Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**4** (2007) 36–42

УДК 517.14

О теоремах Р. Радо и Д. Уотсона

Дольников В.Л. [1].

Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 22 сентября 2007

Аннотация

Даётся некоторое обобщение теорем Р. Радо и Д. Уотсона, которые, в свою очередь, обобщают теоремы Каратеодори и Кирхбергера.

В настоящей статье приводятся обобщения и уточнения классических теорем К. Каратеодори [1], Р. Кирхбергера [2] и Р. Радо [3] (см. также [4]), а также теоремы Д. Уотсона [5].

Конусом в линейном пространстве L над $\mathbb{R}$ будем называть множество замкнутое относительно сложения и умножения на неотрицательные числа, пересечение всех конусов, содержащих множество V будем называть *конической оболочкой* $\operatorname{con} V$ множества V. Через $\operatorname{conv} V$ обозначим *выпуклую оболочку* множества V, а через $\operatorname{aff} V$ — *аффинную оболочку* V. Для множества $V \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$V' = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y = a' = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 1), \quad \text{где} \quad a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V\}.$$

Также положим

$$\mathbb{R}_0 = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0), \quad \text{где} \quad a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\} \quad \text{и} \quad \mathbb{R}_1 = (\mathbb{R}^n)'.$$

Перед тем как перейти к доказательству обобщений теорем Кирхбергера и Каратеодори, докажем сначала несколько лемм.

Лемма 1. *Если $V = \{a_0, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ — линейно зависимое множество, $-a_0 \notin \operatorname{con}\{a_1, \ldots, a_k\} = \operatorname{con} V_0$ и $a \in \operatorname{con} V$, то существует такое i, что $a \in \operatorname{con}(V \setminus \{a_i\})$, $1 \le i \le k$.*

Доказательство. Так как V — линейно зависимое множество векторов, то существуют такие не все равные 0 числа α_i, что

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i = \mathbf{0}, \quad 0 \le i \le k.$$

Аналогично, для $a \in \operatorname{con} V$ существуют такие числа λ_i, что

$$0 \le \lambda_i, \quad \text{и} \quad a = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i, \quad 0 \le i \le k.$$

Возможны два случая:
1) $\alpha_0 = 0$, тогда можно считать, что $\alpha_i < 0$ при некотором i, $1 \le i \le k$. Положим

$$t = \min_{\alpha_i < 0} \left\{ -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right\} > 0,$$

тогда при всех i, $1 \le i \le k$, верно неравенство $\lambda' = \lambda_i + t\alpha_i \ge 0$ и $\lambda'_i = 0$ при некотором i. Имеем

$$a = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i + t(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i) = \lambda_0 a_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda' a_i.$$

Следовательно, $a \in \operatorname{con}(V \setminus \{a_i\})$ и в этом случае все доказано.

[1]Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант №06-01-00648.

2) $\alpha_0 \neq 0$, тогда, не уменьшая общности, можно считать, что $\alpha_0 = 1$, и следовательно, имеем

$$a_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0.$$

Если $\alpha_i \geq 0$, то $-a_0 \in \operatorname{con}\{a_1, \dots, a_k\} = \operatorname{con} V_0$, что противоречит условию леммы.

Поэтому $\alpha_i < 0$ при некотором i, $1 \leq i \leq k$. Положим,

$$t = \min_{\alpha_i < 0} \left\{ -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right\} > 0,$$

тогда $\lambda'_i = \lambda_i + t\alpha_i \geq 0$ при всех i, $0 \leq i \leq k$ и $\lambda'_i = 0$ при некотором i, $1 \leq i \leq k$. Далее, имеем

$$a = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i + t(a_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i) = (\lambda_0 + t)a_0 + \sum_{i=0}^{k} \lambda'_i a_i.$$

Лемма доказана. □

Замечание. Условие $-a_0 \notin \operatorname{con} V_0$ существенно для справедливости леммы. В самом деле, рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ симплекс с множеством вершин $V = \{a_0, \dots, a_n\}$, который содержит внутри $\mathbf{0}$. Очевидно, что $\operatorname{con} V = \mathbb{R}^n$, но для любого $V' \subset V$ выполняется неравенство $\operatorname{con} V \neq \mathbb{R}^n$.

