Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **3** (2012) 136–141

УДК 517.9

Устойчивость простейших периодических решений в уравнении Стюарта–Ландау с большим запаздыванием[1]

Кащенко А. А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: sa-ahr@yandex.ru

получена 15 мая 2012

Ключевые слова: уравнение Стюарта–Ландау, малый параметр, большое запаздывание, устойчивость, периодическое решение

Исследуется устойчивость простейших периодических решений комплексного уравнения с большим запаздыванием с кубической нелинейностью в зависимости от значений параметров. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости периодических решений. Описана геометрия областей устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров, задающих главную часть решения.

Введение

В различных прикладных задачах [1, 2] возникает уравнение Стюарта—Ландау:

$$\dot{u} = (a + d|u|^2)u + k(u(t-h) - u).$$

Здесь $u(t)$ — комплекснозначная функция, a, d, k — комплексные числа, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} d < 0$, h — положительное число. Также уравнение Стюарта—Ландау может являться квазинормальной формой [3] для уравнений с двумя запаздываниями. Случай большого значения параметра k изучен в [4, 5].

Исходное уравнение с помощью простых нормировок можно привести к виду

$$\dot{u} = (1 + (-1 + ic)|u|^2)u + \gamma e^{i\varphi}(u(t-T) - u).$$

Здесь все параметры действительные, причем γ и T — положительные, $\varphi \in [0, 2\pi)$. В данной работе будет рассматриваться случай, когда запаздывание достаточно велико. Пусть $\varepsilon = 1/T$, тогда величина ε положительна и достаточно мала: $0 < \varepsilon \ll 1$. Сделаем замену времени $t \to Tt$. Тогда уравнение примет вид

$$\varepsilon\dot{u} = (1 + (-1 + ic)|u|^2)u + \gamma e^{i\varphi}(u(t-1) - u). \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053.

Обратим внимание, что уравнение (1) является сингулярно возмущенным. Поэтому его динамика может быть достаточно сложной.

Поставим задачу изучить существование и устойчивость простейших периодических решений в фазовом пространстве $C_{[-1,0]}(\mathbb{C})$ [6]. Под простейшими периодическими решениями будем понимать решения уравнения (1) вида

$$u_{R,\Lambda} = R\exp(i\Lambda t), \tag{2}$$

где R, Λ — действительные константы, $R > 0$.

Существование решений

Для формулировки и доказательства результатов о существовании решений (1) вида (2) введем следующие обозначения.

Пусть $L(c,\gamma,\varphi)$ — множество точек (ω,ρ^2), принадлежащих эллипсу

$$(\rho^2 - 1 + \gamma\cos\varphi)^2 + (\omega - c\rho^2 + \gamma\sin\varphi)^2 = \gamma^2$$

и лежащих в полуплоскости $\rho^2 > 0$. На рисунках 1a), 1b) представлены два типичных вида множества $L(c,\gamma,\varphi)$.

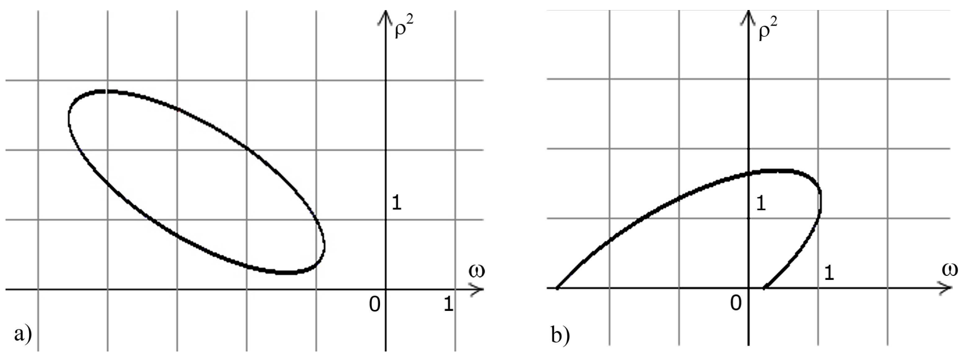

Рис. 1. Примеры множеств $L(c,\gamma,\varphi)$. Значения параметров: a) $c = -1, \gamma = 1.3, \varphi = 2$; b) $c = 1, \gamma = 1.5, \varphi = 1$.

