

©Кубышкин Е. П., Куликов В. А., 2019

DOI: 10.18255/1818-1015-2019-2-297-305

УДК 517.9

## Анализ условий возникновения пространственно-неоднородных структур световых волн в оптических системах передачи информации

Кубышкин Е. П., Куликов В. А.

*Поступила в редакцию 24 мая 2019*

*После доработки 03 июня 2019*

*Принята к публикации 05 июня 2019*

**Аннотация.** Рассматривается модель распределенных носителей информации в виде устойчивых пространственно-неоднородных структур в системах оптической и волоконно-оптической связи. Изучаются условия возникновения таких устойчивых пространственно-неоднородных структур световой волны генератора оптического излучения. Образование неоднородных структур, которые возникают в плоскости, ортогональной направлению распространения волны, обеспечивается тонким слоем нелинейной среды и контуром двумерной запаздывающей обратной связи с оператором поворота пространственных координат световой волны в плоскости излучения оптического генератора. В пространстве основных параметров генератора (управляющий параметр, угол поворота пространственных координат, величина запаздывания) построены области генерации устойчивых пространственно-неоднородных структур, был проведен анализ механизмов их возникновения.

**Ключевые слова:** пространственно-неоднородные волны, бифуркация

**Для цитирования:** Кубышкин Е. П., Куликов В. А., "Анализ условий возникновения пространственно-неоднородных структур световых волн в оптических системах передачи информации", *Моделирование и анализ информационных систем*, **26:2** (2019), 297–305.

### Об авторах:

Кубышкин Евгений Павлович, [orcid.org/0000-0003-1796-0190](http://orcid.org/0000-0003-1796-0190), д-р. физ.-мат. наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [kubysh.e@yandex.ru](mailto:kubysh.e@yandex.ru)

Куликов Владимир Александрович, [orcid.org/0000-0003-1351-7706](http://orcid.org/0000-0003-1351-7706), аспирант, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия, e-mail: [kulikov7677@gmail.com](mailto:kulikov7677@gmail.com)

## Введение

В работе [1] приведены экспериментальные результаты образования пространственно-неоднородных волн в лазерных пучках генератора оптического излучения со специальным контуром обратной связи и предложена математическая модель для описания этого явления, а также результаты ее численного анализа. Математическая модель представляет собой начально-краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа с оператором поворота пространственного

аргумента, которое рассматривается в области, определяемой апертурой светового излучения. Эта начально-краевая задача и различные ее обобщения изучались в большом количестве работ (см., например, [2–7]), где различными аналитическими и численными методами строятся пространственно-неоднородные решения. Модель работы [1] не учитывает фактор временного запаздывания в контуре нелинейной обратной связи. Учет временного запаздывания рассмотрен в работе [8], где для математической модели с запаздывающим аргументом в тонкой кольцевой области показана возможность бифуркации из однородного состояния равновесия пространственно-неоднородных бегущих волн. В настоящей работе рассматривается математическая модель работы [1] в круговой области с оператором поворота пространственного аргумента и временным запаздыванием в контуре обратной связи, для которой исследуются условия и характер потери устойчивости однородных состояний равновесия в зависимости от величины запаздывания, возможные бифуркации при потере устойчивости, а также устойчивость пространственно-неоднородных решений. Такие решения могут быть использованы как носители информации в оптической и волоконно-оптической связи.

## 1. Математическая постановка задачи

В круге  $K_R = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$  рассматривается начально-краевая задача вида

$$u_t + u = D\Delta_{\rho\phi}u + K(1 + \gamma \cos u_{\theta T}), \quad u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi + 2\pi, t) \quad (1)$$

