

УДК 517.9

## Устойчивость непрерывных волн для модели FDMЛ лазера

Кащенко А. А.<sup>1</sup>

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

*e-mail: sa-ahr@yandex.ru*

*получена 10 марта 2014*

**Ключевые слова:** FDMЛ лазер, малый параметр, большое запаздывание, устойчивость, непрерывная волна

В работе решается задача существования и устойчивости непрерывных волн  $R \exp(i\Delta t)$  для модели лазера с „синхронизацией мод в частотном диапазоне“. Эта модель представляет собой систему двух дифференциальных уравнений с запаздыванием. Время запаздывания предполагается достаточно большим. Для данной модели найдено условие существования непрерывных волн: параметры, задающие „главную часть“ решения, должны лежать на некоторых кривых  $\Gamma(\kappa, g_0)$ . Найдены достаточные условия устойчивости непрерывных волн при всех достаточно больших значениях запаздывания. Изучено расположение областей устойчивости на кривых  $\Gamma(\kappa, g_0)$ . В случае нулевого фактора уширения спектральной линии лазера  $\alpha$  для всех значений параметров коэффициента ослабления, описывающего линейные нерезонансные потери за обход резонатора,  $\kappa$  и параметра линейного ненасыщенного поглощения  $g_0$  аналитически найдены количество областей устойчивости и их границы на кривых  $\Gamma(\kappa, g_0)$ . Проведено сравнение результатов о расположении областей устойчивости на кривых  $\Gamma(\kappa, g_0)$  для нулевого и ненулевого значений параметра  $\alpha$ .

### 1. Постановка задачи

В работе [1] А.Г. Владимировым и соавторами для описания лазера с „синхронизацией мод в частотном диапазоне“ (Fourier Domain Mode Locking laser [2]) предложена система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{A} + A - i\Delta(t)A &= \sqrt{\kappa}e^{(1-i\alpha)G(t-T)/2}A(t-T), \\ \dot{G} &= \gamma(g_0 - G - (e^G - 1)|A|^2). \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Здесь  $A(t)$  — амплитуда электрического поля на входе в полупроводниковый оптический усилитель, а концентрация носителей заряда моделируется с помощью насыщающегося усиления  $G(t)$ . Отстройку центральной частоты спектрального фильтра от центра линии усиления активной среды определяет  $\Delta(t)$ ,  $\kappa$  — коэффициент ослабления, описывающий линейные нерезонансные потери за обход резонатора,  $\alpha$  — фактор уширения спектральной линии лазера,  $g_0$  — параметр линейного ненасыщенного поглощения,  $\gamma$  — безразмерная скорость релаксации усиления в полупроводниковом оптическом усилителе. Безразмерное время запаздывания предполагается достаточно большим  $T \gg 1$ . Более общие лазерные модели с захватом мод описаны в работах [3–5].

В настоящей работе рассматривается предложенная А. Г. Владимировым более простая модель лазера с „синхронизацией мод в частотном диапазоне“ в случае не зависящей от времени отстройки центральной частоты спектрального фильтра. Данная модель получена из (1) заменой  $e^G - 1$  на  $G$ :

$$\begin{aligned}\dot{A} + A - i\Delta A &= \sqrt{\kappa} e^{(1-i\alpha)G(t-T)/2} A(t-T), \\ \dot{G} &= \gamma(g_0 - G - G|A|^2).\end{aligned}$$

Для данной модели получен ряд новых результатов о существовании и устойчивости псевдоконтинуальных семейств непрерывных волн. Эти результаты были анонсированы в работе [6].

Здесь все параметры  $\Delta$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $T$ ,  $\gamma$ ,  $g_0$  принимают действительные значения, причем параметры  $\gamma$  и  $g_0$  положительные,  $0 < \kappa < 1$ , а время запаздывания является достаточно большим  $T \gg 1$ .

Обозначим  $\varepsilon = 1/T$ , тогда  $0 < \varepsilon \ll 1$ , и произведем в обоих уравнениях перенормировку времени  $t \rightarrow Tt$ . После замены  $A(t) = e^{i\Delta t/\varepsilon} a(t)$ , система примет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{a} + a &= \sqrt{\kappa} e^{(1-i\alpha)G(t-1)/2} a(t-1) e^{-i\Delta/\varepsilon}, \\ \varepsilon \dot{G} &= \gamma(g_0 - G - G|a|^2).\end{aligned}\tag{2}$$

Фазовым пространством данной системы является пространство функций  $C_{[-1,0]}(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$ . Задача состоит в поиске решений типа непрерывной волны и исследования их на устойчивость.

## 2. Существование решения

Будем искать решение в виде непрерывной волны:

$$a = R e^{i\Phi t}, \quad G = G_0,\tag{3}$$

где  $R$ ,  $\Phi$  и  $G_0$  действительные, не зависят от времени,  $R > 0$  и  $G_0 > 0$ . Следуя [7], величину  $R$  будем искать в виде  $R = \rho + \varepsilon v$ , а  $\Phi$  в виде  $\Phi = \delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$ . Здесь  $\delta$  — константа,  $\Omega$  — постоянная из полуинтервала  $[0, 2\pi)$ ,  $\rho$  — положительная постоянная,  $n$  — целое число,  $v = v(\varepsilon)$  и  $d = d(\varepsilon)$  некоторые ограниченные при  $\varepsilon \rightarrow 0$  функции. Величина  $\theta = \theta(\varepsilon)$  — функция со значениями из полуинтервала  $[0, 2\pi)$ , такая, что  $(\Delta + \delta)/\varepsilon + \theta$  нацело делится на  $2\pi$ . Подставляя (3) в систему (2),

получаем систему уравнений для определения  $R$ ,  $\Phi$  и  $G_0$

$$\begin{aligned} i(\delta + \varepsilon(\theta + \Omega + 2\pi n) + \varepsilon^2 d) + 1 &= \sqrt{\kappa} \exp\left(\frac{g_0(1 - i\alpha)}{2(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)} - i(\Omega + \varepsilon d)\right), \\ G_0 &= g_0(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку  $\varepsilon$  — малый параметр, то должно выполняться равенство

$$i\delta + 1 = \sqrt{\kappa} \exp(g_0/2(1 - i\alpha)(1 + \rho^2)^{-1} - i\Omega). \quad (5)$$

Пусть

$$\delta^2 = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) - 1. \quad (6)$$

Из (6) следует, что для каждой пары  $\delta$ ,  $\rho^2$  существует единственное значение  $\Omega$  из полуинтервала  $[0, 2\pi)$  такое, что выполняется равенство (5). Очевидно, что для существования решений необходимо выполнение неравенства

$$\kappa e^{g_0} - 1 > 0. \quad (7)$$

Обозначим  $\rho_{max}^2 = g_0 \ln^{-1}(\kappa^{-1}) - 1$ . Если условие (7) выполнено, то для каждого  $\rho^2 \in [0, \rho_{max}^2]$  существует действительное  $\delta$  такое, что (6) выполняется. Будем называть множество точек  $(\delta, \rho^2)$ , для которых выполнено равенство (6), множеством  $\Gamma(\kappa, g_0)$ .

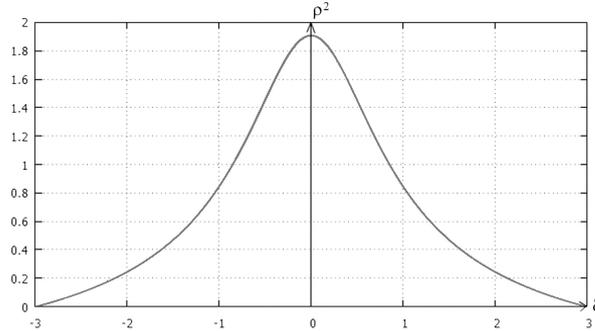


Рис. 1. Вид кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$

Временно будем считать  $\theta$  фиксированным значением. Пусть выполняются условия (5)–(7). Тогда получаем следующую систему для определения нулевого приближения  $(v_0, d_0)$  функций  $v(\varepsilon)$  и  $d(\varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= -\delta d_0 + g_0 \rho(1 + \alpha\delta)(1 + \rho^2)^{-2} v_0, \\ \Omega + 2\pi n + \theta &= -d_0 + g_0 \rho(\alpha - \delta)(1 + \rho^2)^{-2} v_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку определитель системы (8) отличен от нуля, то нулевое приближение функций  $v(\varepsilon)$  и  $d(\varepsilon)$  найдется единственным образом и будут выполняться условия теоремы о неявной функции. Следовательно, при любом фиксированном  $\theta$  из полуинтервала  $[0, 2\pi)$  существуют такие ограниченные при  $\varepsilon \rightarrow 0$  функции  $v(\varepsilon)$  и  $d(\varepsilon)$ , что равенство (4) будет верным. После этого остается лишь подставить вместо фиксированного  $\theta$  значение функции  $\theta(\varepsilon)$ . Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть выполнено неравенство (7). Тогда для каждой точки  $(\delta_0, \rho_0^2)$  множества  $\Gamma(\kappa, g_0)$  и для каждого натурального  $n$  при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  существует решение (3) уравнения (2), где  $R = \rho_0 + \varepsilon v$ ,  $\Phi = \delta_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$ ,  $G_0 = g_0(1 + (\rho_0 + \varepsilon v)^2)^{-1}$ .

