Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **3** (2014) 106–120

УДК 519.3:62-50

Приближенное решение точечной подвижной задачи оптимального управления для нелинейного гиперболического уравнения

Юлдашев Т. К.

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М.Ф. Решетнева 660014, Россия, Красноярск, пр-т "Красноярский рабочий", 31

e-mail: tursunbay@rambler.ru

получена 11 ноября 2013

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, начальные и граничные условия, точечное подвижное оптимальное управление, обобщенная разрешимость, приближенное решение, минимизация функционала

В данной работе изучаются вопросы приближенного решения одной задачи точечного подвижного оптимального управления для системы нелинейного гиперболического и обыкновенного дифференциального уравнений с начальными и граничными условиями и нелинейным критерием оптимальности. Использование метода Фурье разделения переменных сводит обобщенное решение начально-граничной задачи к счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ). Для облегчения вычислительных процедур вместо ССНИУ рассматривается соответствующая конечная (укороченная) система нелинейных интегральных уравнений (КСНИУ). С помощью методов последовательных приближений и интегральных неравенств изучается однозначная разрешимость КСНИУ при фиксированных значениях управления. Оценивается допускаемая погрешность по состоянию «укороченного» обобщенного решения начально-граничной задачи. Приближенно вычисляется нелинейный функционал качества при известных оптимальных управляющих воздействиях.

1. Введение

Развитие теории оптимального управления связано с ростом требований к быстродействию и точности систем регулирования. На основе математической теории оптимального управления разработаны способы построения оптимальных по быстродействию систем и процедуры аналитического конструирования оптимальных регуляторов. Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам, в частности, относятся и задачи адаптивных систем управления [1] – [5].

Сложность задач теории оптимального управления потребовала более широкой математической базы для ее построения. Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями с частными производными, стала разрабатываться сравнительно недавно. За короткое время она получила бурное развитие, все шире проникая в различные области техники и технологических процессов. К системам с распределенными параметрами относятся задачи аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и т.д. [6] – [11].

Одним из направлений теории оптимального управления системами с распределенными параметрами является разработка методов решения задач оптимального управления при наличии подвижных источников. В задачах оптимального управления с точечными подвижными источниками часто приходится учитывать вспомогательные элементы, без которых невозможно управлять процессом. Эти элементы обычно имеют сосредоточенные параметры. Поведение таких систем описывается совокупностью дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных при начальных и граничных условиях.

Разработка математических методов и создание на их основе пакетов прикладных программных комплексов, ориентированных на автоматизацию проектно-конструкторских и научно-исследовательских работ с применением современных компьютеров, являются в настоящее время важнейшими задачами. Успешному решению этой задачи в значительной мере способствует разработка эффективных численных методов и программных средств для решения задач динамики и управления. При приближенном решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами используется широкий спектр разных методов [12] – [14].

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения точечной подвижной задачи оптимального управления для системы нелинейного гиперболического и обыкновенного дифференциального уравнений с начальными и граничными условиями и нелинейным критерием оптимальности.

2. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается нелинейным гиперболическим уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \delta(x-\mu(t))p(t) + f\,(t,x,u(t,x),\tau(t)) \tag{1}$$

со смешанными (начально-граничными) условиями

$$u(t,x)_{|t=0} = \varphi_1(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)_{|t=0} = \varphi_2(x) \tag{2}$$

$$u(t,x)_{|x=0} = u(t,x)_{|x=l} = 0, \tag{3}$$

где $f(t,x,u,\tau)\in C(D\times R\times D_T)$, $p(t)$– управляющая функция, $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, $\mu(t)$ – непрерывная функция на отрезке D_T, $0<\mu(t)<l$, $\varphi_j(x)\in C^3(D_l)$, $\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j(x)_{|x=l}=0$, $j=1,2$, $D=D_T\times D_l$, $D_T=[0,T]$, $D_l=[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, а функция $\tau(t)$ определяется как решение следующего нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\tau'(t)=h\big(t,\tau(t),\theta(t)\big) \tag{4}$$

при начальном условии

$$\tau(0)=\tau_0=const, \tag{5}$$

$\theta(t)$ – вторая управляющая функция.

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения точечной подвижной задачи оптимального управления для системы нелинейного гиперболического и обыкновенного дифференциального уравнений. При фиксированном управлении используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1) –(3) в виде ряда Фурье [15]– [18]

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\,b_i(x),\ b_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_i x,\ \lambda_i=\frac{i\pi}{l},\ i=1,2,\ldots$$

Обозначается через $W_2^2(D)$ множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x)$ при фиксированном $t\in D_T$ принадлежат области определения оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, имеют производные второго порядка по t, принадлежащие $L_2(D)$, и обращаются в нуль при $t\geq T-\delta$ $(0<\delta$ – зависит от $\Phi(t,x))$.