Лемма 2. *Пусть* $V = \{a_0, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{conv} V$ *и* $\dim \operatorname{aff} V \leq k - 1$ *или* $k \geq n + 1$ *и* $a \in \operatorname{conv} V$. *Тогда существует такое* i, $1 \leq i \leq k$, *что* $a \in \operatorname{conv}(V \setminus \{a_i\})$.

Доказательство. Возьмем множество векторов V'. Тогда, если $\dim \operatorname{aff} V \leq k - 1$, то множество V' — линейно-зависимо в $\mathbb{R}^{n+1}$ и вектор $a' \in \operatorname{con} V'$. Очевидно, что $-a'_0 \notin \operatorname{con} V'$. Поэтому, по лемме 1, имеем

$$a' = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a'_i, \quad \text{где} \quad \lambda_i \geq 0, \quad \text{и} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{при некотором} \quad i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Имеем, следовательно,

$$\langle a', e \rangle = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \langle a'_i, e \rangle = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \quad \text{и} \quad a = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i.$$

Лемма доказана. □

Следующая теорема является уточнением теорем Каратеодори, Радо и Уотсона [1, 3, 5, 6].

Теорема 1. *Если* $a \in \operatorname{con} V$, $(a \in \operatorname{conv}(V))$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $a_0 \in V$ *и* $-a_0 \notin \operatorname{con}(V \setminus \{a_0\})$, *то существуют такие векторы* $a_1, \dots, a_{n-1} \in V$ $(a_1, \dots, a_n \in V)$ *и числа* λ_i, *что*

$$0 \leq \lambda_i, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad (0 \leq \lambda_i, \quad 0 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1), \quad a = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i a_i \quad (a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i).$$

Доказательство. Докажем сначала теорему для конических оболочек. Так как $a \in \operatorname{con} V$, то существуют такие $a_1, \dots, a_k \in V$, $0 \leq \lambda_i$, $0 \leq i \leq k$, что

$$a = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i.$$

Возьмем такое представление с наименьшим возможным k. Если $k \geq n$, то множество векторов $V = \{a_0, \dots, a_k\}$ — линейно зависимо и получаем из леммы 1, что один вектор a_i можно так из множества V удалить, что $a \in \operatorname{con}(V \setminus \{a_i\})$. А это противоречит минимальности представления. Поэтому имеем, что $k \leq n - 1$. Аналогичным образом, используя лемму 2, получаем доказательство для выпуклых оболочек. □

Сформулируем обобщение теоремы Каратеодори для конических оболочек (см. [8], с. 211 – 212).

Теорема 2. *Если P — такое конечное семейство множеств в $\mathbb{R}^n$, что $\mathbf{0} \neq x \in \bigcap_{V\in P} \operatorname{con} V$ и $2 \leq |P| = k$, то найдется такое конечное множество $A \subset \mathbb{R}^n$, что*

$$|A\bigcap V| \leq n, \quad |A| \leq kn - n + 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{0} \neq y \in \bigcap_{V\in P} \operatorname{con}(V\bigcap A).$$

Если существует такой вектор $a \in V_0 \in P$, что $-a \notin \operatorname{con}(V_0 \setminus \{a\})$, то множество A можно выбрать так, что $a \in A$.

Доказательство. Очевидно, что найдется такое конечное множество B, что $\mathbf{0} \neq x \in \bigcap_{V\in P} \operatorname{con}(V\bigcap B)$ и $a \in B$. Пусть A — множество с минимальным числом элементов, обладающее этим свойством. Покажем тогда, что $|A| \leq kn - n + 1$, и тем самым завершим доказательство. Предположим противное, что $|A| > kn - n + 1$, и положим при $V \in P$ и $V \neq V_0$

$$A\bigcap V = \{x_{iV}\}_{1\leq i\leq |V\cap A|} \quad \text{и} \quad A_0 = \{a,\ x_{iV_0}\}_{1\leq i\leq |V_0\cap A|}.$$