Через $\theta = \theta(\omega,\varepsilon)$ обозначим такое значение в полуинтервале $[0, 2\pi)$, для которого величина $\omega/\varepsilon + \theta$ является целым кратным 2π, а через $v(\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ — некоторые ограниченные при $\varepsilon \to 0$ функции. Через Ω обозначим действительный корень уравнения

$$\frac{i\omega - 1 + (1 - ic)\rho^2 + \gamma e^{i\varphi}}{\gamma e^{i\varphi}} = e^{-i\Omega},$$

принадлежащий полуинтервалу $[0, 2\pi)$.

Теорема 1. *Для каждой точки (ω_0, ρ_0^2), принадлежащей $L(c,\gamma,\varphi)$, кроме, возможно, двух, и для любого целого числа n уравнение (1) имеет решение в виде цикла (2), где $R = R_n(\varepsilon)$ и $\Lambda = \Lambda_n(\varepsilon)$ таковы, что $R_n(\varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon v(\varepsilon)$, $\Lambda_n(\varepsilon) = \omega_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.*

Для доказательства теоремы 1 осуществим подстановку решения $u = R_n \exp(i\Lambda_n t)$ в уравнение (1). Пользуясь условием, что точка (ω_0, ρ_0^2) принадлежит эллипсу $L(c,\gamma,\varphi)$, получим следующее уравнение на $v(\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$:

$$i(\theta+\Omega+2\pi n+\varepsilon d)+(1-ic)(2\rho_0 v+\varepsilon v^2)-\gamma e^{i\varphi}e^{-i\Omega}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-id)^k\varepsilon^{k-1}}{k!}=0.$$

Для того, чтобы оно было однозначно разрешимо, необходимо и достаточно выполнение условия $\det A \neq 0$, где

$$A=\begin{pmatrix} -2\rho_0 & \gamma\sin(\varphi-\Omega) \\ 2c\rho_0 & -\gamma\cos(\varphi-\Omega) \end{pmatrix}.$$

При любых значениях параметров c,γ,φ на эллипсе $L(c,\gamma,\varphi)$ есть не более двух точек, в которых $\det A = 0$. Рассмотрим эти точки, введя дополнительное предположение о том, что

$$2\rho_0+\gamma\cos(\varphi-\Omega)\neq 0. \tag{3}$$

Это условие гарантирует нам, что у матрицы A есть ровно одно нулевое собственное значение. Тогда для данных точек имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для точки* (ω_0,ρ_0^2) *из* $L(c,\gamma,\varphi)$ *выполнены условия* $\det A = 0$ *и* (3) *и пусть* $\sin(\varphi-\Omega)>0$ (<0). *Тогда существует такое целое* n_0, *что при всех* $n<n_0$ $(n>n_0)$ *уравнение* (1) *имеет два решения в виде цикла* (2), *где вещественные величины* $R=R_n^{\pm}(\varepsilon)$ *и* $\Lambda=\Lambda_n^{\pm}(\varepsilon)$ *таковы, что* $R_n^{\pm}(\varepsilon)=\rho_0+\varepsilon^{\frac12}v_{1/2}^{\pm}+O(\varepsilon)$, $\Lambda_n^{\pm}(\varepsilon)=\omega_0/\varepsilon+\theta+\Omega+2\pi n+\varepsilon^{\frac12}d_{1/2}^{\pm}+O(\varepsilon)$.

