$. Последовательность (2.23) допускает естественную глобализацию

$$\begin{gathered} R^6\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{q_1^*} R^6\pi_*\mathbb{Q} \otimes \pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\smile \mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z)} R^{10}\tau_*\mathbb{Q} = \\ \bigoplus_{i=0}^{10} R^i\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^{10-i}\pi_*\mathbb{Q} \longrightarrow R^8\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^2\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{q_{2*}} R^2\pi_*\mathbb{Q}, \end{gathered}$$

где q_1, q_2 – канонические проекции $X \times_C X \to X$ и $\tau = \pi q_i : X \times_C X \to C$ – структурный морфизм. Учитывая, что $q_{2*}(R^i\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^{10-i}\pi_*\mathbb{Q}) = 0$ для всех $i \neq 8$ [31, формула (1.2)], мы видим, что определён изоморфизм

$$H^1(C, R^6\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto q_{2*}(q_1^*(x) \smile \mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z))} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}).$$

Заметим, что $q_k = \mathrm{pr}_k \iota$, где $\mathrm{pr}_k : X \times X \to X$ – каноническая проекция и $\iota : X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ – каноническое вложение. В силу формулы проекции имеем:

$$\begin{gathered} q_{2*}(q_1^*(x) \smile \mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z)) = [\mathrm{pr}_2 \iota]_*((\mathrm{pr}_1 \iota)^* x \smile \mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z)) = \\ \mathrm{pr}_{2*} \iota_*(\iota^* \mathrm{pr}_1^* x \smile \mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z)) = \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^* x \smile \iota_*(\mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z))), \end{gathered}$$

поэтому алгебраический класс $\iota_*(\mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z))$ определяет *алгебраический* изоморфизм

$$H^1(C, R^6\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto q_{2*}(q_1^*(x) \smile \mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z))} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}).$$

С другой стороны, вырожденная последовательность Лере
$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$ даёт точные последовательности

$$\begin{gathered} 0 \to H^2(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \to \mathrm{Ker}[H^3(X, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^3\pi_*\mathbb{Q})] \to H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \to 0, \\ 0 \to H^2(C, R^5\pi_*\mathbb{Q}) \to \mathrm{Ker}[H^7(X, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^7\pi_*\mathbb{Q})] \to H^1(C, R^6\pi_*\mathbb{Q}) \to 0. \end{gathered}$$

Поскольку $R^1\pi_*\mathbb{Q} = R^3\pi_*\mathbb{Q} = R^7\pi_*\mathbb{Q} = 0$, то мы получаем канонические изоморфизмы

$$H^3(X, \mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}), \qquad H^7(X, \mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^1(C, R^6\pi_*\mathbb{Q}).$$

Значит, из (2.22) следует, что алгебраический класс $\iota_*(\mathrm{cl}_{X \times_C X}(Z))$ даёт *алгебраический* изоморфизм

$$H^7(X, \mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^3(X, \mathbb{Q}).$$

Кроме того, в силу леммы 1.5 в [31], существуют алгебраические изоморфизмы

$$H^{10}(X,\mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^0(X,\mathbb{Q}), \qquad H^9(X,\mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^1(X,\mathbb{Q}),$$
$$H^8(X,\mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^2(X,\mathbb{Q}), \qquad H^6(X,\mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^4(X,\mathbb{Q}),$$

определённые соответственно алгебраическими циклами Пуанкаре

$$\wp(H^0(X,\mathbb{Q})) \in H^0(X,\mathbb{Q}) \otimes H^0(X,\mathbb{Q}),$$
$$\wp(H^1(X,\mathbb{Q})) \in H^1(X,\mathbb{Q}) \otimes H^1(X,\mathbb{Q})$$

(цикл $\wp(H^1(X,\mathbb{Q}))$ алгебраический, потому что

$$\wp(H^1(X,\mathbb{Q})) \in [H^1(X,\mathbb{Q}) \otimes H^1(X,\mathbb{Q}))] \cap H^{1,1}(X\times X,\mathbb{C})$$