относительно функции  $u(\rho, \phi, t + s), t \geq 0, -T \leq s \leq 0$ , где  $T > 0$  величина запаздывания аргумента, с начальным условием  $u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s) \in H(K_R; -T, 0)$ . Пространство начальных условий  $H(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in C(K_R \times [-T, 0]), \text{ при каждом } s \ u(\rho, \phi, s) \in W_2^1(K_R), u(\rho, \phi, s) = u(\rho, \phi + 2\pi, s)\}$ , где пространство функций  $W_2^1(K_R)$  получено замыканием множества функций  $u(\rho, \phi) \in C^1(K_R), u_\rho(R, \phi) = 0$  в метрике пространства функций  $W_2^1(K_R)$ . В (1)  $\Delta_{\rho\phi}$  – оператор Лапласа в полярных координатах, который считаем симметрично расширенным на пространство  $W_2^1(K_R), u_{\theta T}(\rho, \phi, t) \equiv u(\rho, \phi + \theta, t - T) (0 \leq \theta < 2\pi)$  – оператор поворота пространственного аргумента и временного запаздывания,  $D, K$  – положительные постоянные  $0 < \gamma < 1$ .

Однородные состояния равновесия  $u_* = u_*(K, \gamma)$  начально-краевой задачи (1) определяются как решения уравнения

$$u = K(1 + \gamma \cos u). \quad (2)$$

Уравнение (2) в зависимости от  $K$  и  $\gamma$  может иметь несколько решений, в том числе кратные. Ниже исследуются условия потери устойчивости состояний равновесия  $u_*(K, \gamma)$  и обусловленные ею возможные бифуркации пространственно-неоднородных автоколебательных решений начально-краевой задачи (1).

## 2. Анализ устойчивости состояний равновесия начально-краевой задачи (1)

Выберем одно из решений  $u_*(K, \gamma)$  (не кратное) уравнения (2) и запишем начально-краевую задачу (1) в его окрестности, заменив  $u(\rho, \phi, t) \rightarrow u_*(K, \gamma) + u(\rho, \phi, t)$ . В результате получим начально-краевую задачу

$$u_t + u = D\Delta_{\rho\phi}u - bu_{\theta T} + b_2u_{\theta T}^2 + bu_{\theta T}^3/6 + \dots, \quad u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi + 2\pi, t),$$

$$u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s), \quad (3)$$

$$b = K\gamma \sin u_*(K, \gamma), \quad (4)$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие по  $u_{\theta T}$  более высокий порядок малости,  $b = K\gamma \sin u_*(K, \gamma)$ ,  $b_2 = -K\gamma \cos u_*(K, \gamma)/2$ .

Рассмотрим линейную часть начально-краевой задачи (3)

$$u_t + u = D\Delta_{\rho\phi}u - bu_{\theta T}, \quad u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi + 2\pi, t),$$

$$u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s). \quad (5)$$

Определяя решения (5) вида  $u(\rho, \phi, t) = v(\rho, \phi)e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in C$  получим пучок операторов

$$P(\lambda) \equiv \lambda v(\rho, \phi) + v(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho\phi}v(\rho, \phi) + bv(\rho, \phi + \theta)e^{-\lambda T}, \quad (6)$$

действующий в  $L_2(K_R)$  с областью определения  $W_2^1(K_R)$ , спектр которого определяет устойчивость (неустойчивость) решений начально-краевой задачи (5). Определяя  $v(\rho, \phi)$  в виде

$$v(\rho, \phi) = v_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{nj}(\rho)(v_{nj}e^{in\phi} + w_{nj}e^{-in\phi}),$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad v_0 \in \mathbb{R}, \quad v_{nj}, w_{nj} \in \mathbb{C}, \quad v_{-nj} = \bar{v}_{nj}, \quad w_{-nj} = \bar{w}_{nj}, \quad v_{0j} = \bar{w}_{0j},$$

$$R_{nj}(\rho) = \frac{\sqrt{(2)/R}J_n(\gamma_{nj}\rho/R)}{(1 - n^2/\gamma_{jn}^2)^{1/2}J_n^1(\gamma_{nj})}, \quad (R_{nj}(\rho), R_{np}(\rho)) = \int_0^R \rho R_{nj}(\rho)R_{np}(\rho)d\rho = \delta_{jp},$$