Здесь пары $(v_{1/2}^+, d_{1/2}^+)$ и $(v_{1/2}^-, d_{1/2}^-)$ однозначно определяются по значениям параметров c, γ, φ, ρ, ω, n.

Возможен случай, когда $\det A = 0$ и $2\rho_0+\gamma\cos(\varphi-\Omega)=0$. В этом случае наблюдается вырождение более высокого порядка.

Исследование устойчивости периодических решений

Перейдем к исследованию устойчивости простейших периодических решений. Ограничимся основным случаем, т.е. случаем $\det A\neq 0$. Тогда характеристический квазиполином уравнения (1) линеаризованного на решении (2) будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\lambda^2+2\varepsilon\lambda((\rho+\varepsilon v)^2-\gamma\cos(\varphi-\Omega-\varepsilon d)(e^{-\lambda}-1))+\gamma^2(e^{-\lambda}-1)^2-\\ -2(\rho+\varepsilon v)^2(e^{-\lambda}-1)\gamma(\cos(\varphi-\Omega-\varepsilon d)-c\sin(\varphi-\Omega-\varepsilon d))=0.\end{gathered}$$

Ограничимся здесь лишь формулировкой итоговых утверждений об устойчивости простейших периодических решений уравнения (1). Для этого введем несколько соотношений. Первое из них имеет вид системы неравенств:

$$\begin{cases} \rho^2-\dfrac{\gamma(1+c^2)\sin^2(\varphi-\Omega)}{\cos(\varphi-\Omega)-c\sin(\varphi-\Omega)}>0, \\ \cos(\varphi-\Omega)-c\sin(\varphi-\Omega)>0, \\ \rho^2+2\gamma\cos(\varphi-\Omega)>0. \end{cases} \tag{4}$$

Второе соотношение отвечает за корни характеристического квазиполинома, которые на некоторой подпоследовательности $\varepsilon_m \to 0$ ведут себя следующим образом: их действительная часть стремится к некоторой константе, а мнимая часть стремится к бесконечности при $\varepsilon_m \to 0$. При этом мнимая часть корня $\lambda(\varepsilon_m)$ стремится к бесконечности так, что $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m \operatorname{Im}\lambda(\varepsilon_m) = \delta$, где δ — ненулевая константа. После некоторых преобразований удается свести характеристическое уравнение в этом случае к следующему уравнению относительно вспомогательной переменной z, изменяющейся на отрезке $[-1, 1]$:

$$\begin{gathered}\gamma^3 z^3 - \gamma^2[\gamma + 4\rho^2\cos(\varphi-\Omega) + 2\gamma\cos^2(\varphi-\Omega) - 2c\rho^2\sin(\varphi-\Omega)]z^2 + \gamma[-\gamma^2 + 2\rho^4 + \\ + 4\gamma\rho^2\cos(\varphi-\Omega) + 4\gamma^2\cos^2(\varphi-\Omega) + 3\rho^4\cos^2(\varphi-\Omega) - 4c\rho^4\cos(\varphi-\Omega)\sin(\varphi-\Omega) + \\ + 4\gamma\rho^2\cos^3(\varphi-\Omega) - 4c\gamma\rho^2\cos^2(\varphi-\Omega)\sin(\varphi-\Omega) + c^2\rho^4\sin^2(\varphi-\Omega)]z + \gamma^3 - 2\rho^6\cos(\varphi-\Omega) - \\ - 2\gamma^3\cos^2(\varphi-\Omega) - 5\gamma\rho^4\cos^2(\varphi-\Omega) - 4\gamma^2\rho^2\cos^3(\varphi-\Omega) - 2c\gamma^2\rho^2\sin(\varphi-\Omega) + \\ + 2c\rho^6\sin(\varphi-\Omega) + 4c\gamma\rho^4\cos(\varphi-\Omega)\sin(\varphi-\Omega) + 4c\gamma^2\rho^2\cos^2(\varphi-\Omega)\sin(\varphi-\Omega) + \\ + c^2\gamma\rho^4\sin^2(\varphi-\Omega) = 0. \quad (5)\end{gathered}$$

Верны следующие результаты об устойчивости простейших периодических решений.