является циклом Ходжа [31, п. 1.4] и

$$[H^1(X,\mathbb{Q}) \otimes H^1(X,\mathbb{Q})] \cap H^{1,1}(X\times X,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X\times X)$$

по теореме Лефшеца для дивизоров на многообразии $X\times X$);

$$\wp(H^2(X,\mathbb{Q})) \in H^2(X,\mathbb{Q}) \otimes H^2(X,\mathbb{Q})),$$
$$\wp(H^4(X,\mathbb{Q})) \in H^4(X,\mathbb{Q}) \otimes H^4(X,\mathbb{Q}))$$

(напомним, что в рассматриваемом случае $Z=\varnothing$, поэтому в силу формулы (2.16) имеем равенство $H^4(X,\mathbb{Q}) = H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$, где по доказанному выше пространство $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов в $H^4(X,\mathbb{Q})$, лежащих в $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1) \smile \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_2)$, $H^4(X_1,\mathbb{Q})$, $H^4(X_2,\mathbb{Q})$, причем $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ отождествляется с образом $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ при каноническом отображении $q_k^* : H^2(X_k,\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Q})$, определенном проекцией $X = X_1\times_C X_2 \xrightarrow{q_k} X_k$, и $H^4(X_k,\mathbb{Q})$ отождествляется с образом $H^4(X_k,\mathbb{Q})$ при каноническом отображении $q_k^* : H^4(X_k,\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^4(X,\mathbb{Q})$; в итоге из результатов п. 2.7 и леммы п. 2.6 следует, что пространства $H^2(X,\mathbb{Q})$ и $H^4(X,\mathbb{Q})$ порождаются классами алгебраических циклов). Значит $B(X)$ верна в силу теоремы п. 2.9 в [35]. Теорема п. 2.1 доказана.

3. Об алгебраических циклах на расслоенном квадрате

3.1. Формулировка теоремы о циклах на расслоенном квадрате

Теорема. *Пусть C - гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел, $\pi_1 : X_1 \to C$ - гладкое проективное семейство поверхностей с $h^{2,0}(X_{1s}) = 1$, $h^{1,0}(X_{1s}) = 0$ и непостоянным отображением периодов, ассоциированным с вариацией структур Ходжа $R^2\pi_{k*}\mathbb{Q}$, причем для общего геометрического слоя X_{1s} число $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank}\mathrm{NS}(X_{1s}) = p_1$ является нечётным простым. Тогда для расслоенного квадрата $X = X_1\times_C X_1$ верны гипотеза Ходжа и стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа.*

3.2. Доказательство стандартной гипотезы для расслоенного квадрата

Гипотеза $B(X)$ легко проверяется с помощью метода из п. 2.9, потому что в рассматриваемом случае для общей в смысле Ходжа точки $s \in C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$ группа Ходжа $\mathrm{Hg}(H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}))$ имеет тип $B_{\frac{p_1-1}{2}}$ и, следовательно, $\mathbb{Q}$-пространство

$$H^4(X_{1s} \times X_{1s} \times X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{1s} \times X_{1s} \times X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{C})$$
$$= H^4(X_{1s} \times X_{1s} \times X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}))}$$

порождается классами алгебраических циклов, происходящих из пересечений дивизоров на произведениях вида $X_{1s} \times X_{1s}$ и диагоналей $\Delta_{X_{1s}} \hookrightarrow X_{1s} \times X_{1s}$; в частности, класс Пуанкаре

$$\wp(H^2(X_s, \mathbb{Q})) \in [H^2(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_s, \mathbb{Q})] \cap H^{2,2}(X_s \times X_s, \mathbb{C})$$

алгебраический для всех точек $s \in C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$.

Поэтому остается доказать гипотезу Ходжа для $X = X_1 \times_C X_1$.

В силу леммы п. 2.6 и результатов п. 2.7 – 2.8 имеем: $H^2(X_1, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1)$, $H^4(X_1, \mathbb{Q})$, $H^2(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q})$ и $H^2(X, \mathbb{Q})$ порождены классами алгебраических циклов.