где  $J_n(\rho)$  функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка,  $\gamma_{nj}$   $j$ -й положительный ноль функции  $J_n(\rho)$ , а  $\delta_{jp}$  – символ Кронекера, получим последовательность уравнений

$$(\lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + be^{in\theta - \lambda T})v_{nj} = 0, \quad (\lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + be^{-in\theta - \lambda T})w_{nj} = 0, \quad (7)$$

из которых определяются точки спектра пучка операторов (6), отвечающие за устойчивость решений (5), и ненулевые  $v_0, v_{nj}, w_{nj}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$

Для построения границ областей устойчивости в пространстве параметров  $D, b, T, \theta$  воспользуемся методом  $D$ -разбиений [9, 10]. Для этого положим в (7)  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega \geq 0$  и приравняем нулю вещественную и мнимую части выражений в круглых скобках. В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} 1 + D\gamma_{nj}^2 + b \cos(-n\theta + \omega T) &= 0, \quad \omega - b \sin(-n\theta + \omega T) = 0, \\ 1 + D\gamma_{nj}^2 + b \cos(n\theta + \omega T) &= 0, \quad \omega - b \sin(n\theta + \omega T) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти уравнения позволяют выразить

$$b = b(D, T, n, \omega) = (-1)^{k+1} (1 + D\gamma_{nj}^2) / \cos(\arctg(\omega / (1 + D\gamma_{nj}^2))),$$

$$\theta^+ = \theta^+(D, T, n, \omega) = (T\omega + \arctg(\omega / (1 + D\gamma_{nj}^2)) + \pi k) / n,$$

$$\theta^- = \theta^-(D, T, n, \omega) = (-T\omega - \arctg(\omega / (1 + D\gamma_{nj}^2)) + \pi k) / n,$$

при  $n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, 2n - 1, j = 1, 2, \dots$ , и

$$b = b(\omega) = (-1)^{k+1} / \cos(\arctg(\omega)), \quad T = T(\omega) = \omega^{-1}(\pi k - \arctg(\omega)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

при  $n = 0$ .

Изменяя теперь  $0 \leq \omega < \infty$  для различных значений  $D, T, n$ , построим границы перехода точек спектра пучка операторов (5) из левой комплексной полуплоскости в правую и тем самым получим границу области устойчивости, а также исследуем характер потери устойчивости решений начально-краевой задачи (4).