### 3. Устойчивость непрерывных волн

#### 3.1. Постановка задачи об устойчивости

Используя теорему Тихонова [8], представим решение второго уравнения системы (2) как функцию от  $|a|^2$ . Подставляя его в первое уравнение системы (2), получим следующее уравнение на функцию  $a$ :

$$\varepsilon \dot{a} + a = \sqrt{\kappa} \exp\left(\frac{g_0(1 - i\alpha)}{2(1 + |a(t-1)|^2)}\right) a(t-1)e^{-i\Delta/\varepsilon}. \quad (9)$$

У этого уравнения есть решения

$$a = (\rho + \varepsilon v) \exp[i(\delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d)t]. \quad (10)$$

В данной работе будем искать такие условия устойчивости, что решения (10) уравнения (9) будут устойчивыми в фазовом пространстве  $C[-1, 0]$  при всех достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon > 0$ .

#### 3.2. Построение квазиполинома

Линеаризуем уравнение (9) на решении (10). Для этого рассмотрим возмущение этого решения  $a = (\rho + \varepsilon v) \exp[i(\delta/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d)t](1 + z)$ , где  $z = z_1 + iz_2$ ,  $z_1$  и  $z_2$  действительные функции. Линеаризованная система будет иметь вид

$$\varepsilon \dot{z} = \sqrt{\kappa} \exp\left(\frac{g_0(1 - i\alpha)}{2(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)} - i(\Omega + \varepsilon d)\right) \left(z(t-1) - z - \frac{g_0(1 - i\alpha)(\rho + \varepsilon v)^2}{(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^2} z_1(t-1)\right).$$

Пользуясь первым уравнением системы (4), получаем, что

$$\begin{aligned} \sqrt{\kappa} \exp(W) \cos(\xi) &= 1, \\ -\sqrt{\kappa} \exp(W) \sin(\xi) &= \delta + \varepsilon(\Omega + \theta + 2\pi n) + \varepsilon^2 d, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $W = g_0/2(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^{-1}$ , а  $\xi = \Omega + \varepsilon d + g_0\alpha/2(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^{-1}$ . Используя равенства (11), получаем характеристический квазиполином

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \lambda^2 - 2\varepsilon \lambda \left( e^{-\lambda} - 1 - e^{-\lambda} \frac{g_0(\rho + \varepsilon v)^2}{2(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^2} (1 + \alpha(\delta + \varepsilon(\Omega + \theta + 2\pi n) + \varepsilon^2 d)) \right) + \\ + \kappa \exp\left(\frac{g_0}{1 + (\rho + \varepsilon v)^2}\right) (e^{-\lambda} - 1) \left( e^{-\lambda} - 1 - e^{-\lambda} \frac{g_0(\rho + \varepsilon v)^2}{(1 + (\rho + \varepsilon v)^2)^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

### 3.3. Анализ поведения корней характеристического квазиполинома

Для того, чтобы сделать вывод об устойчивости решения, необходимо изучить асимптотическое поведение корней (12). Так как мы линеаризовывали на периодическом решении, то у данного уравнения всегда есть нулевой корень кратности 1, который на устойчивость не влияет. Далее будем изучать остальные корни данного квазиполинома. Пусть  $\lambda_*$  — некоторый корень (12). Тогда потенциально возможны три варианта.

1.  $\varepsilon_m \lambda_* \rightarrow 0$  на некоторой последовательности  $\{\varepsilon_m\}$  такой, что  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ .
2.  $\varepsilon_m \lambda_* \rightarrow \text{const} \neq 0$  на некоторой последовательности  $\{\varepsilon_m\}$  такой, что  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ .
3.  $|\varepsilon_m \lambda_*| \rightarrow \infty$  на некоторой последовательности  $\{\varepsilon_m\}$  такой, что  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ .

Из уравнения (12) видно, что случай 3 невозможен. Далее последовательно рассмотрим первые два варианта.

**Случай 1.**  $\varepsilon_m \lambda_* \rightarrow 0$  при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ .

Потенциально возможны 3 варианта поведения  $\lambda_*$ .

- а) существует такая подпоследовательность  $\{\varepsilon_{m_l}\}$  последовательности  $\{\varepsilon_m\}$ , что  $\lambda_* \rightarrow 0$  при  $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$ .
- б) существует такая подпоследовательность  $\{\varepsilon_{m_l}\}$  последовательности  $\{\varepsilon_m\}$ , что  $\lambda_* \rightarrow \text{const} \neq 0$  при  $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$ .
- в) существует такая подпоследовательность  $\{\varepsilon_{m_l}\}$  последовательности  $\{\varepsilon_m\}$ , что  $|\lambda_*| \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon_{m_l} \lambda_* \rightarrow 0$  при  $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$ .

Рассмотрим случай 1.а). Поскольку мы линеаризовывали задачу на периодическом решении, то при любых значениях параметров есть корень  $\lambda = 0$  кратности один, который на устойчивость не влияет.

Посмотрим, к каким ненулевым константам может стремиться  $\lambda_*$  при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  (случай 1.б)). Предельное уравнение имеет вид

$$\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) (e^{-\lambda} - 1) (e^{-\lambda} - 1 - e^{-\lambda} g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2}) = 0. \quad (13)$$

Отсюда получаем, что либо  $\lambda_* = 2\pi k i + o(1)$ , либо  $e^{-\lambda_*} = (1 - g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2})^{-1} + o(1)$  при  $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$ .

Подставив в (12) представление  $\lambda_* = 2\pi k i + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — неизвестные комплексные величины, получим, что

$$\begin{aligned} \lambda_* &= 2\pi k i - (1 + \alpha \delta) 2\pi k i \kappa^{-1} \exp(-g_0(1 + \rho^2)^{-1}) \varepsilon + i \text{Im} \lambda_2 \varepsilon^2 + \\ &+ 2\pi^2 k^2 (g_0 \kappa^2 \rho^2)^{-1} \exp(-2g_0(1 + \rho^2)^{-1}) (2(1 + \rho^2)^2 \delta^2 (1 + \alpha^2) - g_0 \rho^2 (1 + \alpha \delta)^2) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (14)$$

Из формулы (14) получаем необходимое условие устойчивости

$$2(1 + \rho^2)^2 \delta^2 (1 + \alpha^2) - g_0 \rho^2 (1 + \alpha \delta)^2 < 0. \quad (15)$$

Пусть в (13) зануляется последний множитель. Тогда для того, чтобы корень  $\lambda_*$  находился в левой полуплоскости, необходимо выполнение условия

$$g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2} < 2. \quad (16)$$

Если  $0 < g_0 < 8$ , то условие (16) выполняется, а если  $g_0 > 8$ , то условие (16) эквивалентно совокупности

$$\begin{cases} \rho^2 < \frac{g_0 - 4 - \sqrt{g_0(g_0 - 8)}}{4}, \\ \rho^2 > \frac{g_0 - 4 + \sqrt{g_0(g_0 - 8)}}{4}. \end{cases} \quad (17)$$

Как видно из уравнения (12), случай 1.в) невозможен.

**Случай 2.**  $\varepsilon_m \lambda_* \rightarrow const \neq 0$  при  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ .

Потенциально возможны 2 варианта поведения  $\lambda_*$  :

а) существует такая подпоследовательность  $\{\varepsilon_{m_l}\}$  последовательности  $\{\varepsilon_m\}$ , что  $\operatorname{Re} \lambda_* \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$ ;

б) существует такая подпоследовательность  $\{\varepsilon_{m_l}\}$  последовательности  $\{\varepsilon_m\}$ , что  $\operatorname{Re} \lambda_* \rightarrow const \geq 0$ , а  $\operatorname{Im} \lambda_* \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0$ .

Пусть  $\operatorname{Re} \lambda_* \rightarrow +\infty$  и  $\lim_{\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0} \varepsilon_{m_l} \lambda_* = s$ . Тогда предельное уравнение примет вид

$$s^2 + 2s + \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) = 0. \quad (18)$$

Поскольку у уравнения (18) корни в левой полуплоскости, то случай 2.а) невозможен.