3.3. Доказательство гипотезы Ходжа для расслоенного квадрата

В силу (2.18) имеем:

$$[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C,s)} = 0. \tag{3.1}$$

С другой стороны, $\pi_1(C, s)$ оставляет неподвижными элементы из $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})$ в силу включения $G_1^{(2)} \hookrightarrow \mathrm{Hg}(X_{1s})$. Значит, из (3.1) следует, что

$$\begin{gathered} H^0(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^2\pi_{1*}\mathbb{Q}) \widetilde{\to} [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C,s)} = \\ [[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \oplus \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\otimes 2}]^{\pi_1(C,s)} = \\ [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})]^{\pi_1(C,s)} \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})]^{\pi_1(C,s)} \oplus \\ [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C,s)} \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C,s)} = \\ [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})] \oplus [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C,s)}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Очевидно, что

$$[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C,s)} \widetilde{\to} \mathrm{Hom}_{\pi_1(C,s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}).$$

Поскольку $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно неприводимым $\pi_1(C, s)$-модулем степени p_1, то в силу леммы Шура имеем

$$\mathrm{Hom}_{\pi_1(C,s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}) = \mathbb{Q}.$$

В итоге

$$\dim_{\mathbb{Q}}[\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C,s)} = 1. \tag{3.3}$$

Нормальная подгруппа $G_1^{(2)}$ либо совпадает с простой группой Ходжа $\mathrm{Hg}(X_{1s})$, либо равна 1 (второй вариант невозможен в силу предложения п. 1.11, так как семейство $\pi_1 : X_1 \to C$ определяет непостоянное отображение периодов, ассоциированное с вариацией структур Ходжа $R^2\pi_{1*}\mathbb{Q}$). Значит,

$$\begin{gathered} G_1^{(2)} = \mathrm{Hg}(X_{1s}), \\ H^0(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q}) \stackrel{\sim}{\to} H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C,s)} = H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(X_{1s})} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}), \end{gathered} \tag{3.4}$$

поэтому

$$\begin{gathered} [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\pi_1(C,s)} = [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{G_1^{(2)}} = \\ [\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}]^{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \hookrightarrow [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})]^{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \\ \hookrightarrow H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{C}). \end{gathered}$$

Как показано в п. 2.9, пространство $H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{C})$ порождается классами пересечений дивизоров и классом диагонали $\Delta_{X_{1s}} \hookrightarrow X_{1s} \times X_{1s}$, потому что для *общей в смысле Ходжа* точки $s \in C$, пространство $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является абсолютно неприводимым $\mathrm{Hg}(X_{1s})$-модулем.

Заметим, что в силу результатов Окамото ([33, следствие 2.5]) класс

$$\mathrm{cl}_{X_{1s} \times X_{1s}}(\Delta_{X_{1s}}) \in H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q})$$

не когомологичен сумме пересечений дивизоров с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Значит, образ

$$\mathrm{cl}_{X_1 \times_C X_1}(\Delta_{X_1}) \in H^4(X_1 \times_C X_1, \mathbb{Q}) = H^4(X, \mathbb{Q})$$

при каноническом сюръективном морфизме $H^4(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$ не когомологичен сумме пересечений дивизоров, потому что

$$H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \stackrel{\sim}{\to} H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C,s)} \subset H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q})$$

является образом $H^4(X, \mathbb{Q})$ при каноническом морфизме ограничения

$$H^4(X, \mathbb{Q}) \to H^4(X_{1s} \times X_{1s}, \mathbb{Q}).$$

Обозначим через Δ_{X_1} диагональ в $X_1 \times_C X_1 = X$. Тогда алгебраический класс $\mathrm{cl}_X(\Delta_{X_1})$ принадлежит $H^4(X, \mathbb{Q})$, потому что Δ_{X_1} имеет коразмерность 2 в X.