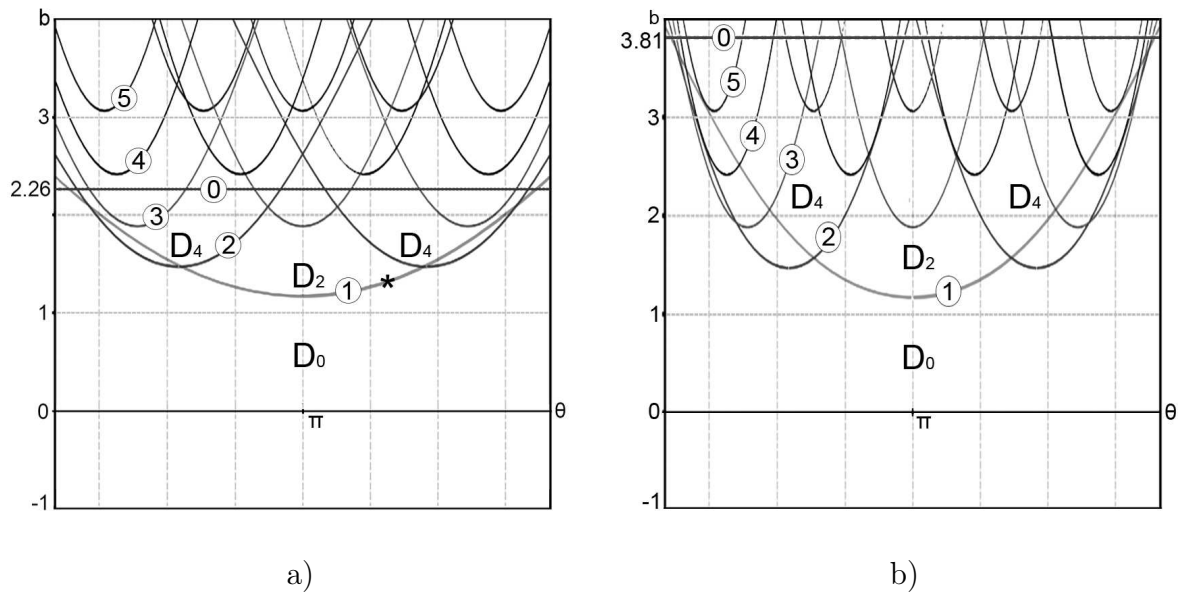


Рис. 1:  $D$ -разбиение плоскости параметров  $(\theta, b)$ :

а)  $D=0.05, T=1.0$ ; б)  $D=0.05, T=0.5$

Fig. 1:  $D$ -partition of the parameter plane  $(\theta, b)$ :

а)  $D=0.05, T=1.0$ ; б)  $D=0.05, T=0.5$

На рисунке 1 для двух значений параметров  $D$  и  $T$  приведена картина  $D$ -разбиения плоскости  $(\theta, b)$ . На рисунках через  $D_j$  обозначены области, при значении параметров из которых пучок операторов имеет  $j$  точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости, а границы этих областей соответствуют точкам спектра, лежащим на мнимой оси. Из рисунков видно, что имеются значения параметров на границе области устойчивости, при которых в правую полуплоскость может переходить одновременно две пары комплексно сопряженных корней, а также есть на границе области устойчивости значения параметров, соответствующие

двухкратным нулевым точкам спектра пучка операторов (5). Отметим, что граница, соответствующая однородной форме ( $n = 0$ ) потери устойчивости (прямая линия), поднимается вверх при  $T \rightarrow 0$  и опускается вниз при  $T \rightarrow \infty$ . В связи с этим, при больших значения  $T$  невозможна бифуркация пространственно-неоднородных автоколебательных решений.

### 3. Бифуркация пространственно-неоднородных решений начально-краевой задачи (4)

Выберем параметры  $Q_*$ ,  $b_*$ ,  $D_*$ ,  $T_*$  таким образом, чтобы они соответствовали точке границы области устойчивости начально-краевой задачи (4) и при этом пучок операторов (5) имел одну пару комплексно сопряженных точек спектра с нулевой вещественной частью. Пусть для определенности они удовлетворяют первой паре системы уравнений (8). На рисунке 1 это может быть, например, точка, отмеченная \*. По  $b_*$  выберем  $k_*$ ,  $\gamma_*$  и  $u_* = u(K_*, \gamma_*)$ , удовлетворяющие равенствам (2) и (4). Отметим, что такой выбор может быть неоднозначным. Положим теперь  $K = K_*(1 + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр, и исследуем возможность бифуркации из состояния равновесия

$$u_*(\varepsilon) = u_*(K_*(1 + \varepsilon), \gamma_*) = u_* + \varepsilon u_{*1} + \dots, u_{*1} = u_*/(1 - b_*)$$

пространственно-неоднородных решений начально-краевой задачи (3) при изменении параметра  $\varepsilon$ . Для анализа воспользуемся методом инвариантных (центральных) многообразий [11] и теорией нормальных форм обыкновенных дифференциальных уравнений [12].