Очевидно, что $N = 1 + \sum_{V\in P} |V\bigcap A| \geq |A| > kn - n + 1$. Для $x \in \bigcap_{V\in P} \operatorname{con}(V\bigcap A)$ существуют такие числа $\lambda \geq 0$, $\lambda_{iV} \geq 0$, что для $V \in P$ и $V \neq V_0$, имеем

$$x = \sum_{i=1}^{|V\cap A|} \lambda_{iV} x_{iV} = \lambda a + \sum_{i=1}^{|V_0\cap A|} \lambda_{iV_0} x_{iV_0}.$$

Используя лемму 1, можно считать, что множества векторов A_0 и $A\bigcap V$ ($V \in P$ и $V \neq V_0$) линейно независимы. Рассмотрим однородную систему из $kn - n + 1$ уравнений с N неизвестными

$$\sum_{i=1}^{|V\cap A|} \alpha_{iV} x_{iV} = \alpha a + \sum_{i=1}^{|V_0\cap A|} \alpha_{iV_0} x_{iV_0}, \quad \alpha\lambda + \sum_{V\in P} \sum_{i=1}^{|V\cap A|} \alpha_{iV} \lambda_{iV} = \mathbf{0}, \quad V \in P, \quad V \neq V_0.$$

Эта система имеет ненулевое решение $(\alpha, \ldots, \alpha_{iV_0}, \ldots, \ldots, \alpha_{iV}, \ldots)$, так как $N \geq |A| > kn - n + 1$, и можно считать, что $\alpha \geq 0$. Существуют такие i и V, что $\alpha_{iV} < 0$, так как $\lambda_{iV} \geq 0$ и существуют такие i и V, что $\lambda_{iV} > 0$. Пусть

$$t = \min_{\alpha_{iV} < 0} \left\{ -\frac{\lambda_{iV}}{\alpha_{iV}} \right\} > 0,$$

тогда $\lambda'_{iV} = \lambda_{iV} + t\alpha_{iV} \geq 0$ при всех i, V, а также $\lambda'_{iV} = 0$ при некоторых i, V. Положим,

$$z = \alpha a + \sum_{i=1}^{|V_0\cap A|} \alpha_{iV_0} x_{iV_0} = \sum_{i=1}^{|V\cap A|} \alpha_{iV} x_{iV}, \quad \text{где} \quad V \in P, \quad V \neq V_0,$$

тогда

$$y = x + tz = (\lambda + t\alpha)a + \sum_{i=1}^{|V_0\cap A|} \lambda'_{iV_0} x_{iV_0} = \sum_{i=1}^{|V\cap A|} \lambda'_V x_{iV}, \quad \text{где} \quad V \in P, \quad V \neq V_0.$$

Если $y = x + tz = \mathbf{0}$, то из линейной независимости множеств A_0, $V\bigcap A$ следует, что $\lambda = -t\alpha$, $\lambda_{iV} = -t\alpha_{iV}$, но тогда имеем

$$0 = \alpha\lambda + \sum_{V\in P} \sum_{i=1}^{|V\cap A|} \alpha_{iV} \lambda_{iV} = -t(\alpha^2 + \sum_{V\in P} \sum_{i=1}^{|V\cap A|} \alpha_{iV}^2),$$

поэтому $\alpha = 0$ и $\alpha_{iV} = 0$ для всех i, V. Получили противоречие, следовательно, $y \neq \mathbf{0}$ и

$$y \in \operatorname{con}(A_0)\bigcap \operatorname{con}(V_1 \setminus \{x_{iV}\})\bigcap(\bigcap_{V\in P, V\neq V_0, V_1} \operatorname{con}(V\bigcap A)),$$

для некоторого i и V_1, а это противоречит минимальности A. Поэтому имеем неравенство $|A| \leq kn - n + 1$ и теорема доказана. $\square$

Результат для выпуклых оболочек следует из следующей теоремы.

