

УДК 519.1

Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами

Скороходов В.А.

Южный федеральный университет

e-mail: pdvaskor@yandex.ru

получена 3 ноября 2011 года

Ключевые слова: граф, алгоритмы на графах, достижимость, нестандартная достижимость, потоки в сетях

Приведены основные формулировки и определения для обобщенных сетей со связанными дугами. Показано, что для таких сетей не выполняется теорема Форда и Фалкерсона о том, что величина максимального потока в сети равна пропускной способности минимального разреза. Получены точные оценки (сверху и снизу) для величины максимального потока в обобщенной сети со связанными дугами. Кроме того, предложен алгоритм нахождения максимального потока для рассматриваемых сетей.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи нахождения максимального потока в обобщенных сетях со связанными дугами. Сеть со связанными дугами (см. [1]) представляет собой ориентированную сеть, у которой поток, проходящий по некоторым дугам, влияет на величины пропускных способностей других дуг. Рассматриваемая задача естественным образом возникает при исследовании потоковой задачи на графах с нестандартной достижимостью (см. [5, 6]).

1. Основные понятия и определения

Далее введем в рассмотрение обобщение понятия сети со связанными дугами. Как рассматривалось ранее (см. [1]), сеть со связанными дугами — это сеть, у которой множество дуг представлено как объединение попарно непересекающихся подмножеств $U = U^H \cup \left(\bigcup_{i=1}^k U^i \right)$. При этом $|U^i| \geq 1 \forall i = \overline{1, k}$ и считается, что пропускные способности заданы для дуг множества U^H ($c(u) \forall u \in U^H$), а также заданы суммарные пропускные способности для множеств U^i ($c(U^i) \forall i = \overline{1, k}$). Другими словами, дуги каждого множества U^i связаны некоторым соотношением, а именно, сумма величин потоков по каждой дуге множества U^i не может превышать суммарной пропускной способности множества $c(U^i)$, т.е.

$$\sum_{u \in U^i} F(u) \leq c(U^i).$$

Определение 1. Отношением связанности дуг сети G будем называть характеристическую функцию $\chi : U \times U \rightarrow \{0, 1\}$, такую, что если $\chi(u_1, u_2) = 1$, то говорим, что дуга u_1 влияет на дугу u_2 . В противном случае ($\chi(u_1, u_2) = 0$) — дуга u_1 не влияет на дугу u_2 .

Отметим, что отношение связанности в произвольной вспомогательной сети G'' для сети G с меняющейся длительностью прохождения обладает свойствами рефлексивности и симметричности, но не обладает свойством транзитивности (см. [2]).

Определение 2. Обобщенной сетью со связанными дугами будем называть ориентированную сеть с введенным на множестве ее дуг отношением связанности.

Заметим, что рассмотренные ранее сети со связанными дугами являются частным случаем обобщенных сетей со связанными дугами, если определить отношение связанности дуг сети следующим образом:

$$\chi(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & u_1, u_2 \text{ принадлежат одному подмножеству;} \\ 0 & u_1, u_2 \text{ принадлежат разным подмножествам.} \end{cases}$$

Определение 3. Степенью влияния дуги u в обобщенной сети со связанными дугами $G(X, U, f)$ будем называть величину $\delta(u) = \sum_{v \in U} \chi(u, v)$.

Для произвольной цепи η можно аналогичным образом определить суммарную степень влияния дуг.

Определение 4. Суммарной степенью влияния дуг цепи η в обобщенной сети со связанными дугами $G(X, U, f)$ будем называть величину $\delta(\eta) = \sum_{u \in \eta} \delta(u)$.

Рассмотрим задачу нахождения максимального потока в обобщенной сети со связанными дугами, считая, что если по некоторой дуге u пропустили поток величины $F(u)$, то для каждой дуги v , на которую влияет дуга u , пропускная способность становится равной величине $\max\{0, c(v) - F(u)\}$ ($\forall v : \chi(u, v) = 1$).

Утверждение 1. Для обобщенных сетей со связанными дугами, вообще говоря, не выполняется теорема Форда и Фалкерсона о том, что величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

В качестве доказательства этого утверждения приведем следующий пример.

Пример 1.

Пусть G — ориентированная сеть со связанными дугами на рис. 1 такая, что $\forall u \in U c(u) = 1$.