У нас есть точная последовательность $\mathbb{Q}-$структур Ходжа

$$0 \to H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \to \mathrm{Ker}[H^4(X, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})] \to H^1(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) \to 0$$

(формула (2.6) при $i = 2$). Поэтому

$$H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}[H^4(X, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})]$$

и имеется точная последовательность

$$0 \to H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \to H^4(X, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \to 0.$$

Отображение $H^4(X, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$ сюръективно по теореме Делиня [29, теорема 4.1.1]. Кроме того,

$$H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) = H^0(C, R^4\pi_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^0(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q} \otimes R^2\pi_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^0(C, R^4\pi_{1*}\mathbb{Q});$$

при этом $H^0(C, R^4\pi_{1*}\mathbb{Q})$ входит в точную последовательность

$$0 \to H^2(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q}) \to H^4(X_1, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^4\pi_{1*}\mathbb{Q}) \to 0$$

(формула (2.3) при $i = 2$), пространство $H^4(X_1, \mathbb{Q})$ порождено алгебраическими циклами и даже классами пересечений дивизоров (п. 2.7). В частности, $H^0(C, R^4\pi_{1*}\mathbb{Q})$ порождается классами пересечений дивизоров на X_1 и, следовательно, на X.

Из (3.2) – (3.4) следует, что $H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$ порождено пересечениями дивизоров на X и образом класса $\mathrm{cl}_{X_1 \times_C X_1}(\Delta_{X_1}) = \mathrm{cl}_X(\Delta_{X_1})$ в $H^0(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$.

Осталось заметить, что по формуле Кюннета

$$R^2\pi_*\mathbb{Q} = R^2\pi_{1*}\mathbb{Q} \oplus R^2\pi_{1*}\mathbb{Q},$$

поэтому $H^2(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) = H^2(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^2\pi_{1*}\mathbb{Q})$ порождается классами пересечений дивизоров на множителях расслоенного произведения $X = X_1 \times_C X_1$ и, следовательно, на X. Теорема п. 3.1 доказана.

Список литературы / References

[1] Hodge W. V. D., “The topological invariants of algebraic varieties”, *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, **1** (1952), 182–192.

[2] Танкеев С. Г., “Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:1 (1982), 155–170; English transl.: Tankeev S. G., “Cycles on simple abelian varieties of prime dimension”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **20**:1 (1983), 157–171.

[3] Gordon B. B., “A survey of the Hodge conjecture for Abelian varieties, Appendix in: J.D. Lewis”, *A survey of the Hodge conjecture*, **10**, Second edition, CRM Monograph Series, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, 297–356.

[4] Никольская О. В., “Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств K3 поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:1 (2013), 145–164; English transl.: Nikolskaya O. V., “On algebraic cycles on a fibre product of families of K3 surfaces”, *Izv. Math.*, **77**:1 (2013), 143–162.

[5] Никольская О. В., “О геометрии гладкой модели расслоенного произведения семейств K3 поверхностей”, *Матем. сб.*, **205**:2 (2014), 123–130; English transl.: Nikolskaya O. V., “On the geometry of a smooth model of a fibre product of families of K3 surfaces”, *Sbornik: Mathematics*, **205**:2 (2014), 269–276.

[6] Никольская О. В., “Об алгебраических классах когомологий на гладкой модели расслоенного произведения семейств K3 поверхностей”, *Матем. заметки*, **96**:5 (2014), 738–746; English transl.: Nikolskaya O. V., “On algebraic cohomology classes on a smooth model of a fiber product of families of K3 surfaces”, *Math. Notes*, **96**:5 (2014), 745–752.

[7] Grothendieck A., “Standard conjectures on algebraic cycles”, *Algebraic Geometry*, Oxford University Press, London, 1969, 193–199, Internatioal Colloguium (Bombay, 1968).

[8] Lieberman D. I., “Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds”, *Amer. J. Math.*, **90**:2 (1968), 366–374.

[9] Танкеев С. Г., “О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 177–194; English transl.: Tankeev S. G., “On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds. II”, *Izv. Math.*, **75**:5 (2011), 1047–1062.