Отметим, что теперь в (3)

$$b = b(\varepsilon) = K_*(1 + \varepsilon)\gamma_* \sin u_*(\varepsilon) = b_* + \varepsilon b_1 + \dots, b_1 = -b_* + u_*(K_* - u_*)/(1 - b_*),$$

$$b_2 = b_2(\varepsilon) = -K_*(1 + \varepsilon)\gamma_* \cos u_*(\varepsilon)/2$$

пучок операторов  $P(\lambda) \equiv P(\lambda; \varepsilon)$ , а также, что  $b_* = 1$  возможно лишь для кратного корня  $u_*$  уравнения (2). Обозначим через  $\lambda(\varepsilon) = i\omega_* + \varepsilon\lambda_1 + \dots$ ,  $\lambda(0) = i\omega_*$  точку спектра оператора  $P(\lambda; \varepsilon)$ ,  $\lambda(\varepsilon)$  аналитически зависит от  $\varepsilon$ .

Начально-краевая задача (4) имеет двумерное пространство решений, которое можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi, z, \bar{z}; \varepsilon) &= R_{n1}(\rho)(e^{i n \phi + \lambda(\varepsilon)s} z + e^{-i n \phi + \bar{\lambda}(\varepsilon)s} \bar{z}), \\ \dot{z} &= \lambda(\varepsilon)z, z = z(t) \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (9)$$

Остальные решения начально-краевой задачи (4) экспоненциально затухают при  $t \rightarrow \infty$ .

Начально-краевая задача (3) в окрестности нулевого состояния равновесия имеет локальное экспоненциально устойчивое инвариантное многообразие (центральное многообразие), поведение решений на котором определяется поведением решений двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для построения центрального многообразия и системы дифференциальных уравнений на нем воспользуемся подходом работы [13] и перейдем от (3) к эквивалентной

начально-краевой задаче в области  $(0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -T_* \leq s \leq 0), t \geq 0$ , положив  $w(\rho, \phi, s, t) = u(\rho, \phi, t + s)$ :

$$w_t = w_s$$

$$w_s(\rho, \phi, 0, t) = -w(\rho, \phi, 0, t) + D_* \Delta_{\rho\phi} w(\rho, \phi, 0, t) - b(\varepsilon)w(\rho, \phi + \theta_*, -T_*) + b_2(\varepsilon)w^2(\rho, \phi + \theta_*, -T_*, t) + b(\varepsilon)w^3(\rho, \phi + \theta_*, -T_*, t)/6 + \dots, \quad (10)$$

$$w_\rho(R, \phi, s, t) = 0, w(\rho, \phi, s, t) = w(\rho, \phi + 2\pi, s, t), \quad (11)$$

$$w(\rho, \phi, s, 0) = w_0(\rho, \phi, s) \in H(K_R; [-T_*, 0]). \quad (12)$$

Будем строить центральное многообразие и дифференциальные уравнения траекторий на нем в виде разложения по

$$W(\rho, \phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon) = R_{n1}(\rho)(e^{in\phi + \lambda(\varepsilon)s}z + e^{-in\phi + \bar{\lambda}(\varepsilon)s}\bar{z}) + w_{20}(\cdot) + w_{11}(\cdot)z\bar{z} + w_{02}(\cdot)\bar{z}^2 + w_{30}(\cdot)z^3 + w_{21}(\cdot)z^2\bar{z} + w_{12}(\cdot)\bar{z}^2z + w_{03}\bar{z}^3 + \dots, \quad (13)$$

$$w_{jk}(\cdot) = \bar{w}_{jk}(\cdot), w_{jk}(\cdot) = w_{jk}(\rho, \phi, s; \varepsilon),$$

$$\dot{z} = \lambda(\varepsilon)z + d_{21}(\varepsilon)z^2\bar{z} + \dots = Z(z, \bar{z}, \varepsilon). \quad (14)$$

В (13) точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по  $z, \bar{z}$ . Дифференциальное уравнение для  $\bar{z}$  получается простым сопряжением уравнения для  $z$ .