Кроме этого,

$$\chi(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & (i = j) \vee (i + j = 3) \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Т.е. связанные дуги — это дуги u_1 и u_2 .

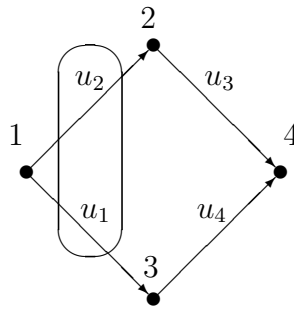


Рис. 1. Ориентированная сеть G со связанными дугами

Рассмотрим произвольный разрез. Здесь возможны четыре варианта: $\{u_1, u_2\}$, $\{u_1, u_3\}$, $\{u_2, u_4\}$ и $\{u_3, u_4\}$. В любом из этих случаев пропускная способность разреза равна двум, однако, величина максимального потока в рассматриваемой сети равна единице.

Возможны два варианта насыщения сети потоком целочисленной величины:

а) либо по пути $\mu_1 = \{u_2, u_3\}$, но тогда, так как дуги u_1 и u_2 связаны (влияют друг на друга), то пропускная способность дуги u_1 становится равной нулю (рис. 2).

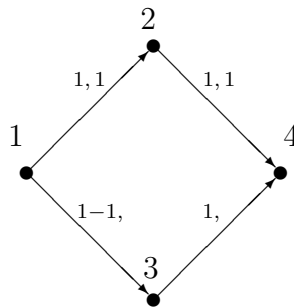


Рис. 2. Первый вариант насыщения дуг сети G

б) либо по пути $\mu_2 = \{u_1, u_4\}$, но тогда по той же самой причине пропускная способность дуги u_2 становится равной нулю (рис. 3).

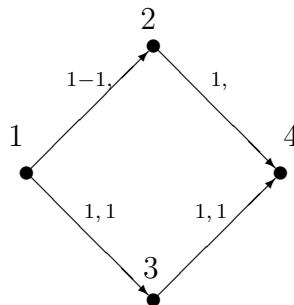


Рис. 3. Второй вариант насыщения дуг сети G

В любом из рассмотренных случаев величина максимального потока в рассматриваемой сети останется равной единице. При насыщении сети нецелочисленными

потоками вариантов насыщения может быть бесконечно много, но ни при одном из них не получим общего потока величины большей единицы.

Таким образом, для решения задачи о максимальном потоке в сети со связанными дугами применять классические алгоритмы не представляется возможным.

2. Верхняя оценка величины максимального потока

Построим оценку сверху для величины максимального потока в сети со связанными дугами. При этом будем считать, что если $\chi(u, v) = 1$, то $c(u) = c(v)$.

Теорема 1. Пусть (Y, Y') – некоторый разрез в сети со связанными дугами G , тогда величина максимального потока в сети G не превышает величины

$$v^* \leq \sum_{u \in M} c(u), \quad (1)$$

где M – максимальное по вложению подмножество дуг разреза, имеющее наибольшее количество элементов, обладающее тем свойством, что ни одна дуга множества M не влияет ни какую другую дугу этого же множества.

Доказательство. Доказывать будем от противного.

Предположим, что существует такой поток, что для некоторого разреза (Y, Y') не выполняется неравенство (1), т.е. $v^* > \sum_{u \in M} c(u)$. Существование потока означает, что найдутся такие пути μ_1, \dots, μ_k , что $\sum_{i=1}^k F(\mu_i) = v^*$. Обозначим дугу в пересечении $\mu_i \cap (Y, Y')$ через u_i .

Ясно, что имеет место равенство

$$\sum_i F(u_i) = \sum_j F(\mu_j) = v^*,$$

или, что то же самое, $v^* = \sum_{u \in W} F(u)$, где W – множество всех дуг разреза, на которых величина потока не равна нулю.

Отметим, что для пары дуг $u, v \in W$ таких, что $u \neq v$ если $\chi(u, v) = 1$, то $F(u) + F(v) \leq \min\{c(u), c(v)\}$. Таким образом, $\sum_{u \in W} F(u) \leq \sum_{u \in W'} c(u)$, где $W' \subset W$ – множество дуг, попарно не влияющих друг на друга.

Собирая все соотношения, получим следующее выражение: $\sum_{u \in W'} c(u) \geq v^*$. С другой стороны, поток был выбран таким образом, чтобы $v^* > \sum_{u \in M} c(u)$, следовательно, имеет место неравенство $\sum_{u \in W'} c(u) > \sum_{u \in M} c(u)$, а это противоречит выбору множества M .