[10] Charles F., Markman E., “The standard conjectures for holomorphic symplectic varieties deformation equivalent to Hilbert shemes of K3 surfaces”, *Compos. Math.*, **149**:3 (2013), 481–494.

[11] Танкеев С. Г., “О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий и компактификаций минимальных моделей Нерона”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:1 (2014), 181–214; English transl.: Tankeev S. G., “On the standard conjecture for complex 4-dimensional elliptic varieties and compactifications of Neron minimal models”, *Izv. Math.*, **78**:1 (2014), 169–200.

[12] Deligne P., “Travaux de Griffiths”, *Séminaire Bourbaki 1969/70, Exposé 376,*, Heidelberg, Benjaminn, New York, 1971, 213–235.

[13] Гриффитс Ф. А., “Периоды интегралов на алгебраических многообразиях: обзор основных результатов и обсуждение открытых проблем”, *УМН*, **25**:3 (1970), 175–234; English transl.: Griffiths Ph. A., “Periods of integrals on algebraic manifolds: summary of main results and discussion of open problems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**:2 (1970), 228–296.

[14] Griffiths Ph. A., “A transcendental method in algebraic geometry”, *Actes du Congrés intérnational des mathématiciens* (*Nice,* 1970), **1** (1971), 113–119.

[15] Schmid W., “Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping”, *Invent. math.*, **22** (1973), 211–319.

[16] Morrison D. R., “On the moduli of Todorov surfaces”, *Algebraic geometry and commutative algebra in honor of Masayoshi Nagata*, Kinokuniya C. Ltd., 1988, 313–356.

[17] Pignatelli R., “Some (big) irreducible components of the moduli space of minimal surfaces of general type with $p_g = q = 1$ and $K^2 = 4$”, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei* (9) *Mat. Appl.*, **20**:3 (2009), 207–226.

[18] Moonen B., “On the Tate and Mumford - Tate conjectures in codimension one for varieties with $h^{2,0} = 1$”, *arXiv:* 1504.05406*v*1, 21 Apr 2015, 1–45.

[19] Zarhin Yu. G., “Hodge groups of $K3$ surfaces”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **341** (1983), 193–220.

[20] Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*, Мир, Москва, гл. 1–3 (1976); гл. 4–6 (1972); гл. 7–8 (1978); French transl.: Bourbaki N., *Groupes et algèbres de Lie, Chaps. 1–8*, Actualités Sci. Indust., nos. 1285, 1349, 1337, 1364, Hermann, Paris, 1971, 1972, 1968, 1975.

[21] Мустафин Г. А., “Семейства алгебраических многообразий и инвариантные циклы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:5 (1985), 948–978; English transl.: Mustafin G. A., “Families of algebraic varieties and invariant cycles”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **27**:2 (1986), 251–278.

[22] Бурбаки Н., *Элементы математики. Алгебра. Гл. VII – IX. Модули, кольца, формы*, Наука, Москва, 1966; French transl.: Bourbaki N., *Éléments de mathématique. Algèbre, Ch. IX, Formes sesquilineares et formes quadratiques*, Hermann, Paris, 1959.

[23] Хелгасон С., *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, Москва, 1964; English transl.: Helgason S., *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York and London, 1962.

[24] Зархин Ю. Г., “Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 264–304; English transl.: Zarhin Yu. G., “Weights of simple Lie algebras in the cohomology of algebraic varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **24**:2 (1985), 245–281.

[25] Танкеев С. Г., "Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:3 (2007), 197–224; English transl.: Tankeev S. G., "Monoidal transformation and conjectures on algebraic cycles", *Izv. Math.*, **71**:3 (2007), 629–655.

[26] Танкеев С. Г., "Об арифметике и геометрии общего гиперповерхностного сечения", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 173–204; English transl.: Tankeev S. G., "The arithmetic and geometry of a generic hypersurface section", *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 393–424.

[27] Kempf G. et al., *Toroidal embeddings*, I. Lecture Notes in Mathematics, **339**, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1973, 209 pp.