Определение. *Если функция $u(t,x)\in C(D)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству*

$$\int_0^T\int_0^l\Big\{u(t,y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\right]-$$
$$-\Big[\delta(y-\mu(t))p(t)+f\big(t,y,u(t,y),\tau(t)\big)\Big]\Phi(t,y)\Big\}\,dydt=$$
$$=\int_0^l\varphi_1(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)\right]_{t=0}dy-\int_0^l\varphi_2(y)\,[\Phi(t,y)]_{t=0}\,dy$$

для любого $\Phi(t,x)\in W_2^2(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3).

Задача. *Найти такие управляющие функции*

$$p^\star(t)\in\{p^\star:\big|p^\star(t)\big|\leq M_1^\star,\ t\in D_T\},\ \theta^\star(t)\in\{\theta^\star:\big|\theta^\star(t)\big|\leq M_2^\star,\ t\in D_T\}$$

и соответствующие им состояния: $u^\star(t,x)$ – обобщенное решение смешанной задачи (1)–(3) *и $\tau^\star(t)$ – решение начальной задачи* (4), (5), *что доставляют минимум функционалу*

$$J[p^\star,\theta^\star]=\int_0^T g\big(t,x,u^\star(t,x),\tau^\star(t),p^\star(t),\theta^\star(t)\big)\,dt.$$

3. Укороченное решение смешанной задачи (1)–(3)

В множестве бесконечномерных вектор-функций $\{a(t) = (a_i(t)) | a_i(t) \in C(D_T),\ i = 1, 2, 3, \dots\}$ с помощью нормы

$$\|a(t)\|_{B_2(T)} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} |a_i(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

вводися банахово пространство $B_2(T)$. Наряду с $B_2(T)$ в множестве конечномерных вектор-функций $\{c^N(t) = (c_i^N(t)) | c_i^N(t) \in C(D_T),\ i = \overline{1, N}\}$ рассматривается и конечномерное банахово пространство $B_2^N(T)$ с нормой

$$\|c^N(t)\|_{B_2^N(T)} = \left[\sum_{i=1}^{N} \max_{t \in D_T} |c_i^N(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для произвольной функции $\varsigma(x) \in L_2(D_l)$ вводим норму следующим образом:

$$\|\varsigma(x)\|_{L_2(D_l)} = \left\{\int_0^l |\varsigma(y)|^2 dy\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Для числовой последовательности $\varphi_i \in l_2$ вводим следующую норму:

$$\|\varphi\|_{l_2} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Также используем для постоянного конечномерного вектора $\psi^N = \left(\psi_1^N, \psi_2^N, \dots, \psi_N^N\right)$ следующую норму:

$$\|\psi^N\|_{l_2^N} = \left\{\sum_{i=1}^{N} |\psi_i^N|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Функцию $g\big(t, x, u(t,x), \tau(t), p(t), \theta(t)\big)$ разложим в ряд Фурье:

$$J[p, \theta] = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^l g\left(t, y, \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) b_j(y), \tau(t), p(t), \theta(t)\right) b_i(y) dy dt \cdot b_i(x). \tag{6}$$

Обобщенное решение смешанной задачи (1)–(3) в области D представляем в виде [19]

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big\{\omega_i(t) + \frac{1}{\lambda_i} \int_0^t \Big[p(s) b_i(\mu(s)) +$$

$$+ \int_0^l f\Big(s, y, \sum_{j=1}^{\infty} a_j(s) b_j(y), \tau(s)\Big) b_i(y) dy\Big] G_i(t, s) ds\Big\} \cdot b_i(x), \tag{7}$$

где функции $a_i(t)$ определяются как решение следующей счетной системы нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_i(t) = \omega_i(t) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_i}\int_0^t \Big[p(s)b_i(\mu(s)) + \int_0^l f\Big(s, y, \sum_{j=1}^{\infty} a_j(s)b_j(y), \tau(s)\Big) b_i(y)dy\Big] G_i(t,s)ds, \qquad (8)$$

$$\omega_i(t) = \varphi_{1i}\cos\lambda_i t + \frac{\varphi_{2i}}{\lambda_i}\sin\lambda_i t,\ G_i(t,s) = \sin\lambda_i(t-s),$$

$$\varphi_{ki} = \int_0^l \varphi_k(y)b_i(y)\,dy,\ k = 1, 2.$$

Класс функций, ограниченных по норме числом $M > 0$, обозначим через $Bnd(M)$. Класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, \vartheta, \ldots$ с коэффициентом $H > 0$, обозначим через $Lip\big\{H_{|\,u,\vartheta,\ldots}\big\}$. А для функций одной переменной индекс опускается.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что задача Коши (4), (5) при фиксированных значениях управления $\theta(t)$ имеет единственное решение на отрезке D_T, если выполняются следующие условия:

$$h\big(t, \tau(t), \theta(t)\big) \in C(D_T \times X_1 \times X_2) \cap Bnd(M_0) \cap Lip\big\{H_0(t)_{|\tau}\big\},$$

где $0 < \int\limits_0^T |H_0(t)|dt < \infty$; X_1, X_2 – отрезки прямой, $0 < M_0 = const$.