Теорема доказана.

Теорема 2. Величина максимального потока в сети G не превышает величины

$$v^* \leq \min_{(Y, Y')} \sum_{u \in M} c(u), \tag{2}$$

где M – максимальное по вложению подмножество дуг разреза (Y, Y') , имеющее наибольшее количество элементов, обладающее тем свойством, что ни одна дуга множества M не влияет ни на какую другую дугу этого же множества.

Последняя теорема является следствием предыдущей теоремы 1.

Пример 2.

Рассмотрим сеть G на рис. 4. При этом $c(u_1) = c(u_2) = c(u_3) = 2, c(u_4) = c(u_5) = 1$. Пропускные способности остальных дуг рассматриваемой сети равны трем.

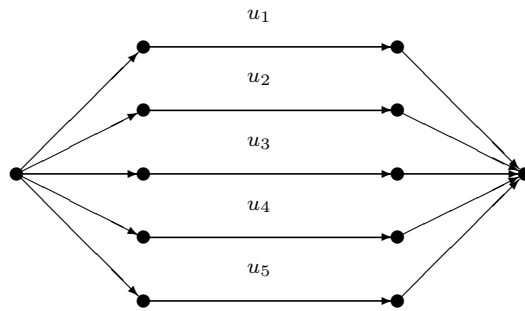


Рис. 4. Сеть G_1

Будем считать, что $\chi(u_1, u_2) = \chi(u_2, u_3) = 1$. Для всех остальных пар дуг u, v $\chi(u, v) = 0$.

Величина максимального потока в такой сети равна $v^* = 5$. Отметим, что для разреза $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ множество M имеет вид: $M = \{u_1, u_3, u_4\}$ или $M = \{u_1, u_3, u_5\}$. В каждом из этих случаев имеет место равенство: $\sum_{u \in M} c(u) = 5$. Для всех остальных разрезов эта величина больше.

Таким образом, оценка, предложенная в предыдущей теореме 2, является точной. При этом, существуют сети, для которых в соотношении (2) имеет место строгое неравенство. Покажем такую ситуацию на следующем примере.

Пример 3.

Рассмотрим сеть G_2 на рис. 5. При этом пропускные способности всех дуг рассматриваемой сети равны единице.

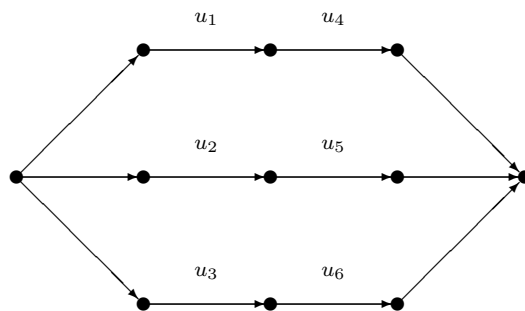


Рис. 5. Сеть G_2

Будем считать, что $\chi(u_1, u_2) = \chi(u_2, u_3) = 1$ и $\chi(u_4, u_5) = \chi(u_4, u_6) = 1$. Для всех остальных пар дуг u, v $\chi(u, v) = 0$.

По соотношению (2) $v^* \leq 2$. Однако величина максимального потока в рассматриваемой сети равна единице. На рис. 6 (а, б и в) показаны варианты насыщения сети целочисленным потоком.