Рассмотрим случай 2.б). Введем обозначения. Пусть  $\lim_{\varepsilon_{m_l} \rightarrow 0} |e^{-\lambda_*}| = b$ , а на некоторой подпоследовательности  $\varepsilon_{m_{l_r}} \rightarrow 0$  имеем  $\lim_{\varepsilon_{m_{l_r}} \rightarrow 0} \varepsilon_{m_{l_r}} \operatorname{Im} \lambda_* = \beta$ . Очевидно, что  $\beta \neq 0$  и  $0 < b \leq 1$ . Будем обозначать через  $\varphi$  некоторое число из полуинтервала  $[0, 2\pi)$ . Тогда семейство предельных уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} & -\beta^2 - 2i\beta [be^{-i\varphi} (1 - 1/2(1 + \alpha\delta)g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}) - 1] + \\ & + \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) (be^{-i\varphi} - 1) (be^{-i\varphi} (1 - g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}) - 1) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $\varphi$  может принимать любое значение из  $[0, 2\pi)$ , поскольку  $\operatorname{Im} \lambda_* \rightarrow \infty$ . Для устойчивости решения при всех достаточно малых значениях  $\varepsilon > 0$  необходимо, чтобы при любом значении  $(b, \varphi)$  из  $(0, 1) \times [0, 2\pi)$  у уравнения (19) не было действительных корней  $\beta$ , отличных от нуля.

Выделим действительную и мнимую части в уравнении (19):

$$\begin{aligned} & \beta^2 + 2\beta b \sin \varphi (1 - 1/2g_0\rho^2(1 + \alpha\delta)(1 + \rho^2)^{-2}) = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) \times \\ & \times ((b \cos \varphi - 1) (-1 + b \cos \varphi (1 - g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2})) - b^2 \sin^2 \varphi (1 - g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2})), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \beta (1 - b \cos \varphi (1 - 1/2g_0\rho^2(1 + \alpha\delta)(1 + \rho^2)^{-2})) = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) b \sin \varphi \times \\ & \times (b \cos \varphi (1 - g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}) - 1 + 1/2g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}). \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим уравнение (21). Пусть коэффициент при  $\beta$  равен нулю, то есть выполнено равенство

$$b \cos \varphi = (1 - 1/2g_0\rho^2(1 + \alpha\delta)(1 + \rho^2)^{-2})^{-1}. \quad (22)$$

Для того, чтобы уравнение (21) имело решения, необходимо, чтобы правая часть уравнения (21) тоже равнялась нулю.

Пусть  $\sin \varphi \neq 0$ . Тогда выполняется система уравнений (22) и

$$b \cos \varphi (1 - g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2}) - 1 + 1/2 g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2} = 0. \quad (23)$$

Выражая  $b \cos \varphi$  из первого уравнения и обозначая  $1/2 g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2}$  за  $x$ , получаем уравнение

$$(1 - 2x) - (1 - x)(1 - x(1 + \alpha\delta)) = 0.$$

В силу положительности  $x$  получаем единственный возможный корень  $x = \alpha\delta/(1 + \alpha\delta)$ . Отсюда  $b \cos \varphi = 1/(1 - \alpha\delta)$ . Из условий  $x > 0$  и  $|b \cos \varphi| < 1$  получаем, что

$$\begin{cases} \alpha\delta < -1, \\ \alpha\delta > 2. \end{cases} \quad (24)$$

Тогда уравнение (20) принимает вид

$$-\beta^2 - 2\beta b \sin \varphi (1 - \alpha\delta) + \kappa \exp\left(\frac{g_0}{1 + \rho^2}\right) \left(\frac{\alpha^2 \delta^2}{\alpha^2 \delta^2 - 1} + b^2 \sin^2 \varphi \frac{\alpha\delta - 1}{\alpha\delta + 1}\right) = 0. \quad (25)$$

В силу условия (24) уравнение (25) имеет два действительных корня  $\beta$  разных знаков. Таким образом, при условиях (24) и

$$1/2 g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2} = \alpha\delta/(1 + \alpha\delta) \quad (26)$$

система (20), (21) имеет действительные ненулевые корни  $\beta$ .

Пусть теперь  $\sin \varphi = 0$ . Тогда  $\cos \varphi = \pm 1$ . Уравнение (20) принимает вид

$$\beta^2 = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) (\pm b - 1) (-1 \pm b(1 - g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2})).$$

Произведение первых трех сомножителей отрицательно (т.к.  $|b| < 1$ ), а за счет выбора знака перед  $b$  в четвертом сомножителе мы можем добиться того, что и он будет отрицательным. Поэтому единственным условием, которое надо проверить, является условие, что правая часть уравнения (22) по модулю меньше единицы. Это условие выполнено, если

$$\begin{cases} \alpha\delta < -1, \\ \alpha\delta > 4(1 + \rho^2)^2 (g_0 \rho^2)^{-1} - 1. \end{cases} \quad (27)$$

Следовательно, при условии (27) у системы (20), (21) есть ненулевые корни  $\beta$ .

Посмотрим, возможна ли ситуация, когда в точке  $(\delta, \rho^2)$  выполняются условия (26) и

$$2 < \alpha\delta < 4(1 + \rho^2)^2 (g_0 \rho^2)^{-1} - 1. \quad (28)$$

Из условия (28) следует, что

$$g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2} < 4/3.$$

Подставляя равенство (26) в последнее неравенство, получаем, что должно выполняться условие  $\alpha\delta < 2$ . Поэтому система (26), (28) несовместна.

Таким образом, необходимым условием устойчивости является

$$-1 < \alpha\delta < 4(1 + \rho^2)^2(g_0\rho^2)^{-1} - 1. \quad (29)$$

Пусть теперь коэффициент при  $\beta$  в уравнении (21) отличен от нуля. Тогда  $\beta$  находится единственным образом. Подставляя найденное из уравнения (21) значение  $\beta$  в уравнение (20), получаем уравнение четвертой степени относительно  $\cos \varphi$ . Подставим в это уравнение вместо  $(\delta, \rho^2)$  верхнюю точку кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ . Значение выражения в данной точке равно

$$g_0^{-1}(1 - b \cos \varphi)[g_0 + b \cos \varphi(-g_0 + g_0 \ln(\kappa^{-1}) - \ln^2(\kappa^{-1}))] \times \\ \times [4g_0^2 + b^2 g_0^2 \ln^2(\kappa^{-1}) - 2b^2 g_0 \ln^3(\kappa^{-1}) + b^2 \ln^4(\kappa^{-1}) + 4bg_0 \cos \varphi(-2g_0 + g_0 \ln(\kappa^{-1}) - \ln^2(\kappa^{-1})) - \\ - 4b^2 g_0 \cos^2 \varphi(-g_0 + g_0 \ln(\kappa^{-1}) - \ln^2(\kappa^{-1}))] / (2g_0 + b \cos \varphi(-2g_0 + g_0 \ln(\kappa^{-1}) - \ln^2(\kappa^{-1})))^2 \quad (30)$$

**Лемма 1.** Пусть в точке  $(0, g_0/\ln(\kappa^{-1}) - 1)$  кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  выполнено условие (16). Тогда выражение (30) не равно нулю при всех значениях пары  $(b, \cos \varphi)$  из  $(0, 1] \times [-1, 1]$  и  $\beta \neq 0$ .

**Доказательство.**

Первый множитель (30), очевидно, не равен нулю. Равенство нулю второго множителя соответствует тому, что корень  $\beta = 0$ , чего не может быть в силу определения  $\beta$ . Так как в точке  $(0, g_0/\ln(\kappa^{-1}) - 1)$  выполнено условие (16), то верно двойное неравенство

$$0 < g_0 \ln(\kappa^{-1}) - \ln^2(\kappa^{-1}) < 2g_0. \quad (31)$$

Поэтому третий множитель числителя и знаменатель (30) не равны 0. Рассмотрим четвертый множитель. Сделаем замену  $z = \cos \varphi$ , тогда получим квадратный трехчлен  $f(z)$ , где новая переменная  $z$  изменяется на отрезке  $[-1, 1]$ . Докажем, что у уравнения  $f(z) = 0$  нет корней на отрезке  $[-1, 1]$ . Если коэффициент перед  $z^2$  в квадратном трехчлене равен 0, то у уравнения  $f(z) = 0$  есть единственный корень  $z = \frac{1}{b} + \frac{b}{4}$ . Очевидно, он больше единицы. Если же коэффициент перед  $z^2$  не равен нулю, тогда

$$f(1) = (-2g_0 + b(2g_0 - g_0 \ln(\kappa^{-1}) + \ln^2(\kappa^{-1})))^2,$$

$$f(-1) = (2g_0 + b(2g_0 - g_0 \ln(\kappa^{-1}) + \ln^2(\kappa^{-1})))^2.$$

Учитывая условие (31), получаем, что  $f(1) > 0$  и  $f(-1) > 0$ . Таким образом, если коэффициент при  $z^2$  отрицательный, то, очевидно, корней у  $f(z)$  на отрезке  $[-1, 1]$  нет. Пусть коэффициент при  $z^2$  положительный. Абсцисса вершины параболы  $f(z)$  равна

$$b^{-1}(2g_0 - g_0 \ln(\kappa^{-1}) + \ln^2(\kappa^{-1}))(2g_0 - 2g_0 \ln(\kappa^{-1}) + 2 \ln^2(\kappa^{-1}))^{-1}.$$

В силу условия (31) и положительности коэффициента перед  $z^2$ , абсцисса вершины параболы находится правее единицы. Так как парабола расположена ветвями вверх,  $f(1) > 0$  и абсцисса вершины параболы правее единицы, то на всем отрезке  $[-1, 1]$  функция  $f(z)$  положительна. Лемма доказана.