ССНИУ(8) является замкнутой бесконечной системой относительно неизвестных функций $a_i(t)$ и вычисление решения этой счетной системы методом последовательных приближений является очень трудоемкой работой. Поэтому рассмотрим следующую укороченную систему интегральных уравнений:

$$u^N(t,x) = \sum_{i=1}^{N}\Big\{\omega_i^N(t) + \frac{1}{\lambda_i^N}\int_0^t \Big[p(s)b_i^N(\mu(s)) +$$

$$+\int_0^l f\Big(s, y, \sum_{j=1}^{N} a_j^N(s)b_j^N(y), \tau(s)\Big) b_i^N(y)dy\Big] G_i^N(t,s)ds\Big\} \cdot b_i^N(x), \qquad (9)$$

где функции $a_i^N(t)$ определяются как решение следующей конечной системы нелинейных интегральных уравнений (КСНИУ):

$$a_i^N(t) = \omega_i^N(t) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_i^N}\int_0^t \Big[p(s)b_i^N(\mu(s)) + \int_0^l f\Big(s, y, \sum_{j=1}^{N} a_j^N(s)b_j^N(y), \tau(s)\Big) b_i^N(y)dy\Big] G_i^N(t,s)ds, \qquad (10)$$

$$\omega_i^N(t)=\varphi_{1i}^N\cos\lambda_i^N t+\frac{\varphi_{2i}^N}{\lambda_i^N}\sin\lambda_i^N t,\ G_i^N(t,s)=\sin\lambda_i^N(t-s),$$

а начальные данные φ_{1i}^N, φ_{2i}^N подбираются из (2) так, что суммы

$$\varphi_k^N(x)=\sum_{i=1}^N\varphi_{ki}^N b_i^N(x)$$

аппроксимируют при $N\to\infty$ функции $\varphi_k(x)\in L_2(D_l)$, $k=1,2$.

4. Однозначная разрешимость КСНИУ (10)

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\left\|f\left(s,x,u^N,\tau\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds\le\Delta<\infty$;
2. $f\left(t,x,u^N,\tau\right)\in Lip\left\{H(t,x)_{|\,u^N}\right\}$, $0<\int\limits_0^t\left\|H(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}ds<\infty$;
3. $\left\|\varphi_1^N\right\|_{l_2^N}+\left\|\frac{\varphi_2^N}{\lambda^N}\right\|_{l_2^N}<\infty$.

Тогда при фиксированных значениях управления $p(t)$ и функции $\tau(t)$ КСНИУ (10) имеет единственное решение в пространстве $B_2^N(T)$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$a_i^{N\,0}(t)=\omega_i^N(t)+\frac{1}{\lambda_i^N}\int\limits_0^t p(s)b_i^N(\mu(s))G_i^N(t,s)ds,$$

$$a_i^{N\,k+1}(t)=a_i^{N\,0}(t)+\frac{1}{\lambda_i^N}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^{N\,k}(s)b_j^N(y),\tau(s)\right)\times$$
$$\times\, b_i^N(y)G_i^N(t,s)dyds,\ k=0,1,2,\ldots \quad (11)$$

В силу условий теоремы, из (11) по индукции получаем следующие оценки:

$$\left\|a^{N\,1}(t)-a^{N\,0}(t)\right\|_{B_2^N(T)}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^N\frac{1}{\lambda_i^N}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\left|f\left(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^{N\,0}(s)b_j^N(y),\tau(s)\right)\right|\cdot\left|b_i^N(y)G_i^N(t,s)\right|dyds\le$$

$$\le\left\{\sum_{i=1}^N\frac{1}{\left(\lambda_i^N\right)^2}\right\}^{\frac12}\left\{\sum_{i=1}^N\left[\int\limits_0^t\int\limits_0^l\left|f\left(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^{N\,0}(s)b_j^N(y),\tau(s)\right)\right|\cdot\left|b_i^N(y)G_i^N(t,s)\right|dyds\right]^2\right\}^{\frac12}\le$$

$$\le M_1M_2M_3\int\limits_0^t\int\limits_0^l\left|f\left(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^{N\,0}(s)b_j^N(y),\tau(s)\right)\right|dyds\le$$

$$\leq M_1 M_2 M_3 \max_{t\in D_T} \int\limits_0^t \left\| f\left(s, y, \sum_{j=1}^{N} a_j^{N\,0}(s) b_j^N(y), \tau(s)\right)\right\|_{L_2(D_l)} \left\{\int\limits_0^l 1^2 dy\right\}^{\frac{1}{2}} ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2 M_3 \sqrt{l}\Delta, \qquad (12)$$