Теорема 3. *Если P — такое конечное семейство множеств в $\mathbb{R}^n$, что $a \in V_0 \in P$ и $\bigcap_{V\in P} \operatorname{conv} V \neq \emptyset$, то найдется такое конечное множество $A \subset \mathbb{R}^n$, что*

$$|A| \leq k(n+1) - n, \quad |P| = k, \quad a \in A \quad \text{и} \quad \bigcap_{V\in P} \operatorname{conv}(V \bigcap A) \neq \emptyset.$$

Доказательство. Рассмотрим семейство $P' = \{V'\}_{V\in P}$ множеств в $\mathbb{R}^{n+1}$. Очевидно, что $-a' \notin \operatorname{con}(V_0' \setminus \{a'\})$ и $\operatorname{con} V' \bigcap \mathbb{R}_0 = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому, по теореме 2, существует такое множество $A' \subset \mathbb{R}_1$, что $a \in A'$ и

$$|A'| \leq k(n+1) - (n+1) + 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{0} \neq x' \in \bigcap_{V\in P} \operatorname{con}(V' \bigcap A').$$

Так как $\operatorname{con} V' \bigcap \mathbb{R}_0 = \{\mathbf{0}\}$, то можно считать что $x' \in \mathbb{R}_1$. Следовательно, $y' = x'$ для некоторого $y \in \mathbb{R}^n$. Так как

$$x' \in \bigcap_{V\in P} \operatorname{con}(V' \bigcap A'),$$

то существуют такие числа $\lambda \geq 0$, $\lambda_{iV} \geq 0$, что выполняются равенства

$$x' = \lambda a' + \sum_{i=1}^{|V_0'\cap A'|} \lambda_{iV_0} x'_{V_0},$$

и для $V \in P$ и $V \neq V_0$ имеем

$$x' = \sum_{i=1}^{|V'\cap A'|} \lambda_{iV} x'_V.$$

Тогда

$$\langle x', e\rangle = \lambda\langle x', e\rangle + \sum_{i=1}^{|V_0'\cap A'|} \lambda_{iV_0}\langle x'_{iV_0}, e\rangle = \lambda + \sum_{i=1}^{|V_0'\cap A'|} \lambda_{iV_0} = 1,$$

а для $V \in P$ и $V \neq V_0$ также имеем

$$\sum_{i=1}^{|V'\cap A'|} \lambda_{iV} = 1.$$

Поэтому

$$y = \lambda a' + \sum_{i=1}^{|V_0\cap A|} \lambda_{iV_0} x_{iV_0} \quad \text{и} \quad y = \sum_{i=1}^{|V\cap A|} \lambda_{iV} x_{iV}.$$

Теорема доказана. □

Покажем теперь, что неравенства в предыдущих теоремах являются точными.

Теорема 4. *Существует в $\mathbb{R}^n$ такое семейство множеств $P = \{V_i\}_{1\leq i\leq k}$, что*

$$\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{con}(V_i) = \{\mathbf{0}\} \quad (\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{conv}(V_i) = \{\mathbf{0}\}) \quad \text{и} \quad |\bigcup_{i=1}^{k} V_i| = kn - n + 1 \quad (|\bigcup_{i=1}^{k} V_i| = k(n+1) - n),$$

а для всех i и $a \in V$ выполняется равенство

$$\bigcap_{j\neq i} \operatorname{con} V_i \bigcap \operatorname{con}(V_i \setminus \{a\}) = \emptyset \quad (\bigcap_{j\neq i} \operatorname{conv} V_i \bigcap \operatorname{conv}(V_i \setminus \{a\})) = \emptyset).$$

Доказательство. Докажем это утверждение для выпуклых оболочек.