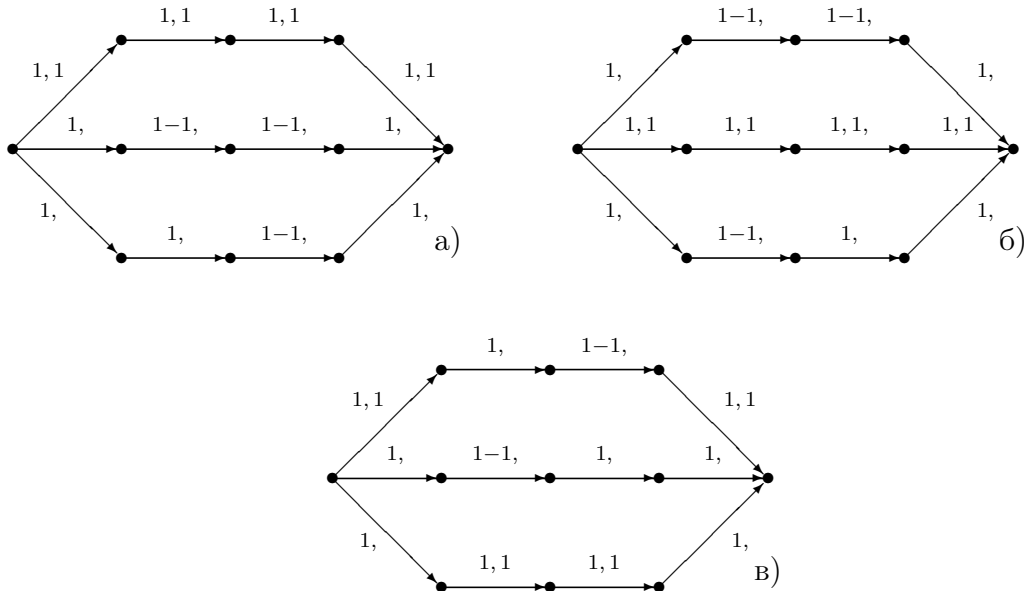


Рис. 6. Варианты насыщения сети G_2

Рассмотрим вопрос о нахождении множества M , обладающего свойствами, описанными в теоремах 1 и 2, для некоторого разреза (Y, Y') . Для его нахождения построим вспомогательный неориентированный граф $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$ по следующему правилу:

Каждой дуге u разреза (Y, Y') поставим в соответствие вершину x_u на вспомогательном графе \tilde{G} . Ребра графа \tilde{G} строятся следующим образом: если для пары дуг $u, v \in (Y, Y')$ таких, что $u \neq v$ выполняется $\chi(u, v) = 1$, то на графе \tilde{G} достраивается ребро, инцидентное вершинам x_u и x_v .

Ясно, что задача нахождения множества M для разреза (Y, Y') равносильна задаче нахождения на вспомогательном графе \tilde{G} внутренне устойчивого множества вершин (см. [3, 4]), имеющего наибольшее количество элементов. Более того, по теореме 2 гл. 5 в [3] такое множество является ядром вспомогательного графа.

Для нахождения такого множества можно использовать метод Магу (см. [4]) или алгоритм построения ядра с наибольшим числом элементов при помощи паросочетаний произвольного неориентированного графа (см. [3]).

3. Нижняя оценка величины максимального потока

Построим оценку сверху для величины максимального потока в сети со связанными дугами.

Ранее было показано, что для обобщенных сетей со связанными дугами не выполняется теорема Форда и Фалкерсона. Покажем, что в сети с целочисленными

пропускными способностями всех дуг максимальный поток может быть нецелочисленной величины.

Пример 4.

Рассмотрим сеть на рис. 7. Будем считать, что все дуги этой сети являются связанными друг с другом. Найдем величину максимального потока в этой сети.

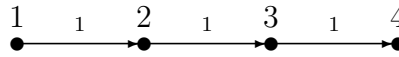


Рис. 7. Сеть G_3

Поскольку существует всего один путь из источника в сток, то, очевидно, что только он будет насыщающим. Однако величина максимального потока, который может быть пропущен через сеть, будет равна $\frac{1}{3}$, т.к. насыщая одну дугу u , мы обязаны уменьшить на величину насыщения пропускные способности всех дуг, на которые влияет u . А поскольку все дуги связаны, то получаем, что для каждой дуги u единственного здесь пути $3F(u) = c(u)$ и $c(u) = 1$.

Теорема 3. Для величины максимального потока в сети G со связанными дугами имеет место соотношение

$$v^* \leq \min_{(Y, Y')} \left\{ \min_{M \subset (Y, Y')} \left\{ \sum_{u \in M} \frac{c(u)}{|m_u|} \right\} \right\}, \tag{3}$$

где множество M является ядром вспомогательного графа \tilde{G} для выбранного разреза (Y, Y') , а $m_u = \{v \in U | \chi(u, v) = 1\}$ – множество всех дуг исходной сети, на которые влияет дуга u .

Доказательство. Доказывать будем от противного.

Выберем множество M , на котором выполняются минимумы в соотношении (3), и предположим, что существует такой поток, для которого

$$v^* < \sum_{u \in M} \frac{c(u)}{|m_u|}.$$

Существование потока означает, что найдутся такие пути μ_1, \dots, μ_k , что $\sum_{i=1}^k F(\mu_i) = v^*$. При этом обозначим дугу $\mu_i \cap (Y, Y')$ через u_i .