$$\left\|a^{N\,k+1}(t) - a^{N\,k}(t)\right\|_{B_2^N(t)} \leq$$

$$\leq M_1 M_2 M_3 \int\limits_0^t \int\limits_0^l H(s,y) \sum_{j=1}^{N} \left|a_j^{N\,k}(s) - a_j^{N\,k-1}(s)\right| \cdot \left|b_j^N(y)\right| dy ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2^2 M_3 \int\limits_0^t \int\limits_0^l H(s,y) \left\|a^{N\,k}(s) - a^{N\,k-1}(s)\right\|_{B_2^N(s)} dy ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2^2 M_3 \sqrt{l} \int\limits_0^t \left\{\int\limits_0^l H^2(s,y) dy\right\}^{\frac{1}{2}} \left\|a^{N\,k}(s) - a^{N\,k-1}(s)\right\|_{B_2^N(s)} ds \leq$$

$$\leq (M_1 M_3 \sqrt{l})^{k+1} (M_2)^{2k+1} \Delta \frac{\left[\int\limits_0^t \left\|H(s,x)\right\|_{L_2(D_l)} ds\right]^k}{k!}, \qquad (13)$$

где $M_1 = \left\{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{\left(\lambda_i^N\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$, $M_2 = \left\|b^N(x)\right\|_{B_2^N(l)}$, $M_3 = \left\|G^N(t,s)\right\|_{B_2^N(t)}$,
$\|\cdot\|_{B_2^N(t)} = \left[\sum\limits_{i=1}^{N} |\cdot|^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

Существование решения КСНИУ (10) следует из справедливости оценок(12) и (13), так как при $k \to \infty$ последовательность функций $\left\{a^{N\,k}(t)\right\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $a^N(t) \in B_2^N(T)$. Для доказательства единственности решения в пространстве $B_2^N(T)$ предположим, что КСНИУ (10) имеет два решения: $a^N(t) \in B_2^N(T)$ и $\vartheta^N(t) \in B_2^N(T)$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\left\|a^N(t) - \vartheta^N(t)\right\|_{B_2^N(t)} \leq M_1 M_2^2 M_3 \sqrt{l} \int\limits_0^t \left\|H(s,x)\right\|_{L_2(D_l)} \left\|a^N(s) - \vartheta^N(s)\right\|_{B_2^N(s)} ds. \quad (14)$$

Применение неравенства Гронуолла–Беллмана к оценке (14) дает $\left\|a^N(t) - \vartheta^N(t)\right\|_{B_2^N(T)} \equiv 0$ для всех $t \in D_T$. Отсюда следует единственность решения КСНИУ (10) в пространстве $B_2^N(T)$. Теорема доказана.

Подставляя КСНИУ (10) в формулу $u^N(t,x) = \sum_{i=1}^N a_i^N(t) b_i^N(x)$, получаем (9). Если $a^N(t) \in B_2^N(T)$, то справедлива оценка

$$\left|u^N(t,x)\right| \leq \sum_{i=1}^{N} \left|a_i^N(t)\right| \cdot \left|b_i^N(x)\right| \leq M_2 \left\|a^N(t)\right\|_{B_2^N(T)} < \infty.$$

5. Сходимость ряда Фурье (7) при оптимальных управляющих функциях

Таким образом, мы пришли к следующей задаче: *найти управляющие функции* $p(t)$ *и* $\theta(t)$ *, которые вместе с функциями* (9) *и*

$$\tau(t) = \tau_0 + \int\limits_0^t h(s, \tau(s), \theta(s))ds$$

минимизируют функционал

$$J^N[p, \theta] = \sum_{i=1}^N \int\limits_0^T \int\limits_0^l g\left(t, y, \sum_{j=1}^N a_j^N(t) b_j^N(y), \tau(t), p(t), \theta(t)\right) b_i^N(y)\, dydt \cdot b_i^N(x).$$

Пусть $p^\star(t)$, $\theta^\star(t)$ – оптимальные решения поставленной задачи. Рассмотрим следующие соотношения:

$$u^{N(k+1)\star}(t,x) = \sum_{i=1}^N \Big\{ \omega_i^N(t) + \int\limits_0^t \Big[p^\star(s) b_i^N(\mu(s)) +$$

$$+ \int\limits_0^t f\Big(s, y, \sum_{j=1}^N a_j^{Nk\star}(s) b_j^N(y), \tau^{k\star}(s)\Big) b_i^N(y) dy\Big] G_i^N(t,s) ds \Big\} b_i^N(x), \tag{15}$$

$$a_i^{N(k+1)\star}(t) = \omega_i^N(t) + \int\limits_0^t \Big[p^\star(s) b_i^N(\mu(s)) +$$

$$+ \int\limits_0^t f\Big(s, y, \sum_{j=1}^N a_j^{Nk\star}(s) b_j^N(y), \tau^{k\star}(s)\Big) b_i^N(y) dy\Big] G_i^N(t,s) ds, \tag{16}$$