Теорема 3. *Пусть хотя бы одно из неравенств* (4) *имеет обратный знак. Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$, *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение* (2) *уравнения* (1) *неустойчиво.*

Теорема 4. *Пусть выполнена система неравенств* (4), *а уравнение* (5) *не имеет корней ни при каком значении* z *из* $[-1, 1]$. *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *решение* (2) *уравнения* (1) *устойчиво.*

Отметим, что при $c = 0$ уравнение (5) не имеет корней на отрезке $[-1, 1]$ в случае выполнения системы неравенств (4). Поэтому верна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $c = 0$. *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *необходимым и достаточным условием устойчивости решения* (2) *уравнения* (1) *является выполнение системы неравенств* (4).

Геометрия областей устойчивости на эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$

Удалось доказать, что при любых значениях параметров c, γ, φ на эллипсе $L(c, \gamma, \varphi)$ обязательно есть хотя бы одна точка с устойчивыми решениями и хотя бы одна точка с неустойчивыми решениями.

Для $c = 0$ система (4) задает односвязную область на эллипсе. Поэтому областей неустойчивости может быть либо 1, либо 2 (см. рис. 2). Ниже на рисунках сплошной линией показаны области устойчивости, а пунктиром области неустойчивости.

Для $c \neq 0$ доказано, что система (4) задает либо одну, либо две односвязные области устойчивости. Про уравнение (5) не удается доказать, что оно не может иметь корней на отрезке $[-1, 1]$ при выполнении системы неравенств (4). В то же время, численный анализ не выявил корней у данного уравнения на отрезке $[-1, 1]$ в случае выполнения системы (4). Поэтому выдвинута гипотеза, что областей устойчивости

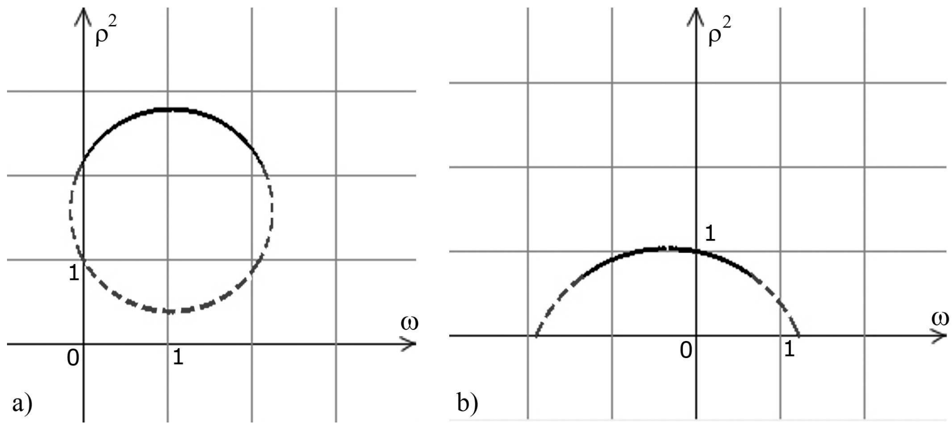

Рис. 2. Области устойчивости и неустойчивости при $c = 0$. Значения параметров: a) $c = 0, \gamma = 1.2, \varphi = 4.2$; b) $c = 0, \gamma = 1.7, \varphi = 0.2$.