Ясно, что имеет место равенство

$$v^* = \sum_{i=1}^k F(\mu_i) = \sum_{j=1}^s F(u_j),$$

поскольку различные пути могут пересекаться в дугах разреза. Очевидно, что $s \leq k$.

Будем считать, что $\{\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_r}\}$ – множество путей, которые насыщают дугу $u_j \in (Y, Y')$. Нетрудно показать (аналогично тому как это было сделано в примере 4), что $F(u_j) = \sum_{p=1}^r \frac{c_p(u_j)}{|W_p|}$, где $W_p = m_{u_j} \cap \mu_{i_p}$, $c_p(u_j)$ – пропускная способность дуги u_j после насыщения сети потоком при помощи путей $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{p-1}}$.

Так как разрез выбран минимальным и поток в сети максимальный, то $F(u_j) \geq \frac{c(u_j)}{|m_{u_j}|}$, поскольку дуга u_j является максимально насыщенной и любой путь, проходящий через эту дугу, может содержать не больше чем $|m_{u_j}|$ дуг, на которые влияет дуга u_j .

Таким образом получили, что $v^* = \sum_{j=1}^s F(u_j) \geq \sum_{j=1}^s \frac{c(u_j)}{|m_{u_j}|}$, а значит, существует такое множество дуг $M' = \{u_j\}_{j=1}^s$, для которого $v^* \geq \sum_{u \in M'} \frac{c(u)}{|m_u|}$.

Собирая результат, получим $\sum_{u \in M'} \frac{c(u)}{|m_u|} \leq v^* < \sum_{u \in M} \frac{c(u)}{|m_u|}$, т.е.

$$\sum_{u \in M'} \frac{c(u)}{|m_u|} < \sum_{u \in M} \frac{c(u)}{|m_u|},$$

а это противоречит выбору множества M .

Теорема доказана.

4. Алгоритм нахождения максимального потока

Приведем алгоритм нахождения максимального потока в обобщенной сети со связанными дугами. Этот алгоритм не является точным, т.е. не во всех случаях найденный поток является максимальным.

Далее потребуются следующие понятия.

Определение 5. Будем говорить, что цепь η_1 влияет на цепь η_2 , если выполняется следующее условие

$$\exists u \in \eta_1 \exists v \in \eta_2 (u \neq v) \& (\chi(u, v) = 1).$$

Алгоритм 1.

1. Найдем все простые насыщающие цепи для сети G . Если насыщающих цепей нет, то алгоритм заканчивает работу.

2. Для найденного множества насыщающих цепей построим вспомогательный граф \tilde{G} , аналогичный вспомогательному графу для дуг разреза в пункте 2.

3. Для каждой вершины x графа \tilde{G} назначаем метку $g(x) = -1$ и метку $m(x)$, равную степени этой вершины. Кроме этого, определяем множество $S = \emptyset$, которое будем называть множеством помеченных вершин.

4. Из множества $T = \tilde{X} \setminus S$ выбираем вершину x с наименьшим значением метки $m(x)$.

5. Для выбранной вершины x назначаем метку $g(x)$, выбирая ее как наименьшее целое неотрицательное число, которое не равно значениям меток $g(y)$ на смежных с x вершинах y .

6. Добавляем вершину x к помеченным вершинам: $S := S \cup \{x\}$. Для всех вершин y , смежных с x , уменьшаем на единицу метку $m(y)$.

7. Если $S \neq \tilde{X}$, то возвращаемся на Шаг 4, иначе работу по назначению меток прекращаем и идем на Шаг 8.

8. Разбиваем множество вершин вспомогательного графа на подмножества $\tilde{X} = \bigcup_{i=0}^k X_i$ ($k = \max_{x \in \tilde{X}} g(x)$), отнеся к множеству X_i те вершины y графа \tilde{G} , для которых $g(y) = i$.

9. Из подмножеств разбиения выбираем подмножество $Y = X_0$.

10. Насыщаем исходную сеть G потоком, при помощи насыщающих цепей, соответствующих элементам множества Y . Насыщение будем производить в произвольном порядке, но с учетом уже произведенного насыщения. Возврат на Шаг 1.