1) Пусть $k \geq n$. Возьмем в $\mathbb{R}^n$ такое семейство $(n-1)$-мерных подпространств

$$P = \{L_i\}_{1\leq i\leq n}, \quad \text{что} \quad \bigcap_{i=1}^{n} L_i = \{\mathbf{0}\}.$$

В каждом подпространстве $L_i \in P$ возьмем $(n-1)$-мерный симплекс S_i с вершинами V_i, содержащий внутри $\mathbf{0}$. Далее возьмем $k-n$ таких n-мерных симплексов S_j с вершинами V_j, содержащих внутри $\mathbf{0}$, что они попарно не имеют общих вершин и не имеют общих вершин с взятыми ранее n симплексами. Тогда

$$|\bigcup_{i=1}^{n} V_i \bigcup \bigcup_{j=1}^{n-k} V_j| = n^2 + (k-n)(n+1) = k(n+1) - n \text{ и } \bigcap_{i=1}^{n} S_i \bigcap \bigcap_{j=1}^{n-k} S_j = \{\mathbf{0}\}.$$

При удалении любой точки a из V_i или V_j имеем $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv}(V_i \setminus \{a\})$ и поэтому

$$\bigcap_{m \neq i} S_m \bigcap \bigcap_{j=1}^{n-k} S_j \bigcap \operatorname{conv}(V_i \setminus \{a\}) = \emptyset.$$

Если $k \geq n$, то все доказано.
2) Пусть $k < n$ и $P = \{L_i\}_{1 \leq i \leq k-1}$ такое семейство $(n-1)$-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$, что

$$\dim \bigcap_{i=1}^{k-1} L_i = n-k+1, \text{ и пусть } L_0 \text{ — такое подпространство, что } \dim L_0 = k-1 \quad \text{и} \quad L_0 \bigcap \bigcap_{i=1}^{k-1} L_i = \{\mathbf{0}\}.$$

В каждом подпространстве $L_i \in P$ возьмем $(n-1)$-мерный симплекс S_i с вершинами V_i, содержащий внутри $\mathbf{0}$. А в подпространстве L_0 возьмем $(k-1)$-мерный симплекс S_0, тоже содержащий внутри $\mathbf{0}$. Тогда

$$|V_0 \bigcup \bigcup_{i=1}^{k-1} V_i| = (k-1)n + k = k(n+1) - n \quad \text{и} \quad S_0 \bigcap \bigcap_{i=1}^{k-1} S_i = \{\mathbf{0}\}.$$

При удалении любой вершины из S_0 или S_i выпуклая оболочка оставшихся вершин симплекса не содержит $\mathbf{0}$ и поэтому пересечение выпуклых оболочек оставшихся вершин пусто. Предложение для выпуклых оболочек доказано.

Если взять вложение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, как $\mathbb{R}_1$, и взять построенные множества для выпуклых оболочек в $\mathbb{R}^n$, то, как легко проверить, получится требуемый пример для конических оболочек в $\mathbb{R}^{n+1}$. □

Следующий результат обобщает теоремы Каратеодори, Кирхбергера, Радо и Уотсона [1, 4, 5, 6, 7].

Теорема 5. *Пусть $P = \{V_i\}_{i \in I}$ — такое семейство компактов в $\mathbb{R}^n$, что $a \in V_0 \in P$, и пусть для любого семейства $P' = \{V'_i\}_{i \in I_0}$, $I_0 \subseteq I$ такого, что*

$$V'_i \subseteq V_i, \quad a \in V'_0, \quad |I_0| = k, \quad 2 \leq k \leq n+1, \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} |V'_i| \leq k(n+1) - n,$$

существует такое семейство замкнутых полупространств $\{M_i\}_{1 \leq i \leq k}$, что $V'_i \subset M_i$ и $\bigcap_{i=1}^{k} M_i = \emptyset$. Тогда существует такое семейство замкнутых полупространств $\{N_i\}_{i \in I}$, что $V_i \subset N_i$ и $\bigcap_{i \in I} N_i = \emptyset$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что достаточно показать, что $\bigcap_{i \in I} \operatorname{conv} V_i = \emptyset$.