Условие принадлежности траекторий уравнения (14) в силу (13) начально-краевой задаче (10)-(12) дает тождество

$$W_t(\cdot) = W_z(\cdot)Z(z, \bar{z}; \varepsilon) + W_{\bar{z}}(\cdot)\bar{Z}(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv W_s(\cdot), \quad (15)$$

$$W_s(\rho, \phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv -W(\rho, \phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) + D_* \Delta_{\rho\phi} W(\rho, \phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) - b(\varepsilon)W(\rho, \phi + \theta_*, -T_*, z, \bar{z}; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)W^2(\rho, \phi + \theta_*, -T_*, z, \bar{z}; \varepsilon) + b_3(\varepsilon)W^3(\rho, \phi + \theta_*, -T_*, z, \bar{z}; \varepsilon)/6 + \dots, \quad (16)$$

$$W_\rho(R, \phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon) = 0, W(\rho, \phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon) = W(\rho, \phi + 2\pi, s, z, \bar{z}; \varepsilon), \quad (17)$$

по переменным  $z, \bar{z}$ . При первых степенях оно выполняется в силу (9). Приравняем теперь слева и справа в (15)-(17) коэффициенты при  $z^2$ . В результате получим краевую задачу для определения  $w_{20}(\cdot)$  вида

$$2\lambda(\varepsilon)w_{20}(\cdot) = w_{20s}(\cdot)$$

$$w_{20s}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) = -w_{20}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) + D_* \Delta_{\rho\phi} w_{20}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) - b(\varepsilon)w_{20}(\rho, \phi + \theta_*, -T_*; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)R_{n1}^2(\rho)e^{i(2n\phi + 2\theta_*)}e^{-2\lambda(\varepsilon)T_*},$$

$$w_{20\rho}(R, \phi, s; \varepsilon) = 0.$$

Определяя решение  $w_{20}(\cdot)$  в виде  $w_{20}(\rho, \phi, s, \varepsilon) = v_{20}(\rho, \varepsilon)e^{i2n\phi+2\lambda(\varepsilon)s}$  имеем

$$p_j(\varepsilon) = b_2(\varepsilon)e^{i2-\lambda(\varepsilon)T_*}(R_{n1}^2(\rho), R_{2nj}(\rho))/(2\lambda(\varepsilon) + 1 + D_*\gamma_{2nj}^2 + b(\varepsilon)e^{i2n\theta_*-2\lambda(\varepsilon)T_*}),$$

используя разложение

$$v_{20}(\rho, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(\varepsilon)R_{2nj}(\rho).$$

Аналогичным образом определяются коэффициенты в разложении при  $z\bar{z}$ ,  $z^2$ . В результате будем иметь:

$$w_{11}(\rho, \phi, s; \varepsilon) \equiv w_{11}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\varepsilon)R_{0j}(\varepsilon),$$

$$p_j(\varepsilon) = 2b_2(\varepsilon)(R_{n1}^2(\rho), R_{0j}(\rho))/(1 + D_*\gamma_{0j}^2 + b(\varepsilon)),$$

$$w_{02}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = \bar{w}_{20}(\rho, \phi, s; \varepsilon).$$

Рассмотрим определение коэффициента при  $z^2\bar{z}$ . Из (15)-(17) имеем краевую задачу

$$R_{n1}(\rho)e^{in\phi+\lambda(\varepsilon)s}d_{21}(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon)w_{21}(\cdot) = w_{21s}(\cdot),$$

$$\begin{aligned} w_{21s}(\rho, \phi, 0, \varepsilon) &= -w_{21}(\rho, \phi, 0, \varepsilon) + D_*\Delta_{\rho\phi}w_{21}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) - \\ &- b(\varepsilon)w_{21}(\rho, \phi + \theta_*, -T_*; \varepsilon) + [b_2(\varepsilon)(2v_{20}(\rho; \varepsilon) + 2v_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + \\ &+ b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2]e^{in\theta_*-\lambda(\varepsilon)T_*}e^{in\phi}, \end{aligned}$$

$$w_{21\rho}(R, \phi, s; \varepsilon) = 0, w_{21}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = w_{21}(\rho, \phi + 2\pi, s; \varepsilon).$$