Вспомогательный граф \tilde{G} неориентированный. Это означает, что согласно определениям в [3] он является симметрическим, а поскольку \tilde{G} не содержит петель, то по следствию к теореме 2 главы 5 в [3] он обладает хотя бы одним ядром.

С другой стороны, по следствию к теореме 5 главы 5 в [3] вспомогательный граф \tilde{G} допускает функцию Гранди.

Отметим, что первые пять шагов алгоритма 1 позволяют построить функцию Гранди на графе \tilde{G} . В данном случае построенная функция g (т.е. метки вершин графа) – это функция Гранди.

Известно, что для функции Гранди множества $X_0 = g^{-1}(\{0\})$ и $X_1 = g^{-1}(\{1\})$ обязательно являются ядрами (см. [3]). Однако эти множества не всегда имеют наибольшее количество элементов. Например, для вспомогательного графа на рис. 8 функция Гранди построена по правилам в алгоритме 1 (для удобства вершины не помечены, а числа рядом с вершинами являются значениями построенной функции Гранди). Видно, что множество с наибольшим числом элементов – это множество X_2 .

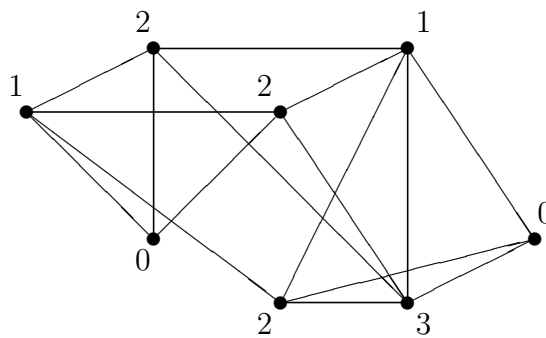


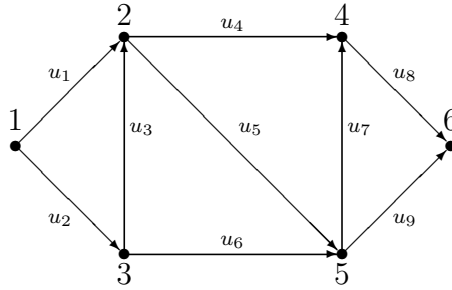
Рис. 8. Функция Гранди для вспомогательного графа

Приведенный алгоритм предполагает нахождение какого-нибудь ядра, не обязательно с наибольшим числом элементов (как это требуется при построении верхней оценки максимального потока).

Рассмотрим пример применения алгоритма 1.

Пример 5.

Рассмотрим сеть на рис. 9. Пропускные способности заданы следующим образом: $c(u_1) = c(u_3) = c(u_7) = 9$, $c(u_2) = c(u_5) = c(u_8) = 8$, $c(u_4) = c(u_9) = 10$ и $c(u_6) = 7$.

Рис. 9. Сеть G_4

Будем считать, что дуги предложенной сети влияют друг на друга следующим образом:

$$m_{u_1} = \{u_1, u_3\}, m_{u_2} = \{u_2\}, m_{u_3} = \{u_1, u_3, u_7\}, m_{u_4} = \{u_4\}, m_{u_5} = \{u_5, u_8\}, \\ m_{u_6} = \{u_6\}, m_{u_7} = \{u_3, u_7\}, m_{u_8} = \{u_5, u_8\}, m_{u_9} = \{u_9\}.$$

Перечислим все простые насыщающие цепи в этой сети:

$$\eta_1 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$$

$$\eta_2 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6;$$

$$\eta_3 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$$

$$\eta_4 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6;$$

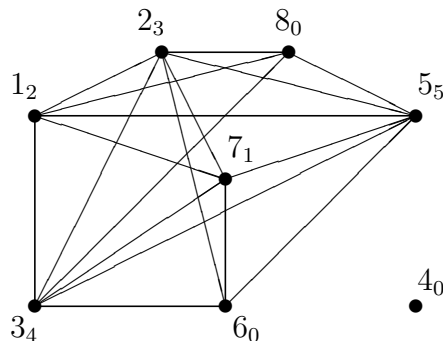
$$\eta_5 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$$

$$\eta_6 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$$

$$\eta_7 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6;$$

$$\eta_8 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6.$$

Для набора $\{\eta_1, \dots, \eta_8\}$ построим вспомогательный граф \tilde{G} . На нем построим функцию Гранди согласно инструкциям алгоритма 1. Граф представлен на рис. 10 (большие цифры соответствуют номерам цепей, малые – значениям функции Гранди g).

