

УДК 519.68:[681.5137+612.8.001.57+007.51/52]

Расстояния и другие меры близости на множестве черно-белых цифровых изображений

Парфенов П. Г., Каплий И. А., Куликов О. С.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 12 марта 2007

Аннотация

Строится серия функций на множестве пар черно-белых цифровых изображений, являющихся либо расстоянием, либо аналогом расстояния. Предложенные функции позволяют, с одной стороны, решать задачи различения изображений, а с другой стороны, дают некую меру сходства. Рассмотрены приложения такого подхода к текстурам.

В настоящей заметке рассматриваются возможные подходы к различению черно-белых изображений, заключающихся в построении функций на множестве пар изображений, которые являются либо расстоянием, либо аналогом расстояния. Эти подходы в целом имеют два направления - это, во-первых, построение функций на основе классического понятия расстояния Хаусдорфа [1;2] для пар компактных множеств, и, во-вторых, построение аналогов расстояния на основе ранее введенного [3;4] одним из авторов заметки понятия характеристического набора коэффициентов черно-белого изображения. Предлагаемые подходы позволяют не только решать задачи различения изображений, но также дают возможность численно оценить меру их сходства. Наиболее интересным представляется приложение этих подходов к текстурам.

Под изображением A будем понимать матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ с элементами, принимающими значения либо 0, либо 1. Рассматривая матрицу $A = (a_{ij})$ как условный экран и следуя подходу работы [5], введем возможными традиционными способами экранные расстояния между парами пикселей:

$$\begin{aligned} r_1(a_{ij}; a_{kl}) &= \sqrt{(k-i)^2 + (l-j)^2}, \\ r_2(a_{ij}; a_{kl}) &= |k-i| + |l-j|, \\ r_3(a_{ij}; a_{kl}) &= \max\{|k-i|; |l-j|\}. \end{aligned}$$

Исходя из интерпретации изображения как подмножества $h(A) = \bar{A} \subseteq R^2$ и используя соответствующие сжатия плоскости R^2 , можно считать, что $h(A) = \bar{A} \subseteq [0; 1] \times [0; 1] \subseteq R^2$. И, следовательно, можно ввести приведенные расстояния на множестве пар пикселей:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1(a_{ij}; a_{kl}) &= \sqrt{\left(\frac{k-i}{m}\right)^2 + \left(\frac{l-j}{n}\right)^2}, \\ \bar{r}_2(a_{ij}; a_{kl}) &= \left|\frac{k-i}{m}\right| + \left|\frac{l-j}{n}\right|, \\ \bar{r}_3(a_{ij}; a_{kl}) &= \max\left\{\left|\frac{k-i}{m}\right|; \left|\frac{l-j}{n}\right|\right\}. \end{aligned}$$

Классическим расстоянием между компактными подмножествами метрического пространства является расстояние Хаусдорфа [1,2,5]. Используя соответствующие экранные расстояния $r_p(a_{ij}; a_{kl}), p = 1, 2, 3$, стандартным образом определим аналоги расстояния Хаусдорфа на условном экране. Пусть заданы два черно-белых изображения $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, тогда аналогом расстояния точки до замкнутого множества является выражение:

$$r_p(a_{ij}; B) = \min\{r_p(a_{ij}; b_{kl}) : b_{kl} = 1\}, p = 1, 2, 3.$$

Соответственно в качестве аналога расстояния Хаусдорфа между компактными множествами естественно рассматривать экранные расстояния между изображениями A и B :

$$h_p(A; B) = \max\{\max\{r_p(a_{ij}; B) : a_{ij} = 1\}; \max\{r_p(A; b_{kl}) : b_{kl} = 1\}\}, p = 1, 2, 3.$$

Соответствующие приведенные расстояния имеют вид:

$$\overline{h}_p(A; B) = \max \{ \max \{ \overline{r}_p(a_{ij}; B) : a_{ij} = 1 \}; \max \{ \overline{r}_p(A; b_{kl}) : b_{kl} = 1 \} \}, p = 1, 2, 3.$$