Таким образом, выполнение условий (15), (16) и (29) в верхней точке кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  гарантирует, что у квазиполинома (12) не будет корней на мнимой оси и в

правой полуплоскости в этой точке кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ . Следовательно, для того, чтобы они оказались в правой полуплоскости или на мнимой оси в другой точке кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ , сначала они должны пересечь мнимую ось в некоторой точке кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ .

Поэтому рассмотрим систему уравнений (20) и (21) при  $b = 1$  (это соответствует тому, что корень квазиполинома  $\lambda$  из случая 2 будет в пределе находиться на мнимой оси). Подставив выражение для  $\beta$  из уравнения (21) в уравнение (20), домножив все уравнение на ненулевой знаменатель и заменив  $\cos \varphi$  на  $z$ , приходим к следующему уравнению четвертой степени относительно  $z$ :

$$w[4(1-y)(-2-w+(1+\alpha\delta)y)z^2 + (w(-2+y)^2 - 2(4-2(1+\alpha\delta)y + (1+\alpha\delta)y^2)) + (16-8(2+\alpha\delta)y + 2(2+3\alpha\delta+\alpha^2\delta^2)y^2 - (1+\alpha\delta)^2y^3 + w(-4+8y-3y^2))z + 4w(-1+y)^2z^3](1-z) = 0. \quad (32)$$

Здесь  $w = \kappa \exp(g_0(1+\rho^2)^{-1})$ , а  $y = g_0\rho^2(1+\rho^2)^{-2}$ . Первый множитель (32), очевидно, не равен нулю, равенство третьего множителя соответствует нулевому  $\beta$ , поэтому нас не интересует. Рассмотрим второй сомножитель. Обозначим его за  $q(z)$ . Будем далее считать, что все условия (15), (16) и (29) выполнены, поскольку в противном случае можно сделать вывод о неустойчивости решения. Найдем  $q(-1)$  и  $q(1)$ :

$$q(-1) = (-2+y)(-4+(1+\alpha\delta)y)^2,$$

$$q(1) = -y^2(2(1-w-\alpha^2\delta^2) + (1+\alpha\delta)^2y).$$

В силу условий (6), (15), (16) и (29) получаем, что  $q(-1) < 0$  и  $q(1) < 0$ . Следовательно, для того, чтобы полином  $q(z)$  не имел корней на отрезке  $[-1, 1]$ , необходимо и достаточно, чтобы у данной функции не было неотрицательного локального максимума на отрезке  $[-1, 1]$ . Выполнение этого условия — легко проверяемая задача для каждой конкретной точки кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ .

Таким образом, верны следующие теоремы.

**Теорема 2** (Достаточное условие устойчивости). *Пусть в точке  $(0, \rho_{max}^2)$  кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  выполнено условие (16). Пусть в точке  $(\delta_0, \rho_0^2)$  кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  выполнены условия (15), (16), (29). Пусть уравнение  $q(z) = 0$  не имеет корней на отрезке  $[-1, 1]$  для всех точек дуги кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ , соединяющей точки  $(0, \rho_{max}^2)$  и  $(\delta_0, \rho_0^2)$ . Тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  решение (10) уравнения (9) с  $\delta = \delta_0$  и  $\rho^2 = \rho_0^2$  устойчиво.*

Для формулировки теорем о неустойчивости введем следующие совокупности неравенств

$$\begin{cases} 2(1+\rho^2)^2\delta^2(1+\alpha^2) - g_0\rho^2(1+\alpha\delta)^2 > 0, \\ g_0\rho^2(1+\rho^2)^{-2} > 2, \end{cases} \quad (33)$$

и

$$\begin{cases} \alpha\delta < -1, \\ \alpha\delta > 4(1+\rho^2)^2(g_0\rho^2)^{-1} - 1. \end{cases} \quad (34)$$

**Теорема 3** (Достаточное условие неустойчивости 1). *Пусть в точке  $(\delta_0, \rho_0^2)$  кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  выполнено условие (33). Тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  решение (10) уравнения (9) с  $\delta = \delta_0$  и  $\rho^2 = \rho_0^2$  неустойчиво.*

**Теорема 4** (Достаточное условие неустойчивости 2). Пусть в точке  $(\delta_0, \rho_0^2)$  кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  выполнено условие (34). Тогда существует такая положительная последовательность  $\{\varepsilon_m\}$ , что  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$  и решение (10) уравнения (9) с  $\delta = \delta_0$  и  $\rho^2 = \rho_0^2$  неустойчиво при  $\varepsilon = \varepsilon_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

#### 4. Расположение областей устойчивости на кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$

Рассмотрим сначала случай  $\alpha = 0$ . В этом случае удастся полностью решить задачу аналитически.

**Лемма 2.** Пусть  $\alpha = 0$ . Тогда условия (15), (16), (29) в зависимости от  $\kappa$  и  $g_0$  задают от нуля до трех областей на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ .

**Доказательство.**

Посмотрим, сколько областей на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  может задавать условие (15). При  $\alpha = 0$  с учетом (6) условие (15) будет эквивалентно условию

$$\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) - 1 - 1/2g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2} < 0. \quad (35)$$

Заметим, что при  $\rho^2 = 0$  условие (35) не выполняется, а при  $\rho^2 = \rho_{max}^2$  данное условие верно. Обозначим за  $\rho_*^2$  такое значение  $\rho^2$ , при котором левая часть (35) равна нулю. Тогда найдем производную по  $\rho^2$  в точке  $\rho_*^2$ :

$$\left( \kappa \exp\left(\frac{g_0}{1 + \rho^2}\right) - 1 - \frac{g_0\rho^2}{2(1 + \rho^2)^2} \right)'_{\rho^2 = \rho_*^2} = -\frac{g_0(3 + (4 + g_0)\rho_*^2 + \rho_*^4)}{2(1 + \rho_*^2)^4}.$$

Поскольку данная производная отрицательна во всех точках, в которых левая часть (35) равна нулю, то на самом деле точка  $\rho_*^2$  единственна и лежит строго внутри отрезка  $[0, \rho_{max}^2]$ . Таким образом, условие (15) при  $\alpha = 0$  задает односвязную область на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ , определяемую условием

$$\rho_*^2 < \rho^2 < \rho_{max}^2. \quad (36)$$

Пусть  $0 < g_0 < 8$ , тогда условие (16) и, следовательно, условие (29) выполняются. Поэтому при  $\alpha = 0$  и  $0 < g_0 < 8$  условия (15), (16), (29) задают односвязную область на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ , определяемую условием (36).

Пусть  $g_0 > 8$ . Обозначим как  $\rho_L^2$  такое значение  $\rho^2$ , что  $\rho_L^2 = (g_0 - 4 - \sqrt{g_0(g_0 - 8)})/4$ , как  $\rho_R^2$  такое значение  $\rho^2$ , что  $\rho_R^2 = (g_0 - 4 + \sqrt{g_0(g_0 - 8)})/4$ . Очевидно, что

$$0 < \rho_L^2 < \rho_R^2. \quad (37)$$

При выполнении условий (16) и  $\alpha = 0$  условие (29) верно.