$$\tau^{(k+1)\star}(t) = \tau_0 + \int\limits_0^t h(s, \tau^{k\star}(s), \theta^\star(s)) ds, \tag{17}$$

$$J^{Nk\star}[p^\star, \theta^\star] =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int\limits_0^T \int\limits_0^l g\left(t, y, \sum_{j=1}^N a_j^{Nk\star}(t) b_j^N(y), \tau^{k\star}(t), p^\star(t), \theta^\star(t)\right) b_i^N(y)\, dydt \cdot b_i^N(x). \tag{18}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $f\left(t, x, u^N, \tau\right) \in Bnd(\Delta) \cap Lip\big\{H_{11}(t,x)_{|u^N}; H_{22}(t)_{|\tau}\big\}$, $0 < \int\limits_0^t \big\|H_{11}(s,x)\big\|_{L_2(D_l)} ds < \infty$, $0 < \int\limits_0^t \big\|H_{12}(s)\big\|_{C(D_T)} ds < \infty$;

2. $h\,(t,\tau,\theta) \in Bnd(M_0) \cap Lip\big\{H_{01}(t)_{|\tau}\big\}$, $0 < M_0 = const < 1$, $0 < \int\limits_0^T \big|H_{01}(t)\big| ds < \infty$;
3. $\big\|\varphi_1^N\big\|_{l_2^N} + \big\|\frac{\varphi_2^N}{\lambda^N}\big\|_{l_2^N} < \infty$, $M_1 M_2 M_3 \sqrt{l} < 1$.
Тогда справедливо следующее соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \big\|a^{N\star}(t) - a^{N(k+1)\star}(t)\big\|_{B_2^N(T)} = 0. \qquad (19)$$

Доказательство. Аналогично (13) и (14) из (16) справедлива оценка

$$\big\|a^{N\star}(t) - a^{N(k+1)\star}(t)\big\|_{B_2^N(t)} \leq$$

$$\leq \big\|a^{N(k+2)\star}(t) - a^{N(k+1)\star}(t)\big\|_{B_2^N(t)} + \big\|a^{N\star}(t) - a^{N(k+2)\star}(t)\big\|_{B_2^N(t)} \leq$$

$$\leq M_1 M_2^2 M_3 \sqrt{l} \int\limits_0^t \Big[\big\|H_{11}(s,x)\big\|_{L_2(D_l)} \big\|a^{N(k+1)\star}(s) - a^{Nk\star}(s)\big\|_{B_2^N(s)} +$$

$$+ \big\|H_{12}(s)\big\|_{C(D_t)} \big\|\tau^{(k+1)\star}(s) - \tau^{k\star}(s)\big\|_{C(D_t)}\Big] ds +$$

$$+ M_1 M_2^2 M_3 \sqrt{l} \int\limits_0^t \Big[\big\|H_{11}(s,x)\big\|_{L_2(D_l)} \big\|a^{N\star}(s) - a^{N(k+1)\star}(s)\big\|_{B_2^N(s)} +$$

$$+ \big\|H_{12}(s)\big\|_{C(D_t)} \big\|\tau^{\star}(s) - \tau^{(k+1)\star}(s)\big\|_{C(D_t)}\Big] ds \leq$$

$$\leq \delta_{0k}(t) + M_1 M_2^2 M_3 \sqrt{l} \int\limits_0^t \Big[\big\|H_{11}(s,x)\big\|_{L_2(D_l)} \big\|a^{N\star}(s) - a^{N(k+1)\star}(s)\big\|_{B_2^N(s)} +$$

$$+ \big\|H_{12}(s)\big\|_{C(D_t)} \big\|\tau^{\star}(s) - \tau^{(k+1)\star}(s)\big\|_{C(D_t)}\Big] ds, \qquad (20)$$

где

$$\delta_{0k}(t) = \big(M_1 M_2 \sqrt{l}\big)^{k+1} M_2^{2k+1} \left\{ \Delta \frac{\left|\int\limits_0^t \big\|H_{11}(s,x)\big\|_{L_2(D_l)} ds\right|^k}{k!} + M_0 \frac{\left|\int\limits_0^t \big\|H_{12}(s)\big\|_{C(D_t)} ds\right|^k}{k!} \right\}.$$

В силу второго условия теоремы, из (17) имеем

$$\big\|\tau^{\star}(t) - \tau^{(k+1)\star}(t)\big\|_{C(D_T)} \leq$$

$$\leq \big\|\tau^{\star}(t) - \tau^{(k+2)\star}(t)\big\|_{C(D_T)} + \big\|\tau^{(k+2)\star}(t) - \tau^{(k+1)\star}(t)\big\|_{C(D_T)} \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t H_{01}(s) \big\|\tau^{\star}(s) - \tau^{(k+1)\star}(s)\big\|_{C(D_t)} ds + \int\limits_0^t H_{01}(s) \big\|\tau^{(k+1)\star}(s) - \tau^{k\star}(s)\big\|_{C(D_t)} ds \leq$$

$$\leq \delta_{1k}(t)+\int\limits_0^t H_{01}(s)\left\|\tau^{\star}(s)-\tau^{(k+1)\star}(s)\right\|_{C(D_t)}ds, \tag{21}$$