Рис. 10. Вспомогательный граф \tilde{G}

Таким образом, насыщающие цепи, при помощи которых будем увеличивать поток, – это цепи η_4 , η_6 и η_8 . Отметим, что удобнее начинать насыщение сети при

помощи цепей, соответствующих изолированным вершинам вспомогательного графа \tilde{G} .

После увеличения имеем следующий поток в исходной сети (рис. 11).

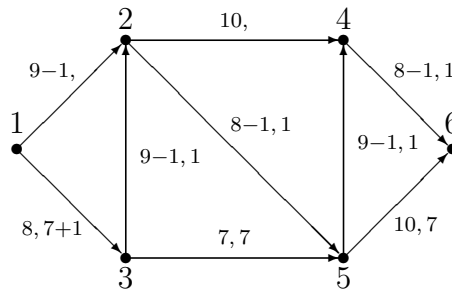


Рис. 11. Первый шаг насыщения дуг исходной сети

Снова построим все простые насыщающие цепи:

$$\eta_1 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$$

$$\eta_2 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6;$$

$$\eta_3 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 6;$$

$$\eta_4 : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \leftarrow 5 \rightarrow 6.$$

Для нового набора насыщающих цепей построим вспомогательный граф \tilde{G} и найдем на нем функцию Гранди (рис. 12).

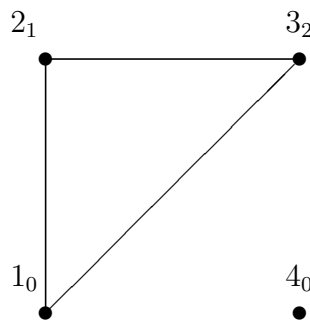


Рис. 12. Функция Гранди для нового графа \tilde{G}

По рисунку видно, что насыщающие цепи, при помощи которых увеличим поток, – это цепи η_1 и η_4 . После увеличения имеем следующий поток в исходной сети (рис. 13).

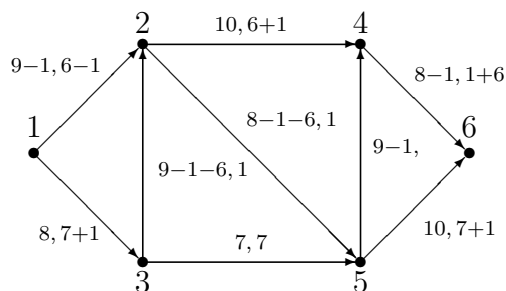


Рис. 13. Второй шаг насыщения дуг исходной сети

Для полученной сети не существует ни одной насыщающей цепи. Следовательно, работа алгоритма завершена. Заметим, что построенный поток является максимальным $v^* = 15$. Более того, на нем достигается равенство в соотношении (2) для верхней оценки величины максимального потока в сети со связанными дугами.

Список литературы

1. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А.* Потоки в сетях со связанными дугами // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2003. №8. С. 3–8.
2. *Ерусалимский Я.М.* Дискретная математика: теория, задачи, приложения. М.: Вузовская книга, 2001. 279 с.
3. *Берж К.* Теория графов и ее применения. –М.:Изд-во иностранной литературы, 1962. 319с.
4. *Котман А.* Введение в прикладную комбинаторику. –М.: Наука, 1975. 480с.
5. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А.* Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003. №2. С. 3–5.
6. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А.* Прибыль от потоков с обратной связью в орсетях с ограничениями на достижимость // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2003. №8. С. 9–12.

Flows in Generalized Nets with Related Arcs

Skorokhodov V.A.

Keywords: graph, graph algorithms, reachability, nonstandard reachability, flows on nets

The problem of finding the maximum flow in nets of a special form is considered. In such nets the arcs are related in such a way that the total flow passing through the related arcs does not exceed the minimum throughput of these arcs. It is shown that the theorem by Ford and Fulkerson, according to which the maximum flux value is equal to the throughput of a minimum cut, is not performed for such networks. The estimations of the maximum flow in a generalized net with bound arcs are proposed. And the algorithm for finding the maximum flow in such nets is developed.

Сведения об авторе:

Скороходов Владимир Александрович,
Южный федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, кафедра алгебры и дискретной математики, доцент