Рассмотрим взаимное расположение значений  $\rho_L^2$ ,  $\rho_R^2$ ,  $\rho_*^2$  и  $\rho_{max}^2$ . Учитывая условия (36) и (37), получаем, что возможны 6 различных ситуаций:

$$\begin{aligned} I & : \rho_L^2 < \rho_R^2 < \rho_*^2 < \rho_{max}^2, \\ II & : \rho_L^2 < \rho_*^2 < \rho_R^2 < \rho_{max}^2, \\ III & : \rho_L^2 < \rho_*^2 < \rho_{max}^2 < \rho_R^2, \\ IV & : \rho_*^2 < \rho_L^2 < \rho_R^2 < \rho_{max}^2, \\ V & : \rho_*^2 < \rho_L^2 < \rho_{max}^2 < \rho_R^2, \\ VI & : \rho_*^2 < \rho_{max}^2 < \rho_L^2 < \rho_R^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Области, которые задают при  $\alpha = 0$  и  $g_0 > 8$  условия (15), (16) и (29):

$$\begin{aligned}
 I &: \rho_*^2 < \rho^2 < \rho_{max}^2, \\
 II &: \rho_R^2 < \rho^2 < \rho_{max}^2, \\
 III &: \rho^2 \in \emptyset, \\
 IV &: \rho_*^2 < \rho^2 < \rho_L^2 \quad \text{или} \quad \rho_R^2 < \rho^2 < \rho_{max}^2, \\
 V &: \rho_*^2 < \rho^2 < \rho_L^2, \\
 VI &: \rho_*^2 < \rho^2 < \rho_{max}^2.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Таким образом, случай *III* показывает, что на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  условия (15), (16) и (29) одновременно ни для какой точки кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  выполняться не могут, в случаях *I*, *II* и *VI* условия (15), (16), (29) задают односвязные области на кривой, в случае *V* на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  две области, а в случае *IV* — три области на кривой. Заметим, что для случаев *IV* и *V* получаются области, не содержащие верхнюю точку кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ . Для этих областей ордината верхней точки равна  $\rho_L^2$ , а ордината нижней —  $\rho_*^2$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\rho_*^2 < \rho_L^2 < \rho_{max}^2$ . Тогда при  $\alpha = 0$  и  $\rho^2 = \rho_L^2$  система (20), (21) не имеет корней  $\beta$ , отличных от нуля.

#### Доказательство.

Рассмотрим систему уравнений (20), (21). При  $\alpha = 0$  и  $\rho^2 = \rho_L^2$  коэффициент перед  $\beta$  в (21) не равен нулю. Тогда выразим  $\beta$  из уравнения (21), подставим полученное выражение в (20), заменим  $\cos^2 \varphi$  на  $u$ . Учитывая, что  $\alpha = 0$  и  $g_0 \rho_L^2 / (1 + \rho_L^2)^2 = 2$ , получаем, что

$$\kappa \exp \left( 4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1} \right) \left[ 1 + b^2 - 2b^2 u + b^4 \kappa \exp \left( 4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1} \right) (u^2 - u) \right] = 0.$$

Рассмотрим функцию  $h(u) = 1 + b^2 - 2b^2 u + b^4 \kappa \exp \left( 4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1} \right) (u^2 - u)$ . Найдем  $h(1)$ :  $h(1) = 1 - b^2 \geq 0$ . Ситуация  $h(1) = 0$  соответствует случаю  $\beta = 0$  и возможна только при  $b = 1$ . Докажем, что вершина параболы  $h(u)$  правее единицы. Абсцисса вершины параболы  $h$  равна

$$1 + \left( 2 \exp \left( -4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1} \right) - b^2 \kappa \right) / (2b^2 \kappa).$$

Поскольку неравенство  $\rho_*^2 < \rho_L^2$  эквивалентно неравенству

$$\kappa < 2 \exp \left( -4(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})^{-1} \right),$$

а  $b \in (0, 1]$ , то абсцисса вершины параболы  $h$  находится правее единицы. Поскольку  $h(1) \geq 0$ , а график функции  $h(u)$  — парабола ветвями вверх, то функция  $h(u)$  не обращается в нуль на  $[0, 1]$ . Следовательно, у системы уравнений (20), (21) нет корней  $\beta$ , отличных от нулевого. Поскольку нулевой корень нам не подходит по определению  $\beta$ , то у системы (20), (21) нет корней в условиях леммы 3.

**Лемма 4.** Пусть  $\alpha = 0$ . Пусть в точке  $(\delta, \rho^2)$  выполнены условия (15), (16), (29). Тогда уравнение  $q(z) = 0$  не имеет корней на отрезке  $[-1, 1]$ .

**Доказательство.**

Как было доказано ранее, на концах отрезка  $[-1, 1]$  функция  $q(z)$  принимает отрицательные значения при выполнении условий (15), (16), (29).

Подставим в  $q(z)$  значение  $\alpha = 0$ , тогда выражение  $q(z)$  примет вид

$$q(z) = w(-2 + y)^2 - 2(4 - 2y + y^2) + (16 - 16y + 4y^2 - y^3 + w(-4 + 8y - 3y^2))z - 4(-1 + y)(-2 - w + y)z^2 + 4w(-1 + y)^2z^3. \quad (40)$$

Здесь, как и ранее,  $w = \kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1})$ , а  $y = g_0\rho^2(1 + \rho^2)^{-2}$ . Перепишем условия устойчивости (15), (16) в терминах  $w$  и  $y$ :

$$\begin{cases} 1 < w < 1 + y/2, \\ 0 < y < 2. \end{cases} \quad (41)$$

Заметим, что при  $\alpha = 0$  из выполнения условия (16) следует выполнение условия (29).

Докажем, что точка максимума функции  $q(z)$  лежит вне интервала  $(-1, 1)$  при выполнении условий (15), (16), (29). Имеем

$$q'(z) = -y^3 + 4y^2 - 16y + 16 - w(3y^2 - 8y + 4) - 8(1 - y)(2 - y + w)z + 12w(1 - y)^2z^2.$$

Рассмотрим случай равенства нулю коэффициента перед  $z^2$ . Данный случай в области (41) возможен только при  $y = 1$ . Подставим  $y = 1$  в выражение для  $q'(z)$ , получим, что  $q'(z) = 3 + w > 0$ . Поэтому при  $z \in [-1, 1)$  верно  $q(z) < q(1) < 0$ . Следовательно, при  $y = 1$  корней у функции  $q(z)$  на отрезке  $[-1, 1]$  нет.

Пусть коэффициент при  $z$  отличен от нуля (т.е.  $y \neq 1$ ). Найдем дискриминант  $D$  функции  $q'(z)$ :

$$D = 16(-1 + y)^2(w^2(4 - 3y)^2 + 4(-2 + y)^2 + w(-32 + 40y - 12y^2 + 3y^3)).$$

Произведение первых двух сомножителей  $D$  неотрицательно при любом значении  $y \in [0, 2]$ . Рассмотрим третий сомножитель  $D$  как квадратный трехчлен относительно  $w$ . Его дискриминант  $D_1$  равен  $y^3((1 - y)(-64 + 16y - 8y^2) - 5y^3)$ . Т.к. при  $y \in [0, 1]$  коэффициент перед  $w^2$  положительный, то в силу неположительности  $D_1$  имеем неотрицательность дискриминанта  $D$  при  $y \in [0, 1]$ . Пусть  $y \in [1, 2]$ . Построим график третьего сомножителя  $D$  в области  $y \in [1, 2]$ ,  $w \in [1, 1 + y/2]$ . Как видно из рис. 2, в данной области третий сомножитель выражения  $D$  строго положителен. Следовательно, дискриминант  $D$  квадратного трехчлена  $q'(z)$  во всей области (41) неотрицателен. Поэтому у данного квадратного трехчлена существуют корни. Точке максимума функции  $q(z)$  в силу положительности коэффициента при  $z^2$  отвечает меньший корень  $q'(z)$ .

Снова рассмотрим два случая. Пусть  $y \in (0, 1)$ , тогда меньший корень  $x_L$  функции  $q'(z)$  находится по формуле

$$x_L = \frac{2(2 + w - y) - \sqrt{w^2(4 - 3y)^2 + 4(-2 + y)^2 + w(-32 + 40y - 12y^2 + 3y^3)}}{6w(1 - y)}.$$

Рассмотрим  $y \in (0, 1/2]$ . Докажем аналитически, что  $x_L > 1$ . В силу положительности знаменателя, приходим к неравенству, которое требуется доказать:

$$4 - 2y + w(-4 + 6y) > \sqrt{w^2(4 - 3y)^2 + 4(-2 + y)^2 + w(-32 + 40y - 12y^2 + 3y^3)}. \quad (42)$$

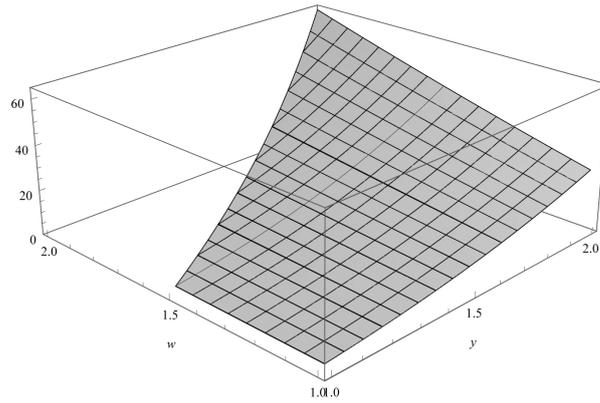


Рис. 2. График третьего множителя  $D$  в области  $(y, w) \in [1, 2] \times [1, 1 + y/2]$

Левая часть (42) при каждом фиксированном  $y \in (0, 1/2]$  является убывающей функцией от  $w$ , ее минимум в силу условия (15) положителен и равен  $y(2 + 3y)$ . Поскольку обе части неравенства (42) положительны, возведем неравенство в квадрат. После приведения подобных слагаемых получаем

$$3wy(8 - 4y - y^2 + w(-8 + 9y)) > 0.$$

Легко видеть, что при  $y \in (0, 1/2]$  и  $w \in [1, 1 + y/2]$  данное неравенство выполняется. Следовательно, в данной области верно неравенство  $x_L > 1$ .