где

$$\delta_{1k}(t)=M_0^{k+1}\frac{\left|\int\limits_0^t H_{01}(s)ds\right|^k}{k!}. \tag{22}$$

Из (22) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\delta_{1k}(t)=0. \tag{23}$$

Применяя неравенства Гронуолла–Беллмана к (21), получаем

$$\left\|\tau^{\star}(s)-\tau^{(k+1)\star}(s)\right\|_{C(D_t)}\leq\delta_{1k}(t)\exp\left\{\int\limits_0^t H_{01}(s)ds\right\}. \tag{24}$$

Теперь, подставляя (24) в (20), имеем

$$\left\|a^{N\star}(t)-a^{N(k+1)\star}(t)\right\|_{B_2^N(t)}\leq$$

$$\leq\delta_{0k}(t)+M_1M_2^2M_3\sqrt{l}\int\limits_0^t\left\|H_{12}(s)\right\|_{C(D_t)}\delta_{1k}(s)\exp\left\{\int\limits_0^s H_{01}(\xi)d\xi\right\}ds+$$

$$+M_1M_2^2M_3\sqrt{l}\int\limits_0^t\Big[\left\|H_{11}(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}\left\|a^{N\star}(s)-a^{N(k+1)\star}(s)\right\|_{B_2^N(s)}ds. \tag{25}$$

Применяя к (25) неравенства Гронуолла–Беллмана, получаем

$$\left\|a^{N\star}(t)-a^{N(k+1)\star}(t)\right\|_{B_2^N(T)}\leq$$

$$\leq\left[\delta_{0k}(t)+M_1M_2^2M_3\sqrt{l}\int\limits_0^t\left\|H_{12}(s)\right\|_{C(D_t)}\delta_{1k}(s)\exp\left\{\int\limits_0^s H_{01}(\xi)d\xi\right\}ds\right]\times$$

$$\times\exp\left\{M_1M_2^2M_3\sqrt{l}\int\limits_0^t\left\|H_{11}(s,x)\right\|_{L_2(D_l)}ds\right\}. \tag{26}$$

Так как в силу теоремы $\lim_{k\to\infty}\delta_{0k}(t)=0$, то в силу (23), из (26) получаем (19). Теорема доказана.

6. Сходимость функционала качества

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *и*:

$g(t,x,u,\tau,p,\theta) \in Lip\big\{H_{21}(t)_{|u}; H_{22}(t)_{|\tau}\big\}$,

где $0 < \int\limits_0^T H_{2i}(t)dt < \infty$, $i = 1,2$.

Тогда справедливо следующее соотношение

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ k\to\infty}} \big|J^\star\big[p^\star,\theta^\star\big] - J^{Nk\star}\big[p^\star,\theta^\star\big]\big| = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Оценим допускаемую погрешность по состоянию $u^\star(t,x)$, то есть величину $\overline{V}_{Nk} = \Big|u^\star(t,x) - u^{Nk\star}(t,x)\Big|$. С этой целью для начала оценим разности: $u^\star(t,x) - u^{N\star}(t,x)$ и $u^{N\star}(t,x) - u^{Nk\star}(t,x)$. Итак, рассмотрим соотношение $\Big|u^\star(t,x) - u^{N\star}(t,x)\Big| \le V_N$, где

$$V_N = \int\limits_0^l \left|\Big(\varphi_1(y) - \sum_{i=1}^N \varphi_{1i}^N b_i^N(y)\Big)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}\right| dy +$$
$$+ \int\limits_0^l \left|\Big(\varphi_2(y) - \sum_{i=1}^N \varphi_{2i}^N b_i^N(y)\Big)\,[\Phi(t,y)]_{t=0}\right| dy +$$
$$+ \int\limits_0^T\int\limits_0^l \left|\Phi(t,y)\Big[\delta(y-\mu(t))p^\star(t) - \sum_{i=1}^N p^\star(t) b_i^N(\mu(t))\Big]\cdot b_i^N(y)\right| dydt +$$
$$+ \int\limits_0^T\int\limits_0^l \Big|\Phi(t,y)\Big[f\Big(t,y,\sum_{j=1}^\infty a_j^\star(t)b_j(y),\tau^\star(t)\Big) -$$
$$- \sum_{i=1}^N \int\limits_0^l f\Big(t,z,\sum_{j=1}^N a_j^{N\star}(t)b_j^N(z),\tau^\star(t)\Big) b_i^N(z)dz\Big] b_i^N(y)\Big| dydt. \tag{28}$$

Если $a^{N\star}(t) \in B_2^N(T)$ является решением КСНИУ (16), то покажем, что $\lim_{N\to\infty} V_N = 0$. Действительно, так как $a^{N\star}(t) \in B_2^N(T)$, то из равенства

$$\lim_{N\to\infty} u^{N\star}(t,x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N a_i^{N\star}(t) b_i^N(x) = u^\star(t,x)$$

в силу условий теоремы следует, что

$$\lim_{N\to\infty} f\big(t,x,u^{N\star}(t,x),\tau^\star(t)\big) = f\big(t,x,u^\star(t,x),\tau^\star(t)\big) \tag{29}$$

в смысле метрики $L_2(D)$.