[28] Танкеев С. Г., "О стандартной гипотезе для комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 183–224; English transl.: Tankeev S. G., "On the standard conjecture for complex Abelian schemes over smooth projective curves", *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 597–635.

[29] Делинь П., "Теория Ходжа. II", *Математика. Сборник переводов иностранных статей*, **17**:5 (1973), 3–56; French transl.: Deligne P., "Théorie de Hodge. II", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40** (1971), 5–57.

[30] Zucker S., "Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric", *Ann. Math.* (2), **109**:3 (1979), 415–476.

[31] Танкеев С. Г., "О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 175—196; English transl.: Tankeev S. G., "On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds", *Izv. Math.*, **74**:1 (2010), 167–187.

[32] Deligne P., "Théorie de Hodge. III", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44** (1974), 5–77.

[33] Okamoto M., "On a certain decomposition of 2-dimensional cycles on a product of two algebraic surfaces", *Proceeding of Japan Academy, Series A*, **57**:6 (1981), 321–325.

[34] Shimura G., "Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field", *Amer. J. Math.*, **77**:1 (1955), 134–176.

[35] Kleiman S. L., "Algebraic cycles and the Weil conjectures", *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 359–386.

Nikol'skaya O. V., "On Algebraic Cycles on Fibre Products of Non-isotrivial Families of Regular Surfaces with Geometric Genus 1", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **23**:4 (2016), 440–465.

DOI: 10.18255/1818-1015-2016-4-440-465

Abstract. Let $\pi_k : X_k \to C$ $(k = 1, 2)$ be a projective family of surfaces (possibly with degenerations) over a smooth projective curve C. Assume that the discriminant loci $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \operatorname{Sing}(X_{k\delta}) \neq \varnothing\}$ $(k = 1, 2)$ are disjoint, $h^{2,0}(X_{ks}) = 1$, $h^{1,0}(X_{ks}) = 0$ for any smooth fibre X_{ks} and the period map associated with the variation of Hodge structures $R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}$ (where $\pi'_k : X'_k \to C \setminus \Delta_k$ is a smooth part of the morphism π_k), is non-constant. If for generic geometric fibres X_{1s} and X_{2s} the following conditions hold:
(i) $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{1s})$ is an odd integer;
(ii) $b_2(X_{1s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{1s}) \neq b_2(X_{2s}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{2s})$,
then for any smooth projective model X of the fibre product $X_1 \times_C X_2$ the Hodge conjecture on algebraic cycles is true.
If, besides, the morphisms π_k are smooth, $p_k = b_2(X_{ks}) - \operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_{ks})$ $(k = 1, 2)$ are odd prime numbers and $p_1 \neq p_2$, then for $X_1 \times_C X_2$ and for the fibre square $X_1 \times_C X_1$ the Hodge conjecture and the Grothendieck standard conjecture on algebraicity of operators $*$ and Λ of Hodge theory hold as well.
This result yields new examples of smooth projective 5-dimensional varieties satisfying the Hodge and the Grothendieck conjectures, because one can take as smooth fibres of the morphism $\pi_k : X_k \to C$

some $K3$ surfaces, minimal regular surfaces of general type (of Kodaira dimension $\varkappa = 2$) with geometric genus 1 belonging to one of the following types: (a) surfaces with $K^2 \leq 2$; (b) surfaces with $3 \leq K^2 \leq 8$, whose moduli are in the same component of the space of moduli as Todorov surface; (c) surfaces with $K^2 = 3$ with torsion of the Picard group $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Keywords: Hodge conjecture, standard conjecture, fibre product, Hodge group, Poincaré cycle

On the authors:
Nikol'skaya Olga Vladimirovna, orcid.org/0000-0002-6742-8453, PhD,
A.G. and N.G. Stoletov Vladimir State University,
Gorky str., 87, Vladimir, 600000, Russia, e-mail: papichonok@yandex.ru.

Acknowledgments:
This work was supported by the Russian Foundation for basic research under the Grant No 16-31-00266.