Предположим противное, тогда по теореме 3 найдется такое конечное $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и подсемейство

$$I_0 \subseteq I, \quad \text{что} \quad |I_0| = k, \quad |A| \leq k(n+1) - n, \quad a \in A \quad \text{и} \quad \bigcap_{i \in I_0} \operatorname{con}(V_i \bigcap A) \neq \emptyset.$$

Следовательно, для семейства множеств $P' = \{V'_i = V_i \bigcap A\}_{i \in I_0}$ не существует такого семейства замкнутых полупространств

$$\{N_i\}_{1 \leq i \leq k}, \quad \text{что} \quad V_i \subset N_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{k} N_i = \emptyset.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Замечание. Если $|P| = 2$, то теорема 5 совпадает с теоремой Уотсона.

Следующая теорема сразу следует из теоремы 5 и результатов работы [8], где даны соответствующие определения.

Теорема 6. *Если $P = \{V_i\}_{1 \le i \le k}$ — L-неразделимое семейство компактов в $\mathbb{R}^n$, то существует такое L-неразделимое семейство конечных подмножеств $\{V_i'\}_{1 \le i \le k}$, что*

$$V_i' \subseteq V_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} |V_i'| \le (k-1)N + 1.$$

Следствие 1. *Пусть V_1, $V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ и для всех таких непустых $V_1' \subseteq V_1$ и $V_2' \subseteq V_2$, что $|V_1'| + |V_2'| \le N+1$, существует такая функция $f \in L$, что $f(x) > 0$ для всех $x \in V_1'$ и $f(x) < 0$ для всех $x \in V_2'$. Тогда существует такая функция $f \in L$, что $f(x) > 0$ при $x \in V_1$ и $f(x) < 0$ при $x \in V_2$.*

Замечание. Пусть функции пространства L — непрерывны. Тогда легко видеть, что если для некоторого f и двух компактных множеств V_1 и V_2 будет $sep(f, V_1, V_2)$, то или $\operatorname{conv} V_1 \bigcap \operatorname{conv} V_2 = \emptyset$, или $\operatorname{conv} V_1 \subseteq \operatorname{conv} V_2$, или $\operatorname{conv} V_2 \subseteq \operatorname{conv} V_1$.

Если положить $L = S(E^n)$, то в качестве следствия из теоремы 6 получаем результат из [9] об отделимости сферами.

Следствие 2. *Пусть в V_1, $V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ и конечны и для всех таких непустых $V_1' \subseteq V_1$ и $V_2' \subseteq V_2$, что $|V_1'| + |V_2'| \le n+3$, существует такая сфера, что одно из множеств $\{V_1', V_2'\}$ лежит внутри сферы, а другое снаружи. Тогда существует такая сфера, что одно из множеств $\{V_1, V_2\}$ лежит внутри сферы, а другое снаружи.*

Список литературы

1. Carathéodory, C. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen // Math. Ann. — 1907. — Bd. 64. — S. 193 – 217.

2. Kirchberger, P. Über Tschebyschefsche Annäherugsmethoden // Math. Ann. — 1903. — Bd. 57. — S. 509 – 540.

3. Rado, R. Theorems on the intersection of convex sets of points // J. London. Math. Soc. — 1952. — V. 27. — P. 320 – 328.

4. Данцер, Л. Теорема Хелли и ее применения / Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли. — М.: Мир, 1968.

5. Watson, D. Refinement of theorems of Kirchberger and Carathéodory //J. Austr. Math. Soc. — 1973. — V. 15. — P. 190 – 192.

6. Дольников, В.Л. О пересечении конических и выпуклых оболочек /В.Л. Дольников //Иссл. по теор. функ. многих вещ. пер. — Ярославль, 1988. — С. 33 – 37.

7. Алексеев, В.М. Оптимальное управление /В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1979.

8. Дольников, В.Л. Обобщенные трансверсали и обобщенная выпуклость /В.Л. Дольников // Вопр. теор. групп и гом. алг. — Ярославль, 1998. — С. 15-36.

9. Lay, S.R. On separation by spherical surfaces //Amer. Math. Monthly. — 1971. — V. 78. — P. 1112 – 1113.

On theorems of R. Rado and of D. Watson

Dol'nikov V.L.

Theorems of R. Rado and of D. Watson are generalizations for theorems P. Kirchberger and C. Carathéodory. In the paper we will consider some generalizations and refinements for these theorems .