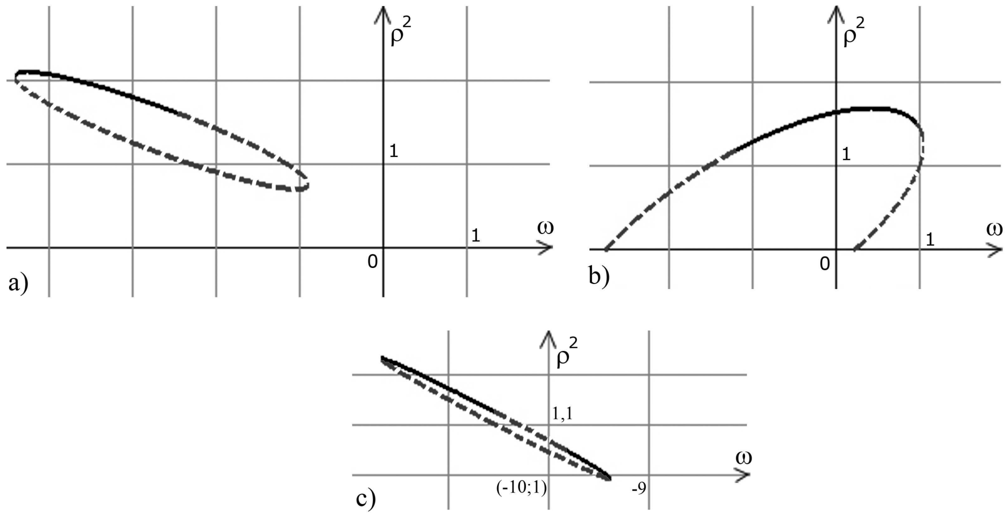

Рис. 3. Области устойчивости и неустойчивости при $c \neq 0$. Значения параметров: a) $c = -2.3, \gamma = 0.7, \varphi = 4.1$; b) $c = 1, \gamma = 1.5, \varphi = 1$; c) $c = -9.5, \gamma = 0.12, \varphi = 3.5$.

не более двух. На рисунках 3a) и 3b) изображены эллипсы с односвязной областью устойчивости, а на рисунке 3c) областей устойчивости две.

Выводы.

1. Доказано, что существует однопараметрическое семейство на плоскости (ω, ρ^2) в виде эллипса, каждой точке которого соответствует счетное число простейших периодических решений. Найдена асимптотика этих решений при малых значениях параметра ε.

2. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости простейших периодических решений. В случае $c = 0$ найдены необходимые и достаточные условия устойчивости.

3. Доказано, что на любом эллипсе обязательно есть хотя бы одна точка с устой-

чивыми решениями, и хотя бы одна с неустойчивыми.

4. В случае $c = 0$ аналитически показано, что область устойчивости односвязна.

5. В случае $c \neq 0$ выдвинута гипотеза, что число областей устойчивости не превосходит двух. Приведены примеры с одной и с двумя областями устойчивости.

Список литературы

1. Johnston G.L., Ramana Reddy D.V., Sen A. Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation // Physica. 1999. D 129. P. 15—34.

2. Johnston G.L., Ramana Reddy D.V., Sen A. Dynamics of a limit cycle oscillator under time delayed linear and nonlinear feedbacks // Physica. 2000. D 144. P. 335—357.

3. Кащенко И.С. Нормализация в системе с двумя близкими большими запаздываниями // Нелинейная Динамика. 2010. Т. 6. №1. С. 169—180.

4. Кащенко И.С. Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления // ДАН. 2011. Т. 437. №6. С. 743—747.

5. Кащенко И.С. Асимптотическое исследование корпоративной динамики систем уравнений, связанных через запаздывающее управление // ДАН. 2012. Т. 443. №1. С. 9—13.

6. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. Springer, 1996.

Stability of the Simplest Periodic Solutions in the Stuart–Landau Equation with Large Delay

Kashchenko A. A.

Keywords: Stuart—Landau equation, small parameter, large delay, stability, periodic solution

We study the local dynamics of the Stuart–Landau equation with large delay in the neibourhood of periodic solutions. We find sufficient conditions of instability of periodic solutions and sufficient conditions of their stability.

Сведения об авторе:
Кащенко Александра Андреевна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
студентка 5 курса математического факультета