Пусть теперь  $y \in [1/2, 1)$  и  $w \in [1, 1 + y/2]$ . Тогда из графика  $x_L$  в данной области (см. рис. 3) видно, что  $x_L > 1$ . Тем самым показано, что при  $y \in (0, 1)$

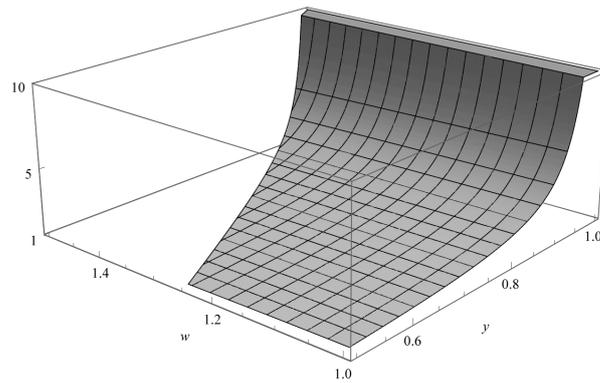


Рис. 3. График  $x_L$  в области  $(y, w) \in [1/2, 1) \times [1, 1 + y/2]$

и выполнении условий устойчивости (15), (16) локальный максимум функции  $q(z)$  лежит вне отрезка  $[-1, 1]$ .

Пусть теперь  $y \in (1, 2)$ . Тогда  $x_L$  находится по формуле:

$$x_L = \frac{2(2 + w - y) + \sqrt{w^2(4 - 3y)^2 + 4(-2 + y)^2 + w(-32 + 40y - 12y^2 + 3y^3)}}{6w(1 - y)}.$$

Докажем аналитически, что  $x_L < -1$  при  $y \in (3/2, 2)$  и  $w \in (1, 1 + y/2)$ . После несложных преобразований данное неравенство будет иметь вид

$$\sqrt{w^2(4 - 3y)^2 + 4(-2 + y)^2 + w(-32 + 40y - 12y^2 + 3y^3)} > 2(-2 + y + w(-4 + 3y)). \quad (43)$$

Очевидно, что при  $y \in (3/2, 2)$  и выполнении условия устойчивости (15) правая часть неравенства (43) будет положительной. Поэтому возведем неравенство (43) в квадрат. После приведения подобных слагаемых получим, что требуется доказать неравенство

$$-3w(32 + w(4 - 3y)^2 - 40y + 12y^2 - y^3) > 0.$$

Для этого необходимо доказать, что третий множитель отрицателен при  $y \in (3/2, 2)$  и  $w \in (1, 1 + y/2)$ . При каждом фиксированном  $y$  из выбранного интервала данное выражение является возрастающей функцией по  $w$ . Максимум данной функции равен  $48 - 56y + 9y^2 + (7y^3)/2$ . Легко убедиться, что на интервале  $(3/2, 2)$  данное выражение отрицательно. Поэтому при  $y \in (3/2, 2)$  и  $w \in (1, y/2)$  локальный максимум функции  $q(z)$  лежит вне отрезка  $[-1, 1]$ .

Как видно из рисунка 4, в области  $(y, w) \in (1, 3/2) \times [1, 1 + y/2]$  верно неравенство  $x_L < -1$ . Поэтому и при  $y \in (1, 3/2)$  и  $w \in [1, 1 + y/2]$  локальный максимум функции

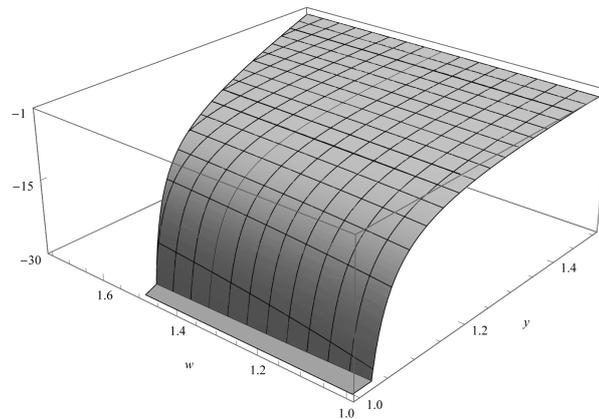


Рис. 4. График  $x_L$  в области  $(y, w) \in (1, 3/2) \times [1, 1 + y/2]$

$q(z)$  вне отрезка  $[-1, 1]$ .

Поскольку при выполнении условий (15), (16),  $q(-1) < 0$ ,  $q(1) < 0$  в области (41) локальный максимум у функции  $q(z)$  вне отрезка  $[-1, 1]$ , то функция  $q(z)$  отрицательна на всем отрезке  $[-1, 1]$ . Следовательно, уравнение  $q(z) = 0$  не имеет корней на отрезке  $[-1, 1]$  в области (41) в условиях леммы.

Из лемм 2, 3 и 4 следует

**Лемма 5.** Пусть  $\alpha = 0$ ,  $\rho_*^2 < \rho_L^2 < \rho_{max}^2$ . Тогда в каждой точке дуг кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  с  $\rho^2 \in (\rho_*^2, \rho_L^2)$  система (20), (21) не имеет действительных ненулевых корней  $\beta$ .

Для формулировки следующей леммы введем систему неравенств

$$\begin{aligned}
I &: 2 \exp(g_+) < \kappa < 1, \\
II &: \max \{ \exp(g_+), 2 \exp(g_-) \} < \kappa < 2 \exp(g_+), \\
III &: 2 \exp(g_-) < \kappa < \exp(g_+), \\
IV &: \exp(g_+) < \kappa < 2 \exp(g_-), \\
V &: \exp(g_-) < \kappa < \min \{ 2 \exp(g_-), \exp(g_+) \}, \\
VI &: \exp(-g_0) < \kappa < \exp(g_-).
\end{aligned} \tag{44}$$

Здесь  $g_- = -4/(1 - \sqrt{1 - 8/g_0})$ ,  $g_+ = -4/(1 + \sqrt{1 - 8/g_0})$ .

**Лемма 6.** Пусть  $g_0 > 8$ . Тогда выполнение неравенств под номером  $i$  ( $i = \overline{I, VI}$ ) в формуле (38) эквивалентно выполнению неравенств под тем же номером в формуле (44).

### Доказательство.

Заметим, что для существования решения необходимо выполнение неравенства  $\kappa > \exp(-g_0)$ , а для диссипативности лазерной системы необходимо выполнение неравенства  $\kappa < 1$ .

Стоит отметить, что при любом  $g_0 > 8$  выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
2 \exp(g_+) &< 1, \\
\max \{ \exp(g_+), 2 \exp(g_-) \} &< 2 \exp(g_+), \\
\exp(g_-) &< \min \{ 2 \exp(g_-), \exp(g_+) \}, \\
\exp(-g_0) &< \exp(g_-).
\end{aligned}$$

Уравнение  $2 \exp(g_-) = \exp(g_+)$  имеет единственный корень  $g_0$  на  $[8, +\infty)$ . Поэтому неравенства (44) действительно задают шесть связанных областей.

Вспомним, что  $\rho_*^2 < \rho_{max}^2$  и  $\rho_L^2 < \rho_R^2$ . Перепишем неравенства на  $\rho_*^2$ ,  $\rho_{max}^2$ ,  $\rho_L^2$  и  $\rho_R^2$  в терминах  $\kappa$  и  $g_0$ .

Легко убедиться, что следующие неравенства эквивалентны:  $\rho_R^2 < \rho_*^2$ ;

$$(\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) - 1 - 1/2 g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2}) \Big|_{\rho^2 = \rho_R^2} > 0.$$

Последнее неравенство выполняется тогда и только тогда, когда  $\kappa > 2 \exp(g_+)$ .

Аналогично, необходимым и достаточным условием для выполнения неравенства  $\rho_L^2 < \rho_*^2$  является выполнение неравенства

$$(\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) - 1 - 1/2 g_0 \rho^2 (1 + \rho^2)^{-2}) \Big|_{\rho^2 = \rho_L^2} > 0.$$

Данное неравенство эквивалентно неравенству  $\kappa > 2 \exp(g_-)$ .

Несложно доказать, что следующие неравенства эквивалентны:  $\rho_R^2 < \rho_{max}^2$ ;

$$\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) \Big|_{\rho^2 = \rho_R^2} - 1 > 0.$$

Последнее неравенство верно тогда и только тогда, когда  $\kappa > \exp(g_+)$ .