Определяя  $w_{21}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = (v_{21}(\rho; \varepsilon) + sd_{21}(\varepsilon))e^{in\phi+\lambda(\varepsilon)s}$ ,  $v_{21}(\rho, \varepsilon) = \sum_{j=2}^{\infty} p_j(\varepsilon)R_{nj}(\rho)$ ,

получим, что при  $j=1$  краевая задача неразрешима. Разрешимости добиваемся выбором  $d_{21}(\varepsilon)$ . В результате имеем:

$$d_{21}(\varepsilon) = e^{in\theta_*-\lambda(\varepsilon)T_*}/(1 - T_*b(\varepsilon)e^{in\theta_*-\lambda(\varepsilon)T_*}),$$

$$(2b_2(\varepsilon)(v_{20}(\rho; \varepsilon) + v_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2, R_{n1}(\rho)).$$

Коэффициенты  $p_j(\varepsilon)$  определяются однозначно. Коэффициент  $w_{30}(\cdot)$  определяется аналогично квадратичным слагаемым и при этом  $w_{12}(\cdot) = \bar{w}_{21}(\cdot)$ ,  $w_{03}(\cdot) = \bar{w}_{30}(\cdot)$ . Отметим, что на границе области устойчивости выполняются неравенства  $Re\lambda_1 > 0$ ,  $Red_{21}(0) < 0$ . В связи с этим уравнение (14) имеет асимптотически устойчивое периодическое решение:

$$\begin{aligned} z(t; \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2}\rho_*e^{i\tau} + O(\varepsilon), \\ \rho_* &= (-Re\lambda_1/Red_{21}(0))^{1/2}, \\ \dot{\tau} &= \omega_*(\varepsilon) = \omega_* + \varepsilon Im\lambda_1 + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{18}$$

Этому решению в начально-краевой задаче (3) соответствует согласно (13)-(14) асимптотической устойчивости периодическое решение, которое имеет вид

$$u(\rho, \phi, \tau; \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} 2R_{n1}(\rho) \rho_* \cos(n\phi + \tau) + O(\varepsilon),$$

где  $\tau$  определено в (18). Указанное решение аналитически зависит от параметра  $\varepsilon^{1/2}$  и является бегущей волной, вращающейся по часовой стрелке с частотой  $\omega_*(\varepsilon)$  (спиральной волной).

## Список литературы / References

- [1] Ахманов С. А., Воронцов М. А., “Неустойчивости и структуры в когерентных нелинейно-оптических системах, охваченных двумерной обратной связью”, *Нелинейные волны. Динамика и эволюция. Наука*, 1989, 228–238; [Akhmanov S. A., Vorontsov M. A., “Neustojchivosti i struktury v kogerentnyh nelinejno-opticheskikh sistemah, ohvachennyh dvumernoj obratnoj svyaz’yu”, *Nauka*, 1989, 228–238, (in Russian).]
- [2] Akhmanov S. A., Vorontsov M. A., Ivanov V. Yu., et al., “Controlling transverse wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures”, *J. Optical Soc. Amer. Ser. B.*, **9**:1 (1992), 78–90.
- [3] Кащенко С. А., “Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **31**:3 (1991), 467–473; [Kashchenko S. A., “Asimptotika prostranstvenno-neodnorodnyh struktur v kogerentnyh nelinejno-opticheskikh sistemah”, *ZH. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **31**:3 (1991), 467–473, (in Russian).]
- [4] Разгулин А. В., “Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **33**:1 (1993), 69–80; [Razgulin A. V., “Ob avtokolebaniyah v nelinejnoj parabolicheskoi zadache s preobrazovannym argumentom”, *ZH. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **33**:1 (1993), 69–80, (in Russian).]
- [5] Разгулин А. В., “Об одном классе функционально-дифференциальных параболических уравнений нелинейной оптики”, *Дифференц. уравнения*, **36**:3 (2000), 400–407; [Razgulin A. V., “Ob odnom klasse funkcional’no-differencial’nyh parabolicheskikh uravnenij nelinejnoj optiki”, *Differenc. ur-niya.*, **36**:3 (2000), 400–407, (in Russian).]
- [6] Белан Е. П., “О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной”, *Ж. матем. физ., анализа, геометрии*, **1**:1 (2005), 3–34; [Belan E. P., “O dinamike begushchih voln v parabolicheskoi uravnenii s preobrazovaniem sdviga prostranstvennoj peremennoi”, *ZH. matem. fiz., analiza, geometrii.*, **1**:1 (2005), 3–34, (in Russian).]
- [7] Skubachevskii A. L., “Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **32**:2 (1998), 261–278.
- [8] Разгулин А. В., Романенко Т. Е., “Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:11 (2013), 1804–1821; [Razgulin A. V., Romanenko T. E., “Vrashchayushchiesya volny v parabolicheskoi funkcional’no-differencial’nom uravnenii s povorotom prostranstvennogo argumenta i zapazdyvaniiem”, *ZH. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **53**:11 (2013), 1804–1821, (in Russian).]
- [9] Неймарк Ю. И., “D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем)”, *ПММ*, **13**:4 (1949), 349–380; [Neimark Yu. I., “Drazbienie prostranstva kvazipolinomov (k ustoychivosti linearizovannykh raspredelennykh sistem)”, *PMM*, **13**:4 (1949), 349–380, (in Russian).]