Тогда первые три интеграла в (28) стремятся к нулю при $N \to \infty$. Сходимость последней разности в (28) при $N \to \infty$ следует из (29).

Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} V_N = 0. \tag{30}$$

В силу того, что

$$\left|u^{N\star}(t,x) - u^{Nk\star}(t,x)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \left|a_i^{N\star}(t) - a_i^{Nk\star}(t)\right| \cdot \left|b_i^N(x)\right| \leq M_2 \left\|a^{N\star}(t) - a^{Nk\star}(t)\right\|_{B_2^N(T)},$$

из (19) получаем

$$\lim_{k\to\infty} \left|u^{N\star}(t,x) - u^{Nk\star}(t,x)\right| = 0. \tag{31}$$

В силу условий теоремы, (30) и (31), из (7), (8) и (15) следует, что

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\k\to\infty}} \overline{V}_{Nk} = \lim_{\substack{N\to\infty\\k\to\infty}} \left|u^\star(t,x) - u^{Nk\star}(t,x)\right| \leq$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \left|u^\star(t,x) - u^{N\star}(t,x)\right| + \lim_{k\to\infty} \left|u^{N\star}(t,x) - u^{Nk\star}(t,x)\right| = 0. \tag{32}$$

Тогда из (6) и (18) имеем

$$\left|J^\star[p^\star,\theta^\star] - J^{Nk\star}[p^\star,\theta^\star]\right| \leq$$

$$\leq \int_0^T \left[H_{21}(t)\left|u^\star(t,x) - u^{Nk\star}(t,x)\right| + H_{22}(t)\left|\tau^\star(t) - \tau^{k\star}(t)\right|\right] dt \leq$$

$$\leq \int_0^T H_{21}(t)\overline{V}_{Nk}(t)dt + \int_0^T H_{22}(t)\delta_{1k}(t) \exp\left\{\int_0^T H_{01}(s)ds\right\} dt. \tag{33}$$

С учетом (23) и (32) переход к пределу в (33) при $N \to \infty, k \to \infty$ дает (27). Теорема доказана.

7. Заключение

Аналитическое решение нелинейных задач оптимального управления очень сложно. На практике широко используются различные приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления. В данной работе изучаются вопросы приближенного решения одной задачи для системы нелинейного гиперболического и обыкновенного дифференциального уравнений и приближенного расчета функционала качества при известных управляющих воздействиях.

Решение смешанной задачи (1)–(3) определяется в виде ряда Фурье по собственным функциям $b_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_i x,\ \lambda_i = \frac{i\pi}{l},\ i = 1, 2, \ldots$ При этом смешанная задача (1)–(3) сводится к изучению счетной системы нелинейных интегральных уравнений

(8). Вместо счетной системы (8) изучается однозначная разрешимость конечной системы нелинейных интегральных уравнений (10). Используется метод последовательных приближений. Для конечной системы (10) рассматривается итерационный процесс Пикара (11). Доказывается сходимость решения итерационного процесса (11) к решению счетной системы (8) при $N \to \infty, k \to \infty$ для оптимальных управляющих функций $p^\star(t)$ и $\theta^\star(t)$. Приближенно вычисляется нелинейный функционал качества при известных оптимальных управляющих воздействиях. При этом используются последовательности функций (15)–(17) и последовательность функционала (18).

Список литературы

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 263 с. [Aleksandrov A.G. Optimalnye i adaptivnye sistemy. Moskva: Vysshaya shkola, 1989 (in Russian)].

2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с. [Andreev Yu.N. Upravlenie konechnomernymi lineynymi obektami. Moskva: Nauka, 1976 (in Russian)].

3. Вязгин В.А., Федоров В.В. Математические методы автоматизированного проектирования. М.: Высшая школа, 1989. 184 с. [Vyazgin V.A., Fedorov V.V. Matematicheskie metody avtomatizirovannogo proektirovaniya. Moskva: Vysshaya shkola, 1989 (in Russian)].

4. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 448 с. [Krotov V.F., Gurman V.I. Metody i zadachi optimalnogo upravleniya. Moskva: Nauka, 1973 (in Russian)].

5. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные управления. М.: Наука, 1980. 228 с. [Kuropatkin P.V. Optimalnye i adaptivnye upravleniya. Moskva: Nauka, 1980 (in Russian)].

6. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с. [Butkovski A.G. Teoriya optimalnogo upravleniya sistemami s raspredelyonnymi parametrami. Moskva: Nauka, 1965 (in Russian)].

7. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с. [Evtushenko Yu.G. Metody resheniya ekstremalnykh zadach i ih primenenie v sistemah optimizatsii. Moskva: Nauka, 1982 (in Russian)].

8. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с. [Egorov A.I. Optimalnoe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami. Moskva: Nauka, 1978 (in Russian)].

9. Лионс Ж.Л. Управление сингулярными распределёнными системами / Пер. с фр. А.И. Штерна. М.: Наука, 1987. 308 с. (French: Lions J.L. Controle de systemes distribues singuliers. Paris, Gauthier-Villars, 1983.)

10. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 480 с. [Lur'e K.A. Optimalnoe upravlenie v zadachah matematicheskoy fiziki. Moskva: Nauka, 1975 (in Russian)].

11. Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2009. 680 с. [Rapoport E.Ya. Optimalnoe upravlenie sistemami s raspredelyonnymi parametrami. Moskva: Vysshaya shkola, 2009 (in Russian)].

12. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с. [Srochko V.A. Iteratsionnye metody recheniya zadach optimalnogo upravleniya. Moskva: Fizmatlit, 2000 (in Russian)].

13. Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. М.: Наука, 1992. 193 с. [Tyatyushkin A.I. Chislennye metody i programmnye sredstva optimizatsii upravlyaemykh sistem. Moskva: Nauka, 1992 (in Russian)].

14. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с. [Fedorenko R.P. Priblijyonnoe reshenie zadach optimalnogo upravleniya. Moskva: Nauka, 1978 (in Russian)].

15. Юлдашев Т.К. Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2011. **51**. №9. С. 1703 – 1711. (English transl.: Yuldashev T.K. Mixed value problem for nonlinear differential equation of fourth order with small parameter on the parabolic operator // Comput. Math. and Math. Physics. 2011. V. 51. No 9. P. 1596–1604.)

16. Юлдашев Т.К. Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2012. **52**. №1. С. 112 – 123. (English transl.: Yuldashev T.K. Mixed value problem for nonlinear integro-differential equation with parabolic operator of higher power // Comput. Math. and Math. Physics. 2012. V. 52. No 1. P. 105–116.)

17. Юлдашев Т.К. Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени // *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика.* 2013. №2. С. 277–295. (Yuldashev T.K. Smeshannaya zadacha dlya nelineynogo uravneniya s pseudoparabolicheskim operatorom vysokoy stepeni // Vestnik VoronezhGU. 2013. No 2. S. 277–295 (in Russian)].

18. Юлдашев Т.К. Об одной задаче оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2013. Т. 20, №5. С. 78 – 89. [Yuldashev T.K. On a Problem of Optimal Control for a Nonlinear Pseudohyperbolic Equation // Modeling and analysis of information systems. 2013. Vol. 20, No 5. P. 78 – 89 (in Russian)].

19. Шабадиков К.Х., Юлдашев Т.К. Исследование разрешимости смешанной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с максимумами по времени // *Исследования по интегро-дифференц. уравнениям.* 1991. **23**. С. 28 – 34. [Shabadikov K.H., Yuldashev T.K. Issledovaniya razreshimosti smeshannoy zadachi dlya nelineynykh integro-differentsialnykh uravneniy s maksimumami po vremeni //

Issledovaniya po integro-differentsialnym uravneniyam. 1991. T. 23. S. 28 – 34 (in Russian)].

Approximate Solution of an Optimal Control Dot Mobile Problem for a Nonlinear Hyperbolic Equation

Yuldashev T. K.

Siberian State Aerospace University
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., 660014 Krasnoyarsk, Russia

Keywords: hyperbolic equation, initial and boundary value conditions, dot mobile optimal control, generalized solvability, functional minimization, approximate solution

In this article, we consider the approximate solution of an optimal control dot mobile problem for a system of nonlinear partial hyperbolic and ordinary differential equations with initial and boundary value conditions and a nonlinear optimality criterion. The use of the Fourier method of variables separation reduces the generalized solution of the initial-boundary value problem to the countable system of nonlinear integral equations (CSNIE). To ease the computational procedures, it is considered the corresponding shorter (truncated) system of nonlinear integral equations (SSNIE) instead of CSNIE. By the methods of successive approximations and integral inequalities, it is studied the one-value solvability of SSNIE for the fixed values of the control. It is estimated a permissible error with respect to the shorter generalized solution of the initial-boundary value problem. It is approximately calculated the nonlinear functional of quality under the known optimal operating influences.

Сведения об авторе:
Юлдашев Турсун Камалдинович,
Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М. Ф. Решетнева,
канд. физ.-мат. наук, доцент, докторант