Рассмотренные выше расстояния, \overline{h}_p и $h_p, p = 1, 2, 3$, вообще говоря, не характеризуют различие или сходство форм изображений A и B , так как зависят от их взаимного расположения на условном экране. Обозначим через T некоторый класс преобразований изображений, сохраняющих их форму и, естественно, не выводящих изображения за пределы условного экрана. Как представлется, величины

$$H_p(A; B) = \min \{ h_p(\tau(A); B) : \tau \in T \},$$

$$\overline{H}_p(A; B) = \min \{ \overline{h}_p(\tau(A); B) : \tau \in T \}$$

характеризуют различия или близость форм изображений A и B . В работах [3,4] было введено понятие характеристического набора коэффициентов черно-белого цифрового изображения. Для любого такого изображения A строится набор неотрицательных целочисленных коэффициентов $K(A) = \{k_t(A) : t = 0, 1, 2, \dots, 15\}$. Такой набор шестнадцатикомпонентных векторов позволил [4] решать задачу различения больших совокупностей алфавитно-цифровых символов.

Естественным образом можно определить расстояния на множестве таких наборов для изображений A и B :

$$\rho_1(A, B) = \sqrt{\sum_{t=0}^{15} (k_t(A) - k_t(B))^2};$$

$$\rho_2(A, B) = \sum_{t=0}^{15} |k_t(A) - k_t(B)|;$$

$$\rho_3(A, B) = \max \{|k_t(A) - k_t(B)| : t = 0, 1, 2, \dots, 15\}.$$

Кроме этого, так как имеет место соотношение

$$\sum_{t=0}^{15} k_t(A) = (m - 1)(n - 1)$$

для любого изображения на условном экране размера $m \times n$, то соответственно возможно введение приведенных расстояний:

$$\overline{\rho}_p(A, B) = \frac{1}{(m - 1)(n - 1)} \rho_p(A, B), p = 1, 2, 3.$$

Введенные таким образом функции ρ_p и $\overline{\rho}_p$, хотя в значительной степени и характеризуют различия изображений, но в строгом смысле не являются расстояниями между изображениями, так как существуют несложные примеры двух различных изображений A и B , для которых характеристические наборы $K(A)$ и $K(B)$ совпадают. Представляет интерес приложение двух выше изложенных подходов к различению черно-белых текстур. Но если меры близости ρ_p и $\overline{\rho}_p$ легко вычислить для любой пары изображений, то вычисление расстояний на основе расстояния Хаусдорфа представляет трудности для текстур, так как множество преобразований T может оказаться пустым, в силу того, что любой сдвиг текстуры будет выводить текстуру за пределы условного экрана. Поэтому предлагается сравнивать текстуры, разбивая их на некие блоки. Для изображения $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, и где m и n - четные, определим блоки

$$W_1 = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}; j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2},$$

$$W_2 = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}; j = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n,$$

$$W_3 = (a_{ij}), i = \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2},$$

$$W_4 = (a_{ij}), i = \frac{m}{2} + 1, \frac{m}{2} + 2, \dots, m; j = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n.$$

Рассмотрим теперь в качестве T множество целочисленных сдвигов изображений $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in T$, где $\tau_1, \tau_2 \in Z$. Дополнительно введем еще изображения

$$\tau W_q = \{a_{i+\tau_1 j+\tau_2} = a_{ij}\}, q = 1, 2, 3, 4,$$

и положим вне этого блока значения пикселей равны нулю. Безусловным требованием является то, что изображения τW_q не выводятся за пределы условного экрана. Определим еще изображение B_q^r , совпадающее с B_q на всех пикселях из блока τW_q и равное нулю вне этого блока. Тогда определим расстояния

$$h_p(\tau W_q; B_q^r), q = 1, 2, 3, 4; p = 1, 2, 3.$$

$$\overline{h}_p(\tau W_q; B_q^r), q = 1, 2, 3, 4; p = 1, 2, 3.$$

Вычислим соответственно величины

$$M_p^q(A, B) = \min \{h_p(\tau W_q; B_q^r) : \tau \in T\},$$

$$\overline{M}_p^q(A, B) = \min \{\overline{h}_p(\tau W_q; B_q^r) : \tau \in T\}, q = 1, 2, 3, 4; p = 1, 2, 3.$$

Определим теперь для текстур A и B расстояния:

$$R_p(A, B) = \max \{M_p^q(A, B) : q = 1, 2, 3, 4\},$$

$$\overline{R}_p(A, B) = \max \{\overline{M}_p^q(A, B) : q = 1, 2, 3, 4\},$$

для $p = 1, 2, 3$.

Ниже приведены некоторые характерные результаты численных экспериментов для изображений приведенных на рис. 1 и рис.2, представленных на экране 50×50 пикселей.