Аналогично, неравенство  $\rho_L^2 < \rho_{max}^2$  эквивалентно неравенству

$$\kappa \exp(g_0(1 + \rho^2)^{-1}) \Big|_{\rho^2 = \rho_L^2} - 1 > 0.$$

Данное неравенство выполняется, если и только если  $\kappa > \exp(g_-)$ .

После того, как для каждого неравенства в терминах  $\rho^2$  найдено соответствующее неравенство в терминах  $\kappa$  и  $g_0$ , нетрудно убедиться, что лемма 6 верна.

Из лемм 2–6 и теоремы 2 следует теорема 5.

**Теорема 5.** Пусть  $0 < g_0 < 8$  и  $\exp(-g_0) < \kappa < 1$ . Тогда на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  существует единственная область устойчивости. Точка  $(\delta_0, \rho_0^2)$  принадлежит этой области устойчивости, если и только если  $\rho_*^2 < \rho_0^2 < \rho_{max}^2$ . Пусть  $g_0 > 8$ . Тогда решение (10) уравнения (9) с  $\delta = \delta_0$  и  $\rho^2 = \rho_0^2$ , где  $(\delta_0, \rho_0^2)$  принадлежит  $\Gamma(\kappa, g_0)$  и  $(g_0, \kappa)$  принадлежит  $i$ -й области в (44), устойчиво, если и только если  $\rho_0^2$  удовлетворяет  $i$ -м условиям в формуле (39).

Иллюстрацией к теореме 5 служат рисунки 5, 6.

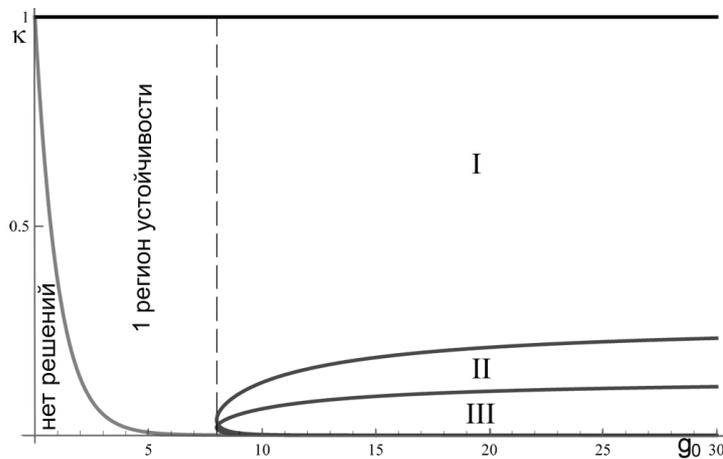


Рис. 5. Область устойчивости при  $0 < g_0 < 8$  и области I – VI при  $g_0 > 8$  в области параметров  $(g_0, \kappa)$

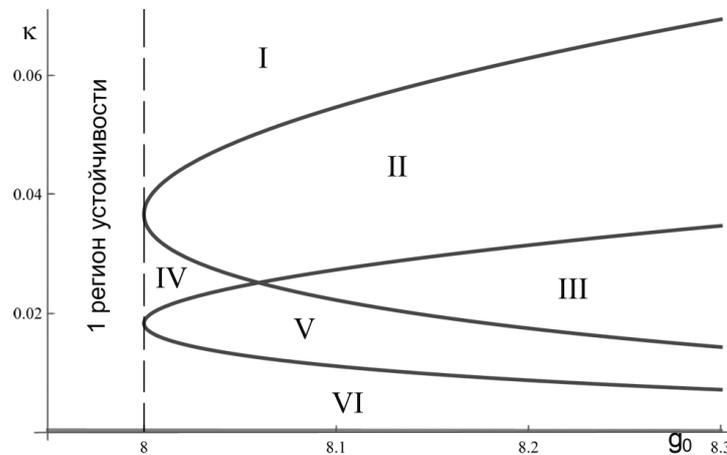


Рис. 6. Область устойчивости при  $0 < g_0 < 8$  и области I – VI при  $g_0 > 8$  в области параметров  $(g_0, \kappa)$ . Увеличенный фрагмент рисунка 5

Приведем примеры кривых  $\Gamma(\kappa, g_0)$  с различным числом областей устойчивости (см. рис. 7). На рисунке 7 черным изображены области устойчивости, а серым — области неустойчивости.

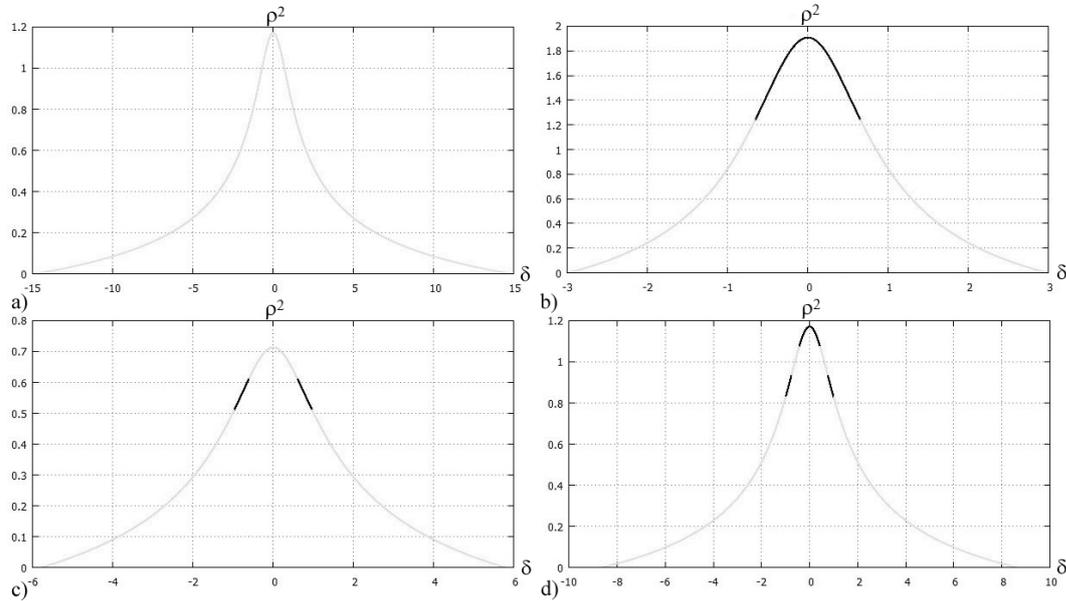


Рис. 7. Области устойчивости и неустойчивости на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  при  $\alpha = 0$ . Значения параметров: а)  $\kappa = 0.01, g_0 = 10$ ; б)  $\kappa = 0.3, g_0 = 3.5$ ; в)  $\kappa = 0.007, g_0 = 8.5$ ; д)  $\kappa = 0.025, g_0 = 8.01$

Теперь перейдем к случаю  $\alpha \neq 0$ .

Что касается неравенства (15), то оно может задавать как одну область, так и большее количество областей. В достаточно небольшой окрестности точек  $(\pm\sqrt{\kappa e^{g_0}} - 1, 0)$  (размер окрестности зависит от  $\kappa, \alpha$  и  $g_0$ ) на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  данное неравенство неверно, а в окрестности точки  $(0, \rho_{max}^2)$  оно верно. В „средних“ же точках кривой оно может быть как верным, так и неверным (см. рис. 8).

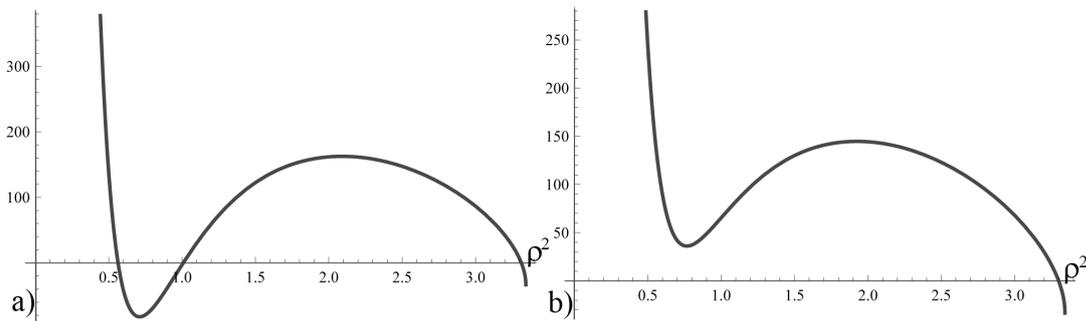


Рис. 8. Величина выражения (15). Значения параметров: а)  $\alpha = -3.7, \kappa = 0.1, g_0 = 10$ , б)  $\alpha = -3.1, \kappa = 0.1, g_0 = 10$

Неравенство (16) от  $\alpha$  не зависит и, как и прежде, может задавать одну, две или три области на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ .

Неравенство (29) задает одну область на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ .

Что касается расположения корней уравнения  $q(z) = 0$ , то возможны различные варианты. Типичная ситуация: неравенства (15), (16), (29) выполняются и уравнение  $q(z) = 0$  не имеет корней на отрезке  $[-1, 1]$ . Так же возможна ситуация, когда неравенства (15), (16), (29) выполняются, а уравнение  $q(z) = 0$  имеет корни на отрезке  $[-1, 1]$  (например,  $\kappa = 0.056738$ ,  $\alpha = 3$ ,  $g_0 = 5$ ,  $\delta = 0.792275$ ,  $\rho^2 = 0.489656$ ). Если же какое-то из неравенств из верного становится неверным, или, наоборот, из неверного становится верным, то уравнение  $q(z) = 0$  обязательно в этой точке имеет корни на отрезке  $[-1, 1]$ .

Таким образом, относительно расположения областей устойчивости на кривых  $\Gamma(\kappa, g_0)$  при  $\alpha \neq 0$  можно сделать следующие выводы:

1. Возможна ситуация, когда результат об областях устойчивости для  $\alpha = 0$  совпадает с результатом для ненулевого  $\alpha$ . Пример:  $\kappa = 0.04$ ,  $g_0 = 8.05$ ,  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 0.1$

2. Может возникать ситуация, когда решения с одинаковыми  $\delta$  и  $\rho^2$  (на одной и той же кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ ) при разных  $\alpha$  имеют различные свойства устойчивости: устойчивому при  $\alpha = 0$  решению соответствует неустойчивое при ненулевом  $\alpha$ , а неустойчивому при  $\alpha = 0$  решению соответствует устойчивое при ненулевом  $\alpha$ . Пример изображен на рисунке 9. На приведенном примере устойчивость теряет за счет нарушения условия (15) (которое для данных параметров задает одну область на кривой  $\Gamma(0.3, 3.5)$ ).

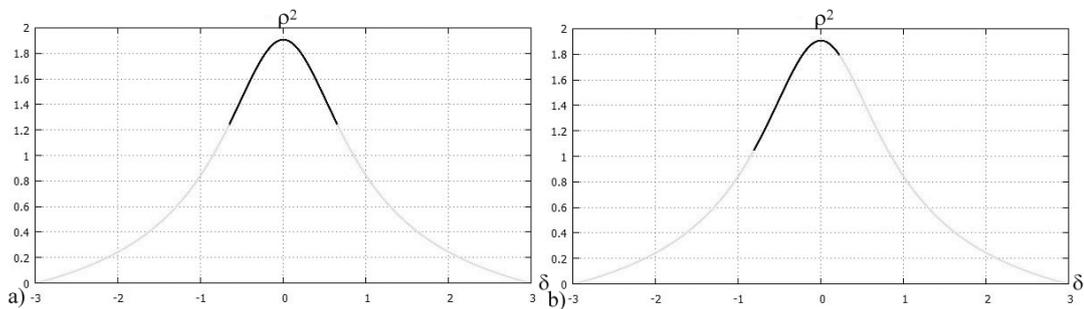


Рис. 9. Области устойчивости и неустойчивости на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$ . Значения параметров: а)  $\kappa = 0.3$ ,  $g_0 = 3.5$ ,  $\alpha = 0$ ; б)  $\kappa = 0.3$ ,  $g_0 = 3.5$ ,  $\alpha = -1.5$

3. Полностью устойчивой кривая  $\Gamma(\kappa, g_0)$  быть не может, поскольку в окрестности точек  $(\pm\sqrt{\kappa e^{g_0}} - 1, 0)$  не выполняется условие (15).

4. Устойчивость решения в точке  $(0, \rho_{max}^2)$  не зависит от значения  $\alpha$ . Таким образом, если в верхней точке условие (16) выполнено, то при любых значениях параметра  $\alpha$  кривая  $\Gamma(\kappa, g_0)$  полностью неустойчивой не будет.

5. Кривая  $\Gamma(\kappa, g_0)$  может быть полностью неустойчивой. Например, при  $\alpha = 0.1$  в каждой точке кривой  $\Gamma(0.01, 10)$  нарушается хотя бы одно из условий (15), (16).

6. Из-за условия (29) для каждого  $\delta_0 \neq 0$  существует такое  $\alpha_0 = \alpha_0(\delta_0)$ , что решение (10) уравнения (9) с  $\delta = \delta_0$  будет неустойчивым при любом  $\alpha$  таком, что  $|\alpha| > \alpha_0$  на некоторой последовательности  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ .

## 5. Выводы

1. Доказано, что существует однопараметрическое семейство на плоскости  $(\delta, \rho^2)$ , зависящее только от параметров  $\kappa$  и  $g_0$  (и не зависящее от значения параметра  $\alpha$ ) в виде „колокола“, каждой точке которого соответствует счетное число непрерывных волн. Найдена асимптотика этих решений при малых значениях параметра  $\varepsilon$ . Показано, что решения представляются в виде сходящихся рядов по степеням  $\varepsilon$  и коэффициенты рядов зависят от разрывной функции  $\theta(\delta, \Delta, \varepsilon)$ .

2. Найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости непрерывных волн.

3. Доказано, что при любых значениях параметров вся кривая  $\Gamma(\kappa, g_0)$  полностью устойчивой быть не может, найдены примеры полностью неустойчивых кривых  $\Gamma(\kappa, g_0)$ .

4. В случае  $\alpha = 0$  показано, что областей устойчивости на кривой  $\Gamma(\kappa, g_0)$  может быть от нуля до трех включительно. Аналитически найдены границы подобластей в области параметров  $(g_0, \kappa)$ , в каждой из которых свое число областей устойчивости. Более того, в каждой из данных подобластей найдены координаты  $(\delta, \rho^2)$  границ областей устойчивости.

5. Доказано, что любое решение с  $\delta \neq 0$  будет неустойчивым на некоторой положительной последовательности  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  при достаточно больших значениях  $|\alpha|$ .

## Список литературы

1. *Slepneva S., Kelleher B., O'Shaughnessy B., Hegarty S.P., Vladimirov A.G., and Huyet G.* Dynamics of Fourier domain mode-locked lasers // Opt. Express. 2013. V. 21. P. 19240–19251.
2. *Huber R., Wojtkowski M., and Fujimoto J.G.* Fourier Domain Mode Locking (FDML): A new laser operating regime and applications for optical coherence tomography // Opt. Express. 2006. V. 14. P. 3225–3237.
3. *Vladimirov A.G. and Turaev D.* Model for passive mode-locking in semiconductor lasers // Phys. Rev A. 2005. V. 72. P. 033808.
4. *Vladimirov A., Turaev D., and Kozyreff G.* Delay differential equations for mode-locked semiconductor lasers // Opt. Lett. 2004. V. 29. P. 1221–1223.
5. *Vladimirov A. and Turaev D.* A new model for a mode-locked semiconductor laser // Radiophysics and Quantum Electronics. 2004. V. 47. P. 769–776.
6. *Kashchenko A.* Stability of CW Solutions of Fourier Domain Mode Locked Laser // International Student Conference “Science and Progress”. 2013. P. 29.
7. *Кащенко А.А.* Устойчивость простейших периодических решений в уравнении Стюарта–Ландау с большим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 3. С. 136–141 (English transl.: *Kashchenko A.A.* Stability of the Simplest Periodic Solutions in the Stuart-Landau Equation with Large Delay // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, No. 7. P. 566–570.)

8. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. [*Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy. M.: Nauka, 1973 (In Russian)*].

## Stability of CW Solutions of the FDML Laser

Kashchenko A. A.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University, Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

**Keywords:** FDML laser, small parameter, large delay, stability, continuous wave

The problem of existence and stability of continuous wave (CW) solutions  $R \exp(i\Lambda t)$  of a Fourier Domain Mode Locking laser model is studied. This model consists of two differential equations with delay. The delay is sufficiently large. It is necessary for the existence of CW solutions of this model that parameters determining the "main part" of solution must lie on a certain curve  $(\Gamma(\kappa, g_0))$ . Sufficient conditions of stability of CW solutions for all sufficiently large values of delay are found. The location of stability regions on  $\Gamma(\kappa, g_0)$  is studied. In the case of zero linewidth enhancement factor  $\alpha$  for all values of parameters of the linear attenuation factor per cavity round trip  $\kappa$  and the linear unsaturated gain parameter  $g_0$  the number of stability regions and their boundaries on  $\Gamma(\kappa, g_0)$  are found analytically. The comparison of location of stability regions on  $\Gamma(\kappa, g_0)$  in the case of zero  $\alpha$  and nonzero  $\alpha$  is made.

### Сведения об авторе:

**Кащенко Александра Андреевна,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
аспирант