- [10] Neimark Yu. I., “The structure of the D-decomposition of the space of quasipolynomials and the diagrams of Vyšnegradskii and Nyquist”, *Dokl. Akad. Nauk USSR*, **60** (1948), 1503–1506.
- [11] Марсден Дж., Мак-Кракен М., “Бифуркация рождения цикла и ее приложения”, *Мир*; [Marsden J. E., McCracken M., “The Hopf bifurcation and its applications”, 1948 ]
- [12] Брюно А. Д., “Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений”, *Наука*, 1979; [Bruno A. D., “Lokal’nyj metod nelinejnogo analiza differencial’nyh uravnenij”, *Naika*, 1979, (in Russian).]
- [13] Kubyshkin E. P., Moriakova A. R., “Features of Bifurcations of Periodic Solutions of the Ikeda Equation. Russian Journal of Nonlinear Dynamics”, *Dokl. Akad. Nauk USSR*, **14**:3 (2018), 301–324.

---

**Kubyshkin E. P., Kulikov V.A.**, "Analysis of the Conditions for the Emergence of Spatially Inhomogeneous Structures of Light Waves in Optical Information Transmission Systems", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **26**:2 (2019), 297–305.

**DOI:** 10.18255/1818-1015-2019-2-297-305

**Abstract.** A model of distributed information carriers in the form of stable spatially inhomogeneous structures in optical and fiber-optic communication systems is considered. We study the conditions for the occurrence of such stable spatially inhomogeneous structures of the light wave of the generator of optical radiation. The formation of inhomogeneous structures that occur in a plane orthogonal to the direction of wave propagation is provided by a thin layer of nonlinear medium and a two-dimensional lagging feedback loop with the rotation operator of the spatial coordinates of the light wave in the emission plane of the optical generator. In the space of the main parameters of the generator (a control parameter, the angle of rotation of the spatial coordinates, the magnitude of the delay), the areas of generation of stable spatially inhomogeneous structures are constructed, the mechanisms of their occurrence are analyzed.

**Keywords:** spatially inhomogeneous waves, bifurcation

**On the authors:**

Evgenii P. Kubyshkin, [orcid.org/0000-0003-1796-0190](https://orcid.org/0000-0003-1796-0190), Doctor, Professor,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: [kubysh.e@yandex.ru](mailto:kubysh.e@yandex.ru)

Vladimir A. Kulikov, [orcid.org/0000-0003-1351-7706](https://orcid.org/0000-0003-1351-7706), graduate student,  
P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia, e-mail: [kulikov7677@gmail.com](mailto:kulikov7677@gmail.com)