Рисунок 1, изображения букв (1,2):

$$\rho_1(A, B) = 239.4, \overline{\rho}_1(A, B) = 0.0997$$

$$\rho_2(A, B) = 432, \overline{\rho}_2(A, B) = 0.18$$

$$\rho_3(A, B) = 183, \overline{\rho}_3(A, B) = 0.076$$

$$H_1(A, B) = 22.2036, \overline{H}_1(A, B) = 0.5551$$

$$H_2(A, B) = 31, \overline{H}_2(A, B) = 0.775$$

$$H_3(A, B) = 24, \overline{H}_3(A, B) = 0.6$$

Рисунок 1, изображения букв (1,3):

$$\rho_1(A, A') = 80.2122, \overline{\rho}_1(A, B) = 0.027$$

$$\rho_2(A, B) = 138, \overline{\rho}_2(A, B) = 0.0574$$

$$\rho_3(A, B) = 67, \overline{\rho}_3(A, B) = 0.0334$$

$$H_1(A, B) = 16.4012, \overline{H}_1(A, B) = 0.41003$$

$$H_2(A, B) = 22, \overline{H}_2(A, B) = 0.055$$

$$H_3(A, B) = 24, \overline{H}_3(A, B) = 0.6$$

Рисунок 2, текстуры (1,3):

$$\rho_1(1, 3) = 1177.59585, \overline{\rho}_1(1, 3) = 0.49046$$

$$\rho_2(1, 3) = 2060, \overline{\rho}_2(1, 3) = 0.85797$$

$$\rho_3(1, 3) = 1030, \overline{\rho}_3(1, 3) = 0.42898$$

$$R_1(1, 3) = 2.82842, \overline{R}_1(1, 3) = 0.58137$$

$$R_2(1, 3) = 3, \overline{R}_2(1, 3) = 0.82$$

$$R_3(1, 3) = 2, \overline{R}_3(1, 3) = 0.48$$

Рисунок 2, текстуры (1,2):

$$\rho_1(1, 2) = 1516.87375, \overline{\rho}_1(1, 2) = 0.63176$$

$$\rho_2(1, 2) = 2418, \overline{\rho}_2(1, 2) = 1.00708$$

$$\rho_3(1, 2) = 1093, \overline{\rho}_3(1, 2) = 0.45522$$

$$R_1(1, 2) = 7.81024, \overline{R}_1(1, 2) = 0.63655$$

$$R_2(1, 2) = 9, \overline{R}_2(1, 2) = 0.9$$

$$R_3(1, 2) = 6, \overline{R}_3(1, 2) = 0.48$$



Рис. 1. Изображения букв



Рис. 2. Текстуры

Полученные результаты, как представляется, показывают хорошее согласование введенных в настоящей работе мер близости ρ_p , $p = 1, 2, 3$, и расстояний, построенных на основе классической метрики Хаусдорфа. Кроме этого трудоемкость вычисления этих мер близости существенно меньше трудоемкости вычисления для метрик классического типа.

В заключение хотелось бы выразить благодарность профессору В.В. Майорову, беседа с которым инициировала работу над этой заметкой.

Список литературы

1. Куратовский, К. Топология /К. Куратовский. - Т.1. - М.:Мир, 1966; Т.2. - М.:Мир, 1982.
2. Келли, Дж. Общая топология /Дж. Келли М.:Наука, 1968.
3. Парфенов П.Г. О некоторых свойствах характеристического набора коэффициентов черно-белого цифрового изображения /П.Г. Парфенов // Моделирование и анализ информационных систем. - Ярославль, 2005. - Т.12, №1. - С.52-54.
4. Парфенов, П.Г. Об одном подходе к различению элементов из больших совокупностей традиционных систем символов /П.Г. Парфенов, С.Л. Назарычев // Моделирование и анализ информационных систем. - Ярославль, 2006, - Т.13, №1. - С.46-48.
5. Кроновер, Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах /Р.М. Кроновер. - М: Техносфера, 2006.

Distances and other measures of nearness in a set of pairs of black-and-white digital images

Parfenov P.G., Kapliy I.A., Kulikov O.S.

In the paper is formulated series of functions in a set of pairs of black-and-white digital images. Series of functions are either distance or distance analogue. This functions allows, on the one hand, to solve a problem of discerning images, and on the other hand, to measure similarity. Applications of this approach to textures are examined.